Serie 05 - Lösungen

1. *Ableitungen*. Einem Polynom, das in x_0 eine Nullstelle mit der Vielfachheit $\gamma > 0$ besitzt, läßt sich stets die Gestalt

$$P(x) = (x - x_0)^\gamma \, Q(x) \tag{1}$$

verleihen, wobei $Q(x)$ ein Polynom von wenigstens erstem Grad ist mit $Q(x_0) \neq 0$. – Wäre $Q(x_0) = 0$, so wäre die Vielfachheit der Nullstelle größer als γ. – Ferner ist jedes Polynom *beliebig oft* stetig differenzierbar (Ableitung ist selbst stetig), weil die Ableitung eines Polynoms wieder ein Polynom und als solches auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

a) Bei $x_0 = 0$ und $\gamma = 2$ hat P die einfache Gestalt

$$P(x) = x^2 Q(x), \tag{2}$$

mit $Q(0) \neq 0$. Nach der Produktregel gilt:

$$P'(x) = 2xQ(x) + x^2 Q'(x), \tag{3}$$
$$P''(x) = 2Q(x) + 4xQ'(x) + x^2 Q''(x). \tag{4}$$

Offensichtlich ist $P'(0) = 0$ und $P''(0) = 2Q(0) \neq 0$, so daß die hinreichende Bedingung für ein strenges lokales Extremum in $x = 0$ erfüllt ist.

b) Genauso kann im allgemeinen Fall geschlossen werden:

$$P(x) = (x - x_0)^2 Q(x), \tag{5}$$
$$P'(x) = 2(x - x_0)Q(x) + (x - x_0)^2 Q'(x), \tag{6}$$
$$P''(x) = 2Q(x) + 4(x - x_0)Q'(x) + (x - x_0)^2 Q''(x). \tag{7}$$

Wieder ist $P'(x_0) = 0$ und $P''(x_0) = 2Q(x_0) \neq 0$.

c) Für $\gamma = 3$ gilt

$$P(x) = (x - x_0)^3 Q(x), \tag{8}$$
$$P'(x) = 3(x - x_0)^2 Q(x) + (x - x_0)^3 Q'(x), \tag{9}$$
$$P''(x) = 6(x - x_0)Q(x) + 6(x - x_0)^2 Q'(x) + (x - x_0)^3 Q''(x), \tag{10}$$
$$P'''(x) = 6Q(x) + 18(x - x_0)Q'(x) + 9(x - x_0)^2 Q''(x) + (x - x_0)^3 Q'''(x). \tag{11}$$

Mithin ist $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = 0$ und $P'''(x_0) \neq 0$, womit in $x = x_0$ die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt ist. – Diese Aussage ist selbstverständlich auch im speziellen Falle $x_0 = 0$ gültig.

d) Im allgemeinen Falle verschwinden in x_0 alle Ableitungen bis zur Ordnung $\gamma - 1$, und erst die γ-te Ableitung verschwindet an dieser Stelle nicht. Die hinreichenden Bedingungen für ein strenges Extremum bzw. einen Wendepunkt vervollständigen den gesuchten Beweis.

2. *Ableitungen*. trivial

3. *Ableitungen*. trivial

4. *Ableitungen*.

   a) Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad |x| \quad = \quad \begin{cases} -x, & \text{wenn} \quad x < 0 \\ x\ , & \text{wenn} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

   ist offenbar auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (ohne Beweis). Ihre erste Ableitung lautet

$$f'(x) \quad = \quad \begin{cases} -1, & \text{wenn} \quad x < 0 \\ 1\ , & \text{wenn} \quad x > 0 \end{cases} \tag{13}$$

   und ist in $x = 0$ nicht definiert, weil die linksseitige Ableitung nicht mit der rechsseitigen übereinstimmt. f' ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig.

   b) Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0\ , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} \tag{14}$$

   ist überall stetig außer in $x = 0$, wo sie eine Unstetigkeit zweiter Art besitzt:

      i. Aus dem bekannten Satz über verkettete Funktionen folgt zunächst ihre Stetigkeit auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\phi(y) = \sin y$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, und $y = \psi(x) = 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; also ist $\phi[\psi(x)]$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

      ii. Wäre f an der Stelle $x = 0$ stetig, so müßte für *jede* Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \to 0$ für die Folge der Funktionswerte $f(x_n) \to f(0) = 0$ gelten. Aber für die spezielle Folge $x_n = 2/[\pi(1 + 2n)]$ konvergiert $f(x_n) = \sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$ offenbar gar nicht, geschweige denn gegen 0.

      iii. Da der Grenzwert von f für $x \to 0$ nicht existiert, weil der rechtsseitige Grenzwert nicht existiert, ist die Unstetigkeit nicht von erster Art. Also ist sie von zweiter Art.

   Wegen der Unstetigkeit von f an der Stelle $x = 0$ kann sie an dieser Stelle auch nicht differenzierbar sein, d.h. f' ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Nach dem Satz über die Ableitung einer verketteten Funktion existiert f' aber auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f'(x) \quad = \quad -\frac{\cos(1/x)}{x^2} \tag{15}$$

   und ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.

   c) Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0\ , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} \tag{16}$$

   ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig:

      i. Daß f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig ist, folgt aus der Stetigkeit von x, $\sin x$ und $1/x$.

ii. Die Stetigkeit von f an der Stelle $x = 0$ muß aber zu Fuß gezeigt werden: Für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt sicherlich $|\sin(1/x)| \leq 1$, woraus durch Multiplikation mit $|x|$ folgt

$$|x \sin(1/x)| \quad \leq \quad |x|. \tag{17}$$

Sei nun eine beliebige relle Zahl $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta(\epsilon) = \epsilon$. Für alle x mit $0 < |x| < \delta$ gilt neben Gleichung (17) wegen $\delta = \epsilon$ offenbar

$$|x| \quad < \quad \epsilon \tag{18}$$

und mithin $|x \sin(1/x)| < \epsilon$ oder – anders ausgedrückt –

$$\lim_{x\to 0} |x \sin(1/x)| \quad = \quad 0 \quad = \quad f(0). \tag{19}$$

Der Grenzwert existiert also und fällt mit dem Wert der Funktion zusammen.[1]

Kommen wir zur Ableitung. Da x, $\sin x$ und $1/x$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar sind, ist dies auch mit der verketteten Funktion $x \sin(1/x)$ der Fall. Bleibt die Stelle $x = 0$, wozu wir den zugehörigen Differenzenquotienten betrachten:

$$\lim_{x\to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad = \quad \lim_{x\to +0} \frac{x \sin(1/x) - 0}{x} \quad = \quad \lim_{x\to +0} \sin(1/x). \tag{20}$$

Daß dieser Grenzwert nicht existiert, ist bereits von der Funktion (14) her bekannt. Folglich ist f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Auf dem restlichen Definitionsbereich von f existiert f', und es gilt

$$f'(x) \quad = \quad \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x}, \tag{21}$$

weshalb f' auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.

d) Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} \tag{22}$$

ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar (siehe oben), und es gilt

$$f'(x) \quad = \quad \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} . \tag{23}$$

$x = 0$ ist auf Grund des Terms $\cos(1/x)$ eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art von f'. Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist f' stetig differenzierbar.

5. *Ableitungen*. Die Stetigkeit von $1/x$ in den interessierenden Intervallen liefert mit der Kettenregel das gewünschte.

[1] Der anschauliche Grund dafür, warum dieser Grenzwert existiert, ist: Die „Amplitude“ von $f(x)$ wird kleiner als jede vorgegebene positive reelle Zahl, wenn man $|x|$ nur hinreichend klein wählt. Das ist bei (14) nicht der Fall!