# Serie 01

1. *Körperaxiome.* Zeigen Sie, daß die für beliebige reelle Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ geltende Identität

$$(a+b)(c+d) \quad = \quad ac+ad+bc+bd \tag{1}$$

allein aus der Kommutativiät und Distributivität von Addition und Multiplikation folgt.

2. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Richtigkeit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} |z_i| \tag{2}$$

für komplexe Zahlen $z_i$ und natürliche Zahlen $n > 2$. Die Richtigkeit für $n = 2$ dürfen Sie dabei als bekannt voraussetzen.

3. *Komplexe Zahlen.* Gegeben seien $z_1 = 1-2\mathrm{j}$ und $z_2 = 4+3\mathrm{j}$. Berechnen Sie $z_1+z_2$, $z_1-z_2$, $z_1 z_2$, $z_1/z_2$, $z_2/z_1$, $z_1^*$, $z_2^*$, sowie $z_1^*/z_2^*$ und $z_2^*/z_1^*$.

4. *Komplexe Zahlen.* Gegeben seien $z_1 = 3\sqrt{3} - 3\mathrm{j}$ und $z_2 = -3 - 3\mathrm{j}$. Berechnen Sie $z_1^3/z_2^4$, und stellen Sie $z_1$ und $z_2$ in Exponentialform dar.

5. *Komplexe Zahlen.* Vereinfachen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel die (bei reellem $x$) reellwertigen Terme

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}. \tag{4}$$

6. *Ungleichungen.* Welche reellen Zahlen $x$ genügen der Ungleichung

$$1 + |x+1| \quad \leq \quad |x| \quad ? \tag{5}$$

7. *Ungleichungen.* Welche Punkte $z$ auf der reellen Zahlengeraden und welche in der komplexen Ebene lösen die Ungleichung $|z| < 1$?

8. *Wurzeln.* Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^4 = 16$.