Dr. Solyga – Mathematik I – Aufgaben – D1ET 1 – FHTW-Berlin – 2005-02-07

Klausur

1. *Logik*. Betrachtet sei folgender Satz der Analysis: *„Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.“*

   a) Zerlegen Sie den Satz in Teilaussagen A, B und C über eine allgemeine Folge reeller Zahlen $\{x_n\}$.

   b) Geben Sie die logische Struktur des Satzes unter Verwendung der Variablen A, B und C in formaler Form an.

   c) Wie lautet die Kontraposition des Satzes formal, und wie lautet sie sprachlich?

   d) Geben Sie die Umkehrung des Satzes formal und sprachlich an.

   e) Geben Sie die Wahrheitswerte des Satzes, seiner Kontraposition und seiner Umkehrung an!

2. *Ungleichungen*. Geben Sie die Lösungenmengen folgender Ungleichungen an ($x \in \mathbb{R}$):

   a) $\dfrac{2x+4}{2x-4} > -1$

   b) $\dfrac{2x^2-18}{x+3} \leq 0$

   c) $|x+4| - |x-2| > 1$

3. *Komplexe Zahlen*.

   a) Seien $z_1 = 1 - \mathrm{j}$ und $z_2 = -2 + \mathrm{j}$. Berechnen Sie z_1^*, z_2^*, $z_1 z_2$, $z_1 z_1^*$ und z_1/z_2, und geben Sie z_1 und z_2 in trigonometrischer und exponentieller Form an.

   b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^2 + 4z + 5 = 0$.

   c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 - 8 = 0$.

4. *Matrizen*. Invertieren Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. *Lineare Gleichungssysteme*. Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ hat das folgende System eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \alpha z & = & 0 \end{array}$$

6. *Lineare Algebra*. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, und stellen Sie den Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ dar.

7. *Analytische Geometrie*. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_3 = (0, 1, 2)$ von derjenigen Ebene, die durch die Punkte $P_0 = (1, 1, 0)$, $P_1 = (2, 1, 1)$ und $P_2 = (2, 2, 1)$ verläuft.

8. *Partialbruchzerlegung*. Führen Sie eine relle **und** komplexe Partialbruchzerlegung für folgende Funktion durch:

$$R(z) \quad = \quad \frac{z^2 + z - 2}{z^5 - z^4 + 4z^3 - 4z^2}$$

9. *Folgen*. Berechnen Sie:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^4 + n + 1}{7n^4 + 4n^3 - 2n^2} \right)^2$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n + \dfrac{2n}{4n^2 + 1} \right]^3$

10. *Reihen*. Vorgelegt sei die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{2}{3^\nu}.$$

   a) Zeigen Sie mittels Kriterium Ihrer Wahl, daß die Reihe absolut konvergent ist.

   b) Geben Sie ihren Summenwert an!

Zeit: 120 Minuten
Punkte: 10 pro Aufgabe
Wiederholungsklausur: 21. März 2005, 08.00-11.00 Uhr