

Serie 05

1. *Ableitungen.* Ein Polynom $P(x)$ habe in x_0 eine Nullstelle mit der Vielfachheit $\gamma > 0$.

- a) Seien $x_0 = 0$ und $\gamma = 2$. Zeigen Sie, daß die Funktion $P(x)$ in x_0 ein strenges Extremum besitzt.
- b) Gilt diese Aussage auch für $x_0 \neq 0$ (und $\gamma = 2$)?
- c) Seien $x_0 = 0$ und $\gamma = 3$. Zeigen Sie, daß die Funktion $P(x)$ in x_0 einen Wendepunkt hat.
- d) Überlegen Sie sich, warum bei $\gamma \geq 2$ und beliebigem x_0 gilt:
 γ gerade $\Rightarrow P(x)$ hat strenges Extremum in x_0 und
 γ ungerade $\Rightarrow P(x)$ hat Wendepunkt in x_0 .

2. *Ableitungen.* Bestimmen Sie – sofern existent – die absoluten Extrema von

$$f(x) = (x + 3)^2(x - 2)^3 \quad (1)$$

in den Intervallen

- a) $[-2, 3]$ und
- b) $(-\infty, 0]$.

3. *Ableitungen.* Führen Sie eine Kurvendiskussion durch für

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 3)^2}. \quad (2)$$

4. *Ableitungen.* Untersuchen Sie die Stetigkeit von f und f' in $x = 0$ für

$$f(x) = |x|, \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

5. *Ableitungen.* Seien f und g (im eigentlichen Sinne) im Intervall $[c, \infty)$ differenzierbar, wobei $g'(x) \neq 0$ in $[c, \infty)$. Weiterhin sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne.

Zeigen Sie, daß dann die mittelbaren Funktionen $\phi(x) := f(1/x)$ und $\psi(x) := g(1/x)$ alle Voraussetzungen der ersten L'HOSPITALSchen Regel erfüllen!

Anmerkung: Folglich existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7)$$