Serie 07

1. *Ungleichungen*. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Ungleichung:

$$\frac{3x-8}{2x-1} \quad > \quad -5. \tag{1}$$

2. *Komplexe Zahlen*. Seien z_1, z_2 komplexe Zahlen und z_1^*, z_2^* die zugehörigen konjugiert komplexen Zahlen. Beweisen Sie die Identitäten

$$(z_1 + z_2)^* \quad = \quad z_1^* + z_2^*, \tag{2}$$

$$(z_1 z_2)^* \quad = \quad z_1^* z_2^*, \tag{3}$$

   und zeigen Sie, daß $z_1 + z_1^*$ und $z_1 z_1^*$ stets reell sind.

3. *Matrizen*. Man berechne A^n für folgende Matrix und *alle* natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3 \ldots$!

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   Ist eine quadratische Matrix mit sichselbst vertauschbar?

   Anmerkung. Die Potenz einer (quadratischen) Matrix ist wie folgt definiert:

$$A^1 \quad := \quad A, \tag{5}$$

$$A^{n+1} \quad := \quad A^n \cdot A \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

   Es gilt also $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A, \ldots$

4. *Matrizen*. Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

5. *Analytische Geometrie*. Bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ des E_3 seien drei Vektoren wie folgt gegeben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ \sqrt{32}/3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

   Berechnen Sie $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sowie die Richtungskosinus' von $\mathbf{a}$!

6. *Analytische Geometrie*. Man berechne den Abstand des Punktes $P_1 = (3, -3)$ von der Geraden, die durch die Punkte $P_3 = (1, 2)$ und $P_3 = (-1, 0)$ verläuft und überprüfe das Ergebnis durch Anfertigung einer Skizze.

7. *Entwicklungssatz der Vektoralgebra*. Zeigen Sie mittels Koordinatendarstellung, daß für beliebige Vektoren des Raumes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E_3$ gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad = \quad \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{9}$$