

Serie 02

1. *Vollständige Induktion.* In der Analysis werden Potenzen reeller Zahlen x mit natürlichen Exponenten $n \geq 0$ gern induktiv (rekursiv) definiert:

$$x^0 := 1, \tag{1}$$

$$x^{n+1} := x^n x. \tag{2}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 0$ gilt

$$x^m x^n = x^{m+n}. \tag{3}$$

Hinweis: Damit im Beweis wie gewohnt nur eine natürliche Zahl auftaucht, führen Sie ihn einfach für eine fest gewählte Zahl m , z.B. $m = 5$. Sind Ihre Schlüsse von dieser Wahl abhängig?

2. *Komplexe Zahlen.*

- a) Untersuchen Sie, welche der Ausdrücke $\ln(e)$, $\ln(1)$, $\ln(0)$, $\ln(-1)$ und $\ln(-e)$ komplexe Zahlen darstellen. Geben Sie (sofern möglich) die zugehörigen Hauptwerte in algebraischer Form (d.h. in der Form $x + jy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$) an, und stellen Sie sie in der GAUSSSchen Zahlenebene dar.
- b) Bestimmen Sie zwei voneinander verschiedene Lösungen $e^z = -1$.
- c) Stellen Sie die Zahl $2e^{j\pi/4} + e^{2-j\pi/4}$ in der exponentiellen Form dar.
- d) Handelt es sich bei $3e^{-j3\pi/4}$ und $e^{\ln(3)+j13\pi/4}$ um zwei verschiedene oder um ein und dieselbe Zahl?
- e) Man stelle $\cos(3\pi/4) + j \sin(\pi/6)$ in der trigonometrischen Form dar.
- f) Für welche Zahlen n ist $(1 + j)^n$ reell?

3. *Determinanten.* Man berechne die Zahl

$$x = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

- a) mittels der SARRUSSchen Regel und
- b) durch Entwicklung nach der dritten Zeile.

4. *Lineare Gleichungssysteme.* Man ermittle sämtliche Lösungen der folgenden drei Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2jx - 5y &= -1 \\ 3x + 7y &= 3j \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ -10x + 15y &= 14 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 7jx - 4jy &= j \\ -21x + 12y &= -3 \end{aligned} \tag{7}$$