Serie 03

1. *Ungleichungen/Beträge*. Für welche reellen Zahlen x gilt

$$\begin{aligned} 1+|x+1| &\le |x|, && (1)\\ x^2-3 &> 2|x|, && (2)\\ \frac{|x|+1}{|x+1|} &> |x|, && (3)\\ \frac{x^2+5x+6}{x+2} &\le 1, && (4)\\ |x+3|-|x-1| &> 1? && (5) \end{aligned}$$

Lösungen: $(-\infty,-1]$; $\mathbb{R}\backslash[-3,3]$; $(-1-\sqrt{2},1)\backslash\{-1\}$; $(-\infty,-2]$; $(-1/2,\infty)$

2. *Lineare Gleichungssysteme*. Für welche $\lambda\in\mathbb{R}$ ist das folgende System lösbar?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 1\\ 2x & + & \lambda y & + & 6z & = & 6\\ -x & + & 3y & + & (\lambda-3)z & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

Lösung: $\lambda \ne -4$

3. *Lineare Gleichungssysteme*. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Systeme

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 12\\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & -1\\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \end{array}, \tag{7}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 10\\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & -3\\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1\\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \end{array}. \tag{8}$$

Lösungen: $x_2=-2$, $x_1=x_3+3$; $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=1$

4. *Analytische Geometrie*. Bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ des E_3 seien drei Vektoren wie folgt gegeben:

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}-2/3\\ \sqrt{32}/3\\ -2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Berechnen Sie $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathbf{ab}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ sowie die Richtungskosinus’ von $\mathbf{a}$!

Lösungen: $|\mathbf{a}|=2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}|=2\sqrt{13}$, $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=126.04°$, $\mathbf{ab}=-12$,
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(16/3\sqrt{2}\quad -28/3\quad -8\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$, $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=-4(7+2\sqrt{2})/3\approx-13.1$,
$\cos(\mathbf{a},\mathbf{e}_1)=-1/(3\sqrt{2})$, $\cos(\mathbf{a},\mathbf{e}_2)=2/3$, $\cos(\mathbf{a},\mathbf{e}_3)=-1/\sqrt{2}$