Serie 07

1. *Integration*. Berechnen Sie

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \tag{1}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+1}}, \tag{2}$$

$$\int \frac{2x^3+9x^2+8x+5}{x^2+4x+5} \, dx, \tag{3}$$

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} \, dx, \tag{4}$$

$$\int_2^4 \sqrt{1-(u-3)^2} \, du. \tag{5}$$

2. *Trigonometrie/Integration*.

   a) Beweisen Sie die Identitäten

$$(\tan x)' = 1/\cos^2 x, \tag{6}$$

$$1+\tan^2 x = 1/\cos^2 x. \tag{7}$$

   b) Geben Sie zwei Funktionen an, deren Differentiale die Gestalt $dx + \tan^2 x dx$ besitzen!

   c) Zeigen Sie mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion in Differentialform, daß gilt

$$\frac{d \arctan y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}. \tag{8}$$

   d) Bestimmen Sie

$$\int \frac{\arctan(x/2)}{4+x^2} \, dx. \tag{9}$$

3. *Partielle Integration*. Zeigen Sie die Gültigkeit der Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} + \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} \tag{10}$$

für alle ganzen Zahlen k mit $k > 1$ und alle reellen Zahlen p, q mit $4q > p^2$!
Hinweis: Setzen Sie $u(x) = (x^2+px+q)^{-k}$, $v'(x) = 1$, $v(x) = x + p/2$; verwenden Sie die quadratische Ergänzung.