Serie 06

1. *Lineare Gleichungssysteme*. Man ermittle ein Fundamentalsystem von

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \end{array} . \tag{1}$$

2. *Lineare Gleichungssysteme*. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \end{array} \tag{2}$$

   in der Form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{p} + \mathbf{x}_\mathrm{H}$!

3. *Matrizenmultiplikation*. Man verifiziere $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

4. *Matrizenmultiplikation*. Man verifiziere $(A \cdot B)^\mathrm{T} = B^\mathrm{T} \cdot A^\mathrm{T}$ anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

5. *Lineare Räume*. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

   linear unabhängig sind, und stellen Sie

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

   als Linearkombination von $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_4$ dar. Ist diese Darstellung eindeutig?

   Anmerkung. Es sei M_{22} die Menge der zweireihigen quadratischen Matrizen reeller Zahlen. Definiert man die Addition dieser Matrizen und ihre Multiplikation mit reellen Zahlen wie gewohnt, so bildet M_{22} (mit den beiden Operationen) einen vierdimensionalen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Seine Elemente – die zweireihigen quadratischen Matrizen – sind daher Vektoren.