Aufgaben – Mathematik II (ET) – FHTW-Berlin

Serie Z01

1. *Folgen*. Beweisen Sie die Notwendigkeit des CAUCHY-Kriteriums für die Konvergenz von Folgen. (Es ist zwar auch hinreichend, aber der Beweis ist komplizierter.)

2. *Reihen.* Beweisen Sie den folgenden Satz:
   $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ ist konvergent $\quad\Longrightarrow\quad \{a_i\}$ ist Nullfolge

   a) Wie lauten Umkehrung und Kontraposition dieses Satzes?

   b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt.

3. *Logik.* A und B seien zwei Aussagen; die Implikation $A \Longrightarrow B$ sei wahr.

   a) Wie lauten Umkehrung und Kontraposition dieser Implikation?

   b) Was läßt sich ganz allgemein über deren Wahrheitswerte aussagen?

4. *Reihen.* Beweisen Sie das Majorantenkriterium für Reihen mit nicht-negativen Gliedern, wobei die Summationen mit demselben Index i_0 beginnen mögen.

   a) Überlegen Sie sich, warum das Kriterium auch dann gültig ist, wenn die Summationen nicht mit demselben Index beginnen.

   b) Beweisen Sie zur Illustration die Konvergenz von $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ mittels der (als konvergent vorausgesetzten) Majorante $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$.
   Hinweis: Die Summenwerte sind $\pi^2/6$ und 1, d.h. der Summenwert der Majorante ist *kleiner* als der der abzuschätzenden Reihe.

5. *Reihen.* Beweisen Sie, daß die Konvergenz einer Reihe

   a) notwendig, aber

   b) nicht hinreichend

   für deren absolute Konvergenz ist.