Darstellung elektromagnetischer Felder
mittels
spezieller Potentialfunktionen

D i p l o m a r b e i t

zur Erlangung des akademischen Grades Diplomingenieur

eingereicht am Institut für Elektrotechnik der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Steffen Solyga, geboren am 12.02.1967 in Berlin, Matrikel D 88

1. Gutachter: Prof. Dr. sc. techn. B. Meffert
Humboldt-Universität zu Berlin
Tel.: 030/20181/255

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Henke
Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Tel.: 030/314/22490

Registrier-Nr.: DD 89

eingereicht am: 11.08.1994

verteidigt am: 21.09.1994

Vorwort

Nach wie vor betrachte ich meine Arbeiten zum Fundamentalsystem der Maxwellschen Gleichungen als meine bislang interessantesten. In der vorliegenden Diplomarbeit aus dem Jahre 1994 wird gezeigt, daß sich jedes elektromagnetische Feld in raumladungsfreien, isotropen und homogenen Isolatoren ohne ferroelektrische oder -magnetische Eigenschaften durch zwei Lösungen der homogenen Wellengleichung beschreiben läßt.

Die Neufassung dieser Arbeit erfolgte aufgrund der neuen Publikations- und Verteilungsmöglichkeiten, welche sich durch die allgemeine Verfügbarkeit des Internet auftun. Dabei wurden einige gestalterische Änderungen vorgenommen, der Text ist jedoch unverändert geblieben. Zusätzlich aufgenommen wurden die für die Verteidigung erstellten Papiere; sie sind im Anhang C zu finden.

Berlin, 23. Mai 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Einführung von Potentialen bei der Lösung der MAXWELLschen Gleichungen bietet die Möglichkeit, die Anzahl der feldbeschreibenden Funktionen wesentlich zu reduzieren. Lösungsansätze unter Zuhilfenahme der elektrodynamischen Potentiale oder der BUCHHOLZschen Potentialfunktionen findet man in der Literatur häufig, nur mangelt es leider an Beweisen ihrer Vollständigkeit.

Schwerpunkt dieser Arbeit ist der Beweis der folgenden Thesen:

1. Jede Lösung des Systems der vier MAXWELLschen Gleichungen und der Materialgleichungen für **B** und **D** für Medien ohne ferromagnetische oder ferroelektrische Eigenschaften läßt sich durch lediglich drei skalare Funktionen von Ort und Zeit darstellen. - Um dies zu zeigen, werde ich die Zulässigkeit der LORENTZschen, der COULOMBschen und der BUCHHOLZschen Eichforderung an die elektrodynamischen Potentiale untersuchen.

2. Im Falle verschwindender Raumladungen genügen zur Feldbeschreibung bereits zwei skalare Funktionen von Ort und Zeit. - Die drei betrachteten Eichforderungen sind bei Raumladungsfreiheit *gleichzeitig* zulässig.

3. Jede Lösung des Systems der vier MAXWELLschen Gleichungen und der Materialgleichungen für **B** und **D** für Medien ohne ferromagnetische oder ferroelektrische Eigenschaften läßt sich durch die drei BUCHHOLZschen Potentialfunktionen darstellen. - Zu jeder Vektorfunktion **A** und einem wirbelfreien Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems **e** existieren drei skalare Funktionen U_1, U_2, U_3, so daß gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{rot}(U_1\mathbf{e}) + \mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e}) + \mathbf{grad}U_3.$$

4. Bei gleichzeitigem Verschwinden von Raumladungs- und Stromdichte und skalaren Konstanten ε und μ existiert ein Tripel BUCHHOLZscher Potentialfunktionen sowohl bezüglich $\mathbf{e}_c$ als auch bezüglich $\mathbf{e}_r$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \Box U_1 &= 0 \\ \Box U_2 &= 0 \\ U_3 &= 0. \end{aligned}$$

   Es ist $U_1\mathbf{e}$ ein übergeordnetes vektorielles Potential des TE-Anteils bezüglich **e** der Lösung und $\mathbf{rot}(U_2\mathbf{e})$ ein übergeordnetes vektorielles Potential des TM-Anteils bezüglich **e** der Lösung.

Eine Lösung der MAXWELLschen Gleichungen nennt man bei $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} \equiv 0$ TE bezüglich $\mathbf{e}$, bei $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = 0$ TM bezüglich $\mathbf{e}$ und bei $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} \equiv 0$ TEM bezüglich $\mathbf{e}$. Eine solche Erklärung findet man in der Literatur häufig (siehe z.B. [6]). Man beachte, daß sich eine TE-Welle bezüglich $\mathbf{e}$ nicht notwendig auch in Richtung von $\mathbf{e}$ ausbreiten muß!

2 Felddarstellung durch Potentiale

Währenddessen die Darstellung skalarer Felder durch eine (skalare) Funktion von drei (oder vier) Veränderlichen als optimal angesehen werden kann, ist dies mit der Darstellung vektorieller Felder durch drei Funktionen oft nicht der Fall. - Beispielsweise läßt sich das elektrische Feld einer ruhenden Ladung durch lediglich ein skalares Feld, das elektrostatische Potential dieser Ladung, und stets das Feld der Induktion durch lediglich zwei skalare Felder, das elektrodynamische Vektorpotential mit einer verschwindenden Komponente, darstellen. - Damit ist bereits eine erste Motivation für die Einführung von Potentialen zur Feldbeschreibung gegeben: *Potentiale bieten die Möglichkeit, ein Feld mit geringem Aufwand darzustellen.*

2.1 Felder, Funktionen, Koordinaten

Ein *Feld* beschreibt einen Raumzustand. Die den Raumzustand charakterisierende physikalische Größe nennt man Feldgröße. Sie muß so definiert sein, daß sie die bestimmte Feldeigenschaft an einem räumlichen Ort, in einem Feldpunkt, eindeutig angibt. - Beispielsweise ist die Ladungsdichte ϱ, nicht jedoch die Ladung Q eine Feldgröße; letztere nennt man integrale Größe. - Aus mathematischer Sicht handelt es sich folglich um eine eindeutige Abbildung der Menge der Orte (räumliche Punktmenge) auf die Menge der Realisierungen einer physikalischen Größe, um eine Funktion im weiteren Sinne.

Wesentlich bei dieser Felddefinition ist ihre Unabhängigkeit von jeglichem Maß; stattdessen steht als Grundbegriff die physikalische Größe, insbesondere der Ort (und ggf. zusätzlich die Zeit). Dies sind Kategorien, die den Erfahrungen entsprechen und demzufolge recht anschaulich sind. Eine solche Definition ist zumindest solange sinnvoll, wie die eindeutige Bestimmtheit von Ort und Zeit im physikalischen Sinne nicht in Frage gestellt wird. Eine derartige Felddefinition geht von der These aus, daß ein Feld nicht von seiner Darstellung, d.h. vom Maß der Feldgröße und vom Maß des Ortes, also von den zur Beschreibung verwendeten Koordinaten, abhängig ist.

Demgegenüber steht die Funktion dreier (oder vierer) reeller Veränderlicher, die vollständig ohne geometrische und physikalische Kategorien behandelt werden kann. Dies ist im Sinne einer geschlossenen Theorie von großem Vorteil, weil der Begriff „reelle Zahl“ - im Gegensatz zu dem geometrischen Begriff „Ort“ - wegen seiner abstrakten Erklärung praktisch als unumstößlich angesehen werden kann. Geometrische Kategorien werden nur zur Veranschaulichung der Funktion verwendet und haben nichts mit ihrem Wesen zu tun. - Leider hat ein solches Vorgehen bei der Beschreibung physikalischer Gegebenheiten den großen Nachteil, daß der an Ergebnissen Interessierte sein halbes Leben darauf verwenden muß, die wegen ihrer Abstraktheit unanschauliche Theorie zu begreifen, obwohl ein geometrischer Bezug für die klassische Feldtheorie völlig ausreichend ist.

Selbst dann, wenn man ein skalares Feld von der Qualität seiner Feldgröße abstrahiert, nur die Maßzahl dieser Größe betrachtet und somit zum Begriff der *Ortsfunktion* gelangt, verbleibt ein Unterschied zur Funktion dreier Veränderlicher, was ich an einem zweidimensionalen Beispiel erläutern will: Betrachtet man die Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad x-y$$

und führt die eineindeutige Transformation

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) &&= u+v \\ y &= y(u,v) &&= -(u+v) \end{aligned}$$

aus, so erhält man die Funktion

$$f[x(u,v),y(u,v)] \quad = \quad g(u,v) \quad = \quad 2(u+v).$$

Interpretiert man nun f als Funktion des Ortes der Ebene mit den (nicht notwendig als kartesisch anzusehenden) Koordinaten x und y und die Transformation als Transformation der ebenen Koordinaten x, y auf die ebenen Koordinaten u, v, so stellen f und g *dieselbe Ortsfunktion* dar, denn der Ort wird durch die Transformation nicht geändert. Nur wird der Ort zum einen durch die Koordinaten x, y und zum anderen durch die Koordinaten u, v dargestellt. Interpretiert man jedoch f in funktionentheoretischem Sinne als Funktion der reellen Veränderlichen x und y, so sind f und g natürlich nicht identisch. Währenddessen f dem Paar $(1,1)$ die Zahl 0 zuordnet, ordnet g demselben Paar die Zahl 4 zu.

Ähnliche Probleme treten auch bei den Differentialoperatoren auf. Währenddessen der zweidimensionale Laplacesche Operator in der Funktionentheorie eindeutig als

$$\Delta \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

erklärt ist, worin x und y nur die beiden Veränderlichen der Funktion symbolisieren, hat man bei den Ortsfunktionen unterschiedliche Darstellungen für die verschiedenen Koordinaten, die wiederum aus funktionentheoretischer Sicht ganz andere Operatoren sind.

Diese aus der unterschiedlichen Betrachtungsweise erwachsenden Unterschiede verschwinden jedoch, wenn man einerseits den Ort in kartesischen Koordinaten darstellt und andererseits die Veränderlichen einer Funktion als kartesische Koordinaten des Ortes interpretiert. Der Wesensunterschied zwischen Ortsfunktion und Funktion reeller Veränderlicher wird natürlich auf diese Weise nicht aufgehoben!

In der Vektoranalysis und Differentialgeometrie geht man von Ortsfunktionen aus. Dies sind also Funktionen im „gewöhnlichen“ Raum. In diesem Sinne sind auch, bis auf wenige Ausnahmen, bei denen ein formales Vorgehen schneller zum Erfolg führt, alle in dieser Arbeit anzutreffenden Funktionen zu verstehen. Die zusätzliche Zeitabhängigkeit bereitet bekanntlich keine weiteren Probleme.

2.2 Mathematische Grundlagen

Es sollen zunächst die elementaren Potentiale, das skalare und das vektorielle Potential eines Vektorfeldes, erklärt und ihre wesentlichen Eigenschaften untersucht werden, bevor die darzustellenden Felder physikalische Bedeutung und damit zusätzliche Eigenschaften erhalten.

2.2.1 Potentialfelder, skalares Potential

Definition

Ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ heißt *Potentialfeld*, wenn ein Skalarfeld f mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, f$$

existiert. Man nennt dann f *skalares Potential* des Vektorfeldes $\mathbf{F}$.[1] Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{F}$ ein skalares Potential besitzt, ist seine Wirbelfreiheit, es gilt also

$$\mathbf{F} \text{ ist Potentialfeld} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Hinreichend für die Existenz eines skalaren Potentials ist die Wirbelfreiheit jedoch nur dann, wenn $\mathbf{F}$ auf einem flächenartig einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist.[2] Ist der Definitionsbereich G von $\mathbf{F}$ kein flächenartig einfach zusammenhängendes Gebiet, so existiert bei $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in jedem flächenartig einfach zusammenhängenden Teilgebiet von G ein Potential, das $\mathbf{F}$ dort beschreibt. Zerlegt man G in solche Teilgebiete, wird das „zusammengesetzte" Potential i.allg. an den Grenzflächen nicht stetig sein und daher $\mathbf{grad}\, f$ dort nicht existieren, aber es existiert stets der Grenzwert von $\mathbf{grad}\, f$ an der Grenzfläche. Praktisch hat man daher die Äquivalenz

$$\mathbf{F} \text{ ist Potentialfeld} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Mehrdeutigkeit

Ist f_0 ein Potential von $\mathbf{F}$ und c eine Konstante, so ist auch $f_0 + c$ ein Potential von $\mathbf{F}$. Andererseits ist die Differenz zweier Potentiale von $\mathbf{F}$ stets konstant, so daß man bei Kenntnis nur eines Potentials f_0 von $\mathbf{F}$ bereits die Menge der Potentiale von $\mathbf{F}$ kennt. Es ist jedes Potential f von $\mathbf{F}$ in der Form $f_0 + c$ darstellbar.

[1] Historisch begründet wird in der Physik nicht f, sondern $-f$ als Potential von $\mathbf{F}$ bezeichnet. Dies ist auch später bei der physikalischen Deutung der Poissonschen Gleichung zu beachten.

[2] Ein räumliches Gebiet G nennt man flächenartig einfach zusammenhängend, wenn zu jeder doppelpunktfreien geschlossenen Kurve $k \in G$ eine zweiseitige Fläche $\Sigma \in G$ existiert, die durch k berandet wird. Beispielsweise bildet der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln, nicht aber der Raum in einer geschlossenen Röhre ein solches Gebiet.

2.2.2 Solenoidale Felder, vektorielles Potential

Definition

Ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ heißt *solenoidal*, wenn ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

existiert. Man nennt dann $\mathbf{A}$ *vektorielles Potential* des Vektorfeldes $\mathbf{F}$. Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{F}$ ein vektorielles Potential besitzt, ist seine Quellenfreiheit, es gilt also

$$\mathbf{F} \text{ ist solenoidal} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Hinreichend für die Existenz eines vektoriellen Potentials ist die Quellenfreiheit jedoch nur dann, wenn $\mathbf{F}$ auf einem räumlich einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist.[3] Ist der Definitionsbereich von $\mathbf{F}$ kein räumlich einfach zusammenhängendes Gebiet, so kann man ihn meist in räumlich einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegen, in welchen dann ein vektorielles Potential existiert. Das „zusammengesetzte" Potential $\mathbf{A}$ ist zwar auf den Grenzflächen i.allg. unstetig, es existieren aber stets die beiden einseitigen Grenzwerte von $\mathbf{rot}\mathbf{A}$ bei Annäherung an die Grenzfläche und sind identisch, weshalb man praktisch die Äquivalenz hat

$$\mathbf{F} \text{ ist solenoidal} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Mehrdeutigkeit

Ist $\mathbf{A}_0$ ein Potential von $\mathbf{F}$ und f ein beliebiges skalares Feld, so ist wegen $\mathbf{rotgrad} \equiv \mathbf{0}$ auch $\mathbf{A}_0 + \mathbf{grad}\,f$ ein Potential von $\mathbf{F}$. Andererseits ist die Differenz zweier Potentiale von $\mathbf{F}$ stets ein Potentialfeld, so daß man bei Kenntnis nur eines Potentials von $\mathbf{F}$ bereits die Menge seiner Potentiale kennt. Es ist jedes Potential von $\mathbf{F}$ in der Form $\mathbf{A}_0 + \mathbf{grad}\,f$ darstellbar.

Aus der relativen Unbestimmtheit des vektoriellen Potentials folgt, daß man ihm zusätzliche Eigenschaften abverlangen kann. Die bekannteste Möglichkeit besteht darin, seine Quellendichte festzulegen, wie es beispielsweise bei der Coulombschen Eichung des elektrodynamischen Vektorpotentials geschieht (siehe 2.3.2). Manchmal benötigt man jedoch auch unkonventionellere Eigenschaften des Potentials. Ich werde die Zulässigkeit der in dieser Arbeit benötigten Forderungen in Form von Sätzen manifestieren. Dabei gehe ich, wie auch im folgenden, stets von flächenartig und räumlich einfach zusammenhängenden und beschränkten Gebieten aus.

Satz 1 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein quellenfreies vektorielles und* ϱ *eine skalares Feld. Dann existiert ein Vektorpotential* $\mathbf{A}$ *von* $\mathbf{F}$ *mit der Eigenschaft* $\mathrm{div}\mathbf{A} = \varrho$.

Der Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen auf der Zerlegbarkeit eines beliebigen vektoriellen Feldes in ein wirbelfreies und ein quellenfreies Feld (siehe Satz 8) und ist unter dem

[3] Ein räumliches Gebiet G nennt man räumlich einfach zusammenhängend, wenn das Innere jeder zweiseitigen geschlossenen Fläche $\Sigma \in G$ ganz zu G gehört. Beispielsweise bildet der Raum in einer geschlossenen Röhre, nicht aber der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln ein solches Gebiet.

Stichwort *Umkehrproblem der Vektoranalysis* in jedem einschlägigen Lehrbuch zu finden (z.B. [1] Punkt 671). Wesentlich ist, daß dieser Satz nicht dazu berechtigt, ϱ noch irgendwie von $\mathbf{A}$ abhängig zu machen. Beispielsweise darf nicht von vornherein $\varrho = |\mathbf{A}|$ angesetzt werden. Die Aufgabe ist dann nämlich eine ganz andere: $\mathbf{rot}\mathbf{A} = \mathbf{F} \ \wedge \ \mathrm{div}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|$.

Bekanntlich ist das Vektorpotential durch die Festlegung seiner Quellendichte noch immer nicht eindeutig bestimmt. Durch die zusätzliche Forderung nach einer bestimmten Normalenkomponente auf dem Rand des betrachteten Gebietes kann jedoch die Eindeutigkeit erreicht werden.

Satz 2 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein quellenfreies Vektorfeld und* $\mathbf{e}$ *ein Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems.*[4] *Dann existiert ein Vektorpotential* $\mathbf{A}$ *von* $\mathbf{F}$*, das keine Komponente in Richtung von* $\mathbf{e}$ *besitzt, für das also* $\mathbf{e} \cdot \mathbf{A} = 0$ *gilt.*[5]

Zum Beweis zeigt man, daß zu einem beliebigen Potential $\mathbf{A}_0$ stets ein Potentialfeld $\mathbf{grad}\, f$ existiert, das durch Überlagerung die gewünschte Komponente des Potentials hinweghebt (siehe [7] S.20).

Satz 3 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein quellenfreies Vektorfeld und* $\mathbf{e}$ *ein wirbelfreier Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems. Dann existiert ein Potential* $\mathbf{A}$ *von* $\mathbf{F}$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{div}\mathbf{A} \quad = \quad \mathrm{div}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}]. \tag{2.1}$$

Es sind alle Potentiale von $\mathbf{F}$ durch $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{grad}\, f$ gegeben, wenn nur $\mathbf{A}_0$ eines ist, was ich also voraussetze. Offenbar existiert genau dann ein Potential mit der Eigenschaft (2.1), wenn die Gleichung

$$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{grad}\, f)\mathbf{e}] \quad = \quad -\mathrm{div}[\mathbf{A}_0 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}_0)\mathbf{e}] \tag{2.2}$$

bei gegebenem Potential $\mathbf{A}_0$ ein Lösung für f besitzt. Nach dem Entwicklungssatz der Vektoralgebra stehen in den eckigen Klammern die bezüglich $\mathbf{e}$ transversalen Komponenten von $\mathbf{grad}\, f$

[4] Die Forderung, daß $\mathbf{e}$ ein Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems sei, ist wohl für den Praktiker verständlich (man setze beispielsweise $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\varphi$), aus theoretischer Sicht jedoch unklar. Es kann nämlich aus *jedem* Vektorfeld $\mathbf{e}_1$ mittels $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ und $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ (für jeden Raumpunkt einzeln) eine orthogonale Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ des Raumes erzeugt werden; die Komponenten eines bezüglich einer solchen Basis zerlegten Vektorfeldes wären dann i.allg. aber unstetig, so daß eine solche Basis für die Analysis wertlos ist. - Hier ist gemeint, daß $\mathbf{e}$ aus einer orthogonalen Koordinatentransformation $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$, also aus einer Lösung $\mathbf{r}$ des Systems

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \equiv 0 \qquad \text{gemäß} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$$

hervorgegangen ist. Die Frage, wann nun eine vorgelegte Funktion $\mathbf{e}(u, v, w)$ zu einer Lösung dieses Systems gehört, ist offenbar nicht ohne weiteres zu beantworten.

[5] Die Einheitsvektoren krummliniger Systeme sind i.allg. nicht auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert. Beispielsweise sind die Basen des zylindrischen und des Kugelsystems bei gewöhnlicher Orientierung auf der z-Achse nicht definiert, so daß das Definitionsgebiet weder flächenartig noch räumlich einfach zusammenhängend ist. Durch einen Schnitt kann der einfache Zusammenhang jedoch hergestellt werden, und in diesem Gebiet existiert dann ein Vektorpotential mit der Eigenschaft $\mathbf{e} \cdot \mathbf{A} = 0$.

bzw. $\mathbf{A}_0$; setzt man o.B.d.A. $\mathbf{e} = \mathbf{e}_w$, so erhält man in Koordinaten

$$\frac{1}{g_u g_v g_w}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v g_w}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{g_u g_w}{g_v}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\Big] = \frac{-1}{g_u g_v g_w}\Big(\frac{\partial g_v g_w A_{0u}}{\partial u} + \frac{\partial g_u g_w A_{0v}}{\partial v}\Big). \tag{2.3}$$

Wegen der vorausgesetzten Wirbelfreiheit von $\mathbf{e}_w$ ist der metrische Koeffizient g_w weder von u noch von w abhängig, so daß er vor die Differentiale gezogen werden kann und somit schließlich die Gleichung

$$\frac{1}{g_u g_v}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\Big] = -\frac{1}{g_u g_v}\Big(\frac{\partial g_v A_{0u}}{\partial u} + \frac{\partial g_u A_{0v}}{\partial v}\Big) \tag{2.4}$$

zu lösen ist. Diese Gleichung ist wegen fehlender Differentiationen nach w offenbar dann gelöst, wenn man sie auf jeder Koordinatenfläche $w = w_0$ gelöst hat, weshalb das Problem nur ein zweidimensionales, allerdings zunächst kein ebenes ist (siehe Abschnitt 2.1). Ich werde nun eine formale Lösung dieser Gleichung für die Fälle $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\varrho$ und $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r$ angeben.[6]

Der Fall $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$: Es ist $\mathbf{e}_z$ ein wirbelfreier Einheitsvektor des kartesischen Systems; die Koordinatenfläche $z = z_0$ ist eine Ebene. In diesem Fall geht (2.4) in die ebene Poissonsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2\pi\mu(x,y) \tag{2.5}$$

über, deren Lösung in der Potentialtheorie geklärt ist. Eine partikuläre Lösung ist durch das ebene logarithmische Potential

$$V(x,y) = \iint_B \mu(x',y') \cdot \ln\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{2.6}$$

im Innern des beschränkten Bereiches B gegeben. Hinreichend für die Existenz von V ist die Beschränktheit und Integrierbarkeit von μ. Will man eine Lösung von (2.5) für die gesamte Ebene erhalten, so genügt es offensichtlich, das Verschwinden von μ im Unendlichen gemäß

$$\lim_{r\to\infty} r^{2+\varepsilon} \cdot \mu = 0 \tag{2.7}$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ zu fordern, um die Existenz des dann auch bezüglich des Integrationsbereiches uneigentlich werdenden Integrals (2.6) zu sichern.

Der Fall $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\varrho$: Es ist $\mathbf{e}_\varrho$ der wirbelfreie Einheitsvektor des kreiszylindrischen Systems und die Koordinatenfläche $\varrho = R$ ein Kreiszylinder. Mithin ist nun die Gleichung

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f(\varphi,z)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f(\varphi,z)}{\partial z^2} = 2\pi\mu(\varphi,z) \tag{2.8}$$

zu lösen. Man erkennt sofort, daß man durch Abrollen des Zylinders (eine konforme Abbildung des Zylindermantels auf ein ebenes Gebiet) ein äquivalentes ebenes Problem erhält.

[6] In Kapitel 4 werde ich den linksseitigen Differentialterm als flächenartigen Laplaceschen Operator angewendet auf die auf der betrachteten Fläche definierte Funktion f der Flächenkoordinaten u, v betrachten und die Lösung der dann als flächenartige Poissonsche Gleichung zu interpretierende Gleichung (2.4) eingehender untersuchen. Es wird sich dann auch zeigen, weshalb die Lösung dieser Gleichung nicht in der Potentialtheorie behandelt wird.

Satz 4 : *Es sei* $f(x,y)$ *eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\pi\mu(x,y). \tag{2.9}$$

Dann ist $f[x(\varphi,z), y(\varphi,z)]$ *gemäß der Transformation*

$$\begin{aligned} x &= R\varphi \\ y &= z \end{aligned}$$

eine Lösung von (2.8).

Durch Anwendung der Kettenregel sieht man dies leicht ein:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\pi\mu.$$

Die Gleichung (2.8) wird daher praktisch auch durch das logarithmische Potential gelöst; es ist

$$f(\varphi,z) = R\int\limits_{z'}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu(\varphi',z')\cdot\ln\sqrt{R^2(\varphi-\varphi')^2+(z-z')^2}\,\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z' \tag{2.10}$$

eine partikuläre Lösung dieser Gleichung.

Der Fall $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r$: Es ist $\mathbf{e}_r$ der wirbelfreie Einheitsvektor des Kugelsystems; die Koordinatenfläche $r = R$ ist die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R. Es ist daher die Gleichung

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{R^2\sin\vartheta}\frac{\partial f(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 2\pi\mu(\vartheta,\varphi) \tag{2.11}$$

zu lösen, wesbezüglich ich eine Anregung in [5] fand. Bei der *stereographischen Projektion* handelt es sich um eine konforme Abbildung der (beschränkten) Kugeloberfläche auf die (unbeschränkte) Ebene: Man placiere die Kugel mit ihrem Südpol auf den Ursprung der x-y-Ebene; jedem Punkt der Kugeloberfläche (ϑ,φ) sei der Durchstoßpunkt (x,y) des vom Nordpol ausgehenden und die Kugeloberfläche im Punkt (ϑ,φ) durchstoßenden Strahls in der Ebene derart zugeordnet, daß die Punkte $\varphi = 0$ der Kugel auf die Punkte der positiven x-Achse abgebildet werden.[7] Schreibt man die Bildpunkte sofort in Polarkoordinaten ϱ und φ, so lautet die Abbildungsvorschrift

$$\varrho = \frac{2R\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} \tag{2.12}$$

$$\varphi = \varphi. \tag{2.13}$$

Satz 5 : *Ist* $f(\varrho,\varphi)$ *eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = \left(\frac{4R^2}{4R^2+\varrho^2}\right)^2\cdot 2\pi\mu(\varrho,\varphi), \tag{2.14}$$

so ist $f(\vartheta,\varphi) = f[\varrho(\vartheta),\varphi]$ *vermöge der Transformation (2.12) eine Lösung von (2.11).*

[7] Die Umkehrabbildung zur hier beschriebenen wurde von Riemann zur Darstellung der komplexen Zahlen auf der Einheitskugel verwendet (Riemann*sche Zahlenkugel*).

Dies ist unschwer zu zeigen. Zunächsteinmal hat man die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta} &= \frac{-2R}{1-\cos\vartheta}, \\
\frac{\partial^2\varrho}{\partial\vartheta^2} &= \frac{2R\sin\vartheta}{(1-\cos\vartheta)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial\vartheta} &= \frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varrho}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} &= \Big(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\Big)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial\vartheta^2}\frac{\partial f}{\partial\varrho}.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man zu Abkürzung den Differentialterm aus (2.11) mit $\Delta_R f(\vartheta,\varphi)$ und jenen aus (2.14) mit $\Delta f(\varrho,\varphi)$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Delta_R f(\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{R^2}\Big(\frac{4R^2}{(1-\cos\vartheta)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + \frac{2R\sin\vartheta}{(1-\cos\vartheta)^2}\frac{\partial f}{\partial\varrho}\Big) + \\
&\quad \frac{\cos\vartheta}{R^2\sin\vartheta}\Big(\frac{-2R}{1-\cos\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varrho}\Big) + \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \\
&= \Big(\frac{2}{1-\cos\vartheta}\Big)^2\cdot\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + \Big(\frac{1-\cos\vartheta}{2R\sin\vartheta}\Big)\frac{\partial f}{\partial\varrho} + \Big(\frac{1-\cos\vartheta}{2R\sin\vartheta}\Big)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\Big] \\
&= \Big(1+\frac{\varrho^2}{4R^2}\Big)^2\cdot\Delta f(\varrho,\varphi) \\
&= 2\pi\mu.
\end{aligned}$$

Es ist noch zu untersuchen, ob (2.14) überhaupt eine Lösung besitzt; da es sich dabei um die ebene Poissonsche Gleichung handelt, ist lediglich das Verhalten der ebenen Belegung im Unendlichen zu untersuchen. Setzt man die Beschränktheit von μ auf der Kugeloberfläche voraus, so gilt für die ebene Belegung aus (2.14)

$$\lim_{\varrho\to\infty}\Big[\varrho^3\Big(\frac{4R^2}{4R^2+\varrho^2}\Big)^2\mu\Big] = 0, \tag{2.15}$$

weshalb das ebene Poissonsche Integral existiert. Folglich ist (2.14) und damit auch (2.11) lösbar. Ich erspare es mir, eine zu (2.10) analoge Darstellung der Lösung von (2.11) anzugeben. Ein Algorithmus zur Lösung von (2.11) wäre folgender:

1. Die gegebene Belegung $\mu(\vartheta,\varphi)$ wird gemäß

   $$\vartheta = \arccos\Big(\frac{\varrho^2-4R^2}{\varrho^2+4R^2}\Big)$$

   als Funktion von ϱ und φ geschrieben. Die ebene Belegung $\mu'(\varrho,\varphi)$ lautet

   $$\mu'(\varrho,\varphi) = \Big(\frac{4R^2}{4R^2+\varrho^2}\Big)^2\cdot\mu(\varrho,\varphi).$$

2. Es wird das ebene logarithmische Potential der Belegung μ' berechnet; dies sei $f(\varrho, \varphi)$.
3. Die gesuchte Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ erhält man durch Ersetzen von ϱ gemäß (2.12).

Damit ist der Beweis von Satz 3 für die Spezialfälle $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\varrho$ und $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r$ erbracht.

Satz 6 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definiertes quellenfreies Feld und* $\mathbf{e}$ *ein Einheitsvektor eines othogonalen Koordinatensystems. Ferner gelte in ganz G* $\mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = 0$. *Dann existiert ein Vektorpotential* $\mathbf{A}$ *von* $\mathbf{F}$, *das nur eine Komponente in Richtung von* $\mathbf{e}$ *besitzt, für das also* $\mathbf{e} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ *gilt.*

Zum Beweis zeigt man, daß zu einem beliebigen Potential $\mathbf{A}_0$ stets ein Potentialfeld $\mathbf{grad} f$ existiert, das durch Überlagerung die beiden gewünschten Komponenten des Potentials hinweghebt (siehe [7] S.21).

Abschließend möchte ich eine spezielle Darstellungsart des vektoriellen Potentials begründen, welche die Existenz der Buchholzschen Potentialfunktionen sichert (siehe Abschnitt 2.3.4).

Satz 7 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein quellenfreies Vektorfeld und* $\mathbf{e}$ *ein wirbelfreier Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems. Dann existieren zwei skalare Felder* V_1 *und* V_2, *so daß*

$$\mathbf{A} = V_1\mathbf{e} + \mathbf{rot}(V_2\mathbf{e}) \tag{2.16}$$

ein Vektorpotential von $\mathbf{F}$ *ist.*

Es sei $\mathbf{A}_0$ das gemäß Satz 3 existente Potential von $\mathbf{F}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_0 = \mathrm{div}[(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}]. \tag{2.17}$$

Man betrachte nun die beiden durch

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{rot}(V_2\mathbf{e}) &= \mathbf{A}_0 - \mathbf{e}(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}) \end{aligned}$$

bestimmten Felder V_1 und V_2. Die Existenz von V_2 ist wegen (2.17) und Satz 6 gesichert. Das aus V_1 und V_2 gemäß

$$\mathbf{A} = V_1\mathbf{e} + \mathbf{rot}(V_2\mathbf{e})$$

konstruierte Feld $\mathbf{A}$ ist offensichtlich ein Potential von $\mathbf{F}$, denn es ist

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}]\mathbf{e} + [\mathbf{A}_0 - \mathbf{e}(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e})] = \mathbf{A}_0,$$

und $\mathbf{A}_0$ war als Potential vorausgesetzt.

Der Kern dieses Beweises beruht auf der Anwendung von Satz 3, weshalb die Existenz der beiden Potentialfunktionen V_1, V_2 bisher nur für die speziellen Vektorfelder $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varrho$ und $\mathbf{e}_r$ gesichert ist. Allerdings existieren sie auch für die Felder $\mathbf{c}$ (konstantes Vektorfeld), $\varrho\mathbf{e}_\varrho$ und $r\mathbf{e}_r$.[8]

[8] Das *Vektorfeld* $r\mathbf{e}_r$ ist zu unterscheiden von dem *Ortsvektor* $\mathbf{r}$, auch wenn ersteres zur Vereinfachung manchmal ebenfalls mit $\mathbf{r}$ bezeichnet wird. Für diese Vereinfachung spricht, daß $r\mathbf{e}_r$ am Ort $\mathbf{r}$ mit $\mathbf{r}$ in Betrag und Richtung übereinstimmt; dagegegen spricht die unterschiedliche Bedeutung, denn im Gegensatz zu $r\mathbf{e}_r$ ist der Ortsvektor $\mathbf{r}$ kein Vektorfeld.

Betrachtet man zunächst das Feld $\mathbf{e}_z$ unabhängig von seiner Darstellung, so handelt es sich dabei lediglich um ein richtungskonstantes Feld, das überall den Betrag 1 besitzt. Seine Richtung kann man offenbar nur bei Wahl eines Bezuges angeben. Demzufolge kann *jedes* richtungskonstante Feld mit dem Betrag 1 als mit der positiven z-Achse gerichtet angesehen werden.

Anstelle der Forderung nach dem Betrag 1 kann man die Forderung nach nirgends verschwindendem (und überall differenzierbarem) Betrag des wirbelfreien Feldes $\mathbf{e}$ setzen. Sind nämlich V_1, V_2 die Potentialfunktionen für ein gegebenes Feld $\mathbf{F}$ bezüglich des Feldes $\mathbf{e}$, so sind V_1/f und V_2/f jene bezüglich des Feldes $f\mathbf{e}$, worin f ein nirgends verschwindendes skalares Feld ist.

Man könnte nun noch einwenden, daß das Skalarfeld ϱ auf der z-Achse und r im Ursprung verschwindet. Es ist allerdings zu bedenken, daß das Feld $\mathbf{e}_\varrho$ auf der z-Achse und das Feld $\mathbf{e}_r$ im Ursprung nicht definiert ist, so daß diese Stellen von vornherein bereits ausgeklammert sind (siehe auch Fußnote S.7).

2.2.3 Potentiale eines beliebigen Vektorfeldes

Ein wichtiger Satz der Feldtheorie, der manchmal auch nach HELMHOLTZ benannt wird, besagt, daß *jedes* Vektorfeld in ein quellenfreies und ein wirbelfreies Feld zerlegt werden kann. Wegen des vorausgesetzten einfachen Zusammenhanges der betrachteten Gebiete ist dies gleichbedeutend mit der Aussage, daß jedes Vektorfeld in ein solenoidales und ein Potentialfeld zerlegbar und somit durch ein vektorielles und ein skalares Potential darstellbar ist.

Satz 8 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiertes Vektorfeld. Dann existieren zwei Felder* $\mathbf{F}_s$, $\mathbf{F}_p$ *mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{F}_s &= 0 \\ \mathbf{rot}\mathbf{F}_p &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Dies beweist man meist folgendermaßen: Aus einer Lösung f der POISSONschen Gleichung $\Delta f = \mathrm{div}\mathbf{F}$ ergibt sich sofort ein wirbelfreies Feld $\mathbf{F}_p = \mathbf{grad} f$. Das gesuchte quellenfreie Feld $\mathbf{F}_s$ ist dann bereits durch $\mathbf{F}_s = \mathbf{F} - \mathbf{F}_p$ gegeben (siehe auch [1] Punkt 670.3°).

Satz 9 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiertes Vektorfeld. Dann existieren zwei Felder* $\mathbf{A}$ *und* f*, so daß gilt*

$$\mathbf{F} = \mathbf{rot}\mathbf{A} + \mathbf{grad} f.$$

Man nennt meist auch $\mathbf{A}$ vektorielles und f skalares Potential von $\mathbf{F}$, obwohl $\mathbf{F}$ i.allg. weder als quellen- noch als wirbelfrei vorausgesetzt wird. Bei $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ sagt man dann, $\mathbf{F}$ wäre durch ein Vektorpotential *allein* darstellbar (analog bei $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$).

Satz 10 : *Es sei* $\mathbf{F}$ *ein auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiertes Vektorfeld und* $\mathbf{e}$ *ein wirbelfreier Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems. Dann existieren drei skalare Felder* V_1, V_2 *und* f*, so daß gilt*

$$\mathbf{F} = \mathbf{rot}(V_1\mathbf{e}) + \mathbf{rotrot}(V_2\mathbf{e}) + \mathbf{grad} f.$$

Hierbei handelt es sich praktisch nur um eine spezielle Darstellung des vektoriellen Potentials von $\mathbf{F}$ gemäß Satz 7.

2.2.4 Ordnung einer Feldmenge

Aus den vorangegangenen Betrachtungen dürfte klar geworden sein, daß zur Beschreibung eines bestimmten Vektorfeldes nicht notwendig immer drei skalare Felder benötigt werden, auch wenn stets drei skalare Felder zur Beschreibung genügen. Anscheinend ist es eine Eigenschaft des betrachteten Feldes, wieviel skalare Felder zur Beschreibung genügen, und nicht eine Willkür des Betrachters. Beispielsweise läßt sich die Überlagerung zweier TE-Moden im Rechteckhohlleiter, nicht jedoch die Überlagerung eines TE-Modes mit einem TM-Mode durch lediglich ein skalares Feld darstellen.

Es sei $(\mathbf{F}_n)$ die Menge geordneter n-Tupel skalarer Funktionen von Ort und Zeit; man betrachte die n Mengen $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_2)$, $\ldots(\mathbf{F}_n)$ und die leere Menge $(\mathbf{F}_0)$.

Definition 1 : *Von der Menge* $(\mathbf{G}_n) \subseteq (\mathbf{F}_n)$ *möge man sagen, sie wäre von m-ter Ordnung, wenn eine Menge* $(\mathbf{G}_m) \subseteq (\mathbf{F}_m)$ *und eine eindeutige Abbildung* $(\mathbf{G}_m) \to (\mathbf{G}_n)$*, jedoch für keine Menge* $(\mathbf{G}_{m-1}) \subseteq (\mathbf{F}_{m-1})$ *eine eindeutige Abbildung* $(\mathbf{G}_{m-1}) \to (\mathbf{G}_n)$ *existiert. Der Menge* $\{(0)\} \subset (\mathbf{F}_1)$ *sei die Ordnung* 0 *zugewiesen.*

Aus dieser Erklärung folgt sofort:

- Es ist stets $m \leq n$.
- Die Menge $(\mathbf{F}_n)$ ist von n-ter Ordnung.
- Jede Teilmenge von $(\mathbf{F}_1)$, die nicht nur das Element (0) enthält, ist von 1.Ordnung.

Die Ordnung ist eine Eigenschaft der betrachteten Menge und keine Eigenschaft des einzelnen Elements. Ohne Beweis möchte ich folgende Beispiele geben:

- Die Menge der skalaren Felder $(\mathbf{F}_1)$ ist von 1.Ordnung.
- Die Menge der vektoriellen Felder $(\mathbf{F}_3)$ ist von 3.Ordnung.[9]
- Die Menge der quellenfreien Vektorfelder $\subset (\mathbf{F}_3)$ ist von 2.Ordnung, denn jedes Element ist durch ein vektorielles Potential mit einer verschwindenden Komponente (Satz 2) oder auch durch die beiden Funktionen V_1, V_2 aus Satz 7 darstellbar.
- Die Menge der wirbelfreien Vektorfelder $\subset (\mathbf{F}_3)$ ist von 1.Ordnung, denn es kann jedes Element durch ein skalares Potential dargestellt werden.
- Die Menge der elektromagnetischen Felder $(\mathbf{V}) \subset (\mathbf{F}_{16})$ ist von höchstens 16.Ordnung, was sich sofort aus der Koordinatendarstellung ergibt. Bei Voraussetzung homogener, isotroper Medien ohne ferromagnetische und -elektrische Eigenschaften ist sie von 3. und bei zusätzlich verschwindenden Raumladungen sogar nur von 2.Ordung (siehe Abschnitte 2.3.2 und 2.3.3).

[9] Um obige Erklärung anwenden zu können, betrachtet man die kartesischen Komponenten der Felder. Es zeigt sich, daß die Ordnung nicht von der Wahl des zugrundegelegten Koordinatensystems abhängig ist.

Daß es nicht sinnvoll ist, einem konkreten Feld eine Ordnung zuzuweisen, kann man sich leicht klar machen: Einem konkreten Feld läßt sich nicht eindeutig die Ordnung der Menge zuweisen, der es angehört, weil es stets mehreren Mengen angehört und diese von unterschiedlicher Ordnung sein können. Beispielsweise gehört ein konkretes Potentialfeld sowohl der Menge der wirbelfreien Vektorfelder der Ordnung 1 als auch der Menge aller Vektorfelder der Ordnung 3 an. Wollte man einem konkreten Feld $\mathbf{F}_n$ die Ordnung der „kleinsten“ Teilmenge $(\mathbf{G}_n) \subset (\mathbf{F}_n)$ zuweisen, der man es angehörig machen könnte, so wäre es stets von höchstens 1.Ordnung, denn die „kleinste“ Teilmenge ist zweifelsohne die Menge $(\mathbf{G}_n) = \{\mathbf{F}_n\}$. Dann existiert sicherlich eine Abbildung einer Untermenge der rellen Zahlen auf $(\mathbf{G}_n)$, beispielsweise $1 \rightarrow \mathbf{F}_n$.

Die hier betrachtete *Ordnung* der Menge geordneter n-Tupel skalarer Funktionen von Ort und Zeit weist eine gewisse Ähnlichkeit mit der Betrachtung der *Dimension* eines linearen Raumes, erzeugt aus der Menge geordneter n-Tupel reeller Zahlen, auf. Man kann leicht zeigen, daß die Ordnung einer Untermenge aller Tripel (f_1, f_2, f_3) höchstens 2 ist, wenn ihre Komponenten *linear abhängig* sind. Allerdings genügt dafür bereits eine *beliebige Abhängigkeit* beispielsweise der Form

$$f_1 = f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y}, \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0,$$

währenddessen eine solche Abhängigkeit unter Tripeln reeller Zahlen natürlich nicht vorliegen kann. Bildet man aus der Menge $(\mathbf{F}_n)$ durch Erklärung von Addition und Multiplikation mit einem Skalar in gewöhnlicher Weise einen linearen Raum $[\mathbf{F}_n]$, so ist dieser ebenfalls von n-ter Ordnung, jedoch n-fach ∞-dimensional. Bereits der Raum der skalaren Funktionen von Ort und Zeit $[\mathbf{F}_1]$ ist ∞-dimensional.

Wie eingangs bereits erwähnt, besteht ein wesentlicher Sinn von Potentialen darin, ein gegebenes Feld durch möglichst wenige skalare Funktionen von Ort und Zeit darzustellen. Man bedient sich üblicherweise des skalaren und des vektoriellen Potentials entsprechend der Sätze aus Abschnitt 2.2.3 und versucht, ausgehend von den Komponeten des Feldes, die Anzahl der zur Beschreibung dienenden Funktionen entsprechend der Ordnung des Feldes zu reduzieren.

Manchmal erweist es sich jedoch auch als vorteilhaft, mittels Einführung von Potentialen die Anzahl der das Feld beschreibenden Funktionen nicht zu reduzieren, auch wenn dies möglich wäre, ja sogar die Anzahl zu erhöhen. Man erhält dann Freiheitsgrade, aufgrund derer noch Zusammenhänge zwischen den Funktionen (in gewissen Grenzen) willkürlich gewählt werden können. Beispielsweise beschreibt man ein quellenfreies Feld meist nicht durch ein Vektorpotential mit einer verschwindenden Komponente, sondern legt anstelle dessen die Quellen des Potentials fest.

Als besonders vorteilhaft haben sich Potentiale bei der Lösung vektorieller Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme erwiesen. Durch geschickte Einführung von Potentialen gelingt es zum einen, die Ordnung der Lösungsmenge zu bestimmen, wodurch bereits ein wesentlicher Teil ihrer Struktur enthüllt ist, und zum anderen, die Gleichung(en) in bekannte zu überführen, womit sie dann praktisch als gelöst angesehen werden können. Beispielsweise lassen sich die MAXWELLschen Gleichungen in eine skalare und eine vektorielle Wellengleichung oder eine skalare POISSONsche und eine vektorielle Wellengleichung überführen.

Zur Lösung der vektoriellen Wellengleichung ist es ebenfalls von Vorteil, spezielle Potentiale einzuführen, obwohl das meist nicht getan wird (siehe Kapitel 3).

2.3 Potentiale elektromagnetischer Felder

Die ein elektromagnetisches Feld charakterisierenden Größen sind die Induktion **B**, die elektrische Feldstärke **E**, die magnetische Feldstärke **H**, die Verschiebungsflußdichte **D**, die Stromdichte **G** und die Raumladungsdichte ϱ (Raumdichte der Überschußladung). Einen ersten Zusammenhang zwischen diesen Feldern beschreiben die MAXWELLschen Gleichungen, weitere Zusammenhänge sind durch die Materialgleichungen gegeben.

Will man eine Feldberechnung ausführen, so sind zunächst die MAXWELLschen Gleichungen zu lösen. Man sieht schnell ein, daß diese Lösungen besitzen, die der Erfahrung widersprechen.[10] Jedoch sind in ihrer Lösungsmenge alle (in der Natur möglichen) elektromagnetischen Felder enthalten, wenn man voraussetzt, daß jedes elektromagnetische Feld den MAXWELLschen Gleichungen genügt.

Aus diesen Gründen werde ich mich im folgenden nicht mit elektromagnetischen Feldern beschäftigen, sondern an deren Stelle die Lösungsmenge des Sytems

$$\mathbf{rotH} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rotE} = \mathbf{0} \tag{2.19}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{2.20}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} - \varrho = 0 \tag{2.21}$$

$$\varepsilon\,\mathbf{E} - \mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{B} - \mu\,\mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{2.23}$$

betrachten und deren Elemente stellenweise bezüglich ihrer Realisierbarkeit als elektromagnetisches Feld untersuchen. Dabei sehe ich von ferromagnetischen und ferroelektrischen Medien ab, so daß ε und μ als reguläre Matrizen vom Typ (3,3) zu verstehen sind, deren Elemente i.allg. skalare Funktionen von Ort und Zeit sind.

Die Lösungen **V** des Sytems (2.18) bis (2.23) bilden einen linearen Raum [**V**], weshalb sie als Vektoren anzusprechen sind. - Man stelle sich den Vektor **V** als Stapelung der Vektoren **B**, **E**, **H**, **D**, **G** und ϱ in dieser Reihenfolge vor. - Der Vektor **V** besitzt 16 Komponenten, weshalb sicherlich die Relation $[\mathbf{V}] \subset [\mathbf{F}_{16}]$ gilt; somit ist [**V**] von höchstens 16.Ordnung.[11]

Eine wesentliche Eigenschaft des Systems (2.18) bis (2.23) besteht darin, daß eine Lösung **V** bereits durch ihre sechs Komponenten **B** und **E** festgelegt ist. **D** ist wegen (2.22), **H** wegen

[10] Man konstruiere eine solche Lösung wie folgt: Man setze $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, gebe sich ein beliebiges Feld φ vor und setze $\mathbf{E} = \mathbf{grad}\varphi$. Nun wähle man die Felder **H** und **D** ganz beliebig und berechne aus der ersten MAXWELLschen die Stromdichte **G** und aus der vierten MAXWELLschen die Ladungsdichte ϱ, womit schließlich allen MAXWELLschen Gleichungen genüge getan ist. Man bedenke nun, daß keinerlei Zusammenhang zwischen den Feldern **E** und **D** bzw. **B** und **H** besteht.

[11] Bezüglich des Begriffs „Ordnung“ siehe Abschnitt 2.2.4.

(2.23) - μ ist wegen ihrer Regularität invertierbar -, **G** wegen (2.18) und ϱ wegen (2.21) eindeutig bestimmt. Somit ist [**V**] von höchstens 6.Ordnung. Der folgende Abschnitt wird zeigen, daß [**V**] sogar nur von höchstens 3.Ordnung ist.

Im folgenden werde ich zusätzlich von inhomogenen und von anisotropen Medien absehen, so daß ε und μ als skalare Konstanten betrachtet werden dürfen.

2.3.1 Die elektrodynamischen Potentiale

Definition

Es sei **V** eine beliebige aber fest gewählte Lösung des Systems (2.18) bis (2.23). Dann ist ihre Komponente **B** quellenfrei, weshalb diese durch ein vektorielles Potential allein dargestellt werden kann. Man definiert daher das *elektrodynamische Vektorpotential* **A** gemäß

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}; \tag{2.24}$$

seine Existenz ist wegen (2.20) gesichert. - Bekanntlich ist **A** nur bis auf ein additives Potentialfeld festgelegt. - Der Zusammenhang zwischen den Komponenten **B** und **E** von **V** ist durch (2.19) gegeben. Mit (2.24) erhält man $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\mathbf{A}$, woraus sofort

$$\mathbf{rot}\Big(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big) = \mathbf{0} \tag{2.25}$$

folgt[12] und daher ein skalares Potential φ, das *elektrodynamische Skalarpotential*, gemäß

$$-\mathbf{grad}\varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.26}$$

definiert werden kann. - Offensichtlich ist φ bis auf eine additive skalare Funktion $\xi(t)$ festgelegt, wenn man **A** bereits gewählt hat. -

Felddarstellung

Durch (2.24) und (2.26) ist eine mehrdeutige Abbildung von [**V**] in den Raum [$\mathbf{G}_4$] der zweimal stetig differenzierbaren Quadrupel skalarer Funktionen von Ort und Zeit gegeben; die Bildmenge ($\mathbf{A}_4$) ist die Menge jener Quadrupel, die jemals als Potential „drankommen“ können. Diese bildet offenbar auch einen linearen Raum.[13] Mithin ist $[\mathbf{A}_4] \subseteq [\mathbf{G}_4]$.

Wesentlich für die Darstellbarkeit eines beliebigen Elements von [**V**] durch ein Potential $\mathbf{A}_4$ ist jedoch die Existenz einer eindeutigen Abbildung $[\mathbf{A}_4] \to [\mathbf{V}]$. Ich versuche daher, die bisher besprochene Abbildung $[\mathbf{V}] \to [\mathbf{A}_4]$ umzukehren.

[12] Bekanntlich ist das Vertauschen der Differentiationsreihenfolge zulässig, wenn **A** in den zweiten Ableitungen stetig ist; dies ist genau dann der Fall, wenn **B** einmal stetig differenzierbar ist. Ohne weitere Untersuchungen wird letzteres in der physikalisch oriertierten Literatur für alle sechs feldbeschreibenden Vektorfelder (meist stillschweigend) vorausgesetzt; oft wird sogar die zweimalig stetige Differenzierbarkeit der Felder vorausgesetzt (z.B. bei Aufstellung der Wellengleichungen), obwohl das nicht notwendig ist; es genügt offensichtlich, dies nur von den Potentialen zu fordern.

[13] Sind $\mathbf{A}_{4,1}$ und $\mathbf{A}_{4,2}$ Potentiale von $\mathbf{V}_1$ bzw. $\mathbf{V}_2$, so ist sicherlich $c_1\mathbf{A}_{4,1} + c_2\mathbf{A}_{4,2}$ auch ein Potential, nämlich eines von $c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2 \in [\mathbf{V}]$.

Ist ein Potential $\mathbf{A}_4$ einer beliebigen aber fest gewählten Lösung $\mathbf{V}$ von (2.18) bis (2.23) berechnet, so erhält man *dieselben* Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ gemäß

$$\mathbf{B} = \mathbf{rotA} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi, \tag{2.28}$$

denn hier wurde in (2.26) lediglich nach $\mathbf{E}$ aufgelöst. Unter Verwendung der Gleichungen (2.23), (2.22), (2.18) und (2.21) erhält man die restlichen Komponenten von $\mathbf{V}$

$$\mathbf{D} = -\varepsilon\Big[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi\Big] \tag{2.29}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{rotA} \tag{2.30}$$

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{\mu}\Big[\mathbf{\Delta A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathbf{grad}\Big(\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)\Big] \tag{2.31}$$

$$\varrho = -\varepsilon\Big[\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}\Big]. \tag{2.32}$$

Damit ist eine eindeutige Abbildung $[\mathbf{A}_4] \to [\mathbf{V}]$ angegeben. Es ist klar, daß man auch zu *denselben* Feldern $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ und ϱ zurückgelangt, denn der verwendeten Gleichungsgruppe mußte bereits die zugrundegelegte Lösung $\mathbf{V}$ genügen. Man hat damit folgenden

Satz 11 : *Jedes elektrodynamische Potential* $\mathbf{A}_4$ *einer Lösung* $\mathbf{V}$ *des Systems (2.18) bis (2.23) genügt notwendig dem System (2.27) bis (2.32).*

Ordnung von [V]

Vom Umkehrproblem der Vektorananlysis ist bekannt, daß man dem vektoriellen Potential $\mathbf{A}$ die Bedingung $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ auferlegen kann; man hat dann als Definition von $\mathbf{A}$ das System bestehend aus (2.24) und eben angeführter Gleichung. Es gilt dann alles bisher gesagte unverändert, nur ist $[\mathbf{A}_4]$ von vornherein von 3.Ordnung, weshalb also auch $[\mathbf{V}]$ von höchstens 3.Ordnung ist. Dies gilt auch in inhomogenen und anisotropen Medien; die Gleichungen (2.29) bis (2.32) haben dann eine etwas kompliziertere Gestalt.

Felderzeugung

Es ist bisher nicht bekannt, *welche* Elemente von $[\mathbf{G}_4]$ überhaupt als Potentiale „drankommen" können; sicher ist nur, daß *alle* Potentiale in $[\mathbf{G}_4]$ enthalten sind. Man betrachte den Raum $[\mathbf{G}_4]$ als Definitionsbereich der durch (2.27) bis (2.32) (von rechts nach links gelesen) gegebenen Abbildung in die Menge $[\mathbf{F}_{16}]$ und den Bildraum $[\mathbf{G}_{16}]$.[14] Durch Einsetzen in das System (2.18) bis (2.23) überzeugt man sich leicht von der Relation $[\mathbf{G}_{16}] \subseteq [\mathbf{V}]$: jedes zweimal stetig

[14]Die Bildmenge ist wegen der Linearität der Abbildung und den Eigenschaften des Definitionsbereiches ein linearer Raum.

differenzierbare Quadrupel erzeugt vermöge (2.27) bis (2.32) eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23).[15]

Will man also eine Feldberechnung für ein Medium mit bekannten Konstanten ε und μ durchführen, ohne im voraus etwas über das Feld zu wissen, außer, daß es den MAXWELLschen und den beiden Materialgleichungen genügt, so ist dieses Ziel hiermit erreicht:

Satz 12 : *Die Menge der (einmal stetig differenzierbaren) Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) ist für Medien mit skalaren Konstanten ε und μ vermöge (2.27) bis (2.32) durch die Mengen der (zweimal stetig differenzierbaren) Felder* $\mathbf{A}$ *und φ gegeben.*

Anmerkungen:

1. Nach Abschnitt 2.2.2 kann die Menge der „Erzeugenden" um eine Ordnung reduziert werden. Anstelle der Menge der Vektorfelder kann man die Menge der quellenfreien Felder setzen; man kann auch $\mathbf{A}$ und φ mittels beispielsweise $\mathbf{A} = f_1\mathbf{e}_x + f_2\mathbf{e}_y$, $\varphi = f_3$ mit $f_i \in (f)$ aus der Menge (f) der zweimal stetig differenzierbaren skalaren Funktionen von Ort und Zeit erzeugen. Wie später zu sehen sein wird, kann man auch φ zu Null wählen und die Lösungen nur aus der Menge der Vektorfelder erzeugen.

2. Bekanntlich existiert noch ein Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und der Stromdichte, im einfachsten Fall ist dies das OHMsche Gesetz $\mathbf{G} = \kappa\mathbf{E}$. Mittels Satz 12 lassen sich mit Sicherheit Lösungen erzeugen, die keinen sinnvollen Zusammenhang zwischen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{E}$ aufweisen; es sind in der Lösungsmenge jedoch alle praktisch relevanten Fälle enthalten.

Obwohl der Inhalt von Satz 12 ausgiebig durchleuchtet wurde, möche ich ihn noch einmal durch die Konstruktion des Raumes [$\mathbf{V}$] direkt aus den Gleichungen (2.18) bis (2.23) verdeutlichen: Die einfachste Beschränkung der Lösungsmenge [$\mathbf{V}$] gegenüber der Menge der 16-Tupel enthält die 3. MAXWELLsche Gleichung; ich beginne also mit einem Feld $\mathbf{B}$, das ich von vornherein als quellenfrei, sonst jedoch als beliebig annehme und sofort die 3. MAXWELLsche Gleichung befriedigt habe. Als vektorielles Potential $\mathbf{A}$ kommt daher jedes beliebige Feld in Frage. Wegen (2.25), eine Folgerung aus der 2. MAXWELLschen Gleichung, kann jedes zu $\mathbf{B}$ passende Feld $\mathbf{E}$ durch jedes beliebige skalares Feld φ entsprechend (2.28) erzeugt werden. Wegen der Materialgleichungen sind nun $\mathbf{H}$ und $\mathbf{D}$ und wegen der 1. und 4. MAXWELLschen Gleichung schließlich auch $\mathbf{G}$ und ϱ eindeutig bestimmt. Die Annahme über $\mathbf{B}$, ein beliebiges quellenfreies Feld zu sein, führt also auf keinen Widerspruch. Andererseits ist eine allgemeinere Annahme bezüglich $\mathbf{B}$ wegen der 3. MAXWELLschen Gleichung nicht möglich. Mithin wurde keine Lösung übersehen.[16]

[15] Hieraus erhellt, daß die MAXWELLschen Gleichungen auch Lösungen besitzen, die in der Natur nicht realisierbar sind. Als einfaches Beispiel nehme man $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\varphi = r^2$; dies wären Potentiale eines elektrostatischen Feldes mit unbeschränkter elektrische Feldstärke.

[16] Dies ist wohl der Grund dafür, daß gerade die Induktion und nicht die magnetische oder elektrische Feldstärke gern als „ursprünglich" betrachtet und den Potentialdefinitionen zugrundegelegt wird: Man kann die restlichen das elektromagnetische Feld beschreibenden Felder leicht von ihr ableiten, denn sie ist *auch bei inhomogenem μ* stets quellenfrei.

Berechnung der Lösungen von (2.18) bis (2.23) bei gegebenen Komponenten von V

Man betrachte erneut das System (2.27) bis (2.32), und zwar nun als Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Potentiale **A** und φ aus **V**, einer beliebigen Lösung des Systems (2.18) bis (2.23). Gibt man sich eine gewisse Anzahl n der 16 Komponenten vor, so erhält man n inhomogene Differentialgleichungen, die die Eigenschaften der Potentiale beschreiben. - Der oben beschriebene ist offenbar der Fall $n = 0$, alle Komponenten von **V** waren unbekannt. - Im Falle $n = 16$ ist das Feld bereits vollständig bekannt, weshalb sich eine Angabe der Eigenschaften von **A** und φ erübrigt (trotzdem sind die Potentiale nicht eindeutig bestimmt); wie schon auf S.17 gezeigt, ist dies bereits dann der Fall, wenn man nur **B** und **E** als gegeben annimmt.

Üblicherweise nimmt man nun **G** und ϱ als gegeben an. Dafür, daß diese Felder zu einer Lösung der Maxwellschen Gleichungen gehören - was ja vorausgesetzt wurde - ist die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\mathbf{G} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \tag{2.33}$$

die als direkte Folgerung aus der 1. und 4. Maxwellschen Gleichung zu verstehen ist, notwendig. Als Gleichungssystem zur Bestimmung der Potentiale aus der Strom- und Raumladungsdichte hat man die Gleichungen (2.31) und (2.32), die ich im folgenden in der Form

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{2.34}$$

$$\mathbf{\Delta A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathbf{grad}\Big(\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big) = -\mu\mathbf{G} \tag{2.35}$$

betrachten werde. Es gilt folgender

Satz 13 : *Die Menge der (einmal stetig differenzierbaren) Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) für Medien mit skalaren Konstanten ε und μ bei gegebener Raumladungs- und Stromdichte ist vermöge (2.27) bis (2.30) durch die Menge der (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen* **A** *und φ des Systems (2.34), (2.35) gegeben.*

Daß derart *alle* zu **G** und ϱ „passenden“ Lösungen von (2.18) bis (2.23) berechnet werden können, ist durch die bisherigen Untersuchungen wohl hinlänglich klar geworden. Interessanter ist allerdings die Aufgabe, eine hinreichende Bedingung für **G** und ϱ zu finden, damit das System (2.34), (2.35) lösbar ist; eine notwendige Bedingung ist durch (2.33) gegeben. Die Voraussetzung, daß **G** und ϱ zu einer Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) gehören, ist zwar hinreichend aber für die Berechnung wenig hilfreich. Dieses Problem wird wesentlich in der Potentialtheorie geklärt; man fordert dort die Beschränktheit des betrachteten räumlichen Gebietes, die Beschränktheit von ϱ und der ersten Ableitungen von **G** oder gibt bei Betrachtung unbeschränkter Gebiete Majoranten für das Verschwinden von ϱ und div**G** im Unendlichen an.

Abschließend möchte ich anhand eines einfachen Beispiels erläutern, weshalb beim Betrachten unbeschränkter räumlicher Gebiete das Verschwinden von ϱ im Unendlichen mindestens gemäß $\lim\limits_{r\to\infty} r^2\varrho = 0$ zu verlangen ist, keinesfalls jedoch die Beschränktheit genügt. Gegeben sei die örtlich und zeitlich konstante aber nicht verschwindende Raumladungsdichte ϱ und die überall verschwindende Stromdichte **G** in einem Medium mit den skalaren Konstanten ε und μ. Es soll nun eine „passende“ Lösung der MAXWELLschen Gleichungen berechnet werden. Angenommen, es gäbe eine Lösung des Systems (2.34), (2.35) mit $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$; es wäre dann zunächst die Gleichung

$$\Delta\varphi = -\varrho/\varepsilon = \text{const.} \tag{2.36}$$

zu lösen. Aus der Potentialtheorie ist bekannt, daß das NEWTONsche Potential

$$U(\mathbf{r}) = \iiint_B \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}b'$$

im Inneren des beschränkten Bereichs B der dreidimensionalen POISSONschen Gleichung genügt, wenn ϱ auf B beschränkt ist. Es gilt

$$\Delta U = \begin{cases} 0 & \text{im Äußeren von } B \\ -4\pi\varrho & \text{im Inneren von } B. \end{cases}$$

Man sieht leicht ein, daß das NEWTONsche Potential in unserem Fall nicht existiert, was jedoch nicht heißt, daß die POISSONsche Gleichung bzw. (2.36) keine Lösung besitzt! Tatsächlich ist eine partikuläre Lösung durch $\varphi_p = -\varrho r^2/6\varepsilon$ gegeben. Nach Belieben kann man noch eine harmonische Funktion überlagern, beispielsweise $\varphi_h = \varrho 2rR^2/6\varepsilon$. Schließlich ist eine Lösung von (2.36) durch

$$\varphi = -\frac{\varrho}{6\varepsilon}(r^2 - 2rR^2)$$

gegeben.

Zur Lösung von (2.35). Da φ zeitunabhängig ist, hat man nun eine quellenfreie Lösung von

$$\mathbf{\Delta A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \tag{2.37}$$

zu suchen; im einfachsten Fall wäre dies $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Aus (2.27) bis (2.32) erhält man schließlich alle Felder:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{E} &= \varrho(r-R)\mathbf{e}_r/3\varepsilon \\ \mathbf{D} &= \varrho(r-R)\mathbf{e}_r/3 \\ \mathbf{H} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{0} \\ \varrho &= \varrho. \end{aligned}$$

Daß alle MAXWELLschen Gleichungen erfüllt werden, erkennt man leicht. Wie ist diese Lösung nun zu deuten?

Zunächst einmal muß festgestellt werden, daß die MAXWELLschen Gleichungen (jedenfalls in ihrer klassischen Form) Lösungen zulassen, die in der Natur offenbar nicht vorkommen können.

Die bekannte Forderung nach begrenzter elektrischer Feldstärke hängt offenbar eng mit der Forderung nach Verschwinden der Raumladungsdichte im Unendlichen zusammen. Währenddessen die Beschränkung physikalischer Größen aus Erfahrungsgründen akzeptabel erscheint, will mir das Abfallen der Raumladungsdichte nicht unmittelbar einleuchten. Man könnte sich fragen, wo denn die äquivalenten Gegenladungen bleiben, wenn die Raumladungsdichte bis ins Unendliche konstant ist. Offenbar findet man in dieser Richtung aber keine Erklärung, denn es tritt bei Betrachtung des Gravitationsfeldes dasselbe Problem auf, und dort hat man es stets mit (positiven) Massen zu tun. In beiden Fällen kann man sich jedoch mit der Erklärung behelfen, daß die *Annahme eines Kontinuums* nicht gerechtfertigt ist.

Die Unbeschränktheit der Feldstärke ist jedoch nicht der einzige Makel der angegebenen Lösung. Für eine zunächst ruhende Punktladung in dem unendlichen homogen mit Ladung gefüllten Raum gibt es nämlich gar keinen Grund zur Bewegung, weil zu jeder auf sie wirkenden Teilladung eine mit gleicher Stärke aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Teilladung existiert, weshalb das Kraftfeld und damit auch das elektrische Feld verschwinden müßte. Nach obiger Lösung wird die Probeladung jedoch vom Koordinatenursprung abgestoßen. Damit ist die Bewegungsrichtung der Probeladung sogar vom Betrachter abhängig, denn dieser legt den Ort des Ursprungs willkürlich fest.

2.3.2 Potentialeichung

Die elektrodynamischen Potentiale sind durch ihre Definitionen (2.24) und (2.26) nicht eindeutig bestimmt, weshalb man an sie zusätzliche Forderungen stellen darf, um sie näher zu bestimmen, sie zu *eichen*. Diese *Eichforderungen* dürfen nicht beliebiger Art sein; vielmehr hat man eine aufgestellte Forderung hinsichtlich ihrer Zulässigkeit zu prüfen. Eine Eichforderung

$$\Phi(\mathbf{A}, \varphi) = 0 \tag{2.38}$$

ist genau dann zulässig, wenn durch ihre Lösungsmenge weiterhin die gesamte Menge der Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) erzeugt werden kann, oder umgekehrt jede Lösung dieses Systems durch ein Potentialpaar $\mathbf{A}$, φ dargestellt werden kann, das auch (2.38) genügt.[17] Zum Beweis der Zulässigkeit einer bestimmten Eichforderung genügt es offenbar zu zeigen, daß zu einem beliebigen Potentialpaar $\mathbf{A}_0$, φ_0 ein der Eichforderung genügendes Potentialpaar $\mathbf{A}$, φ existiert, das dieselben Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ erzeugt. Einerseits wird nämlich durch ein als beliebig angenommenes Paar $\mathbf{A}_0$, φ_0 nach Satz 12 die gesamte Lösungsmenge des Sytems (2.18) bis

[17]Unter Verwendung der in Abschnitt 2.3.1 eingeführten Räume kann man den Sinn einer Eichung auch folgendermaßen erklären: Der Raum $[\mathbf{A}_4]$ der Potentiale ist zu umfangreich, was eben mit der Mehrdeutigkeit der durch (2.24), (2.26) erklärten Abbildung $[\mathbf{V}] \to [\mathbf{A}_4]$ in direktem Zusammenhang steht. Fügt man der Abbildungsvorschrift eine skalare Forderung (2.38) hinzu, so wird der Bildraum um eine Ordnung reduziert. Eine zweite, von der ersten unabhängige skalare Forderung läßt nicht mehr ganz $[\mathbf{V}]$ als Definitionsbereich zu, so daß man sich, sofern man nicht den Definitionsbereich von vorn herein (z.B. durch $\varrho = 0$) einschränkt, mit einer Eichforderung begnügen muß.

(2.23) abgedeckt, und andererseits ist jede Lösung dieses Systems durch die Felder **B** und **E** eindeutig bestimmt.

Will man die Potentiale wieder aus vorgegeber Strom- und Raumladungsdichte bestimmen, wird man eine Eichung durchführen, die das zu lösende System (2.34), (2.35) vereinfacht. Dies ist die vordergründige Motivation für die nachfolgend behandelten drei Eichungen. Ich möchte jedoch ausdrücklich darauf verweisen, daß den geeichten Potentialen trotz identischer Bezeichnung abhängig von der Art der Eichforderung ganz unterschiedliche physikalische Bedeutung zukommt. Insbesondere hat das Skalarpotential φ i.allg. nicht die Bedeutung eines elektrostatischen Potentials.

Die LORENTZ-Eichung

Eine erste sinnvolle Eichforderung entnimmt man sofort der Gleichung (2.35). Ist es zulässig, dem vektoriellen Potential die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{2.39}$$

aufzuerlegen, geht nämlich zunächst (2.35) und offenbar auch (2.34) in eine inhomogene Wellengleichung über, und man erhält das System

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varrho/\varepsilon \tag{2.40}$$

$$\mathbf{\Delta A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{G}. \tag{2.41}$$

Der Schein, **A** und φ aus den vorgegebenen Feldern ϱ und **G** nun unabhängig voneinander bestimmen zu können, trügt natürlich, denn es verbleibt die Forderung (2.39); ich werde dies weiter hinten zeigen.

Satz 14 : *Zu jeder Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) existieren elektrodynamische Potentiale* **A** *und* φ*, die der* Lorentz*schen Bedingung (2.39) genügen. Diese erfüllen dann notwendig die Wellengleichungen (2.40) bzw. (2.41).*

Die Zulässigkeit der Forderung (2.39) kann man jedoch nicht, wie es leider oft behauptet wird, gemäß Satz 1 aus der Freiheit, die Quellen von **A** festlegen zu können, schlußfolgern. Währenddessen nämlich die Forderung div**A** $= \xi$ allgemein nur für jede von **A** unabhängige Funktion ξ zulässig ist, hängt φ wegen (2.26) von **A** ab.

Beweis 14: Es seien $\mathbf{A}_0$ und φ_0 beliebige aber fest gewählte Felder, durch welche vermöge (2.27) bis (2.32) eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) erzeugt sei; ich betrachte die Felder **B** und **E** dieser Lösung. Variiert man das vektorielle Potential gemäß $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{grad} f$, so wird dasselbe Feld **B**, i.allg. jedoch ein anderes Feld **E** erzeugt, weshalb auch φ variiert werden muß. Dasselbe elektrische Feld erhält man genau dann, wenn

$$\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi_0 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi = \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} + \mathbf{grad}\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \varphi\Big)$$

erfüllt ist, weshalb φ gemäß

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} + \xi(t) \tag{2.42}$$

zu wählen ist. Aus der LORENTZschen Forderung erhält man

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \Delta f = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial(\varphi_0 + \xi)}{\partial t},$$

weshalb man schließlich f als Lösung von

$$\Delta f - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\varepsilon\mu\frac{\partial(\varphi_0 + \xi)}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{A}_0$$

zu bestimmen hat. Die inhomogene skalare Wellengleichung besitzt jedoch stets eine Lösung. Daß die LORENTZ-geeichten Potentiale $\mathbf{A}$ und φ den Gleichungen (2.40), (2.41) genügen, ist notwendig, weil *jedes* Potentialpaar nach Satz 11 den Gleichungen (2.31) und (2.32) genügt. q.e.d.

Offensichtlich kann man nun die LORENTZ-Eichung auch umgekehrt motivieren:

Satz 15 : *Zu jeder Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) existieren elektrodynamische Potentiale* $\mathbf{A}$ *und* φ*, die den Wellengleichungen (2.40) und (2.41) genügen. Zwischen den Potentialen besteht dann der Zusammenhang*

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = const. \tag{2.43}$$

Beweis 15: Die Zulässigkeit der Forderungen (2.40) und (2.41) ist bereits mit Satz 14 bewiesen; diese Forderung wird nämlich unter anderem durch die LORENTZ-geeichten Potentiale erfüllt.

Betrachtet man nun ein den Gleichungen (2.40) und (2.41) genügendes Potentialpaar, so muß dieses nach Satz 11 aber auch den Gleichungen (2.31) und (2.32) bzw. (2.34) und (2.35) genügen, weil dies für *jedes* Potentialpaar notwendig ist. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß gleichzeitig (2.34) und (2.40) bzw. (2.35) und (2.41) erfüllt werden, erhält man durch Subtraktion der angeführten Gleichungen das Erfülltsein von

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \psi(\mathbf{r})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \xi(t),$$

woraus man $\psi(\mathbf{r}) \equiv \xi(t) = const.$ zu schließen hat. q.e.d.

Währenddessen entsprechend Satz 13 jede Lösung des Systems (2.34), (2.35) vermöge (2.27) bis (2.32) eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) mit den vorgegebenen Komponenten $\mathbf{G}$, ϱ erzeugt, ist dies mit Lösungen von (2.40), (2.41) i.allg. nicht der Fall. Zwar erzeugt jede Lösung auch eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23), weil dies nach Satz 12 *jedes* Paar $\mathbf{A}$,φ tut, jedoch nicht auch eine, die die vorgegebenen Komponenten $\mathbf{G}$ und ϱ besitzt:

Es sei eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) mit $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$ und $\varrho \equiv 0$ gesucht. Versucht man nun, diese nur unter Verwendung von (2.40) und (2.41) zu finden, welche in diesem Fall beide homogen sind, gelangt man zu einem Widerspruch. (2.41) wird durch $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ gelöst, und (2.40) besitzt Lösungen mit der Eigenschaft $\partial^2\varphi/\partial t^2 \not\equiv 0$ - man kann mittels eines Produktansatzes sofort welche berechnen. Ein solches Potentialpaar erzeugt jedoch gemäß (2.32) ein Feld mit nicht identisch verschwindender Raumladungsdichte, obwohl das gefordert war. Der Grund für das Mißlingen bei einer derartigen Vorgehensweise ist offenbar die Nichtbeachtung der LORENTZschen Forderung (2.39) bei der Lösung der Wellengleichungen. Löst man jedoch das System (2.39), (2.40), (2.41), so erhält man stets ein Potentialpaar, das zu einem der gesuchten Felder führt, denn ein solches Paar genügt den Gleichungen (2.34) und (2.35). Folglich gilt der für die LORENTZ-Eichung modifizierte Satz 13:

Satz 16 : *Die Menge der (einmal stetig differenzierbaren) Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) für Medien mit skalaren Konstanten ε und μ bei gegebener Raumladungs- und Stromdichte ist vermöge (2.27) bis (2.30) durch die Menge der (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen* **A** *und φ des Systems (2.39), (2.40), (2.41) gegeben.*

Um nun zu einer Lösung des Systems (2.39) bis (2.41) zu gelangen, kann man folgendermaßen vorgehen: Man berechne zunächst aus (2.41) ein vektorielles Potential **A** und aus diesem mittels (2.39) ein skalares Potential φ_0. Dieses genügt i.allg. zwar nicht der Gleichung (2.40), jedoch gilt wegen der Stromkontinuität (2.33)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta\varphi_0 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}\Big) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\varrho/\varepsilon\Big). \tag{2.44}$$

Gibt man sich nun irgendeine zeitunabhängige Funktion $\psi(\mathbf{r})$ vor, so ist offenbar

$$\varphi \quad = \quad \varphi_0 + \psi(\mathbf{r}) \tag{2.45}$$

ebenfalls eine Lösung von (2.39). Wählt man schließlich ψ als Lösung von

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) \quad = \quad -\Big(\varrho/\varepsilon + \Delta\varphi_0 - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}\Big), \tag{2.46}$$

so genügt φ gemäß (2.45) der Gleichung (2.40). (2.46) besitzt sicherlich eine zeitunabhängige Lösung, denn ihre rechte Seite ist wegen (2.44) zeitunabhängig. Damit sind also zur Lösung des Systems (2.39) bis (2.41) eine vektorielle Wellengleichung und eine skalare POISSONsche Gleichung zu lösen, wie es auch bei der folgenden Eichung der Fall sein wird.

Die COULOMB-Eichung

Der Darstellung der elektrischen Feldstärke (2.28) entnimmt man, daß φ ein elektrisches Potentialfeld erzeugt, das im allgemeinen jedoch zeitabhängig sein wird. In Anlehnung an das aus der Elektrostatik bekannte Skalarpotential kann man auch für den allgemeinen Fall versuchen, die Quellen des elektrischen Feldes in φ zu konzentrieren, weshalb man dann die zeitliche

Änderung der Quellendichte des Vektorpotentials zum Verschwinden bringen müßte. Anscheinend kann man sogar die Quellendichte selbst zum Verschwinden bringen, wodurch man zur sogenannten COULOMBschen Eichforderung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{2.47}$$

gelangt. Es vereinfachen sich dann die Gleichungen (2.34) und (2.35) zu

$$\Delta\varphi = -\varrho/\varepsilon \tag{2.48}$$

$$\mathbf{\Delta A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{G} + \varepsilon\mu\,\mathbf{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{2.49}$$

Satz 17 : *Zu jeder Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) existieren elektrodynamische Potentiale* **A** *und φ, die der* COULOMB*schen Bedingung (2.47) genügen. Diese erfüllen dann notwendig das System (2.48), (2.49).*

Beweis 17: Durch das Paar $\mathbf{A}_0$,φ_0 sei eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) erzeugt; ich betrachte die Felder **B** und **E** dieser Lösung. Dasselbe Feld **B** wird bei beliebiger Wahl von f durch $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{grad} f$ erzeugt. Wählt man f als Lösung von $\Delta f = -\operatorname{div}\mathbf{A}_0$, so ist **A** quellenfrei. Um dasselbe Feld **E** zu erzeugen, wählt man das skalare Potential gemäß (2.42), womit die Zulässigkeit der Forderung gezeigt ist. Daß ein COULOMB-geeichtes Potentialpaar den Gleichungen (2.48) und (2.49) genügt, folgt aus der Notwendigkeit für *jedes* Potentialpaar, die Gleichungen (2.34) und (2.35) zu erfüllen. q.e.d.

Wahrscheinlich wird (2.49) jedoch quellenbehaftete Lösungen besitzen, so daß nicht jedes Lösungspaar φ und **A** des Systems (2.48), (2.49) Potential einer gesuchten Lösung von (2.18) bis (2.23) ist. Anscheinend ist es aber hinreichend, eine beliebige Lösung φ von (2.48) und eine quellenfreie Lösung **A** von (2.49) berechnet zu haben, um eine gesuchte Lösung von (2.18) bis (2.23) zu erhalten, denn ein solches Potentialpaar genügt den Gleichungen (2.34), (2.35), weshalb die Modifikation des Satzes 13 für COULOMB-geeichte Potentiale wie folgt lautet:

Satz 18 : *Die Menge der (einmal stetig differenzierbaren) Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) für Medien mit skalaren Konstanten ε und μ bei gegebener Raumladungs- und Stromdichte ist vermöge (2.27) bis (2.30) durch die Menge der (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen* **A** *und φ des Systems (2.47), (2.48), (2.49) gegeben.*

Die BUCHHOLZ-Eichung

Man kann sich nun fragen, ob man wegen der Unbestimmtheit der ungeeichten dynamischen Feldpotentiale nicht überhaupt auf das skalare Potential verzichten kann. Betrachtet man dazu wieder die Darstellung der elektrischen Feldstärke (2.28), so könnte versucht werden, im Gegensatz zur COULOMB-Eichung nun die Quellen des elektrischen Feldes in **A** zu konzentrieren, wozu man φ als harmonische Funktion zu bestimmen hätte. Anscheinend kann man sogar φ selbst zum Verschwinden bringen, wodurch man zur sogenannten BUCHHOLZschen Eichforderung

$$\varphi = 0 \tag{2.50}$$

gelangt. Als angenehme Folgerung wäre dann jede Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) durch ein vektorielles Potential **A** allein darstellbar, und zur Berechnung aus vorgegebener Raumladungs- und Stromdichte hätte man die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} = -\varrho/\varepsilon \tag{2.51}$$

$$\mathbf{rotrot}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\mathbf{G}. \tag{2.52}$$

Die Zulässigkeit der BUCHHOLZschen Forderung beweise ich mit folgendem

Satz 19 : *Zu jeder Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) existieren elektrodynamische Potentiale* **A** *und* φ*, die der* BUCHHOLZ*schen Bedingung (2.50) genügen. Diese erfüllen dann notwendig das System (2.51), (2.52).*

Beweis 19: Es sei eine Lösung von (2.18) bis (2.23) durch das Potentialpaar $\mathbf{A}_0, \varphi_0$ erzeugt. Dieselbe Lösung erzeugt bekanntlich (siehe Beweis 14) das Paar

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{grad}\, f$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} + \xi(t).$$

Wählt man $\xi \equiv 0$ und f als Lösung von

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \varphi_0, \tag{2.53}$$

was offensichtlich stets möglich ist, so verschwindet das skalare Potential.
Ein derart gewähltes Potentialpaar **A** und φ muß natürlich wieder das System (2.34), (2.35) lösen, weshalb es (d.h. bei dieser Eichung also **A** allein) auch eine Lösung des Systems (2.51), (2.52) ist. q.e.d.

Offensichtlich ist **A** genau bis auf ein zeitlich konstantes Potentialfeld bestimmt, denn ist f_0 eine partikuläre Lösung von (2.53), so ist einerseits die Lösungsmenge dieser Gleichung durch $f = f_0 + \psi(\mathbf{r})$ gegeben, und andererseits ist *jedes* Vektorpotential als $\mathbf{A}_0 + \mathbf{grad}\, f$ darstellbar.

Man sieht leicht ein, daß jede Lösung des Systems (2.51), (2.52) eine Lösung von (2.18) bis (2.23) mit den vorgegebenen Komponenten **G** und ϱ erzeugt, denn es genügt den Gleichungen (2.34) und (2.35), womit der für das BUCHHOLZ-geeichte Potential modifizierte Satz 13 bewiesen ist:

Satz 20 : *Die Menge der (einmal stetig differenzierbaren) Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) für Medien mit skalaren Konstanten* ε *und* μ *bei gegebener Raumladungs- und Stromdichte ist vermöge (2.27) bis (2.30) durch die Menge der (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen* **A** *des Systems (2.51), (2.52) und* $\varphi = 0$ *gegeben.*

Es erschien anfänglich als Vorteil, das skalare Potential aus den Bestimmungsgleichungen entfernt zu haben. Nun besteht jedoch das Problem, zwei voneinander abhängige Gleichungen zu lösen, währenddessen bei Lorentz-Eichung zunächst eine beliebige Lösung der vektoriellen Wellengleichung und danach eine beliebige Lösung der Poissonschen Gleichung und bei Coulomb-Eichung zunächst eine beliebige Lösung der Poissonschen und danach eine beliebige quellenfreie Lösung der vektoriellen Wellengleichung zu bestimmen war. Nichtsdestotrotz vermittelt die Untersuchung der Buchholzschen Eichung einen tieferen Einblick in das Wesen der elektrodynamischen Potentiale.

2.3.3 Potentiale bei verschwindenden Raumladungen

Im Falle verschwindender Raumladungen genügen zur Beschreibung jeder beliebigen Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) zwei skalare Funktionen, was man den Eigenschaften (2.51), (2.52) des Buchholz-geeichten Potentials sofort entnehmen kann. Betrachtet man nämlich die Gleichung (2.51), so vermutet man bereits, daß **A** als quellenfrei angesetzt werden darf, weshalb also zu dessen Darstellung zwei Komponenten genügen.[18] Allerdings kann man auch das Verschwinden des skalaren und die Quellenfreiheit des vektoriellen Potentials sowohl bei Lorentz- als auch bei Coulomb-Eichung verlangen, so daß das verbleibende quellenfreie Vektorpotential der Gleichung

$$\mathbf{rotrot\,A} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\mathbf{G} \tag{2.54}$$

genügt, denn es gilt folgender

Satz 21 : *Zu jeder Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) mit verschwindender Raumladung existieren elektrodynamische Potentiale* **A** *und* φ*, die der* Coulomb*schen Bedingung (2.47) und der* Buchholz*schen Bedingung (2.50) gleichzeitig genügen. Das vektorielle Potential erfüllt dann notwendig die Gleichung (2.54).*

Beweis 21: Durch ein Potentialpaar $\mathbf{A}_0, \varphi_0$ mit $\mathrm{div}\mathbf{A}_0 = 0$ kann *jede* Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) erzeugt werden, und dieselbe Lösung wird durch das Paar

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{grad}\,f\\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} + \xi(t)\end{aligned}$$

erzeugt. Wählt man wieder $\xi \equiv 0$ und f zu

$$f = \int_{t_0}^{t} \varphi_0(u, v, w, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.55}$$

so verschwindet zunächst φ. Offensichtlich ist f aber harmonisch, wovon man sich durch Anwendung des Laplace-Operators auf (2.55) überzeugt, da φ_0 als Coulomb-geeichtes Skalarpotential nach (2.48) wegen verschwindender Raumladung notwendig harmonisch ist, so daß

[18] Siehe Satz 2.

schließlich **A** quellenfrei ist.[19] Setzt man nun div**A** = 0 und $\varphi = 0$ in (2.48) und (2.49) ein, so wird erstere identisch erfüllt und letztere geht in (2.54) über. q.e.d.

Im Falle raumladungsfreier Medien kann also stets ein Potentialpaar φ und **A** gefunden werden, das alle drei Eichforderungen (2.39), (2.47) und (2.50) *gleichzeitig* erfüllt. Es ist somit gezeigt, daß jede raumladungsfreie Lösung von (2.18) bis (2.23) durch lediglich ein vektorielles Potential darstellbar ist, das zum einen quellenfrei ist und zum anderen der Gleichung (2.54) genügt. Daß nun umgekehrt jede quellenfreie Lösung von (2.54) eine raumladungsfreie Lösung von (2.18) bis (2.23) erzeugt, ist analog zum lediglich BUCHHOLZ-geeichten Potential zu zeigen.

Satz 22 : *Die Menge der (einmal stetig differenzierbaren) Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) für Medien mit skalaren Konstanten ε und μ bei gegebener Strom- und verschwindender Raumladungsdichte ist vermöge (2.27) bis (2.30) durch die Menge der (zweimal stetig differenzierbaren) quellenfreien Lösungen* **A** *der Gleichung (2.54) gegeben.*

Wesentlich ist, daß man **A** wegen seiner Quellenfreiheit durch ein lediglich aus zwei Komponenten bestehendes Vektorpotential **U** darstellen kann und wegen des Verschwindens von φ zur Feldberechnung aus der Stromdichte lediglich zwei der Wellengleichung verwandte skalare Gleichungen zu lösen hat, die bei Verwendung kartesischer Koordinaten sogar voneinander unabhängig sind. Diese Gleichungen sind zunächst jedoch dritten Grades, weshalb eine andere Darstellungsart von **A** der genannten vorzuziehen sein wird.

Damit ist jedoch gezeigt, daß die Menge der raumladungsfreien Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) von 2.Ordnung ist, denn jede derartige Lösung kann mittels ein und derselben Abbildungsvorschrift aus zwei skalaren Funktionen erzeugt werden.

2.3.4 Übergeordnete und BUCHHOLZsche Potentiale

Übergeordnte Potentiale

Die entsprechend einer bestimmten zulässigen Forderung geeichten elektrodynamischen Potentiale einer konkreten Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) sind zwar nicht eindeutig, jedoch „relativ genau“ bestimmt; man kann beispielsweise nicht mehr über eine Komponente frei verfügen. Den bei der Eichung verlorengegangenen Freiheitsgrad kann man nun zurückgewinnen, indem man das vektorielle Potential **A** gemäß Satz 9 selbst durch Potentiale darstellt und folgenden Ansatz macht:

$$\mathbf{A} \quad = \quad \mathbf{rot}\mathbf{U} + \mathbf{grad}\psi. \tag{2.56}$$

Man nennt dann **U** *übergeordnetes vektorielles* und ψ *übergeordnetes skalares Potential*. Für Feldberechnungen aus **G** und ϱ kann man nun die Bestimmungsgleichungen für die elektrodynamischen in äquivalente für die übergeordneten Potentiale verwandeln, was bei COULOMB- und BUCHHOLZ-Eichung manchmal von Vorteil ist; zusätzlich kann man an **U** noch eine skalare Forderung richten, um seine Bestimmungsgleichung zu vereinfachen.

COULOMB-**Eichung:** Wegen der Quellenfreiheit von **A** kann man sofort $\psi \equiv 0$ wählen, weshalb umgekehrt mit (2.56) automatisch die Eichforderung (2.47) erfüllt ist, wenn man für **U**

[19] Es ist $\Delta\varphi_0 \equiv 0$ eine stetige Funktion, weshalb in Anwendung der LEIBNIZschen Regel der LAPLACE-Operator vor den Integranden gesetzt werden darf.

zunächst alle (dreimal stetig differenzierbaren) Felder zuläßt. Aus (2.49) erhält man eine einzige Bestimmungsgleichungen für **U**. Man hat also folgendes System zu lösen

$$\Delta\varphi = -\varrho/\varepsilon \tag{2.57}$$

$$\mathbf{rot}\Big(\mathbf{rotrotU} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}\Big) = \mu\mathbf{G} - \varepsilon\mu\,\mathbf{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{2.58}$$

BUCHHOLZ-**Eichung:** Hier verschwindet zwar das elektrodynamische, nicht jedoch das übergeordnete Skalarpotential. Aus (2.51) und (2.52) erhält man das System

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = -\varrho/\varepsilon \tag{2.59}$$

$$\mathbf{rot}\Big(\mathbf{rotrotU} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}\Big) = \mu\mathbf{G} - \varepsilon\mu\,\mathbf{grad}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{2.60}$$

Offenbar übernimmt hier das übergeordnete Skalarpotential die Aufgabe des elektrodynamischen Skalarpotentials.

Von größerem Vorteil ist die Einführung übergeordneter Potentiale jedoch erst bei Raumladungsfreiheit, weil dann, wie aus Abschnitt 2.3.3 bekannt, beide skalaren Potentiale als verschwindend angenommen werden dürfen.

BUCHHOLZsche Potentiale

Man betrachte zunächst eine beliebige Lösung des Systems (2.18) bis (2.23), beschrieben durch ein BUCHHOLZ-geeichtes Potentialpaar, d.h. durch ein vektorielles Potential **A** allein. Letzteres läßt sich nach Satz 10 bei Vorgabe eines wirbelfreien Einheitsvektors eines orthogonalen Koordinatensystems **e** in drei Anteile zerlegen:

$$\mathbf{A} = \overbrace{\underbrace{\mathbf{rot}(U_1\mathbf{e})}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{\mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e})}_{\mathbf{A}_2}}^{\mathbf{rotU}} + \underbrace{\mathbf{grad}U_3}_{\mathbf{A}_3}; \tag{2.61}$$

die drei skalaren Funktionen U_i existieren für *jedes* vektorielle Potential **A** eines *beliebigen* Feldes. Ich nenne die $\mathbf{A}_i$ BUCHHOLZsche Potentiale und die U_i BUCHHOLZsche Potentialfunktionen bezüglich **e**.[20] Betrachtet man die Gleichung (2.56), so erkennt man sofort, daß

$$\mathbf{U} = U_1\mathbf{e} + \mathbf{rot}(U_2\mathbf{e}) \tag{2.62}$$

ein übergeordnetes vektorielles und U_3 ein übergeordnetes skalares Potential ist. – Man beachte, daß lediglich U_1 eine Komponente von **U** ist. – Bei Raumladungsfreiheit kann **A** stets

[20] Wegen der Bennenung nach Herbert BUCHHOLZ siehe [2] und [8]. In [9], [4] und [6] werden Felder **M**, **N** und **L** zur Konstruktion von Lösungen der Wellengleichung verwendet, die mit den $\mathbf{A}_i$ in direkter Beziehung stehen. Dort wird jedoch nicht gezeigt, daß *jede* Lösung in eine solche Form gebracht werden kann, weshalb die Frage nach der Vollständigkeit eines derartigen Ansatzes offen bleibt. Gerade darauf kommt es mir in dieser Arbeit aber an.

quellenfrei gewählt werden, weshalb man dann das übergeordnete skalare Potential bzw. die dritte BUCHHOLZsche Potentialfunktion zu Null wählen kann.

Das Interessante an einer derartigen Darstellung des elektrodynamischen Vektorpotentials ist nun aber die Bedeutung der BUCHHOLZschen Potentialfunktionen U_i. Ich betrachte die aus jeweils einer solchen skalaren Funktion erzeugten Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23).

Der Fall $U_2 = U_3 = 0$. Durch eine beliebige skalare Funktion von Ort und Zeit U_1 sei zunächst ein vektorielles Potential $\mathbf{A}_1$ gemäß

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{rot}(U_1\mathbf{e}) = -\mathbf{e}\times\mathbf{grad}U_1 \tag{2.63}$$

und daraus gemäß (2.27) bis (2.32) eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) erzeugt. Für die Induktion und die elektrische Feldstärke erhält man

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{rotrot}(U_1\mathbf{e}) \tag{2.64}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e}\times\mathbf{grad}U_1). \tag{2.65}$$

Es besitzt die elektrische Feldstärke offensichtlich keine Komponente in Richtung von $\mathbf{e}$. Die erste BUCHHOLZsche Potentialfunktion erzeugt also ein *TE-Feld bezüglich* $\mathbf{e}$, weshalb manchmal auch $U_1 = U_{TE}$ geschrieben wird.

Der Fall $U_1 = U_3 = 0$. Das elektrodynamische Vektorpotential lautet

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e}), \tag{2.66}$$

und das erzeugte Feld besitzt die Komponenten

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{rotrotrot}(U_2\mathbf{e}) \tag{2.67}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e}). \tag{2.68}$$

Ist $\mathbf{e}$ das konstante Feld $\mathbf{e}_c$ oder das radiale Feld $\mathbf{e}_r$, so kann man wegen $\mathbf{\Delta}(f\mathbf{c}) = \mathbf{c}\Delta f$ bzw. $\mathbf{\Delta}(f\mathbf{r}) = 2\mathbf{grad}f + \mathbf{r}\Delta f$ (2.67) die Gestalt

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{e}_c\times\mathbf{grad}(\Delta U_2) \quad \text{bzw.} \tag{2.69}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{r}\times\mathbf{grad}(\Delta U_2/r) \tag{2.70}$$

verleihen, so daß $\mathbf{B}_2$ keine Komponente in Richtung von $\mathbf{e}$ besitzt. Die zweite BUCHHOLZsche Potentialfunktion erzeugt dann ein *TM-Feld bezüglich* $\mathbf{e}$, weshalb man manchmal auch $U_2 = U_{TM}$ schreibt.

Der Fall $U_1 = U_2 = 0$. Hier hat man

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{grad}U_3 \tag{2.71}$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{0} \tag{2.72}$$

$$\mathbf{E}_3 = -\mathbf{grad}\frac{\partial U_3}{\partial t}. \tag{2.73}$$

Hierbei handelt es sich um ein i.allg. zeitlich veränderliches elektrisches Feld, das man sich als durch eine zeitliche Änderung der Raumladungsdichte hervorgerufen veranschaulichen kann. Die Existenz eines solchen elektrischen Feldes bei verschwindender Induktion mag zunächst verwunderlich erscheinen, ist jedoch schnell einzusehen: die Gesamtstromdichte $\partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{G}$ verschwindet nämlich.

Damit ist auch klar, warum nicht noch ein vierter Term für ein magnetisches Äquivalent auftaucht: Die Induktion ist quellenfrei, weshalb kein zeitlich veränderliches Induktionsfeld ohne elektrisches Feld existieren kann (2. MAXWELLsche Gleichung). Der magnetostatische Fall ist bereits durch die ersten beiden BUCHHOLZschen Potentiale abgedeckt.[21]

Offenbar kann man ein Feld mit verschwindender Induktion auch als TM ansehen, so daß zusammenfassend U_1 ein TE-Feld und U_2, U_3 ein TM-Feld erzeugt. Durch entsprechende Wahl der drei BUCHHOLZschen Potentialfunktionen kann man jedoch *jede* Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) erzeugen, denn jede Lösung läßt sich, wie eben gezeigt, gemäß (2.61) darstellen. Damit gilt folgender

Satz 23 : *Jede Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) für Medien ohne ferroelektrische und ferromagnetische Eigenschaften läßt sich bezüglich der wirbelfreien Einheitsvektoren* $\mathbf{e}_c$ *und* $\mathbf{e}_r$ *in eine Teillösung mit der Eigenschaft* $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} = 0$ *und eine zweite Teillösung mit der Eigenschaft* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = 0$ *zerlegen.*

Damit ist nun sichergestellt, daß keine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) übersehen wird, wenn man einen Ansatz bestehend aus einer TE- und einer TM-Lösung macht.

Der Sinn eines solchen Ansatzes besteht sicherlich darin, zwei Lösungen getrennt voneinander zu bestimmen, die eine geringere Anzahl nichtverschwindender Komponenten besitzen. Ist also eine Lösung $\mathbf{V}$ des Systems (2.18) bis (2.23) mit den skalaren Konstanten ε und μ gesucht, von der vorab nichts über ihre Raumladungs- und Stromdichte bekannt ist, so führt der Ansatz auch zum Erfolg. Es ist nämlich jede Lösung bereits durch die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ bestimmt, und man hat nun anstelle von sechs skalaren Funktionen zweimal fünf unabhängig voneinander zu bestimmen.

Sucht man jedoch nach Lösungen mit verschwindender Raumladungs- und Stromdichte, so führt der Ansatz eventuell nicht zur Reduzierung von Komponenten, weil die Teillösungen durchaus raumladungs- und stromdichtebehaftet sein können: Angenommen, es wäre ein BUCHHOLZ-geeichtes Potential $\mathbf{A}$ der raumladungs- und stromlosen Lösung von (2.18) bis (2.23) bereits bekannt; dieses sei quellenfrei, so daß es auch der homogenen Wellengleichung genügt. Dann ist bisher bekannt, daß zwei Funktionen U_1 und U_2 existieren, die BUCHHOLZschen Potentialfunktionen der Lösung, so daß gilt

$$\mathbf{A} \quad = \quad \underbrace{\mathbf{rot}(U_1\mathbf{e})}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{\mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e})}_{\mathbf{A}_2}, \tag{2.74}$$

wenn $\mathbf{e}$ wirbelfrei ist. Sicherlich sind nun auch $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ Potentiale zweier raumladungsfreier Felder; $\mathbf{A}_1$ beschreibt in jedem Falle ein TE-Feld, und $\mathbf{A}_2$ beschreibt jedenfalls bei $\mathbf{e} = \mathbf{e}_c$ oder

[21] Existierten magnetische Ladungen, so würde tatsächlich noch ein vierter Term auftreten (wasimmer er auch für ein Feld beschriebe). Der Raum [$\mathbf{V}$] wäre dann von vierter Ordnung; es könnten daher nicht drei skalare Funktionen, wie hier z.B. die drei BUCHHOLZschen Potentialfunktionen, zur Beschreibung genügen.

$\mathbf{e} = \mathbf{e}_r$ ein TM-Feld. Fraglich ist jedoch, ob sowohl $\mathbf{A}_1$ als auch $\mathbf{A}_2$ der homogenen Wellengleichung genügen, um Potentiale stromdichtefreier Felder zu sein.

Ich werde diese Frage im folgenden Kapitel beantworten. Es wird sich dort zeigen, daß die BUCHHOLZschen Potentialfunktionen vorteilhaft zur Bestimmung aller quellenfreien Lösungen der homogenen vektoriellen Wellengleichung und somit zur Berechnung aller raumladungs- und stromlosen Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) verwendet werden können.

3 Lösung der homogenen Wellengleichung

Zur Feldberechnung aus vorgegebener Raumladungs- und Stromdichte unter Verwendung von Potentialen hat man, wie in Abschnitt 2.3.2 gezeigt, eine gewisse Teilmenge der Lösungen einer vektoriellen Wellengleichung zu berechnen, welche irgendwie in skalare Gleichungen überführt werden muß. Üblicherweise tut man dies nun durch Übergang auf Koordinaten, (wodurch man wegen der verwickelten Darstellung des vektoriellen LAPLACEschen Operators für krummlinige Systeme praktisch bereits auf kartesische festgelegt ist[1]). Diese Vorgehensweise bringt jedoch zwei entscheidende Nachteile mit sich:

1. Die skalaren Gleichungen für die Komponenten von **A** können nicht unabhängig voneinander gelöst werden, weil die Divergenz des vektoriellen Potentials durch eine andere Gleichung bestimmt ist. Dieses Problem kann man durch Einführung übergeordneter Potentiale umgehen.

2. Sind für **A** Bedingungen auf gekrümmten Randflächen gegeben, ergibt sich eine weitere Verkopplung für die kartesischen Komponenten. Für einige gekrümmte Flächen hilft hier die Verwendung BUCHHOLZscher Potentialfunktionen bei Bezug auf eines der Felder **c** oder **r**. Es zeigt sich, daß diese stets als der skalaren Wellengleichung genügend angesetzt werden dürfen, obwohl dies für die Komponenten von **A** bezüglich eines äquivalenten Koordinatensystems nicht der Fall ist.

Ich werde in diesem Kapitel zeigen, daß jede quellenfreie Lösung der homogenen vektoriellen Wellengleichung - und somit jede Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) für Gebiete mit verschwindender Raumladungs- und Stromdichte - durch zwei Lösungen der homogenen skalaren Wellengleichung erzeugt werden kann, wenn man diese bei Zugrundelegung des Feldes **c** oder **r** als BUCHHOLZsche Potentialfunktionen verwendet.

[1] Dieses Problem ist nicht zu verwechseln mit der Separation der *skalaren* Wellengleichung in krummlinigen Koordinaten.

3.1 Grundlegendes

Aus Abschnitt 2.3.3 ist bekannt, daß man alle raumladungs- und stromlosen Lösungen des Systems (2.18) bis (2.23) aus der Menge der quellenfreien Lösungen der vektoriellen homogenen Wellengleichung

$$\Box\mathbf{A} = \mathbf{\Delta A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

ableiten kann.[2] Die Quellenfreiheit der Lösungen kann man sofort durch Ansatz eines vektoriellen übergeordneten Potentials

$$\mathbf{A} = \mathbf{rot}\mathbf{U} \tag{3.2}$$

sicherstellen; es verbleibt dann eine vektorielle Gleichung für $\mathbf{U}$. Man könnte nun versuchen, diese durch Forderung nach einer verschwindenden Komponente von $\mathbf{U}$ in zwei skalare Gleichungen zu zerlegen. Eleganter ist es jedoch, bezüglich eines wirbelfreien Feldes $\mathbf{a}$ die Forderung $\mathrm{div}[\mathbf{a}\times(\mathbf{U}\times\mathbf{a})] = 0$ zu stellen, so daß $\mathbf{U}$ durch die Buchholzschen Potentialfunktionen U_1 und U_2 gemäß

$$\mathbf{U} = U_1\mathbf{a} + \mathbf{rot}(\mathbf{U}_2\mathbf{a}) \tag{3.3}$$

dargestellt werden kann, um stattdessen zwei skalare Gleichungen für U_1, U_2 zu erhalten. Zunächsteinmal ergibt sich aus (3.1) bis (3.3) die Gleichung

$$\mathbf{rot}\Big[\mathbf{\Delta}(U_1\mathbf{a}) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\mathbf{a} + \mathbf{rot}\Big(\mathbf{\Delta}(U_2\mathbf{a}) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}\mathbf{a}\Big)\Big] = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Ist $\mathbf{a}$ ein konstantes Vektorfeld $\mathbf{c}$, d.h. ein Feld, dessen kartesische Komponenten Konstanten sind, oder das radial gerichtete Feld $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, so kann man (3.4) wegen

$$\mathbf{\Delta}(f\mathbf{c}) = \mathbf{c}\Delta f \tag{3.5}$$

$$\mathbf{\Delta}(f\mathbf{r}) = 2\,\mathbf{grad}\,f + \mathbf{r}\Delta f \tag{3.6}$$

sofort als

$$\mathbf{rot}\Big[\mathbf{c}\Box U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{c}\Box U_2)\Big] = \mathbf{0} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{rot}\Big[\mathbf{r}\Box U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{r}\Box U_2)\Big] = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

schreiben. Die Bedeutung dieser Gleichungen ist folgende: Zu jeder raumladungs- und stromfreien Lösung des Systems (2.18) bis (2.23) existieren die beiden Buchholzschen Potentialfunktionen U_1, U_2 bezüglich $\mathbf{c}$ und $\mathbf{r}$ und genügen notwendig der Gleichung (3.7) bzw. (3.8).

[2] Ich betrachte hier nur aus Gründen besserer Übersichtlichkeit lediglich Isolatoren; möchte man Leitungsströme berücksichtigen, hat man anstelle der Wellengleichung eine vektorielle homogene Telegrafengleichung bezüglich aller ihrer quellenfreien Lösungen zu untersuchen. Die folgende Abhandlung kann ohne weiteres auf diesen Fall ausgedehnt werden.

Umgekehrt ist jedes Lösungspaar U_1, U_2 der Gleichung (3.7) bzw. (3.8) ein Paar Buchholzscher Potentialfunktionen bezüglich **c** bzw. **r**, erzeugt also vermöge (3.3), (3.2) und (2.27) bis (2.32) eine raumladungs- und stromfreie Lösung des Systems (2.18) bis (2.23).

Man sieht nun sofort, daß $\Box U_1 = \Box U_2 = 0$ hinreichend für die Lösung beider Gleichungen (3.7) und (3.8) ist, weshalb man aus jedem Lösungspaar der skalaren homogenen Wellengleichung eine raumladungs- und stromlose Lösung von (2.18) bis (2.23) erzeugen kann. Jedoch besitzt sowohl (3.7) als auch (3.8) Lösungen mit $\Box U_1 \not\equiv 0 \wedge \Box U_2 \not\equiv 0$, so daß es fraglich ist, ob auch *jede* raumladungs- und stromlose Lösung von (2.18) bis (2.23) durch ein Lösungspaar der skalaren homogenen Wellengleichung erzeugt werden kann, wenn man dieses als Paar Buchholzscher Potentialfunktionen verwendet. Daß dies in den Fällen $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ und $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ in der Tat möglich ist, werde ich gesondert in den beiden folgenden Abschnitten zeigen.

3.2 Der Fall des konstanten Bezugsfeldes

Man kann stets ein kartesisches System mit der z-Achse nach **c** ausrichten, so daß im folgenden **c** das Feld $c\mathbf{e}_z$ bezeichnet. Es ist nun folgender Satz zu beweisen:

Satz 24 : *Zu jeder quellenfreien Lösung* **A** *der Gleichung* $\Box\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *existieren bezüglich des Feldes* **c** Buchholz*sche Potentialfunktionen* U_1, U_2 *mit der Eigenschaft* $\Box U_1 \equiv \Box U_2 \equiv 0$.

Daß die Buchholzschen Potentialfunktionen für *jedes* quellenfreie Feld **A** existieren, ist mit Satz 7 bereits bewiesen, denn es existiert ein Potential $\mathbf{U}_0$ von **A** mit der Eigenschaft $\mathrm{div}[c^2\mathbf{U}_0 - \mathbf{c}(\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{c})] = \mathrm{div}[\mathbf{c} \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{c})] = 0$. Ausgehend von einem solchen übergeordneten Potential $\mathbf{U}_0$ werde ich Satz 24 in zwei Schritten beweisen:

1. Es existiert ein übergeordnetes Potential **U**, das neben $\mathrm{div}[\mathbf{c} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{c})] = 0$ - was die Darstellbarkeit von **U** durch Buchholzsche Potentialfunktionen U_1, U_2 garantiert - die Eigenschaft $\Box\mathbf{U} \equiv \mathbf{0}$ besitzt, woraus bereits $\Box U_1 \equiv 0$ geschlußfolgert werden kann.

2. Dasselbe Potential **U** kann durch die Buchholzschen Potentialfunktionen U_1 und U_3 mit $\Box U_1 \equiv \Box U_3 \equiv 0$ dargestellt werden.[3]

3.2.1 Erster Schritt, konstanter Fall

Alle übergeordneten Potentiale sind bei beliebiger Wahl von f bekanntlich durch

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{grad}\, f \tag{3.9}$$

gegeben. Damit auch **U** durch Buchholzsche Potentialfunktionen dargestellt werden kann, erhält man als notwendige und hinreichende Bedingung für f das Erfülltsein von

$$-\frac{1}{c^2}\mathrm{div}[\mathbf{c} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{grad}\, f)] = -\mathrm{div}[\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{grad}\, f)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{3.10}$$

[3] U_3 ist hier als variierte Funktion U_2, d.h. als zweite Buchholzsche Potentialfunktion zu verstehen. Sie ist nicht mit der in Abschnitt 2.3.4 definierten dritten Buchholzschen zu verwechseln; diese wird wegen der Quellenfreiheit von **A** bekanntlich nicht benötigt.

Diese Gleichung ist lösbar; mittels Produktansatz möge man zwecks Verifizierung dieser Aussage eine Lösung bestimmen. Nun soll **U** außerdem noch der homogenen Wellengleichung genügen, was von $\mathbf{U}_0$ nicht vorausgesetzt werden konnte. Durch Anwendung des d'Alembertschen Operators auf (3.9) und der Beziehung $\Box\mathbf{grad} f = \mathbf{grad}\Box f$ erhält man eine zweite Gleichung für f zu

$$\mathbf{grad}\Box f \;=\; -\Box\mathbf{U}_0, \tag{3.11}$$

welche zunächst für $\Box f$ lösbar ist, denn es ist $\Box\mathbf{U}_0$ ein Potentialfeld: $\mathbf{rot}\Box\mathbf{U}_0 = \Box\mathbf{rot}\mathbf{U}_0 = \Box\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Ist ψ ein Potential von $\Box\mathbf{U}_0$, so genügt eine Lösung f von

$$\Box f \;=\; -\psi \tag{3.12}$$

auch der Gleichung (3.11). Mithin sind (3.10) und (3.11) einzeln lösbar; ich werde nun zeigen, daß sie auch eine gemeinsame Lösung besitzen, indem ich die Lösbarkeit des Systems (3.12), (3.10) nachweise.

Wegen der Voraussetzung bezüglich $\mathbf{U}_0$ besitzt ψ als Potential von $\Box\mathbf{U}_0$ die Eigenschaft

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \;=\; 0, \tag{3.13}$$

denn es ist $\Box\mathbf{U}_0 = \mathbf{c}\Box U_{01} + \mathbf{rot}(\mathbf{c}\Box U_{02})$, weshalb $\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\Box\mathbf{U}_0) = c\,\mathbf{rot}(\mathbf{c}\Box U_{02})$ gilt und offenbar auch die linke Seite dieser Gleichung quellenfrei ist. Damit ist schließlich

$$0 \;=\; \mathrm{div}[\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{grad}\psi)] \;=\; -c^2\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big).$$

Diese Eigenschaft von ψ ist nun aber hinreichend dafür, daß das System (3.10), (3.12) lösbar ist, d.h. es existiert eine Lösung f von (3.12), die die Eigenschaft (3.13) der Inhomogenität ψ übernimmt, was ich mit folgendem Hilfssatz beweisen werde:

Satz 25 : *Für jede Lösung ψ von (3.13) ist das folgende System stets lösbar*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \;=\; -\psi \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;=\; 0. \tag{3.15}$$

Beweis 25: Es ist (3.14) eine eindimensionale inhomogene skalare Wellengleichung, deren Lösbarkeit ich als gegeben voraussetze. Es sei f_0 eine Lösung dieser Gleichung. Ich versuche nun, durch Addition einer geeigneten Funktion φ auch (3.15) zu lösen.

Notwendig und hinreichend dafür, daß $f = f_0 + \varphi$ der Gleichung (3.15) genügt, ist das Erfülltsein von

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \;=\; -\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \;=\; 2\pi h. \tag{3.16}$$

Unter Voraussetzung des Verschwindens von h im Unendlichen schneller als $1/r^2$ hat man eine Lösung dieser Gleichung durch das ebene logarithmische Potential gegeben (siehe auch S.8)

$$\varphi(x,y,z,t) = \int\limits_{y'}\int\limits_{x'} h(x',y',z,t)\cdot \ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'. \tag{3.17}$$

Offenbar ist ein derart bestimmtes φ eine Lösung der zu (3.14) gehörigen homogenen Gleichung, weshalb $f = f_0 + \varphi$ bereits dem System (3.14), (3.15) genügt: Ich setze zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \mathrm{D}$$

und untersuche die Funktion Dh, d.h. ich wende D auf (3.16) an. Wegen $\mathrm{D}f_0 = -\psi$ und (3.13) gilt

$$\mathrm{D}h = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big) = 0,$$

weshalb auch $\mathrm{D}[h(x',y',z,t)]$ identisch verschwindet und eine stetige Funktion ist. Somit verschwindet bei Anwendung von D auf (3.17) unter Anwendung der Leibnizschen Regel das Integral, und man erhält $\mathrm{D}\varphi = 0$.[4] q.e.d.

3.2.2 Zweiter Schritt, konstanter Fall

Bisher ist sichergestellt, daß ein der homogenen vektoriellen Wellengleichung genügendes und durch Buchholzsche Potentialfunktionen darstellbares übergeordnetes Potential $\mathbf{U}$ existiert:

$$\mathbf{U} = \mathbf{c}U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{c}U_2) \tag{3.18}$$

$$\Box\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{3.19}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{c}\Box U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{c}\Box U_2) = \mathbf{0}. \tag{3.20}$$

Die skalare Multiplikation von (3.20) mit $\mathbf{c}$ liefert

$$\Box U_1 = 0 \tag{3.21}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{c}\Box U_2) = \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Währenddessen (bei der Wahl von $\mathbf{U}$ entsprechend des vorigen Abschnittes) U_1 notwendig der Wellengleichung genügen muß, ist dies für U_2 zwar hinreichend, notwendig ist jedoch nur $\mathbf{c}\times\mathbf{grad}\Box U_2 = \mathbf{0}$, weshalb $\Box U_2$ weder von x noch von y abhängt. Nun erzeugt aber das Paar

[4] Der Beweis vereinfachte sich wesentlich, wenn ein zu (3.17) äquivalentes Integral der Gleichung (3.14) bekannt wäre. Dieses hätte dann wahrscheinlich bereits die Eigenschaft (3.15). Eine Variablentransformation $x = z$, $y = \mathrm{j}\sqrt{\varepsilon\mu}t$ in (3.17) zwecks Auffinden eines Integrals von (3.14) wäre zu rechtferigen; die Eigenschaften von (3.17) sind bisher nur im Reellen geklärt.

U_1, $U_3 = U_2 + \xi(z,t)$ wegen $\mathbf{rot}[\mathbf{c}\xi(z,t)] = \mathbf{0}$ dasselbe übergeordnete Potential $\mathbf{U}$. Wählt man daher ξ als Lösung von $\Box\xi = -\Box U_2$, so gilt

$$\Box U_3 \quad = \quad 0, \tag{3.23}$$

womit schließlich das der homogenen Wellengleichung genügende übergeordnete Potential gemäß

$$\mathbf{U} \quad = \quad \mathbf{c}U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{c}U_3) \tag{3.24}$$

durch zwei ebenfalls der homogenen Wellengleichung genügende BUCHHOLZsche Potentialfunktionen dargestellt ist.

3.2.3 Zusammenfassung, konstanter Fall

Ausgehend von einem Potential $\mathbf{U}_0$ einer quellenfreien Lösung $\mathbf{A}$ der homogenen vektoriellen Wellengleichung mit der Eigenschaft $\mathrm{div}[\mathbf{c} \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{c})] = 0$ erhält man die der homogenen Wellengleichung genügenden BUCHHOLZschen Potentialfunktionen U_1 und U_3 durch die schrittweise Lösung der folgenden Gleichungen:

$$\mathbf{grad}\psi \quad = \quad \Box\mathbf{U}_0 \tag{3.25}$$

$$\Box f \quad = \quad -\psi \qquad \wedge \tag{3.26}$$

$$\mathrm{div}[\mathbf{c} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{grad} f)] \quad = \quad 0 \tag{3.27}$$

$$\mathbf{U} \quad = \quad \mathbf{U}_0 + \mathbf{grad} f \tag{3.28}$$

$$U_1 \quad = \quad \frac{1}{c^2}\mathbf{c} \cdot \mathbf{U} \tag{3.29}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{c}U_2) \quad = \quad \mathbf{U} - \mathbf{c}U_1 \tag{3.30}$$

$$\Box[\xi(z,t)] \quad = \quad -\Box U_2 \tag{3.31}$$

$$U_3 \quad = \quad U_2 + \xi, \tag{3.32}$$

womit Satz 24 schließlich bewiesen ist.

3.3 Der Fall des radialen Bezugsfeldes

Ein (innerhalb seines Definitionsbereiches) nirgends verschwindendes radiales Feld ist durch $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ gegeben, welches im folgenden als Bezug dienen wird.[5] Es ist nun folgender Satz zu beweisen:

[5] Dieses Feld ist bezüglich der folgenden Abhandlung repräsentativ für jedes radial gerichtete zeitunabhängige Vektorfeld, weil diese ohne weiteres auf den allgemeineren Fall $f(x,y,z)\mathbf{e}_r$ mit $f \neq 0$ ausgedehnt werden kann.

Satz 26 : *Zu jeder quellenfreien Lösung* **A** *der Gleichung* $\Box\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *existieren bezüglich des Feldes* **r** BUCHHOLZ*sche Potentialfunktionen* U_1, U_2 *mit der Eigenschaft* $\Box U_1 \equiv \Box U_2 \equiv 0$.

Der Beweis ist gegenüber dem konstanten Fall etwas abzuändern, weil nun aus $\Box\mathbf{U} = \mathbf{0}$ nicht mehr $\Box U_1 = 0$ geschlossen werden kann. Wegen (3.6) gilt

$$\Box\mathbf{U} = \Box[\mathbf{r}U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{r}U_2)] = 2\mathbf{grad}U_1 + \mathbf{r}\Box U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{r}\Box U_2). \tag{3.33}$$

Ich werde auch Satz 26, ausgehend von einem übergeordneten Potential $\mathbf{U}_0$ mit der Eigenschaft $\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{U}_0\times\mathbf{r})] = 0$, in zwei Schritten beweisen:

1. Es existiert ein übergeordnetes Potential **U**, daß neben $\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{U}\times\mathbf{r})] = 0$ - was die Darstellbarkeit von **U** durch BUCHHOLZsche Potentialfunktionen U_1, U_2 garantiert - die Eigenschaft
$$\Box\mathbf{U} = 2\mathbf{grad}\Big(\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{r}}{r^2}\Big) \tag{3.34}$$
besitzt, woraus bereits $\Box U_1 \equiv 0$ geschlußfolgert werden kann.

2. Dasselbe Potential **U** kann durch die BUCHHOLZschen Potentialfunktionen U_1 und U_3 mit $\Box U_1 \equiv \Box U_3 \equiv 0$ dargestellt werden.

3.3.1 Erster Schritt, radialer Fall

Jedes übergeordnete Potential ist bei beliebiger Wahl von f durch

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{grad}f \tag{3.35}$$

gegeben. Es ist nun f derart zu bestimmen, daß (3.34) genüge getan wird. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Box\mathbf{U} - 2\mathbf{grad}\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{r}}{r^2} &= \Box\mathbf{U}_0 + \mathbf{grad}\Box f - 2\mathbf{grad}\Big(\frac{\mathbf{U}_0\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \frac{r\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{grad}f}{r^2}\Big)\\
&= \underbrace{\Box\mathbf{U}_0 - 2\mathbf{grad}\frac{\mathbf{U}_0\cdot\mathbf{r}}{r^2}}_{\mathbf{grad}\psi} + \mathbf{grad}\Big(\Box f - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\Big)\\
&= \mathbf{grad}\Big(\Box f - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \psi\Big).
\end{aligned}$$

Daß es sich bei dem unterklammerten Term tatsächlich um ein Potentialfeld handelt, folgt daraus, daß $\Box\mathbf{U}_0$ ein Potentialfeld ist, wie bereits in Abschnitt 3.2.1 gezeigt. Hinreichend für das Verschwinden der linken Seite ist also die Wahl von f als Lösung von

$$\Box f - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = r\Box\frac{f}{r} = -\psi. \tag{3.36}$$

Analog zu Abschnitt 3.2.1 gilt wieder $\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{grad}\psi)] = 0$, woraus wegen $\mathbf{r}\times\mathbf{grad}(\psi/r) = (\mathbf{r}\times\mathbf{grad}\psi)/r$ auch $\mathrm{div}\{\mathbf{r}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{grad}(\psi/r)]\} = 0$ folgt. Analog zu Satz 25 kann man zeigen, daß Lösungen f von (3.36) existieren, die diese Eigenschaft von ψ/r übernehmen, also der Forderung $\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{grad}\,f)] = 0$ genügen, woraus schließlich $\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{U}\times\mathbf{r})] = 0$ folgt und daher zwei Funktionen U_1 und U_2 mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{r}U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{r}U_2) \tag{3.37}$$

existieren und $\mathbf{U}$ der Gleichung (3.34) genügt. Wohlbemerkt ist nun im Gegensatz zum konstanten Fall $\Box\mathbf{U} \not\equiv \mathbf{0}$, jedoch gilt

$$\mathbf{r}\Box U_1 + \mathbf{rot}(\mathbf{r}\Box U_2) = \mathbf{0}. \tag{3.38}$$

3.3.2 Zweiter Schritt, radialer Fall

Währenddessen aus (3.38) sofort wieder $\Box U_1 = 0$ zu schließen ist, kann man bezüglich U_2 nur aussagen, daß für sie $\Box U_2$ nur von r und t abhängig ist. Analog zu Abschnitt 3.2.2 zeigt man nun, daß eine Funktion U_3 mit der Eigenschaft $\Box U_3 = 0$ existiert, die mit U_1 dasselbe übergeordnete Potential erzeugt.

3.3.3 Zusammenfassung, radialer Fall

Ausgehend von einem Potential $\mathbf{U}_0$ einer quellenfreien Lösung $\mathbf{A}$ der homogenen vektoriellen Wellengleichung mit der Eigenschaft $\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{U}_0\times\mathbf{r})] = 0$ erhält man die der homogenen Wellengleichung genügenden Buchholzschen Potentialfunktionen U_1 und U_3 durch die schrittweise Lösung der folgenden Gleichungen:

$$\mathbf{grad}\psi = \Box\mathbf{U}_0 - 2\,\mathbf{grad}\frac{\mathbf{U}_0\cdot\mathbf{r}}{r^2} \tag{3.39}$$

$$\Box(f/r) = -\psi/r \qquad \wedge \tag{3.40}$$

$$\mathrm{div}[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{grad}\,f)] = 0 \tag{3.41}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{grad}\,f \tag{3.42}$$

$$U_1 = \frac{1}{r^2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{U} \tag{3.43}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{r}U_2) = \mathbf{U} - \mathbf{r}U_1 \tag{3.44}$$

$$\Box[\xi(r,t)] = -\Box U_2 \tag{3.45}$$

$$U_3 = U_2 + \xi, \tag{3.46}$$

womit Satz 26 schließlich bewiesen ist.

3.4 Zusammenfassung

Es ist nun gezeigt, daß man *jede* quellenfreie Lösung **A** der homogenen vektoriellen Wellengleichung folgendermaßen erzeugen kann: Man bestimme zwei beliebige Lösungen U_1, U_2 der homogenen skalaren Wellengleichung und berechne daraus **A** vermöge

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{rot}(U_1\mathbf{c})}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{\mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{c})}_{\mathbf{A}_2} \qquad \text{oder} \tag{3.47}$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{rot}(U_1\mathbf{r})}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{\mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{r})}_{\mathbf{A}_2}. \tag{3.48}$$

Läßt man U_1 und U_2 *alle* Lösungen von $\Box U = 0$ durchlaufen, so durchläuft **A** *alle* quellenfreien Lösungen von $\Box\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Erzeugt man aus **A** vermöge (2.27) bis (2.32) eine Lösung des Systems (2.18) bis (2.23), so ist diese raumladungs- und stromlos, und läßt man U_1 und U_2 *alle* Lösungen von $\Box U = 0$ durchlaufen, so werden vermöge (2.27) bis (2.32) auch *alle* raumladungs- und stromlosen Lösungen von (2.18) bis (2.23) erzeugt. Die Betonung liegt natürlich auf *alle*, denn daß eine gewisse Menge der Lösungen von $\Box\mathbf{A} = \mathbf{0}$ auf eben beschriebene Weise durch Lösungspaare der skalaren Wellengleichung erzeugt werden kann, wurde bereits von Stratton gezeigt (siehe [9] und [4]).

Weil $U = 0$ eine Lösung von $\Box U = 0$ ist, folgt daraus, daß nicht nur **A** selbst, sondern auch stets seine Bestandteile $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ quellenfreie Lösungen der homogenen Wellengleichung sind und somit *unabhängig voneinander* vermöge (2.27) bis (2.32) eine raumladungs- und stromlose TE- bzw. TM-Lösung von (2.18) bis (2.23) bezüglich **c** bzw. **r** erzeugen. Zwar werden diese Lösungen meist eine elektromagnetische Welle beschreiben, man darf jedoch nicht annehmen, daß sich diese auch in Richtung **c** bzw. **r** ausbreitet.[6]

Simonyi nimmt in [6] (Abschnitt 4.14) diese Überlegungen auf und fragt sich, welchen Grund man wohl hätte, im Falle $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ eine konstante Richtung auszuweisen. - Mit dem erbrachten Beweis, daß Strattons Methode zur Lösung der homogenen Wellengleichung *vollständig* ist, erscheint diese Fragestellung etwas unverständlich, denn die Wahl von **a** geschieht sinnvollerweise derart, daß die Randbedingungen in möglichst einfacher Form geschrieben werden können. Es stellt sich vielmehr die Frage, ob anstelle von **c** und **r** nicht auch ein anderes Bezugsfeld verwendet werden kann, zumal die Buchholzschen Potentialfunktionen bezüglich eines *beliebigen* wirbelfreien Feldes existieren. Es ist mir leider nicht gelungen, auf diese Frage eine befriedigende Antwort zu finden; es hat jedoch den Anschein, als ob dies in engem Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz einer TEM-Welle bezüglich eines beliebigen wirbelfreien Einheitsvektorfeldes $\mathbf{e}_w$ steht. Zu dieser Vermutung veranlaßte mich folgender Gedankengang:

Die Beweise der Sätze 24 und 26 stützen sich im Wesentlichen auf die These, daß das System

$$\frac{1}{g_u g_v g_w}\Big(\frac{\partial}{\partial w}\frac{g_u g_v}{g_w}\frac{\partial f}{\partial w}\Big) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\psi,$$

[6]Man betrachte eine elektromagnetische Kugelwelle im Vakuum. Diese läßt sich durch ein quellenfreies, der homogenen Wellengleichung genügendes Vektorpotential **A** darstellen. Zur Darstellung von **A** durch zwei Buchholzsche Funktionen kann man ein Bezugsfeld **c** aber frei wählen.

$$\frac{1}{g_u g_v}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial f}{\partial u}\Big) \quad = \quad 0$$

für f lösbar ist, sofern ψ der Gleichung

$$\frac{1}{g_u g_v}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\Big) \quad = \quad 0$$

genügt. Diese These hatte sich bewahrheitet wenigstens für $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_r$. Sollte sie für jedes wirbelfreie Feld $\mathbf{e}_w$ gelten, so hieße das, daß man eine Lösung U der homogenen skalaren Wellengleichung mit der Eigenschaft

$$\underbrace{\frac{1}{g_u g_v}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial U}{\partial u}\Big)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{g_u g_v g_w}\Big(\frac{\partial}{\partial w}\frac{g_u g_v}{g_w}\frac{\partial U}{\partial w}\Big) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}}_{=0} \quad = \quad 0$$

finden kann. Verwendet man eine solche Lösung als erste BUCHHOLZsche Funktion und das wirbelfreie Feld $\mathbf{e}_w$ als Bezug, so erhält man ein Feld mit der Eigenschaft

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_w = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_w = 0,$$

offenbar eine TEM-Welle bezüglich $\mathbf{e}_w$. Bei Betrachtung des POYNTINGschen Vektors fällt auf, daß dieser lediglich eine Komponente in Richtung von $\mathbf{e}_w$ besitzt, denn der Entwicklungssatz der Vektoralgebra lehrt die Beziehung

$$(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\times\mathbf{e}_w \quad = \quad (\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_w)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_w)\mathbf{E}.$$

Mithin wären die Feldlinien der Energiestromdichte eines derartigen Feldes mit denen von $\mathbf{e}_w$ identisch. Dann müßte sich eine TEM-Welle aber auch krummlinig ausbreiten können, denn man dürfte für $\mathbf{e}_w$ auch beispielsweise den (einzigen) wirbelfreien Einheitsvektor des elliptischen Systems wählen.

Nun ist aber die Existenz von TEM-Zylinderwellen mit der Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_\varrho$ bekannt, weshalb es naheliegend ist, daß wenigstens die Wahl $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\varrho$ zulässig ist. Dies zu zeigen, ist mir jedoch bisher nicht gelungen. Das Problem besteht im Wesentlichen darin, eine zu (3.5) und (3.6) äquivalente Beziehung für $\mathbf{e}_\varrho$ zu finden.

4 Die POISSONsche Gleichung auf Flächen

Inhalt dieses Abschnitts ist die Lösung der folgenden Aufgabe: Auf einer im Raum gegebenen regulären Fläche Σ mit den orthogonalen Flächenkoordinaten ξ, η und den Koeffizienten $E(\xi,\eta)$, $G(\xi,\eta)$ der zugehörigen ersten Fundamentalform (metrische Koeffizienten) sei eine skalare Funktion $\mu(\xi,\eta)$ definiert. Gesucht ist eine ebenfalls auf Σ definierte skalare Funktion $f(\xi,\eta)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial f}{\partial\eta}\Big)\Big] = 2\pi\mu(\xi,\eta) \tag{4.1}$$

genügt.

Ist Σ die durch $w = w_0$ bestimmte Koordinatenfläche eines orthogonalen Systems mit den Raumkoordinaten u, v, w, so sind u, v orthogonale Koordinaten der durch $w = w_0$ gegebenen Fläche, und die äquivalente Gleichung wäre

$$\frac{1}{g_u g_v}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u}\Big)+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\Big] = 2\pi\mu(u,v). \tag{4.2}$$

Ich werde den linksseitigen Differentialterm aus (4.1) mit $\Delta_\Sigma f$ abkürzen, Δ_Σ *flächenartigen* LAPLACE*schen Operator* und eine auf Σ definierte und der Gleichung $\Delta_\Sigma f = 0$ genügende Funktion f *harmonisch* nennen. Daß der Operator Δ_Σ die Benennung nach LAPLACE verdient, werde ich zunächst durch eine koordinatenfreie Definition unter Zuhilfenahme eines flächenartigen Gradienten und einer flächenartigen Divergenz analog zum räumlichen Fall und später aus der Invarianz harmonischer Funktionen gegenüber konformen Abbildungen rechtfertigen.

Bereits im Voraus möchte ich erwähnen, daß eine der Gleichung (4.1) genügende Funktion zwar aus mathematischer Sicht durchaus die Bezeichnung *Potential zur flächenartigen Belegung* μ verdient, jedoch i.allg. keine zum räumlichen oder ebenen Fall äquivalente physikalische Bedeutung besitzt. Die Lösbarkeit der oben gestellten Aufgabe in der Form (4.2) sichert lediglich die Existenz der drei BUCHHOLZschen Potentialfunktionen bezüglich $\mathbf{e}_w$.

4.1 Flächenartige Vektoroperationen

Zunächsteinmal möchte ich erklären, weshalb es im Sinne einer schlüssigen Theorie nicht sinnvoll ist, die flächenartigen Differentialoperatoren von den räumlichen abzuleiten. Als Beispiel sollen mir der räumliche und der ebene LAPLACEsche Operator, dargestellt in kartesischen Koordinaten, dienen.

Der Operatorenbegriff erlangt bekanntlich erst bei Angabe eines Definitionsbereiches eine Bedeutung. Dem räumlichen LAPLACEschen Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.3}$$

legt man zunächst die Menge der im Raum definierten, zweimal differenzierbaren Funktionen zugrunde. Für jede zwar im Raum definierte, jedoch nicht von z abhängige Funktion f erhält man offenbar die Beziehung

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \tag{4.4}$$

weshalb man

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4.5}$$

ebenen LAPLACEschen Operator nennt, weil er nur in den x-y-Ebenen differenzierend wirkt.

Nun stellt sich aber die Frage nach seinem Definitionsbereich. Bezüglich der eben betrachteten Menge der im Raum definierten, nicht von z abhängigen Funktionen gilt natürlich $\Delta = \Delta_z$, weshalb ein solcher Definitionsbereich die Einführung eines neuen Operators nicht rechtfertigt. Betrachtet man jedoch analog zu Δ die Menge der im Raum definierten, zweimal differenzierbaren Funktionen als Definitionsbereich von Δ_z, so sind die beiden LAPLACEschen Operatoren von ganz verschiedenem Wesen, denn ihre Bildmengen unterscheiden sich. Auch die Betrachtung der Lösungen der zugehörigen POISSONschen Gleichungen erhellt, daß Δ_z von anderer Qualität als Δ ist. Währenddessen die Gleichung $\Delta f(\mathbf{r}) = 4\pi\mu(\mathbf{r})$ durch das NEWTONsche Potential gelöst wird, löst das (ebene) logarithmische Potential die Gleichung $\Delta_z f(\mathbf{r}) = 2\pi\mu(\mathbf{r})$. Wegen der lediglich flächenartig differenzierenden Wirkung von Δ_z kann man sich im Wesentlichen damit begnügen, seinen Definitionsbereich zur Menge der in einer Ebene definierten zweimal differenzierbaren Funktionen zu wählen.

Die Definitionsbereiche der nachfolgend erklärten Differentialoperatoren sind Untermengen der auf einer Fläche definierten skalaren bzw. vektoriellen Funktionen; die Regularität aller betrachteten Flächen wird vorausgesetzt.

Die folgende Theorie läßt sich ohne weiteres auch auf im Raum definierte Funktionen ausdehnen, wovon ich hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichte; die wesentlichen Zusammenhänge sind in beiden Fällen dieselben.

Ich möchte darauf hinweisen, daß flächenartige Differentialoperatoren auch manchmal zum Zwecke der Beschreibung flächenartiger Unstetigkeiten von Feldern eingeführt werden. Diese sind jedoch von ganz anderem Wesen als die hier betrachteten. (siehe z.B. [3])

4.1.1 Der flächenartige Gradient

Es sei f eine auf einer Fläche Σ definierte skalare Funktion, $\sigma \in \Sigma$ ein (einfach zusammenhängendes) Flächenstück mit dem Inhalt A, P ein innerer Punkt und k die Randkurve von σ. Jedem Punkt von k sei der in der Tangentialebene von Σ liegende, ins Äußere von σ weisende Normalenvektor $\mathbf{n}$ von k zugeordnet.[1] Den flächenartigen Gradienten von f im Punkte P definiere ich gemäß

$$[\mathbf{grad}_\Sigma f](P) = \lim_{\sigma \to P} \frac{1}{A(\sigma)} \oint_k f \mathbf{n}\, \mathrm{d}s. \tag{4.6}$$

Daß $\mathbf{grad}_\Sigma f$ in Richtung des größten Anstiegs von f weist, erhellt die Betrachtung des Kurvenintegrals, in dessen Integranden f als Wichtung der Funktion $\mathbf{n}$ verstanden werden kann. Für die Menge der Funktionen f, für die der Grenzwert in (4.6) für alle $P \in \Sigma$ im eigentlichen Sinne existiert, ist durch (4.6) eine eindeutige Abbildung $f \to \mathbf{grad}_\Sigma f$ gegeben, weshalb die Operatorenschreibweise gerechtfertigt ist: $\mathbf{grad}_\Sigma$ ist ein Operator einer Teilmenge der skalaren Funktionen auf Σ in der Menge der vektoriellen Funktionen auf Σ.

Es sei Σ in Parameterform $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta)$ gegeben. Für das differentielle Wegelement $\mathrm{d}s$ auf Σ erhält man bekanntlich

$$\mathrm{d}s^2 = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}}_{E} \mathrm{d}\xi^2 + 2 \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}}_{F} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}}_{G} \mathrm{d}\eta^2, \tag{4.7}$$

eine quadratischen Differentialform, die auch erste Fundamentalform der Flächentheorie genannt wird.[2] Sind ξ und η *orthogonale* Koordinaten auf Σ, so daß F identisch verschwindet, und $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ die (normierten) Tangentenvektoren der ξ- bzw. η-Linien, so erhält man als differentielle Darstellung des flächenartigen Gradienten

$$\mathbf{grad}_\Sigma[f(\xi, \eta)] = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \mathbf{e}_\xi + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta. \tag{4.8}$$

Unabhängig davon ist der Operator $\mathbf{grad}_\Sigma$ nicht von der Wahl der Parameterdarstellung der Fläche Σ und somit weder von der Wahl der Flächenkoordinaten ξ und η auf Σ noch von ihrer Lage bezüglich irgendeines räumlichen Fixpunktes abhängig, denn er ist mit (4.6) koordinatenfrei definiert.

Ich werde nun die differentielle Darstellung des flächenartigen Gradienten bei Zugrundelegung einer Koordinatenfläche eines orthogonalen krummlinigen Rechtssystems untersuchen. Die Transformation von orthogonalen krummlinigen auf kartesische Koordinaten sei durch die Funktion $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ vermittelt. Für eine fest gewählte Koordinate $w = w_0$ ist dies eine Parameterdarstellung der w-Fläche $w = w_0$, und es sind u und v orthogonale Koordinaten auf dieser Fläche. Offensichtlich kann man die beiden nicht verschwindenden Koeffizienten E und G ihrer ersten Fundamentalform aus den metrischen Koeffizienten g_u, g_v und g_w des (räumlichen)

[1] Ist in jedem Punkt von k der Flächennormalenvektor $\mathbf{N}$ im Sinne einer Rechtsschraube bezüglich eines Umlaufsinnes auf k orientiert und $\mathbf{t}$ der Tangentenvektor von k, so gilt $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{N}$.

[2] Wie üblich ist der Term $(\mathrm{d}s)^2$ durch $\mathrm{d}s^2$ abgekürzt.

krummlinigen Systems berechnen, denn es gilt

$$E(u,v) = g_u^2(u,v,w_0) \tag{4.9}$$

$$G(u,v) = g_v^2(u,v,w_0), \tag{4.10}$$

was man bei Betrachtung der Definitionen der g_i und (4.7) sofort verifiziert. Damit erhält man für jede Fläche $w = w_0$ und eine auf ihr definierte skalare Funktion $f(u,v)$

$$\mathbf{grad}_{w_0}[f(u,v)] = \frac{1}{g_u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{g_v}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\mathbf{e}_v. \tag{4.11}$$

Wie auch im folgenden sind die g_i stets als Funktionen auf der Fläche $w = w_0$ zu betrachten und nicht als skalare Felder.

Auch $\mathbf{grad}_{w_0}$ ist koordinatenunabhängig. Die Zugrundelegung einer Koordinatenfläche legt die Vermutung nahe, der Gradient wäre in gewisser Weise von w_0 abhängig. Dies ist jenachdem, wie man eine solche Aussage interpretiert, falsch oder unsinnig: Die durch $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v,w_0)$ dargestellte Fläche bzw. deren Eigenschaften hängen weder von der Wahl ihrer orthogonalen Flächenkoordinaten u und v noch von ihrer Lage bezüglich irgendeines Koordinatenursprunges ab. Andererseits ist bei Zugrundelegung *ein und derselben* Fläche und (nur) auf ihr definierten Funktionen die Betrachtung des Gradienten auf einer anderen Fläche ohne jeglichen Sinn.

Betrachtet man ein skalares Feld $g(u,v,w)$, so ist $f(u,v) = g(u,v,w_0)$ eine auf der Fläche $w = w_0$ definierte Funktion. Ein Zusammenhang mit dem räumlichen Gradienten ist dann durch

$$\mathbf{grad}_{w_0} f = \left[(\mathbf{e}_w \times \mathbf{grad} g) \times \mathbf{e}_w\right]_{w=w_0} \tag{4.12}$$

$$= \left[\mathbf{grad} g - (\mathbf{e}_w \cdot \mathbf{grad} g)\,\mathbf{e}_w\right]_{w=w_0} \tag{4.13}$$

gegeben. Für ein nicht von w abhängendes Skalarfeld g ergibt sich demzufolge

$$\mathbf{grad}_{w_0} f = \left[\mathbf{grad} g\right]_{w=w_0}. \tag{4.14}$$

4.1.2 Die flächenartige Divergenz

Es sei $\mathbf{F}$ eine auf einer Fläche Σ definierte vektorielle Funktion, $\sigma \in \Sigma$ ein (einfach zusammenhängendes) Flächenstück mit dem Inhalt A, P ein innerer Punkt und k die Randkurve von σ. Jedem Punkt von k sei der in der Tangentialebene von Σ liegende, ins Äußere von σ weisende Normalenvektor $\mathbf{n}$ von k zugeordnet. Die flächenartige Divergenz von $\mathbf{F}$ im Punkte P definiere ich gemäß

$$[\mathrm{div}_\Sigma \mathbf{F}](P) = \lim_{\sigma \to P} \frac{1}{A(\sigma)} \oint_k \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s. \tag{4.15}$$

Die physikalische Deutung dieses Skalarfeldes als flächenartige Quellendichte von $\mathbf{F}$ wird sofort klar, wenn man $\mathbf{F}$ zunächst der Bedingung unterwirft, keine Normalenkomponente bezüglich Σ zu besitzen, weil dann die Feldlinien von **F** auf Σ liegen.[3] Läßt man eine Normalenkomponente zu, so leistet diese zu div_Σ offenbar keinen Beitrag, denn ihr Skalarprodukt mit **n** verschwindet überall. Mithin ist die flächenartige Divergenz bezüglich Σ für ein beliebiges Vektorfeld mit der flächenartigen Divergenz seiner bezüglich Σ tangentialen Komponente identisch.

Sind ξ und η orthogonale Koordinaten auf Σ, so erhält man die differentielle Darstellung

$$\mathrm{div}_\Sigma \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{G}F_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\sqrt{E}F_\eta)\right]. \tag{4.16}$$

Für die Koordinatenfläche $w = w_0$ eines orthogonalen Rechtssystems und einer auf ihr definierten vektoriellen Funktion $\mathbf{F}(u, v)$ ergibt sich

$$\mathrm{div}_{w_0}[\mathbf{F}(u, v)] = \frac{1}{g_u g_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(g_v F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(g_u F_u)\right]. \tag{4.17}$$

Daß die Normalenkomponente F_w nicht in die Divergenz eingeht, kann man auch durch

$$\mathrm{div}_{w_0}\mathbf{F} = \mathrm{div}_{w_0}[(\mathbf{e}_w \times \mathbf{F}) \times \mathbf{e}_w] \tag{4.18}$$

zum Ausdruck bringen, wenn man $\mathbf{e}_w$ zunächst nur als Abkürzung für $\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$ ansieht.

Betrachtet man ein Vektorfeld $\mathbf{G}(u, v, w)$, so ist $\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{G}(u, v, w_0)$ eine auf der Fläche $w = w_0$ definierte Funktion. Ein Zusammenhang mit der Rotation ist dann durch

$$\mathrm{div}_{w_0}\mathbf{F} = \Big[\mathbf{e}_w \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{e}_w \times \mathbf{G})\Big]_{w=w_0} \tag{4.19}$$

gegeben, was man (4.17) und der Koordinatendarstellung der Rotation leicht entnimmt. Ein Zusammenhang mit der räumlichen Divergenz läßt sich zumindest dann angeben, wenn das zur Darstellung von **G** verwendete Koordinatensystem eines mit wirbelfreiem $\mathbf{e}_w$ ist. Unter Beachtung von

$$\mathrm{div}[(\mathbf{e}_w \times \mathbf{G}) \times \mathbf{e}_w] = \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{e}_w \times \mathbf{G}) - (\mathbf{e}_w \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{e}_w)$$

und (4.19) erhält man offenbar die Beziehung

$$\mathrm{div}_{w_0}\mathbf{F} = \Big[\mathrm{div}[(\mathbf{e}_w \times \mathbf{G}) \times \mathbf{e}_w]\Big]_{w=w_0} \tag{4.20}$$

$$= \Big[\mathrm{div}\mathbf{G} - \mathrm{div}[(\mathbf{e}_w \cdot \mathbf{G})\mathbf{e}_w]\Big]_{w=w_0}. \tag{4.21}$$

Für ein Vektorfeld **G**, dessen w-Komponente beidseitig der Fläche $w = w_0$ (wenigstens im Bereich $w_0 - \varepsilon < w < w_0 + \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$) verschwindet, ergibt sich demzufolge

$$\mathrm{div}_{w_0}\mathbf{F} = \Big[\mathrm{div}\mathbf{G}\Big]_{w=w_0}. \tag{4.22}$$

Das Verschwinden von $\mathbf{e}_w \cdot \mathbf{G}$ auf der Fläche $w = w_0$ allein ist für (4.22) nicht hinreichend. Dies ist insofern interessant, als daß in beiden Fällen mittels $\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{G}(u, v, w_0)$ dieselbe Funktion **F** auf $w = w_0$ definiert wird.

[3] Diese Aussage ist zwar suggestiv aber unexakt. Es wird folgende Überlegung impliziert: Ist **G** ein Vektorfeld, das auf Σ keine Normalenkomponente besitzt, so existieren Feldlinien, die vollständig auf dieser Fläche verlaufen. Betrachtet man **G** nun lediglich auf Σ, so ist $\mathbf{F} = \mathbf{G}_\Sigma$ eine auf Σ definierte Vektorfunktion, die man durch Feldlienien veranschaulichen kann.

4.1.3 Der flächenartige LAPLACEsche Operator

Den flächenartigen LAPLACEschen Operator führe ich durch

$$\Delta_\Sigma = \mathrm{div}_\Sigma \mathbf{grad}_\Sigma \tag{4.23}$$

ein, so daß man seine differentielle Darstellung direkt aus (4.8) und (4.16) erhält:

$$\Delta_\Sigma f = \frac{1}{\sqrt{EG}}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial f}{\partial\eta}\Big)\Big]. \tag{4.24}$$

Für ein orthogonales Rechtssystem ist dann analog

$$\Delta_{w_0} = \mathrm{div}_{w_0}\mathbf{grad}_{w_0}, \tag{4.25}$$

und in Koordinaten erhält man

$$\Delta_{w_0}[f(u,v)] = \frac{1}{g_u g_v}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial f}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\Big]. \tag{4.26}$$

Ist $g(u,v,w)$ ein in einem System mit $\mathbf{rot}(\mathbf{e}_w) = \mathbf{0}$ betrachtetes, bezüglich w konstantes skalares Feld, so gilt für die durch $f(u,v) = g(u,v,w_0)$ definierte Funktion

$$\Delta_{w_0}[f(u,v)] = \big[\Delta g\big]_{w=w_0}, \tag{4.27}$$

denn es besitzt $\mathbf{grad}g$ dann nirgends eine w-Komponente, so daß die Beziehung (4.22) gilt. Von diesem Zusammenhang kann man sich auch vorteilhaft durch Vergleich der Koordinatendarstellungen von Δ_{w_0} und Δ überzeugen. Für ein nicht von w abhängendes Skalarfeld gilt zunächst einmal

$$\Delta g = \frac{1}{g_u g_v g_w}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v g_w}{g_u}\frac{\partial g}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{g_u g_w}{g_v}\frac{\partial g}{\partial v}\Big)\Big]. \tag{4.28}$$

Die Koordinatendarstellung von $\mathbf{rot}(\mathbf{e}_w)$ beweist die Äquivalenz

$$\mathbf{rot}(\mathbf{e}_w) \equiv \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial g_w}{\partial u} \equiv \frac{\partial g_w}{\partial v} \equiv 0, \tag{4.29}$$

weshalb (4.28) die Gestalt

$$\Delta g = \frac{1}{g_u g_v}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial g}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{g_u}{g_v}\frac{\partial g}{\partial v}\Big)\Big] \tag{4.30}$$

annimmt. Wegen

$$\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v}{g_u}\frac{\partial g}{\partial u}\Big) + \ldots\Big]_{w=w_0} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g_v(u,v,w_0)}{g_u(u,v,w_0)}\frac{\partial g(u,v,w_0)}{\partial u}\Big) + \ldots \tag{4.31}$$

ergibt sich schließlich (4.27).

4.2 Konforme Abbildungen

Mit dem Begriff der konformen Abbildung verbindet man für gewöhnlich eine Abbildung einer *ebenen* Punktmenge auf eine andere. Eine Einschränkung auf Ebenen ist jedoch keineswegs notwendig; man kann auch gekrümmte Flächen und Räume konform aufeinander beziehen. Ich werde mich in diesem Abschnitt mit konformen Abbildungen regulärer Flächen auf die Ebene beschäftigen, um mich schließlich der Transformation des flächenartigen Laplaceschen Operators zu widmen.

4.2.1 Definition der flächenartigen konformen Abbildung

Eine Abbildung einer Fläche auf eine andere nennt man konform, wenn die Gestalt kleiner Figuren annähernd erhalten bleibt. Als präziesere Definition kann man folgende Erklärung geben: Es sei eine eindeutige und stetige Abbildung eines flächenartigen Gebietes Σ_O auf ein ebenes Gebiet Σ_B vorgelegt, so daß jeder regulären Kurve $k_O \in \Sigma_O$ eine reguläre Bildkurve k_B zugeordnet ist.[4] Durch einen Punkt $P_0 \in \Sigma_O$ sei eine Kurve gelegt und ein Kurvenstück durch einen zweiten Punkt P abgegrenzt; es sei s_O die Bogenlänge dieses Kurvenstücks und s_B jene des Bildkurvenstücks. Existiert der Grenzwert

$$M = \lim_{P \to P_0} \frac{s_B}{s_O} \tag{4.32}$$

im eigentlichen Sinne für jeden Punkt P_0 und ist von der Wahl der durch ihn verlaufenden Kurve unabhängig und von Null verschieden, so möge die Abbildung konform heißen. Faßt man s_B als Funktion von s_O auf, wird offensichtlich, daß man es mit einem Differentialquotienten zu tun hat

$$M = \lim_{s_O \to 0} \frac{s_B(0 + s_O) - s_B(0)}{s_O} = \frac{\mathrm{d}s_B}{\mathrm{d}s_O}, \tag{4.33}$$

der an der Stelle $s_O = 0$, also im betrachteten Punkt zu nehmen ist, weshalb schließlich M bei Existenz des Grenzwertes eine skalare Funktion auf Σ_O ist.

Da die Untersuchung konformer Abbildungen schließlich doch in analytischer Form erfolgt, kann man eine formale Definition auch sinnvoll unter Verwendung von Begriffen aus der Differentialgeometrie geben: Die Flächen Σ_O und Σ_B seien in Parameterform

$$\Sigma_O : \quad \mathbf{r}_O = \mathbf{r}_O(\xi, \eta) \tag{4.34}$$

$$\Sigma_B : \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B(x, y) \tag{4.35}$$

gegeben, so daß ξ und η als Koordinaten auf Σ_O, x und y als Koordinaten auf Σ_B betrachtet werden können. Sind α und β Funktionen auf Σ_O, so heißt die durch

$$x = \alpha(\xi, \eta) \tag{4.36}$$

$$y = \beta(\xi, \eta) \tag{4.37}$$

[4] Eine Kurve heißt regulär, wenn sie in jedem Punkt eine Normalenebene besitzt.

vermittelte Abbildung $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ *konform*, wenn der Quotient der differentiellen Bogenelemente $\mathrm{d}s_B/\mathrm{d}s_O$ nur von den Koordinaten ξ und η, nicht jedoch von den Differentialen $\mathrm{d}\xi$ oder/und $\mathrm{d}\eta$, oder, anders ausgedrückt, der Term M aus

$$\mathrm{d}s_B = M\,\mathrm{d}s_O \tag{4.38}$$

nur von den Flächenkoordinaten abhängig ist und nirgends verschwindet.

Offenbar ist jede Koordinatentransformation (Transformation der Flächenkoordinaten) ein Spezialfall der konformen Abbildung. Es ist dann $\Sigma_O = \Sigma_B$ und $\mathrm{d}s_O \equiv \mathrm{d}s_B$, weshalb folglich $M \equiv 1$ gilt.

4.2.2 Eigenschaften der vermittelnden Funktionen

Durch geometrische Überlegungen macht man sich leicht klar, daß die von den Funktionen α und β zur Vermittlung einer konformen Abbildung zu fordernden Eigenschaften sowohl von der Gestalt der Fläche Σ_B als auch von der Wahl ihrer Flächenkoordinaten abhängen. Ich werde dieses Phänomen an späterer Stelle untersuchen und hier Σ_B als *eben* und ihre Koordinaten x, y als *kartesisch* annehmen. Um die folgenden Betrachtungen abzukürzen, setze ich außerdem ξ, η als orthogonal und die auf Σ_O definierten Funktionen E_O, G_O, α und β als zweimal stetig differenzierbar voraus.

Es sei durch (4.36) und (4.37) eine konforme Abbildung der Fläche Σ_O mit den orthogonalen Koordinaten ξ, η auf die Ebene Σ_B mit den kartesischen Koordinaten x, y gegeben. Aus der ersten Fundamentalform der Flächen erhält man für die Bogenelemente

$$\mathrm{d}s_O^2 = E_O\mathrm{d}\xi^2 + G_O\mathrm{d}\eta^2 \tag{4.39}$$

$$\mathrm{d}s_B^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2. \tag{4.40}$$

Andererseits gilt für die vollständigen Differentiale der Funktionen α und β

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \tag{4.41}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta, \tag{4.42}$$

so daß man für $\mathrm{d}s_B$ schließlich erhält

$$\mathrm{d}s_B^2 = \left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \xi^2}\right)\mathrm{d}\xi^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \eta^2}\right)\mathrm{d}\eta^2. \tag{4.43}$$

Wegen (4.38), der Unabhängigkeit der Differentiale $\mathrm{d}\xi$ und $\mathrm{d}\eta$ voneinander und der Unabhängigkeit von M von den Differentialen erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$M^2 = \frac{1}{E_O}\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{E_O}\frac{\partial y^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{G_O}\frac{\partial x^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{G_O}\frac{\partial y^2}{\partial \eta^2} \tag{4.44}$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}. \tag{4.45}$$

Die Gleichung (4.45) entspricht der Tatsache, daß ξ, η vermöge der Transformation nun auch orthogonale Koordinaten der Ebene Σ_B sind, wovon man sich durch Differentiation der Funktion $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ leicht überzeugt.[5] Das System (4.44), (4.45) hat genau zwei Lösungen, die man zunächst als notwendige Bedingung dafür, daß α und β eine konforme Abbildung vermitteln, zu verstehen hat:[6]

$$\frac{1}{\sqrt{E_O}}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \pm\frac{1}{\sqrt{G_O}}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \wedge \tag{4.46}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G_O}}\frac{\partial x}{\partial \eta} = \mp\frac{1}{\sqrt{E_O}}\frac{\partial y}{\partial \xi}. \tag{4.47}$$

Zusätzlich folgt aus $M \neq 0$, daß nicht beide Gleichungen gleichzeitig verschwinden dürfen. Man prüft nun leicht, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Durch Differentiation von (4.46), (4.47) erhält man folgende interessante Eigenschaft der vermittelnden Funktionen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{E_O G_O}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\frac{G_O}{E_O}}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\frac{E_O}{G_O}}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right)\right] &= 0 \\
\frac{1}{\sqrt{E_O G_O}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\frac{G_O}{E_O}}\frac{\partial \beta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\frac{E_O}{G_O}}\frac{\partial \beta}{\partial \eta}\right)\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Mit dem flächenartigen LAPLACEschen Operator aus Abschnitt 4.1.3 kann man dafür auch

$$\Delta_{\Sigma_O}\alpha = 0 \tag{4.48}$$

$$\Delta_{\Sigma_O}\beta = 0 \tag{4.49}$$

schreiben und von α und β sagen, sie wären (auf Σ_O) *harmonisch*. Die Sinnfälligkeit dieser Aussage wird sich etwas später noch aus einem anderen Grund ergeben.

[5] Dies ist auch dann noch der Fall, wenn x, y *irgendwelche* orthogonalen Koordinaten einer *gekrümmten* Fläche Σ_B sind.

[6] Ist der Originalbereich Σ_O ebenfalls eine Ebene und sind ξ, η kartesische Koordinaten, so ist $E_O = G_O = 1$. Diese Geometrie dient in der Funktionentheorie zur Veranschaulichung der konformen Abbildung; die Gleichungen (4.46), (4.47) sind dort als CAUCHY-RIEMANNsche Differentialgleichungen bekannt.

4.3 Transformation des LAPLACEschen Operators

4.3.1 Transformation in die Ebene

Eine konforme Abbildung hat offenbar die Eigenschaft, (zumindest lokal) umkehrbar zu sein. Dies folgt aus den bekannten Sätzen über implizite Funktionen und der Eigenschaft der Funktionaldeterminante für α, β, nirgends zu verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial x/\partial \eta \\ \partial y/\partial \xi & \partial y/\partial \eta \end{vmatrix} = \pm\sqrt{\frac{G_O}{E_O}}\Big(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \xi^2}\Big) = \pm\sqrt{E_O G_O}\, M^2 \neq 0, \tag{4.50}$$

womit die Existenz und zweimalige stetige Differenzierbarkeit zweier in der Ebene Σ_B definierter Funktionen γ, δ mit der Eigenschaft

$$\xi = \gamma(x, y) \tag{4.51}$$

$$\eta = \delta(x, y) \tag{4.52}$$

gesichert ist, sofern α und β weiterhin als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden.

Auf Σ_O sei nun eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g(\xi, \eta)$ gegeben. Wegen der Umkehrbarkeit der konformen Abbildung ist g vermöge (4.51), (4.52) auch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von x und y, welche ich mit $f(x, y)$ bezeichne. Da x und y wegen (4.36), (4.37) Funktionen von ξ und η sind, erhält man die Originalfunktion als mittelbare Funktion zu $g(\xi, \eta) = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$.

Ich werde nun die Funktion $\Delta_{\Sigma_O} g(\xi, \eta)$ untersuchen. In Anwendung der Kettenregel erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\frac{\partial g}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Unter Einbeziehung von

$$\Delta_{\Sigma_B} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{E_0}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{1}{G_0}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

erhält man aus (4.24)

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\Sigma_O} g(\xi,\eta) &= \frac{1}{E_0}\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\Big(\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\frac{G_0}{E_0}} + \frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E_0}{G_0}}\Big) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{E_0}\frac{\partial x^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial x^2}{\partial\eta^2}\Big) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(\frac{1}{E_0}\frac{\partial y^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial y^2}{\partial\eta^2}\Big) + \\
&\quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big(\frac{1}{E_0}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta}\Big) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big[\frac{1}{E_0}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\Big(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\frac{G_0}{E_0}} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E_0}{G_0}}\Big)\Big] + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big[\frac{1}{E_0}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\Big(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\frac{G_0}{E_0}} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E_0}{G_0}}\Big)\Big] \\
&= M(\xi,\eta)\cdot\Delta_{\Sigma_B} f(x,y) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta_{\Sigma_O}\alpha(\xi,\eta) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta_{\Sigma_O}\beta(\xi,\eta).
\end{aligned}
$$

Da α und β nach Abschnitt 4.2.2 auf Σ_O harmonisch sein müssen, um ein konforme Abbildung zu vermitteln, folgt schließlich

$$\Delta_{\Sigma_O} g(\xi,\eta) \;=\; M(\xi,\eta)\cdot\Delta_{\Sigma_B} f(x,y). \tag{4.53}$$

Das bedeutet im speziellen, daß sich eine auf einer Fläche definierte harmonische Funktion gegenüber einer konformen Abbildung in die Ebene invariant verhält.

Wegen der Umkehrbarkeit der konformen Abbildung ergibt sich hieraus ein weiterer Grund dafür, den Operator Δ_{Σ_O} als (Σ_O-)flächenartigen LAPLACEschen Operator zu bezeichnen und eine auf Σ_O definierte Funktion f mit der Eigenschaft $\Delta_{\Sigma_O} f \equiv 0$ harmonisch zu nennen: Eine in der Ebene definierte harmonische Funktion ist nämlich auch nach einer konformen Abbildung auf eine gekrümmte Fläche dort harmonisch.

Beispiel: Es seien Σ_O und Σ_B parallele Ebenen im Raum, gegeben durch die Parameterformen

$$
\begin{aligned}
\Sigma_O: \qquad \mathbf{r}_O &= r\cos\varphi\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\mathbf{e}_y + z_O\mathbf{e}_z \\
\Sigma_B: \qquad \mathbf{r}_B &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z_B\mathbf{e}_z.
\end{aligned}
$$

Für die differentiellen Wegelemente dieser Ebenen erhält man nach Gleichung (4.7)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s_O^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 \\
\mathrm{d}s_B^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2,
\end{aligned}
$$

weshalb sich die Koeffizienten ihrer ersten Fundamentalform zu

$$
\begin{aligned}
E_O = 1, \qquad F_O = 0, \qquad G_O = r^2 \\
E_B = 1, \qquad F_B = 0, \qquad G_B = 1
\end{aligned}
$$

bestimmen. Eine Abbildung von Σ_O auf Σ_B sei durch folgende Gleichungen vermittelt

$$\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &= r\sin\varphi; \end{aligned}$$

x und y sind auf Σ_O definierte Funktionen, deren Werte die Bildkoordinaten angeben. Ich prüfe diese Abbildung nun hinsichtlich ihrer Konformität. Als notwendige Bedingung ergab sich, daß beide Funktionen auf Σ_O harmonisch sind, was offensichtlich der Fall ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}\Big) &= \cos\varphi - \cos\varphi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi}\Big) &= \sin\varphi - \sin\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Allerdings sind auch die hinreichenden Bedingungen (4.46), (4.47) wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} &= +\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi} &= -\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} \end{aligned}$$

erfüllt, weshalb es sich tatsächlich um eine konforme Abbildung (ohne Umlegung der Winkel) handelt. Ich untersuche nun den Abbildungsmaßstab (im Kleinen) M und schreibe dafür $\mathrm{d}s_B^2$ als Funktion von r, φ, $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\varphi$ entsprechend Gleichung (4.43) und erhalte

$$\mathrm{d}s_B^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 = \mathrm{d}s_O^2,$$

weshalb $M \equiv 1$ gilt. Dies ist nicht verwunderlich, weil bei der gewählten Abbildung für die die Flächen beschreibenden Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_O = (z_B - z_O)\mathbf{e}_z$$

gilt, weshalb es sich nur um eine Verschiebung der Ebene Σ_O entlang der z-Achse handelt. Wählt man $z_B = z_O$, so gilt $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_O$, weshalb dann jeder Punkt der Ebene Σ_O auf sichselbst abgebildet wird. Diese konforme Abbildung ist offenbar die Transformation von polaren auf kartesische Koordinaten. Ist auf Σ_O eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g(r,\varphi)$ gegeben, welche durch die betrachtete konforme Abbildung bei beliebiger Wahl von z_O und z_B die auf Σ_B definierte zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x,y)$ „erzeugt“, dann ergibt sich der bekannte Zusammenhang zwischen $\Delta_{\Sigma_O}g$ und $\Delta_{\Sigma_B}f$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

4.3.2 Transformation auf eine gekrümmte Fläche

Obwohl es für die Lösung der flächenartigen POISSONschen Gleichung genügt, nur die Transformation in die Ebene zu betrachten, möchte ich der Vollständigkeit halber noch etwas zur Transformation des LAPLACEschen Operators bei konformem Bezug zweier gekrümmter Flächen aufeinander aussagen, ohne jedoch Beweise zu erbringen.

Wie in Abschnitt 4.2.2 bereits angesprochen, sind die an die abbildungsvermittelnden Funktionen α und β zu stellenden Forderungen abhängig von der Gestalt der Bildfläche Σ_B und den auf ihr verwendeten Koordinaten. In den Gleichungen (4.46), (4.47) werden also im allgemeinen Fall zusätzlich die metrischen Koeffizienten E_B und G_B auftreten, weshalb schließlich α und β i.allg. *nicht harmonisch* sein werden.[7] Nichtsdestotrotz ist die aus dem vorigen Abschnitt bekannte Beziehung

$$\Delta_{\Sigma_O} g \quad = \quad M \, \Delta_{\Sigma_B} f \tag{4.54}$$

stets erfüllt und unabhängig von den auf den beiden Flächen verwendeten Koordinaten. Dies läßt sich bei Zugrundelegung orthogonaler Koordinaten auf Σ_O und Σ_B mit einigem rechnerischen Aufwand nachweisen. Es ist eine Tatsache, die von vornherein zu erwarten war, denn die Eigenschaft einer auf einer Fläche definierten Funktion, harmonisch zu sein, ist schließlich unabhängig von ihrer Beschreibung durch irgendwelche Koordinaten!

[7] Man kann sich diesen Sachverhalt anhand des einfachen Beispiels der Transformation von ebenen kartesischen auf ebene polare Koordinaten klarmachen. Die Abbildungsvorschrift lautet in diesem Fall (für die Halbebene $x > 0$) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$; weder r noch φ sind aber harmonisch, obwohl die Abbildung konform ist.

4.4 Lösung der POISSONschen Gleichung

4.4.1 Ein Lösungsalgorithmus

Angenommen, es wäre eine Vorschrift in Form zweier auf Σ_O definierter harmonischer Funktionen α und β und somit vermöge (4.44) auch die Maßstabsfunktion M für eine konforme Abbildung von Σ_O in die Ebene Σ_B bereits bekannt und die auf Σ_B definierten (i.allg. nicht harmonischen) Umkehrfunktionen γ und δ ermittelt. Dann kann man folgenden Algorithmus zur Berechnung einer Lösung von

$$\Delta_{\Sigma_O} f_O(\xi,\eta) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{EG}}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial f_O}{\partial\xi}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial f_O}{\partial\eta}\Big)\Big] \quad = \quad 2\pi\mu_O(\xi,\eta) \tag{4.55}$$

angeben:

1. Man bestimme aus $\mu_O(\xi,\eta)$ und $M_O(\xi,\eta)$ die Funktionen

$$\mu_B(x,y) \quad = \quad \mu_O[\gamma(x,y),\delta(x,y)] \tag{4.56}$$

$$M_B(x,y) \quad = \quad M_O[\gamma(x,y),\delta(x,y)]. \tag{4.57}$$

   Die äquivalente Aufgabe in der Ebene lautet dann

$$\Delta_{\Sigma_B} f_B(x,y) \quad = \quad 2\pi\frac{\mu_B(x,y)}{M_B(x,y)}. \tag{4.58}$$

2. Man berechne das ebene logarithmische Potential zur ebenen Belegung μ_B/M_B gemäß

$$V(x,y) \quad = \quad \int\limits_{y'}\int\limits_{x'}\frac{\mu_B}{M_B}(x',y')\ln\,\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'; \tag{4.59}$$

   es ist dann $f_B(x,y) = V(x,y)$ eine Lösung von (4.58).

3. Eine Lösung $f_O(\xi,\eta)$ von (4.55) erhält man durch Rücktransformation

$$f_O(\xi,\eta) \quad = \quad f_B[\alpha(\xi,\eta),\beta(\xi,\eta)]. \tag{4.60}$$

Man prüft nun leicht, daß f_O tatsächlich eine Lösung von (4.55) ist.

Die Lösung der Gleichung (4.55) ist somit im wesentlichen auf das Auffinden der harmonischen Funktionen α und β reduziert. Es bleibt also zu untersuchen, ob man stets zwei Funktionen $x(\xi,\eta)$ und $y(\xi,\eta)$ als Lösungen des Systems

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial\xi} \quad = \quad +\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta} \tag{4.61}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial\eta} \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial\xi} \tag{4.62}$$

bestimmen kann. Angenommen, es wäre eine harmonische Funktion y, d.h. eine Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta} = 0$$

bereits berechnet. - Für einige Flächen kann man mittels Produktansatz eine Lösung dieser Gleichung berechnen. - Dann ist also das inhomogene System (4.61), (4.62) zu lösen. Zweckmäßig bestimmt man dazu eine partikuläre Lösung von (4.61) und versucht durch Addition einer Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung auch (4.62) zu lösen. Ich mache also den Ansatz

$$x(\xi,\eta) = \int\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi + f(\xi,\eta). \tag{4.63}$$

Es ist dann

$$\frac{\partial x}{\partial\eta} = \int\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial f}{\partial\eta},$$

weshalb (4.62) genau dann genüge getan wird, wenn man f als Lösung von

$$\frac{\partial f}{\partial\eta} = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial y}{\partial\xi}-\int\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi = -\psi(\xi,\eta)$$

bestimmt. Damit nun x aus (4.63) eine Lösung von (4.61) ist, muß f der Bedingung $\partial f/\partial\xi = 0$ genügen, weshalb ψ ebenfalls von ξ unabhängig sein muß. Dies ist offenbar der Fall, denn es gilt

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta} = 0,$$

weil y als harmonische Funktion bestimmt wurde. Dann jedoch kann x vermöge

$$x(\xi,\eta) = \int\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi-\int\Big(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\int\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi\Big)\mathrm{d}\eta$$

bestimmt werden. Man prüft durch Differentiation leicht nach, daß x das System (4.61), (4.62) tatsächlich löst.

4.4.2 Physikalische Deutung der Lösung

Eingangs erwähnte ich bereits, daß eine Lösung $f(\xi,\eta)$ der Gleichung

$$\Delta_\Sigma f(\xi,\eta) \quad = \quad 2\pi\mu(\xi,\eta) \tag{4.64}$$

i.allg. nicht als Potential zur flächenartigen Belegung μ in physikalischem Sinne zu verstehen ist. Unter einem solchen versteht man nämlich das skalare Potential des durch die Belegung verursachten konservativen Kraftfeldes. Deutet man μ als flächenartige Massebelegung von Σ, so wird die auf eine auf Σ befindliche Probemasse wirkende Gravitationskraft i.allg. auch eine bezüglich Σ normale Komponente aufweisen, es sei denn, Σ ist eben. Der Gradient einer Lösung von (4.64) ist jedoch stets tangential gerichtet, besitzt also keinesfalls eine Normalenkomponente, weil gerade nach einer nur von ξ und η abhängigen Funktion gesucht wird. Das physikalische Problem des Auffindens eines *räumlichen* Potentials einer flächenartigen Belegung wird bekanntlich durch das Potential der einfachen Schicht gelöst. Betrachtet man dieses auf der „erzeugenden“ Fläche selbst, wodurch man offenbar eine auf dieser Fläche definierte Funktion erhält, so wird diese umgekehrt nicht der Gleichung (4.64) genügen.

Der Grund für diese Diskrepanz besteht sicherlich darin, daß ein Potential in physikalischem Sinne stets eine im Raum definierte Funktion ist, weil Kräfte stets als räumlich wirkend anzusehen sind. Ebene Betrachtungen führen lediglich dann zum Erfolg, wenn die gegebene Belegungsfunktion unabhängig von einer geradlinigen Koordinate ist, d.h., man erhält weiterhin eine im Raum definierte Funktion, nur ist diese beispielsweise von z unabhängig.

Man könnte den physikalischen Gehalt einer Lösung von (4.64) auch folgendermaßen beschreiben: Würden die Kraftlinien keinen Raum kennen und somit auf Σ verlaufen, so wäre jede Lösung von (4.64) ein Potential des durch die flächenartige Belegung hervorgerufenen flächenartigen konservativen Kraftfeldes.

A Verwendete Symbole

A.1 Koordinaten

x, y, z	kartesische Koordinaten
ϱ, φ, z	Zylinderkoordinaten
r, ϑ, φ	Kugelkoordinaten
u, v, w	krummlinige orthogonale Raumkoordinaten
x, y	kartesische Koordinaten der Ebene
ξ, η	orthogonale Koordinaten der regulären Fläche Σ
u, v	orthogonale Koordinaten der Koordinatenfläche $w = w_0$

A.2 skalare räumliche Funktionen

φ	skalares elektrodynamisches Potential
ψ	skalares übergeordnetes Potential
U_1, U_2, U_3	BUCHHOLZsche Potentialfunktionen
ϱ	räumliche Dichte der Überschußladungen
g_u, g_v, g_w	metrische Koeffizienten zum krummlinigen Orthonormalsystem
$f, g, V_1, V_2, \xi, \psi$	Hilfsfunktionen, unterschiedlich verwendet

A.3 skalare flächenartige Funktionen

E, F, G	Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Fläche Σ
g_u^2, g_v^2	Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Fläche $w = w_0$
μ	flächenartige Belegungsdichte
M	Maßstabsfunktion der konformen Abbildung

f, g	Hilfsfunktionen, unterschiedlich verwendet

A.4 vektorielle räumliche Funktionen

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Basis des kartesischen Systems
$\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$	Basis des kreiszylindrischen Systems
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$	Basis des Kugelsystems
$\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$	Basis eines krummlinigen orthogonalen Rechtssystems
$\mathbf{e}, \mathbf{e}_w$	Einheitsvektoren eines orthogonalen Koordinatensystems
$\mathbf{c}$	Vektorfeld mit konstanten kartesischen Komponenten, $\mathbf{c} \neq 0$
$\mathbf{e}_c$	$\mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$
$\mathbf{r}$	radial gerichtetes zeitunabhängiges Vektorfeld, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$
$\mathbf{F}$	beliebiges Vektorfeld
$\mathbf{A}$	elektrodynamisches Vektorpotential (Potential der Induktion)
$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$	Buchholzsche (vektorielle) Potentiale, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$
$\mathbf{U}$	übergeordnetes vektorielles Potential

A.5 vektorielle flächenartige Funktionen

$\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$	normierte Tangentenvektoren der ξ- bzw. η-Linien auf Σ
$\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$	normierte Tangentenvektoren der u- bzw. v-Linien auf $w = w_0$
$\mathbf{e}_w$	Normalenvektor der Koordinatenfläche $w = w_0$, $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$
$\mathbf{F}$	beliebige Vektorfunktion

A.6 Mengen und Räume

$\mathbf{F}_n$	geordnetes n-Tupel skalarer Funktionen von Ort und Zeit
$(\mathbf{F}_n), [\mathbf{F}_n]$	Menge und Raum der $\mathbf{F}_n$
$\mathbf{G}_n, (\mathbf{G}_n), [\mathbf{G}_n]$	wie $\mathbf{F}_n, (\mathbf{F}_n), [\mathbf{F}_n]$, aber zweimal stetig differenzierbar
$\mathbf{V}, (\mathbf{V}), [\mathbf{V}]$	Lösung, Lösungsmenge, Lösungsraum des Systems der vier Max-

	WELLschen Gleichungen nebst den Materialgleichungen für **B** und **D** für Medien ohne ferromagnetische oder ferroelektrische Eigenschaften, Zusammenfassung der Felder **B**, **E**, **H**, **D**, **G**, ϱ in dieser Reihenfolge
$\mathbf{A}_4$	elektrodynamisches (Vierer-) Potential von **V**, Zusammenfassung von **A** und φ
$(\mathbf{A}_4)$, $[\mathbf{A}_4]$	Menge und Raum der elektrodynamischen Potentiale von [**V**]

A.7 Operatoren

Δ	skalarer LAPLACEscher Operator, $\Delta = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}$
$\boldsymbol{\Delta}$	vektorieller LAPLACEscher Operator, $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}$
$\square$	skalarer und vektorieller D'ALEMBERTscher Operator
$\mathbf{grad}_\Sigma$	flächenartiger Gradient, anzuwenden auf skalare Funktionen auf Σ
div_Σ	flächenartige Divergenz, anzuwenden auf vektorielle Funktionen auf Σ
Δ_Σ	flächerartiger LAPLACEscher Operator, $\Delta_\Sigma = \mathrm{div}_\Sigma \mathbf{grad}_\Sigma$
Φ, D	skalare Hilfsoperatoren

A.8 Indizes

0	fest gewählte Funktion
O	Original
B	Bild

A.9 weitere Symbole

Σ	reguläre Fläche
s	Bogenlänge eines Raumkurvenstückes
R	Realisierung von r oder ϱ
c	Betrag des konstanten Vektorfeldes **c**
ε	a) skalare Konstante b) Dielektrizitätsmatrix, i.allg. von Ort und Zeit abhängig

μ	Permeabilitätsmatrix, i.allg. von Ort und Zeit abhängig

B Zur Diplomarbeit

B.1 Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, diese Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

B.2 Thesen

1. Jede Lösung des Systems der vier MAXWELLschen Gleichungen und der Materialgleichungen für **B** und **D** für Medien ohne ferromagnetische oder ferroelektrische Eigenschaften läßt sich durch lediglich drei skalare Funktionen von Ort und Zeit darstellen. - Die BUCHHOLZsche Eichforderung an die elektrodynamischen Potentiale ist zulässig.

2. Im Falle verschwindender Raumladungen genügen zur Feldbeschreibung bereits zwei skalare Funktionen von Ort und Zeit. - Die drei betrachteten Eichforderungen sind bei Raumladungsfreiheit *gleichzeitig* zulässig.

3. Jede Lösung des Systems der vier MAXWELLschen Gleichungen und der Materialgleichungen für **B** und **D** für Medien ohne ferromagnetische oder ferroelektrische Eigenschaften läßt sich durch die drei BUCHHOLZschen Potentialfunktionen darstellen. - Zu jeder Vektorfunktion **A** und einem wirbelfreien Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems **e** existieren drei skalare Funktionen U_1, U_2, U_3, so daß gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{rot}(U_1\mathbf{e}) + \mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e}) + \mathbf{grad}U_3.$$

4. Bei gleichzeitigem Verschwinden von Raumladungs- und Stromdichte und skalaren Konstanten ε und μ existiert ein Tripel BUCHHOLZscher Potentialfunktionen sowohl bezüglich $\mathbf{e}_c$ als auch bezüglich $\mathbf{e}_r$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \Box U_1 &= 0 \\ \Box U_2 &= 0 \\ U_3 &= 0. \end{aligned}$$

   Es ist $U_1\mathbf{e}$ ein übergeordnetes vektorielles Potential des TE-Anteils bezüglich **e** der Lösung und $\mathbf{rot}(U_2\mathbf{e})$ ein übergeordnetes vektorielles Potential des TM-Anteils bezüglich **e** der Lösung.

C Zur Verteidigung

C.1 Thesen

1. **Felderzeugung durch die elektrodynamischen Potentiale.**
Die Menge der raumladungs- und stromfreien Lösungen des Systems (M) ist vermöge (E) durch die Lösungsmenge des Systems (W) für das BUCHHOLZ-geeichte elektrodynamische Vektorpotential gegeben.

2. **Die** BUCHHOLZ**schen Potentialfunktionen.**
Zu jedem Feld **A** und einem wirbelfreien Einheitsvektor eines orthogonalen Koordinatensystems **e** existieren drei skalare Felder U_1, U_2, U_3, so daß gilt

$$\mathbf{rot}(U_1\mathbf{e}) + \mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{e}) + \mathbf{grad}U_3 \quad = \quad \mathbf{A}.$$

Ist **A** das BUCHHOLZ-geeichte Potential einer Lösung von (M), so nennt man die U_i BUCHHOLZsche Potentialfunktionen bezüglich **e** zur Lösung von (M).

3. **Lösung von (W) mit Hilfe** BUCHHOLZ**scher Funktionen.**
Die Menge der Lösungen des Systems (W) ist vermöge

$$\mathbf{A} \quad = \quad \mathbf{rot}(U_1\mathbf{a}) + \mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{a})$$

durch die Lösungsmenge des Systems

$$\begin{aligned} \Box U_1 &= 0 \\ \Box U_2 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Das zeitlich konstante Bezugsfeld **a** ist entweder zu $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ oder zu $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ zu wählen.

4. **Physikalische Bedeutung der** BUCHHOLZ**schen Funktionen.**
Es ist $\mathbf{A}_1 = \mathbf{rot}(U_1\mathbf{a})$ (bzw. $\mathbf{A}_2 = \mathbf{rotrot}(U_2\mathbf{a})$) ein Potential des raumladungs- und stromfreien TE-Anteils (bzw. TM-Anteils) bezüglich **a** der durch **A** gegebenen Lösung von (M).

C.2 Die betrachteten Gleichungssysteme

C.2.1 Das System (M) der Maxwell- und Materialgleichungen

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \mathrm{rot}\mathbf{H} & -\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & -\mathbf{G} & & = & \mathbf{0}\\
\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & +\mathrm{rot}\mathbf{E} & & & & & = & \mathbf{0}\\
\mathrm{div}\mathbf{B} & & & & & & = & 0\\
 & & & \mathrm{div}\mathbf{D} & & -\varrho & = & 0\\
 & \varepsilon\mathbf{E} & & -\mathbf{D} & & & = & \mathbf{0}\\
\mathbf{B} & & -\mu\mathbf{H} & & & & = & \mathbf{0}
\end{array}$$

C.2.2 Das Erzeugungssystem (E)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathrm{rot}\mathbf{A}\\
\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi\\
\mathbf{D} &= -\varepsilon\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi\right]\\
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{A}\\
\mathbf{G} &= -\frac{1}{\mu}\left[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathbf{grad}\left(\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]\\
\varrho &= -\varepsilon\left[\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}\right]
\end{aligned}$$

C.2.3 Das Wellensystem (W)

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{A} &= 0\\
\Box\mathbf{A} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Fichtenholz, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd.2 und 3. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1987

[2] Hannakam,L.: Einführung in die Feldtheorie. Skripte zur Vorlesung „Theoretische Elektrotechnik“, TU Berlin, 1974

[3] Joos,G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademische Verlagssellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1954

[4] Morse, P.M.; Feshbach, H.: Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill Book Company, New York 1953

[5] Osgood, W.F.: Lehrbuch der Funktionentheorie. B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1920

[6] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980

[7] Solyga, S.: Zerlegung eines Wellenfeldes in TE- und TM-Anteile. Studienarbeit, Institut für Theoretische Elektrotechnik, TU Berlin 1994

[8] Sonntag, J.: Ausgewählte Kapitel zur Theoretischen Elektrotechnik II. Vorlesungsskript, Institut für Theoretische Elektrotechnik, TU Berlin 1991

[9] Stratton, J.A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Company, New York 1941

Weiterhin verwendete Literatur

[10] Blaschke, W.: Einführung in die Differentialgeometrie. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950

[11] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

[12] Filtz, M.: Höhere Potentialtheorie. Vorlesungsskript, Institut für Theoretische Elektrotechnik, TU Berlin, 1993/94

[13] Greuel, O.; Kadner, H.: Komplexe Funktionen und konforme Abbildungen. MINÖL Bd.9, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1982

[14] Günter, N.M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957

[15] Meinhold, P.; Wagner, E.: Partielle Differentialgleichungen. MINÖL Bd.8, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983

[16] Schöne, W.: Differentialgeometrie. MINÖL Bd.6, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1990

[17] Tychonoff, A.N.; Samarski, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959

[18] Wilhelm, W.E.(Hrsg.): Analysis II, Mathematikskripte für das Physikstudium. Sektion Physik der Humboldt-Universität zu Berlin