Serie 11

1. *Ungleichungen*. Die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen folgen aus den Axiomen der Anordnung reeller Zahlen (Transitivität, Monotonie von Addition und Multiplikation). Zeigen Sie, daß für beliebige reelle Zahlen a, b, c, d gilt:

   a) $a < b \ \wedge\ c < d \implies a + c < b + c$ (Ungleichungen dürfen addiert werden)

   b) $a < b \implies a < \frac{a+b}{2} < b$

   c) $a < b \ \wedge\ c < d \ \wedge\ b, c > 0 \implies ac < bd$

   Zeigen Sie ferner an jeweils einem Beispiel, daß Ungleichungen i.allg. nicht subtrahiert, multipliziert, dividiert und quadriert werden dürfen.

2. *Reihen*. Berechnen Sie die Reihensummen!

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{3}{2^i} \tag{1}$$

$$\sum_{\mu=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\mu} \tag{2}$$

3. *Reihen*. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie ihre Summen in Form gewöhnlicher **und** dezimaler Brüche.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{9}{10^{\nu}}, \tag{3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{12}{100^{\nu}}, \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{123}{1000^{\nu}}, \tag{5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{123}{10000^{\nu}}. \tag{6}$$

4. *Reihen*. Warum ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \tag{7}$$

   divergent?

5. *Reihen*. Zeigen Sie mittels Minorantenkriterium, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \tag{8}$$

   divergiert!

   Hinweis: Verwenden Sie als Minorante die harmonische Reihe. Daß für $n > 1$ gilt $\sqrt{n} > 1$, darf unbewiesen bleiben.