Aufgaben – Mathematik II (ET) – FHTW-Berlin – 2004-03-19

# Wiederholungsklausur

1. *Partielle Integration*. Gegeben seien die reellen Konstanten $a$ und $b$. Berechnen Sie mittels partieller Integration eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \mathrm{e}^{ax} \sinh bx \tag{1}$$

für jeden der folgenden Fälle:

   a) $a = 0 \land b = 0$,
   b) $a = 0 \land b \neq 0$,
   c) $a \neq 0 \land b = 0$,
   d) $a \neq 0 \land b \neq 0 \land a \neq b$.

   Geben Sie für den ersten Fall eine weitere (d.h. eine von der ersten verschiedene) Stammfunktion an.

2. *Reihen*. Betrachtet sei die Spirale aus Abbildung 1. Sie besteht aus unendlich vielen Halb-

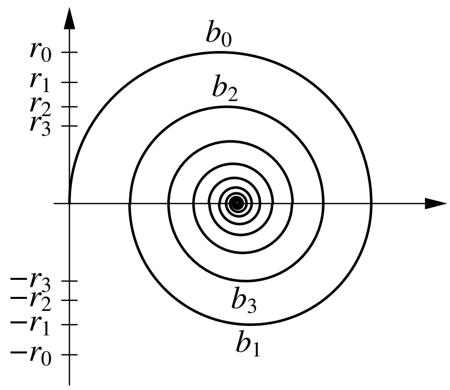


Abbildung 1: Spirale aus Aufgabe 2 für $\alpha = 4/5$.

kreisen mit den Radien $r_0, r_1, r_2, \ldots$, wobei $r_0 = 1\,\mathrm{cm}$ gegeben ist. Alle weiteren Radien ergeben sich aus dem jeweiligen Vorgänger durch Multiplikation mit der Konstanten $\alpha \in (0, \infty)$. Die zugehörigen Bogenlängen seien mit $b_0, b_1, b_2, \ldots$ bezeichnet.

   a) Geben Sie für $\alpha = 4/5$ die Folge $\{b_i\}$ der Bogenlängen an (mindestens 4 Glieder).
   b) Geben Sie für $\alpha = 4/5$ die Folge $\{s_i\}$ der zugehörigen Partialsummen an (mindestens 4 Glieder).
   c) Geben Sie für $\alpha = 4/5$ eine Formel zur Berechnung der Gesamtlänge der ersten $n$ Bögen an.
   d) Berechnen Sie für $\alpha = 4/5$ die Länge $s$ der Spirale.
   e) Für welche Werte von $\alpha$ besitzt die Spirale eine endliche Länge?

3. *Geometrische Anwendung der Integralrechnung*. Gegeben seien die Konstante $R \neq 0$ und die Funktion

$$y \quad = \quad f(x) \quad = \quad \begin{cases} R + x/3 & : \quad x \leq 0 \\ \sqrt{R^2 - x^2} & : \quad x \geq 0 \end{cases} \quad . \tag{2}$$

   a) Ermitteln Sie die beiden Nullstellen $x_{01}$ und $x_{02}$ der Funktion $f$, und skizzieren Sie ihren Graphen auf dem Intervall $[x_{01}, x_{02}]$.

   b) Skizzieren Sie die Fläche $F$, welche durch den Graphen von $f$ und die $x$-Achse berandet wird, und berechnen Sie deren Inhalt $A$ **mittels Integration**. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe bekannter Formeln.

   c) Berechnen Sie **mittels Integration** das Volumen **und** den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen von $f$ um die $x$-Achse entsteht. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe bekannter Formeln.

4. *Taylorreihen*. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \sin x \tag{3}$$

   in eine Taylorreihe um $x_0 = \pi/2$. Berechnen Sie den Konvergenzradius $r$ der Reihe, **und** geben Sie ihren Konvergenzbereich an.

5. *Differentialgleichungen*. Gegeben seien folgende Differentialgleichungen für $x(t)$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \quad = \quad \sin 2t, \tag{4}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \quad = \quad 0. \tag{5}$$

   a) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem von (5).

   b) Geben Sie die allgemeine Lösung von (5) an.

   c) Bestimmen Sie eine **reelle** partikuläre Lösung der Gleichung (4).

   d) Geben Sie die allgemeine Lösung von (4) an.

**Zeit**: 120 Minuten<br>
**Punkte**: 10 pro Aufgabe