Wiederholungsklausur

1. *Extremwerte*. Ein einfaches Trinkgefäß bestehe aus einem einseitig verschlossenen Zylindermantel mit dem Radius r und der Höhe h (aufgeschnittene Blechbüchse). Fassungsvermögen V und Oberfläche O dieses Gefäßes betragen folglich

$$V = \pi r^2 h, \tag{1}$$
$$O = \pi r^2 + 2\pi r h. \tag{2}$$

   Zeigen Sie mittels Differentialrechnung, daß diese Oberfläche O bei **gegebenem** Fassungsvermögen V für einen gewissen Wert r_{opt} des Radius' minimal wird, und berechnen Sie r_{opt}, den zugehörigen Wert h_{opt} der Zylinderhöhe und das Verhältnis $h_{\text{opt}}/r_{\text{opt}}$.

2. *Kurvendiskussion*. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = x^2\, e^{-x^2}, \tag{3}$$

   d.h. bestimmen Sie den Definitionsbereich von f, ihre singulären Punkte, ihre Nullstellen, die Nullstellen ihrer ersten Ableitung, ihre Monotonieintervalle, ihre relativen Extrema, die Nullstellen ihrer zweiten Ableitung, ihre Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle, ihre Wendepunkte und ihre Asymptoten, und fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze des Graphen von f an.

3. *Partielle Integration*. Berechnen Sie mittels partieller Integration für **alle** Werte der reellen Konstanten a und b eine Stammfunktion von

$$f(x) = e^{ax} \sinh bx. \tag{4}$$

4. *Geometrische Anwendung der Integralrechnung.* Gegeben seien die reelle Konstante $R > 0$ und die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} R + x/3 & : \quad x \le 0 \\ \sqrt{R^2 - x^2} & : \quad x \ge 0 \end{cases}. \tag{5}$$

   a) Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_{01} und x_{02} der Funktion f, und skizzieren Sie ihren Graphen auf dem Intervall $[x_{01}, x_{02}]$.
   b) Skizzieren Sie die Fläche F, welche durch den Graphen von f und die x-Achse berandet wird, und berechnen Sie deren Inhalt A **mittels Integration**. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe bekannter Formeln.
   c) Berechnen Sie **mittels Integration** das Volumen **und** den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers, der bei Rotation der unter Punkt 4b besprochenen Fläche F um die x-Achse entsteht. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe bekannter Formeln.

5. *Differentialgleichungen*. Gegeben seien folgende Differentialgleichungen für $x(t)$

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 20 \sin 2t, \tag{6}$$
$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0. \tag{7}$$

   a) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem von (7).
   b) Geben Sie die allgemeine Lösung von (7) an.
   c) Bestimmen Sie eine **reelle** partikuläre Lösung von (6).
   d) Geben Sie die allgemeine Lösung von (6) an.

Zeit: 120 Minuten, **Punkte**: 10 pro Aufgabe