Darstellung elektromagnetischer Felder mittels spezieller Potentialfunktionen

—

Theorie zur Erzeugung aller raumladungs- und stromfreien Felder durch zweimaliges Lösen der skalaren homogenen Wellengleichung

Motivation

Literatur: Algorithmen zur Konstruktion von Lösungen einer Dgl. (eines Dgls.)

Bsp.: 1.

$$\left.\begin{aligned} \Box \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \quad (W)$$

Lösung: $\Box f_1 \equiv \Box f_2 \equiv \emptyset$

$$\vec{A} = \operatorname{rot}(f_1 \vec{r}) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f_2 \vec{r})$$

2. Lösung der MAXWELLschen mit $\rho = \emptyset \wedge \vec{G} = \vec{0}$ gesucht

Lösung: man löse (W) und setze

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{alle anderen Felder}$$

3. $\ddot{x}(t) + x(t) = \emptyset$

Lösung: $x(t) = \sin t$

Vollständigkeit ?

Gliederung

(1) Felderzeugung durch elektrodynamische Potentiale.

Ergebnis: Die Menge der raumladungs- und stromfreien Lösungen des Systems der rein MAXWELLschen Gln. nebst der Materialgleichungen für $\vec{B}$ und $\vec{D}$ (ε, μ skalare Konstanten) (M) ist durch die Lösungsmenge des Systems

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= 0 \\ \Box \vec{A} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \quad (W)$$

für das BUCHHOLZ-geeichte eldyn. Vektorpotential gegeben (verschwindendes Skalarpotential).

(2) Die BUCHHOLZschen Potentialfunktionen.

Ergebnis: Zu jedem Feld $\vec{A}$ und einem wirbelfreien EV eines OK $\vec{e}$ existieren drei skalare Felder u_1, u_2 und u_3, so daß gilt

$$\operatorname{rot}(u_1 \vec{e}) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(u_2 \vec{e}) + \operatorname{grad} u_3 = \vec{A}.$$

Ist $\vec{A}$ das BUCHHOLZ-geeichte Potential einer Lösung des Systems (M), so heißen die u_i BUCHHOLZsche Potentialfunktionen bzgl. $\vec{e}$ zur Lösung von (M).

③ Berechnung aller quellenfreien Lösungen der homogenen vektoriellen Wellengleichung mit Hilfe der BUCHHOLZschen Funktionen.

Ergebnis: Die Menge der Lösungen des Systems (W) ist vermöge $\vec{A} = \mathrm{rot}(u_1 \vec{a}) + \mathrm{rotrot}(u_2 \vec{a})$ durch die Lösungsmenge des Systems

$$\Box u_1 = \emptyset \quad \wedge \quad \Box u_2 = \emptyset$$

gegeben. Bezugsfeld: $\vec{a} = \vec{c}$ oder $\vec{a} = \vec{r}$.

④ Physikalische Bedeutung der BUCHHOLZschen Funktionen.

Ergebnis: Es ist $\vec{A}_1 = \mathrm{rot}(u_1 \vec{a})$ ein Potential des raumladungs- & stromfreien TE-Anteils bzgl. $\vec{a}$ der durch $\vec{A}$ gegebenen Lösung von (M).

Es ist $\vec{A}_2 = \mathrm{rotrot}(u_2 \vec{a})$ ein Potential des raumladungs- & stromfreien TM-Anteils bzgl. $\vec{a}$ der durch $\vec{A}$ gegebenen Lösung von (M).

(1) Die elektrodynamischen Potentiale

1.1 Die MAXWELLschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{G} &= \vec{0} \\
\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{E} &= \vec{0} \\
\operatorname{div}\vec{B} &= 0 \\
\operatorname{div}\vec{D} - \varrho &= 0 \\
\varepsilon\vec{E} - \vec{D} &= \vec{0} \\
\vec{B} - \mu\vec{H} &= \vec{0}
\end{aligned}\right\} \quad (M)$$

- ε, μ Matrizen Typ $(3,3)$
- lineares System $\Rightarrow$ Vektor $\vec{V}$
- $\vec{V}$ durch $\vec{B}$ und $\vec{E}$ eindeut. bestimmt (sechs skalare Fktn.)

1.2 Potentialdefinitionen

Sinn: weniger beschreibende Skalarfunktionen

$\vec{A}$: $\quad \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$ $\qquad$ wegen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

φ: $\quad -\operatorname{grad}\varphi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ $\qquad$ wegen $\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$

- Abbildung $\vec{V} \to \vec{A}, \varphi$ (mehrdeutig)

1.3 Felderzeugung

(eindeutige) Umkehrabbildung $\vec{A}, \varphi \to \vec{V}$ lautet

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \qquad (\varepsilon, \mu \text{ skalare Konstanten})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\vec{D} = -\varepsilon\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\right)$$

$$\vec{G} = -\frac{1}{\mu}\left[\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]$$

$$\varsigma = -\varepsilon\left(\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}\right)$$

- Umfang des Definitionsbereiches ?

Antwort: $\vec{A}, \varphi$ können nach Belieben

gewählt werden!

- geg. Komp. von $\vec{V}$

1.4. Mehrdeutigkeit der Abbildung $\vec{V} \to \vec{A}, \varphi$

gegeben: $\vec{A}_0, \varphi_0$ und $\vec{A}, \varphi$ mit ident. $\vec{V}$

a)
$$\left.\begin{array}{l} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{A} - \vec{A}_0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} f$$

b)
$$-\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi \quad = \quad \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \operatorname{grad} \varphi$$

$$-\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi_0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}\left(\varphi - \varphi_0 + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} + \xi(t)$$

Σ)
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} f \\[2ex] \varphi = \varphi_0 - \dfrac{\partial f}{\partial t} + \xi(t) \end{array}}$$

f, ξ beliebig wählbar

1.5 Potentialeichung

- zusätzliche Forderung wegen Eindeutigkeit

neue Abbildungsvorschrift $\vec{V} \to \vec{A}, \varphi$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{B} \\ -\operatorname{grad} \varphi &= \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \text{alt}$$

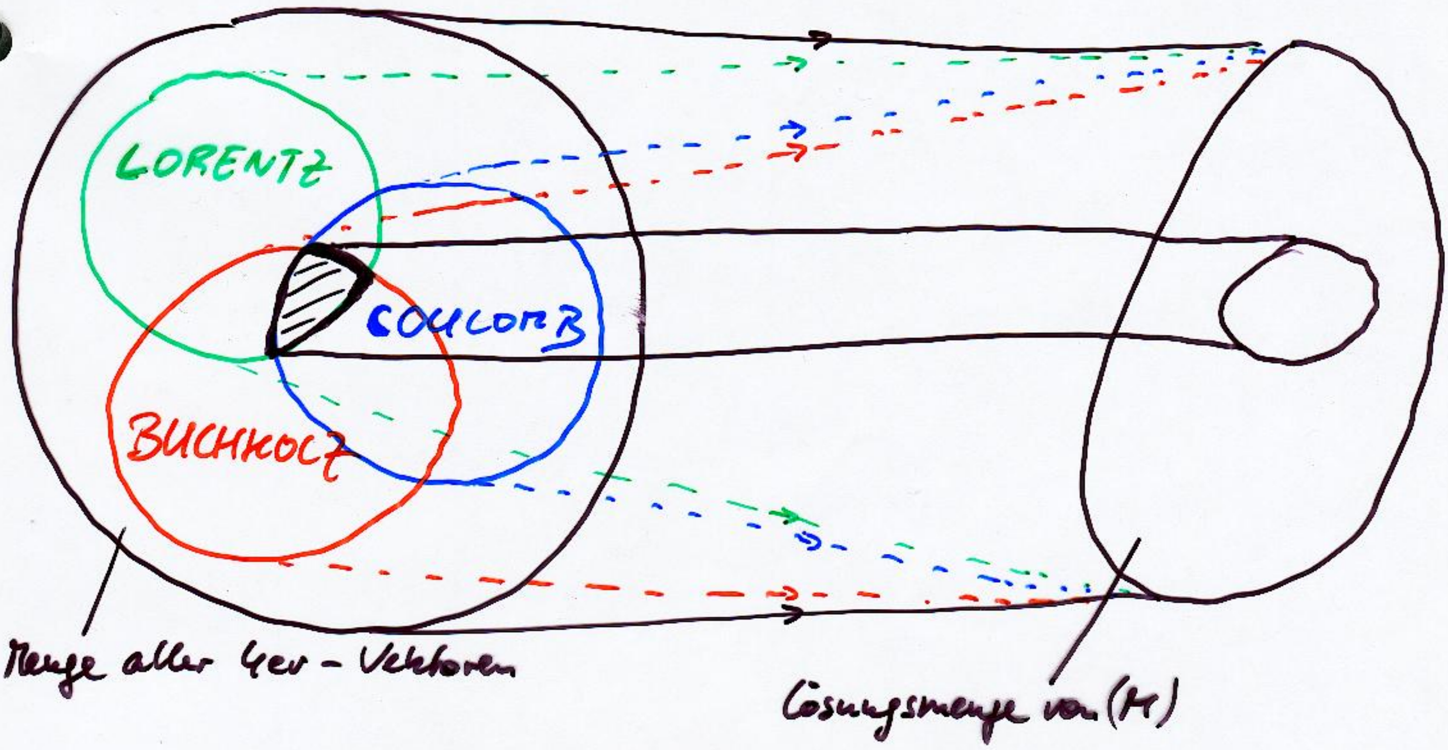
$$\Phi(\vec{A}, \varphi) = 0 \qquad \text{zusätzlich}$$

übliche Eichungen sind:

LORENTZsche $\quad \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

COULOMBsche $\quad \operatorname{div} \vec{A} = 0$

BUCHHOLZsche $\quad \varphi = 0$



1.6 Potentiale raumladungsfreier Felder

Behauptung: Die Menge der raumladungsfreien Lösungen von (M) kann aus der Menge der quellenfreien Vektorpotentiale allein erzeugt werden.

oder

$$\varrho = \emptyset \Rightarrow \text{Eichung } \operatorname{div}\vec{A} = \varphi = \emptyset \text{ zulässig}$$

Beweis: gg.: COULOMB-geeichtes Paar $\vec{A}_0, \varphi_0 \to \vec{V}_{\varrho=\emptyset}$

d.h. $\operatorname{div}\vec{A}_0 = \emptyset$ (COULOMB)

$\Delta\varphi_0 = \emptyset$ (COULOMB & $\varrho = \emptyset$)

ges.: $\vec{A}, \varphi$ mit $\operatorname{div}\vec{A} = \emptyset \wedge \varphi = \emptyset$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} f$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} + \xi(t)$$

$$\varphi = \emptyset \Leftarrow \xi = \emptyset \wedge f = \int_{t_0}^{t} \varphi_0 \, d\tau$$

$$\Rightarrow \Delta f = \Delta\int_{t_0}^{t} \varphi_0 \, d\tau = \int_{t_0}^{t} \Delta\varphi_0 \, d\tau = \emptyset$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\vec{A}_0 + \Delta f = \emptyset$$

q.e.d.

1.7 Potentiale für $\rho = 0 \wedge \vec{G} = \vec{0}$

- betr. System $\vec{A}, \varphi \to \vec{V}$ für $\operatorname{div} \vec{A} = \varphi = 0$

a) $\vec{G} = \vec{0} \implies \Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$

b) $\Box \vec{A} = \vec{0} \implies \vec{G} = \vec{0}$

d.h. die Lösungsmenge des Systems

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= 0 \end{aligned}} \qquad (W)$$

ist „groß genug", um <u>alle</u> raumladungs- und stromlosen Felder zu erzeugen.

② Die BUCHHOLZschen Potentialfunktionen

$\vec{A}, \vec{e}$ bel. gegeben $\qquad u_1, u_2, u_3$ gesucht

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\left[u_1\vec{e} + \operatorname{rot}(u_2\vec{e})\right] + \operatorname{grad} u_3$$

2.1 Übergeordnete Potentiale $\vec{U}, \varphi$

Ansatz: $\quad \vec{A} = \operatorname{rot}\vec{U} + \operatorname{grad}\varphi$

φ: $\quad \Delta\varphi = \operatorname{div}\vec{A} \qquad \varphi$ ex.

$\vec{U}$: $\quad \operatorname{rot}\vec{U} = \vec{A} - \operatorname{grad}\varphi \qquad \vec{U}$ ex.

2.2 BUCHHOLZsche Funktionen

$u_3 = \varphi \qquad\qquad u_1\vec{e} + \operatorname{rot}(u_2\vec{e}) = \vec{U}$

$u_1 = \vec{U}\cdot\vec{e} \qquad\qquad \vec{e}\cdot\operatorname{rot}(f\vec{e}) = \emptyset \quad , \vec{e}$ bel. EV

$\operatorname{rot}(u_2\vec{e}) = \vec{U} - \vec{e}(\vec{U}\cdot\vec{e})$

u_2 ex. $\iff$ 1. $\operatorname{div}\left[\vec{U} - \vec{e}(\vec{U}\cdot\vec{e})\right] = \emptyset \qquad 1$

2. $\left[\vec{U} - \vec{e}(\vec{U}\cdot\vec{e})\right]\cdot\vec{e} = \emptyset \qquad$ stets erfüllt

Ex. ein $\vec{U}$ von $\vec{A}$ mit $\operatorname{div}\left[\vec{U} - \vec{e}(\vec{U}\cdot\vec{e})\right] = \emptyset$?

$\vec{U}_0$ bel. $\quad , \quad \vec{U} = \vec{U}_0 + \operatorname{grad} f$

$$\operatorname{div}\left[\vec{U} - \vec{e}(\vec{U}\cdot\vec{e})\right] = \emptyset \iff$$

$$\operatorname{div}\left[\operatorname{grad} f - \vec{e}(\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f)\right] = 2\pi\mu = -\operatorname{div}\left[\vec{U}_0 - \vec{e}(\vec{U}_0\cdot\vec{e})\right]$$

ist bei gg. $\vec{U}_0$ für f lösbar

2.3 flächenartige POISSONsche Gleichung

$$\operatorname{div}\left[\operatorname{grad} f - (\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f)\,\vec{e}\right] = 2\pi\mu$$ keine Lit. auffindbar

$\vec{e}=\vec{e}_w$: $$\frac{1}{g_u g_v g_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g_v g_w}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g_u g_w}{g_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] = 2\pi\mu$$

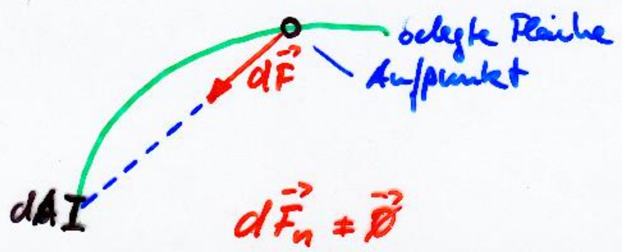
$\operatorname{rot}\vec{e}_w = \vec{0} \iff \frac{\partial g_w}{\partial u} \equiv \frac{\partial g_w}{\partial v} \equiv 0$ Bsp: $\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\varrho$

$$\frac{1}{g_u g_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] = 2\pi\mu \qquad (*)$$

- keine Diff. nach w, Annahme $w = w_0$ (Koordinatenfläche)
- $\vec{e}_w = \vec{e}_z$ $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2\pi\mu(x,y)$$
  ebenes logarithm. Potential
- $\vec{e}_w = \vec{e}_\varrho$ $\varrho_0 = R$ $$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f(\varphi,z)}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f(\varphi,z)}{\partial z^2} = 2\pi\mu(\varphi,z)$$
  Trafo $\left\{\begin{matrix} x = R\varphi \\ y = z\end{matrix}\right\}$, ebenes logarithm. Potential
- $\vec{e}_w = \vec{e}_r$ $r_0 = R$ $$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{R^2\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}+\frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = 2\pi\mu(\vartheta,\varphi)$$
  stereograph. Projektion $\left\{\begin{matrix} \rho = \dfrac{2R\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} \\ \varphi = \varphi\end{matrix}\right\}$, ebenes log. Potential
- allgemein
  - konforme Abbildung in die Ebene
  - ebenes logarithmisches Potential
  - Rücktransformation

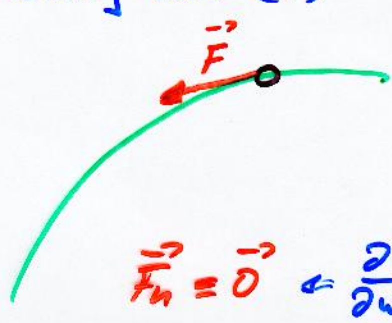
Lösung von (*) aus der Potentialtheorie bekannt?

Pot. der einfachen Schicht



$d\vec{F}_n \neq \vec{0}$

Lösung von (*)



$\vec{F}_n = \vec{0} \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial w} = 0$

③ Lösung von $\Box\vec{A} = \vec{0} \wedge \operatorname{div}\vec{A} = 0$ mittels U_i:

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \qquad (W)$$

Lösungswege:

a) Zerlegung in Komponenten

- kartesisch — Probl. $\operatorname{div}\vec{A} = 0$
- Kugel — Probl. $\operatorname{div}\vec{A} = 0 \wedge \vec{\Delta}$

b) übergeordnetes Potential $\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{A}$

$$\operatorname{rot}\left(\Delta\vec{U} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\right) = \vec{0}$$

- $\operatorname{div}\vec{U} = 0$ — sinnlos
- $U_z = 0$ — möglich
- $U_r = 0$ — möglich
- $\operatorname{div}[\vec{a}\times(\vec{U}\times\vec{a})] = 0$ — elegant & praktisch

Verwendung der BUCHHOLZschen Funktionen

$$\vec{A} = \operatorname{rot}(U_1\vec{a}) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(U_2\vec{a})$$

$$\Box\vec{A} = \operatorname{rot}\left[\Box(U_1\vec{a}) + \operatorname{rot}\Box(U_2\vec{a})\right] = \vec{0}$$

wegen $\Box\operatorname{rot} = \operatorname{rot}\Box$

$\vec{a} = \vec{c}$:

$$\operatorname{rot}\left[\vec{c}\,\Box U_1 + \operatorname{rot}(\vec{c}\,\Box U_2)\right] = \vec{0}$$

wegen $\Delta(f\vec{c}) = \vec{c}\,\Delta f$

$\vec{a} = \vec{r}$:

$$\operatorname{rot}\left[\vec{r}\,\Box U_1 + \operatorname{rot}(\vec{r}\,\Box U_2)\right] = \vec{0} \qquad (*)$$

wegen $\Delta(f\vec{r}) = 2\operatorname{grad} f + \vec{r}\,\Delta f$

- U_1, U_2 von ~~[illegible]~~ $\vec{V}$ ($\varrho = 0$, $\vec{G} = \vec{0}$) genügt $(*)$
- U_1, U_2 von $(*)$ erzeugt $\vec{V}$ mit $\varrho = 0 \wedge \vec{G} = \vec{0}$
- Problem: $\Box U_i = 0$

$u_1, u_2 \to \vec{A}$: Zwei Lösungen u_1, u_2 der Gleichung

$$\Box u = 0$$

erzeugen vermöge

$$\vec{A} = \mathrm{rot}(u_1 \vec{r}) + \mathrm{rotrot}(u_2 \vec{r})$$

eine Lösung von (W).

$\boxed{\vec{A} \to u_1, u_2}$: Zu jeder Lösung $\vec{A}$ von (W) existieren zwei Funktionen u_1, u_2 mit der Eigenschaft

$$\left.\begin{aligned} \Box u_1 &= 0 \\ \Box u_2 &= 0 \\ \mathrm{rot}(u_1\vec{r}) + \mathrm{rotrot}(u_2\vec{r}) &= \vec{A} \end{aligned}\right\}(*)$$

Idee: 1. Schritt Sei $\vec{u}_0$ Pot. von $\vec{A}$ mit $\mathrm{div}\left[\vec{r}\times(\vec{u}_0\times\vec{r})\right] = 0$

z.z.: Ex. $\vec{u}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{div}\left[\vec{r}\times(\vec{u}\times\vec{r})\right] = 0 \quad \wedge$$

$$\Box\vec{u} - 2\,\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{r^2}\right) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \Box u_1 = 0 \quad \wedge \quad \Box u_2 = g(r,t)$, denn

$$\vec{u} = u_1\vec{r} + \mathrm{rot}(u_2\vec{r}) \qquad \vec{r}\cdot\mathrm{rot}(f\vec{r}) = 0$$

$$u_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{r^2}$$

$$\Box\vec{u} = 2\,\mathrm{grad}\,u_1 + \vec{r}\,\Box u_1 + \mathrm{rot}(\vec{r}\,\Box u_2)$$

$$\Box\vec{u} - 2\,\mathrm{grad}\,u_1 = \vec{r}\,\Box u_1 - \vec{r}\times\mathrm{grad}(\Box u_2)$$

2. Schritt u_2 kann derart variiert werden, daß $\Box u_2 = 0$ gilt (aber weiterhin mit u_1 dasselbe übergeordn. Pot. $\vec{u}$ beschr. wird).

$\Rightarrow$ Ansatz (*) gerechtfertigt (vollständig)

4 Physikalische Bedeutung der BUCHHOLZschen Potentialfunktionen

4.1 TE- und TM-Felder

$$\vec{A} = \underbrace{\operatorname{rot}(u_1 \vec{r})}_{\vec{A}_1} + \underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u_2 \vec{r})}_{\vec{A}_2}$$

- $\square u_i = 0 \Rightarrow \square \vec{A}_1 = \vec{0}$, $\square \vec{A}_2 = \vec{0}$
- $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ sind (BUCHHOLZ-geeichte) eldyn. Pot. raumladungs- & stromfreier Felder
- Felderzeugungsgleichungen für $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ liefern:

u_1:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(u_1 \vec{r})$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(u_1 \vec{r}) = \vec{r} \times \operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)$$

$\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{r} = 0$ TE-Feld bzgl. $\vec{r}$

u_2:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u_2 \vec{r}) = \vec{r} \times \operatorname{grad}(\Delta u_2)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(u_2 \vec{r})$$

$\Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{r} = 0$ TM-Feld bzgl. $\vec{r}$

- Menge aller TE- bzw. TM-Felder erzeugbar
- Ansatz Feld = TE + TM (bzgl. $\vec{c}$, $\vec{r}$) gerechtfertigt
- Hohlleiteransatz mit $\vec{A}_E = f_1 \vec{c}$, $\vec{A}_M = f_2 \vec{c}$ gerechtfertigt