Serie 09

1. *Integration*. Verifizieren Sie

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+8x+12}} \approx 0.24386844. \tag{1}$$

2. *Uneigentliche Integrale*. Verifizieren Sie

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} = 3, \tag{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = -1, \tag{3}$$

$$\int_{-1}^1 \ln|x| \,\mathrm{d}x = -2. \tag{4}$$

3. *Bogenlängen*. Zeigen Sie, daß für eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = r(\phi)$ für die Bogenlänge des durch $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$ gegebenen Kurvenstücks gilt

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{[r(\phi)]^2 + [\dot{r}(\phi)]^2}\,\mathrm{d}\phi. \tag{5}$$

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die kartesischen Koordinatenfunktionen $x(\phi)$ und $y(\phi)$ der Kurve, und verwenden Sie die Beziehung $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

4. *Bogenlängen*. Berechnen Sie die Bogenlänge der logarithmischen Spirale $r(\phi) = \mathrm{e}^{a\phi}$ für $\phi \in [0, 2\pi]$ und $a > 0$.

   Lösung: $s = \sqrt{1 + 1/a^2}\,(\mathrm{e}^{2\pi a} - 1)$

5. *Flächeninhalte*. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

   Hinweis: Es empfiehlt sich die Verwendung von Polarkoordinaten.

   Lösung: $A = \pi|ab|$

6. *Rotationskörper*. Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,(3-x)}{3}. \tag{6}$$

   Bestimmen Sie Oberflächeninhalt und Volumen (Maßzahlen) des Körpers, der durch Drehung des zwischen den Nullstellen von f gelegenen und durch $y = f(x)$ gegebenen Kurvenstücks um die x-Achse entsteht.

   Lösung: $O_\mathrm{M} = 3\pi$, $V = 3\pi/4$