Aufgaben – Mathematik II (ET) – FHTW-Berlin – 2004-01-17

Serie 10

1. *Taylorreihen.* Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2} \tag{1}$$

in eine TAYLORreihe um $x_0 = 0$, und bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Reihe.

2. *Taylorreihen.*

   a) Entwickeln Sie die Funktionen $\cos x$, $\sin x$ und e^x in TAYLORreihen um $x_0 = 0$, und bestimmen Sie ihre Konvergenzbereiche.

   b) Bestimmen Sie die TAYLORreihe von $\mathrm{e}^{\mathrm{j}y}$ um $y_0 = 0$ aus der Reihe für e^x mittels der Substitution $x = \mathrm{j}y$. Behandeln Sie die imaginäre Einheit j wie eine reelle Konstante mit der Eigenschaft $\mathrm{j}^2 = -1$.

   c) Bestimmen Sie die TAYLORreihe von $\cos x + \mathrm{j}\sin x$ um $x_0 = 0$ aus den Reihen für $\cos x$ und $\sin x$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Reihe von $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$.

3. *Fourierreihen.* Auf dem abgeschlossenen Zeitintervall $I = [-T/2, T/2]$, $T > 0$ sei folgende Funktion definiert

$$u(t) = U\begin{cases} 1 + 4t/T & : \quad t \le 0 \\ 1 - 4t/T & : \quad t > 0 \end{cases}. \tag{2}$$

   a) Skizzieren Sie $u(t)$ auf ihrem Definitionsbereich.

   b) Bestimmen Sie die FOURIERreihe $s(t)$ von $u(t)$ für $t \in I$ in reeller **und** komplexer Form. Lösung:

$$s(t) = \frac{8U}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \dots\right) \tag{3}$$

$$= \frac{8U}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\omega t]}{(2n-1)^2} \tag{4}$$

$$= \frac{4U}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2n-1)\omega t}}{(2n-1)^2} \tag{5}$$

   c) Bekanntlich konvergiert die FOURIERreihe einer Funktion nicht in jedem Falle gegen die Funktion. Begründen Sie, warum im vorliegenden Fall jedoch $s(t) = u(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

   d) Geben Sie eine Reihe mit dem Summenwert $\pi^2/8$ an; verwenden Sie zu deren Bestimmung die (soeben begründete) Eigenschaft $s(0) = u(0)$ der FOURIERreihe.

   e) Bestimmen Sie die Funktionswerte $s(3T/4)$ und $s(T)$. Bedenken Sie, daß über $u(t)$ zu diesen Zeitpunkten nichts bekannt ist!

   f) Man nehme zusätzlich an, daß $u(t)$ periodisch mit der Periode T sei. (Dadurch ist $u(t)$ nun auch außerhalb von I definiert.) Bestimmen Sie die Funktionswerte $u(3T/4)$ und $u(T)$.