Aufgaben – Mathematik II (ET) – FHTW-Berlin

# Serie 03

1. *Differentiale.* Berechnen Sie die Differentiale der folgenden Terme, wobei zunächst $u$ als Funktion von $x$ und anschließend $x$ als Funktion von $u$ aufzufassen ist:

$$\text{a)} \quad x + 3, \tag{1}$$
$$\text{b)} \quad 3x^2 + u, \tag{2}$$
$$\text{c)} \quad x \ln x, \tag{3}$$
$$\text{d)} \quad x \ln u, \tag{4}$$
$$\text{e)} \quad u \ln x. \tag{5}$$

2. *Differentiale.* Berechnen Sie die Differentiale der folgenden Gleichungen, und bestimmen Sie daraus die Differentialquotienten $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$.

$$\text{a)} \quad u^3 + x \ln u = x^2 + 9, \tag{6}$$
$$\text{b)} \quad u^2 = 1 - x^2, \tag{7}$$
$$\text{c)} \quad 1 + x^2 = u^2. \tag{8}$$

Schreiben Sie – sofern möglich – $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ als Funktion von $x$ und $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ als Funktion $u$.

3. *Trigonometrie/Integration.* Wiederholen Sie die Darstellung der Tangensfunktion durch Sinus- und Kosinusfunktion, deren Definitions- und Wertebereiche, sowie Definitions- und Wertebereiche der drei zugehörigen Umkehrfunktionen.

a) Beweisen Sie die beiden folgenden Identitäten

$$(\tan x)' = 1/\cos^2 x, \tag{9}$$
$$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x. \tag{10}$$

b) Bestimmen Sie zwei Funktionen, deren Differentiale die Gestalt $\mathrm{d}x + \tan^2 x \mathrm{d}x$ besitzen!

c) Zeigen Sie mithilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion in Differentialform, daß gilt

$$\frac{\mathrm{d} \arctan y}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1 + y^2}. \tag{11}$$

d) Bestimmen Sie

$$\int \frac{\arctan(x/2)}{4 + x^2} \mathrm{d}x. \tag{12}$$

4. *Partielle Integration.* Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Rekursionsformel ($k > 1$, ganz, $4q > p^2$, p,q reell)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{2x + p}{(k-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^{k-1}}. \tag{13}$$

Hinweis: Setzen Sie $u(x) = (x^2 + px + q)^{-k}$, $v'(x) = 1$, $v(x) = x + p/2$; verwenden Sie die quadratische Ergänzung.

5. *Integration*. Verifizieren Sie

$$\int \frac{4x^3 - x^2 - x + 8}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{2}\ln|x^2+4| + 2\arctan\frac{x}{2}. \tag{14}$$