Klausur

1. *Partielle Integration*. Gegeben seien die reellen Konstanten a und b. Berechnen Sie mittels partieller Integration eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \mathrm{e}^{ax} \cosh bx \tag{1}$$

für jeden der folgenden Fälle:

a) $a = 0 \wedge b = 0$,

b) $a = 0 \wedge b \neq 0$,

c) $a \neq 0 \wedge b = 0$,

d) $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Geben Sie für den ersten Fall eine weitere (d.h. eine von der ersten verschiedene) Stammfunktion an.

2. *Reihen*. Betrachtet sei die Spirale aus Abbildung 1. Sie besteht aus unendlich vielen Halb-

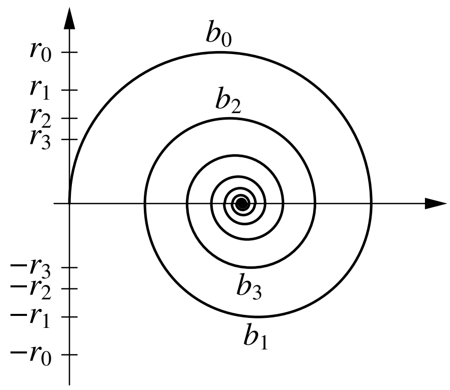

Abbildung 1: Spirale aus Aufgabe 2 für $\alpha = 3/4$.

kreisen mit den Radien $r_0, r_1, r_2, \ldots$, wobei $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ gegeben ist. Alle weiteren Radien ergeben sich aus dem jeweiligen Vorgänger durch Multiplikation mit der Konstanten $\alpha \in (0, \infty)$. Die zugehörigen Bogenlängen seien mit $b_0, b_1, b_2, \ldots$ bezeichnet.

a) Geben Sie für $\alpha = 3/4$ die Folge $\{b_i\}$ der Bogenlängen an (mindestens 4 Glieder).

b) Geben Sie für $\alpha = 3/4$ die Folge $\{s_i\}$ der zugehörigen Partialsummen an (mindestens 4 Glieder).

c) Geben Sie für $\alpha = 3/4$ eine Formel zur Berechnung der Gesamtlänge der ersten n Bögen an.

d) Berechnen Sie für $\alpha = 3/4$ die Länge s der Spirale.

e) Für welche Werte von α besitzt die Spirale eine endliche Länge?

3. *Geometrische Anwendung der Integralrechnung*. Gegeben seien die reelle Konstante R und die Funktion

$$y \;=\; f(x) \;=\; \begin{cases} R + x/2 & : \quad x \le 0 \\ \sqrt{R^2 - x^2} & : \quad x \ge 0 \end{cases} . \tag{2}$$

   a) Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_{01} und x_{02} der Funktion f, und skizzieren Sie ihren Graphen auf dem Intervall $[x_{01}, x_{02}]$.

   b) Skizzieren Sie die Fläche F, welche durch den Graphen von f und die x-Achse berandet wird, und berechnen Sie deren Inhalt A **mittels Integration**. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe bekannter Formeln.

   c) Berechnen Sie **mittels Integration** das Volumen **und** den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe bekannter Formeln.

4. *Taylorreihen*. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) \;=\; \ln x \tag{3}$$

   in eine TAYLORreihe um $x_0 = 1$. Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Reihe, **und** geben Sie ihren Konvergenzbereich an.

5. *Differentialgleichungen*. Gegeben seien folgende Differentialgleichungen für $x(t)$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \;=\; \cos 2t, \tag{4}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \;=\; 0. \tag{5}$$

   a) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem von (5).

   b) Geben Sie die allgemeine Lösung von (5) an.

   c) Bestimmen Sie eine **reelle** partikuläre Lösung der Gleichung (4).

   d) Geben Sie die allgemeine Lösung von (4) an.

Zeit: 120 Minuten
Punkte: 10 pro Aufgabe
Wiederholungsklausur: ab 15. März 2004 nach Vereinbarung - solyga@absinth.net