Aufgaben – Mathematik II (ET) – FHTW-Berlin

Serie 05

1. *Arithmetik*. Beweisen Sie mithilfe der Definitionen der hyperbolischen Funktionen über Exponentialfunktionen die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \tag{1}$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{2}$$

2. *Uneigentliche Integrale*. Verifizieren Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \pi, \tag{3}$$
$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}} = 2, \tag{4}$$
$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}, \tag{5}$$
$$\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(2 - x)^2}} = 3, \tag{6}$$
$$\int_{0}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x = -1, \tag{7}$$
$$\int_{-1}^{1} \ln |x| \,\mathrm{d}x = -2. \tag{8}$$

3. *Bogenlängen*. Zeigen Sie, daß für eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = r(\phi)$ für die Bogenlänge des durch $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$ gegebenen Kurvenstücks gilt

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{[r(\phi)]^2 + [\dot{r}(\phi)]^2} \,\mathrm{d}\phi. \tag{9}$$

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die kartesischen Koordinatenfunktionen $x(\phi)$ und $y(\phi)$ der Kurve, und verwenden Sie die Beziehung $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

4. *Bogenlängen*. Berechnen Sie die Bogenlänge der logarithmischen Spirale $r(\phi) = \mathrm{e}^{a\phi}$ für $\phi \in [0, 2\pi]$ und $a > 0$.

   Lösung: $s = \sqrt{1 + 1/a^2}\,(\mathrm{e}^{2\pi a} - 1)$

5. *Flächeninhalte*. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

   Hinweis: Es empfiehlt sich die Verwendung von Polarkoordinaten.

   Lösung: $A = \pi ab$