

## Serie 11

1. *Differentialgleichungen*. Klassifizieren Sie die folgenden Gleichungen (partiell/gewöhnlich, implizit/explicit, linear/nichtlinear, homogen/inhomogen):

a) LAPLACEgleichung

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial z^2} = 0,$$

b) Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4x = 0,$$

c)  $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ ,

d)  $tx'' + t^2 x' + x = 2x'/t - 3$ ,

e)  $(x')^2 = 4$ .

2. *Differentialgleichungen*. Berechnen Sie die WRONSKIDeterminante folgender Funktionspaare

a)  $t, t \ln t$ ,

b)  $e^{at} \sin bt, e^{at} \cos bt$ ,

c)  $\sin^2 t, 1 - \cos 2t$ .

3. *Differentialgleichungen*. Klassifizieren die folgenden Gleichungen, und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen:

a)  $y' + 2y = \cos x$ ,

b)  $x''' + x'' = 2x$ .

Lösungen:  $y(x) = ce^{-2x} + (2 \cos x + \sin x)/5$  und  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t$

4. *Differentialgleichungen*. Man löse folgendes AWP:

$$x'' - 4x' + 4x - t^3 = 0, \quad x(1) = 7/8, \quad x'(1) = -5/8.$$

Lösung:  $x(t) = (6 + 9t + 6t^2 + 2t^3 - 16e^{2t-2})/8$

5. *Differentialgleichungen*. Gegeben seien die reellen Konstanten  $\delta$  (Dämpfung),  $\omega_0$  (Eigenfrequenz),  $\omega$  (Anregungsfrequenz) und die (Schwingungs-) Differentialgleichung für die zeitabhängige Spannung  $u(t)$  bei spezieller Anregung

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = U_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung von (1).

Hinweis: Bei der Bestimmung des Fundamentalsystems der (1) zugeordneten homogenen Gleichung müssen drei Fälle unterschieden werden (Kriechfall, aperiodischer Grenzfall, Schwingungsfall), und bei der Bestimmung der Partikulärlösung von (1) sind zwei Fälle zu unterscheiden (Anregung auf und jenseits der Eigenfrequenz).