

Serie 12

1. *Extremwerte.* Wie ist das Verhältnis zwischen Höhe h und Breite b eines Kanals mit vorgegebenem rechteckigem Querschnitt A zu wählen, damit seine (längenbezogene) Wandfläche minimal wird?

2. *Kurvendiskussion.* Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}. \quad (1)$$

3. *Partielle Integration.* Berechnen Sie mittels partieller Integration für **alle** reellen Konstanten a und b (auch $a = 0$ und/oder $b = 0$) eine Stammfunktion von

$$e^{ax} \cos bx. \quad (2)$$

4. *Geometrische Anwendung der Integralrechnung.* Gegeben seien die auf dem Intervall $[0, 2]$ definierten Funktionen

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 5 \quad (3)$$

$$g(x) = 2. \quad (4)$$

- a) Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen auf ihrem Definitionsbereich und die durch diese Graphen begrenzte Fläche F .
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F .
- c) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch f und $x \in [0, 2]$ definierten Kurve.
- d) Die Fläche F sei homogen mit Masse belegt; berechnen Sie ihren Schwerpunkt.
- e) Die Fläche F rotiere um die Achse $x = 1$. Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt (Mantel- und Grundfläche) des entstehenden Rotationskörpers.
- f) Die Fläche F sei homogen mit der Masse m belegt und rotiere um die Achse $x = 1$. Berechnen Sie ihr Trägheitsmoment.
- g) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des o.g., homogen mit der Masse m belegten Rotationskörpers.
5. *Differentialgleichungen.* Gegeben seien folgende Differentialgleichungen für $x(t)$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 13e^{2t}, \quad (5)$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0. \quad (6)$$

- a) Bestimmen Sie ein **reelles** Fundamentalsystem von (6).
- b) Geben Sie die allgemeine Lösung von (6) an.
- c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Gleichung (5).
- d) Geben Sie die allgemeine Lösung von (5) an.