Dr. Solyga – Mathematik III – Aufgaben – D3ET 1 – FHTW-Berlin – 2005-10-05

Serie 02

1. LAPLACE-*Transformation*. Berechnen Sie mit Hilfe der Verschiebungssätze die LAPLACE-Transformierten

   a) des um $\pi/2$ nach rechts verschobenen Kosinus und

   b) des um $\pi/2$ nach links verschobenen Sinus,

   und begründen Sie, warum sich im ersten Falle nicht die Transformierte des Sinus ergibt.
   Lösung: $e^{-p\pi/2}p/(p^2+1)$, $p/(p^2+1)$

2. *Faltung*. Zeigen Sie, daß die Faltung eine kommutative Operation ist:

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

3. *Faltung*. Berechnen Sie die Faltung des Sinus mit sichselbst, d.h.

$$\sin t * \sin t. \tag{2}$$

   Lösung: $(\sin t - t\cos t)/2$

4. LAPLACE-*Transformation*. Bestimmen Sie

   a) $\mathcal{L}\{\sin t * \sin t\}$ mittels Faltungssatz und

   b) $\mathcal{L}\{(\sin t - t\cos t)/2\}$ ohne Verwendung des Faltungssatzes.

5. LAPLACE-*Transformation*. Zeigen Sie, daß für eine mit $T > 0$ periodische, auf $[0, T]$ stückweise stetige Funktion $f(t)$ gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{3}$$

6. LAPLACE-*Transformation*. Seien

$$f(t) = \cos t, \tag{4}$$
$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{5}$$

   Berechnen Sie – sofern existent –

   a) $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$,

   b) $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$,

   c) $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)$ und

   d) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$,

   und verifizieren Sie an diesem Beispiel die Gültigkeit der Grenzwertsätze.