Dr. Solyga – Mathematik I – Aufgaben – D1ET 1 – FHTW-Berlin – 2005-03-21

Wiederholungsklausur

1. *Ungleichungen*. Geben Sie die Lösungenmengen folgender Ungleichungen an ($x \in \mathbb{R}$):

   a) $\dfrac{2x+6}{2x-6} > -1$

   b) $\dfrac{2x^2-8}{x+2} \leq 0$

   c) $|x+2| - |x-4| > 1$

2. *Komplexe Zahlen*.

   a) Seien $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ und $z_2 = -2 - \mathrm{j}$. Berechnen Sie z_1^*, z_2^*, $z_1 z_2$, $z_1 z_1^*$ und z_1/z_2, und geben Sie z_1 und z_2 in trigonometrischer und exponentieller Form an.

   b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^2 + 10 = 6z$.

   c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 = 27$.

3. *Lineare Gleichungssysteme*. Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ hat das folgende System eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \end{array}$$

4. *Lineare Algebra*. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   linear unabhängig sind, und stellen Sie den Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ dar.

5. *Analytische Geometrie*. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_0 = (0, 2, 4)$ von derjenigen Ebene, die durch die Punkte $P_1 = (2, 2, 0)$, $P_2 = (4, 2, 2)$ und $P_3 = (4, 4, 2)$ verläuft.

6. *Partialbruchzerlegung*. Führen Sie eine relle **und** komplexe Partialbruchzerlegung für folgende Funktion durch:

$$R(z) \quad = \quad \frac{z^2 - z - 2}{z^5 + z^4 + 4z^3 + 4z^2}$$

7. *Folgen*. Berechnen Sie:

   a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^4+7n^3-2n+1}{n^4-4n^2-2n}\right)^4$

   b) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2n}{4n^2+1}\right]^3$

8. *Reihen*. Vorgelegt sei die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{5}{2^\nu}.$$

   a) Zeigen Sie mittels Kriterium Ihrer Wahl, daß die Reihe absolut konvergent ist.

   b) Geben Sie ihren Summenwert an!

Zeit: 120 Minuten
Punkte: 10 pro Aufgabe