Serie 04

1. *Quadratische Ergänzung*. Gegeben seien zwei reelle (oder komplexe) Zahlen p und q. Bestimmen Sie die beiden reellen (bzw. komplexen) Zahlen a und b derart, daß für alle komplexen Zahlen x gilt

$$x^2 + px + q \quad = \quad (x + a)^2 - b. \tag{1}$$

2. *Quadratische Ergänzung*. Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf

$$x^2 + px + q \quad = \quad 0. \tag{2}$$

3. *Integration/quadratische Ergänzung*. Verifizieren Sie mittels Bestimmung einer Stammfunktion

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 + 8x + 12}} \quad \approx \quad 0.24386844. \tag{3}$$

   Berechnen Sie insgesmat vier Näherungswerte für das Integral mittels der Sehnentrapez- und der SIMPSONschen Formel, indem Sie diese zunächst auf das gesamte Intervall $[0, 1]$ und anschließend auf die Teilintervalle $[0, 1/2]$ und $[1/2, 2]$ anwenden.

4. *Integration*. Gegeben seinen beliebige natürliche Zahlen m und n. Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen:

$$\sin mx \sin nx, \tag{4}$$
$$\cos mx \cos nx, \tag{5}$$
$$\sin mx \cos nx \tag{6}$$

   und berechnen Sie daraus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x, \tag{7}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x, \tag{8}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

   Hinweis: Führen Sie Fallunterscheidungen durch ($m \neq n$, $m = n$, $m = 0, \ldots$).

   Lösung: Siehe Tafelwerk!

5. *Geometrie*. Rekapitulieren Sie die Definitionen von Sinus- und Kosinusfunktion am Einheitskreis. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Satz des PYTHAGORAS und der Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$?

6. *Integration.* Der Graph der Funktion $y = f(x) = \sqrt{4-x}$ begrenzt zusammen mit der positiven x- und y-Achse ein Flächenstück A. In welchem Abstand t muß man eine Parallele zur y-Achse legen, damit der Flächeninhalt von A halbiert wird?

   Lösung: $t = 4 - \sqrt[3]{16} \approx 1.48$

7. *Integration/analytische Geometrie.* Vorgelegt seien eine positive reelle Zahl p und die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, && (10)\\ f_2(x) &= \frac{1}{2x}, && (11)\\ f_3(x) &= px. && (12) \end{aligned}$$

   a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen für $p = 4$.
   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_{12} der Graphen von f_1 und f_2 in Abhängigkeit vom Parameter p.
   c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_{23} der Graphen von f_2 und f_3 in Abhängigkeit vom Parameter p.
   d) Bestimmen Sie den vorzeichenbehafteten Inhalt $u(p)$ der durch die drei Graphen begrenzten Fläche ($u > 0$ für $p > 1$).
   e) Bestimmen Sie für jedes p jene lineare Funktion $f_4(x)$, deren Graph durch P_{23} verläuft und (für $p \neq 1$) den Graphen von f_1 im rechten Winkel schneidet.
   f) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_{14} der Graphen von f_1 und f_4.
   g) Bestimmen Sie den vorzeichenbehafteten Abstand d_1 zwischen P_{23} und P_{14} in Abhängigkeit vom Parameter p ($d_1 > 0$ für $p > 0$).
   h) Bestimmen Sie den Abstand d_2 zwischen P_{14} und dem Koordinatenursprung in Abhängigkeit vom Parameter p.
   i) Berechnen Sie die Funktionen $d_1(u)$ und $d_2(u)$.

   Lösung: $u = \frac{\ln p}{4}$, $d_1 = \sinh(2u)$, $d_2 = \cosh(2u)$

   Die geometrischen Definitionen der hyperbolischen Sinus- und Kosinusfunktion erfolgen an der **Hyperbel**, ihre Argumente sind Flächeninhalte.

   Analog erfolgen die geometrischen Definitionen der Sinus- und Kosinusfunktion am Einheitskreis**bogen**; ihre Argumente sind Bogenlängen.