

Serie 06

1. *Rotationskörper*. Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie Oberflächeninhalt und Volumen (Maßzahlen) des Körpers, der durch Drehung des zwischen den Nullstellen von f gelegenen und durch $y = f(x)$ gegebenen Kurvenstücks um die x -Achse entsteht.

Lösung: $O_M = 3\pi$, $V = 3\pi/4$

2. *Rotationskörper*. Bestimmen Sie den Mantelflächeninhalt und das Volumen (Maßzahlen) des Körpers, der bei Rotation der durch

$$x(t) = t, \quad (2)$$

$$y(t) = \cos t \quad (3)$$

und $t \in [0, \pi]$ gegebenen Kurve um die x -Achse entsteht.

Lösung: $O_M = 2\pi(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}1) \approx 14.42$, $V = \pi^2/2$

3. *Rotationskörper*. Man betrachte das Flächenstück zwischen der x -Achse und dem Graphen der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$f(x) = 1 - \cos x. \quad (4)$$

Wie groß ist das Volumen (Maßzahl) des entstehenden Körpers, wenn das Flächenstück

- um die x -Achse bzw.
- um die y -Achse

rotiert?

Hinweis: Skizzieren Sie zuerst den Graphen und das Flächenstück.

Lösung: $V_a = 3\pi^2$, $V_b = 4\pi^3$

4. *Analytische Geometrie/Schwerpunkte*. Gegeben seien drei Punktmassen $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg und $m_3 = 3$ kg. Der Abstand zwischen m_1 und m_2 betrage $d_{12} = 3$ m, jener zwischen m_2 und m_3 $d_{23} = 4$ m, und jener zwischen m_3 und m_1 betrage $d_{31} = 5$ m. Wie weit ist der Massenmittelpunkt von m_1 entfernt?

Hinweis: Verwenden Sie ein geeignetes Koordinatensystem.

Lösung: $d \approx 3.2$ m

5. *Schwerpunkte*. Gegeben sei ein Plattenkondensator mit einer Plattenfläche A und einem Plattenabstand d . Ist der Raum zwischen den Platten vollständig evakuiert, beträgt seine Kapazität bekanntlich $C = \epsilon_0 A/d$, so daß die Ladung auf der Anode $Q = CU$ beträgt, wenn man die Anode auf das Potential U und die Katode auf das Potential 0 legt. Wird die Katode erwärmt, so daß sie ausreichend Elektronen emittiert, stellt man fest, daß sich bei Konstanthalten der Potentiale die Anodenladung auf das $4/3$ -fache des kalten Falles erhöht, d.h. es gilt $Q_{\text{heiss}} = 4Q/3$.

- a) Berechnen Sie die Kapazität C_{heiss} der heißen Anordnung in Abhängigkeit von der Kapazität C der kalten Anordnung.
- b) Wie hätte man den Plattenabstand der kalten Anordnung zu modifizieren, um ihre Kapazität von C auf C_{heiss} zu erhöhen? Schreiben Sie diesen Abstand d_{neu} in Abhängigkeit von d .
- c) Wählt man ein Koordinatensystem derart, daß sich die Katode in $x = 0$ und die Anode in $x = d$ befindet, so gilt für die Raumladungsdichte der heißen Anordnung

$$\rho(x) = -\frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 U}{d^2} \left(\frac{x}{d}\right)^{-2/3}. \quad (5)$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt x_s der Raumladung und seinen Abstand d_{heiss} von der Anode.

Lösung: Es gilt $d_{\text{neu}} = d_{\text{heiss}}$, d.h. das Heizen der Katode wirkt sich auf die Kapazität der Anordnung genauso aus, als wenn man sie in den Schwerpunkt der Raumladung (also dichter an die Anode heran) rücken würde.