Dr. Solyga – Mathematik III – Aufgaben – D3ET 1 – FHTW-Berlin – 2005-10-13

Serie 03

1. LAPLACE-*Transformation*. Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $U(p)$ des Einheitssprunges $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \leq 0 \\ 1 & : \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Hinweis: Nach dieser Definition ist – im Unterschied zur Vorlesung – $u(0) = 0$ aber weiterhin $u(+0) = 1$. Hat dies einen Einfluß auf die Transformierte?

2. LAPLACE-*Transformation*. Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $\Delta(p)$ des Einheitsimpulses $\delta(t)$ mittels Transformation von

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & : \quad t \in [0, \epsilon] \\ 0 & : \quad t \notin [0, \epsilon] \end{cases} \tag{2}$$

und anschließendem Grenzübergang $\epsilon \to 0$.

3. LAPLACE-*Transformation*. Weil offenbar für alle t

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_0^t f_\epsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = u(t) \tag{3}$$

gilt, verwendet man in der Praxis das konsistente Formelpaar

$$u(t) = \int_0^t \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

$$\delta(t) = u'(t). \tag{5}$$

Transformieren Sie Gleichung (4) mittels Integrations- und Gleichung (5) mittels Differentiationssatz in den Bildbereich! Sind diese Sätze im vorliegenden Falle anwendbar?

4. *Lineare Systeme*. Bestimmen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ eines durch die Gleichung $y'' + y = x$ beschreibbaren Systems und seine durch die Erregung $\sin t$ erzwungene Antwort!

5. WRONSKI-*Determinante*. Vorgelegt seien die Funktionen $y_1(t) = t^3$ und $y_2(t) = |t|t^2$. Zeigen Sie, daß im Intervall $(-1, 1)$ gilt:

   a) y_1 und y_2 sind linear unabhängig.
   b) y_1 und y_2 sind differenzierbar.
   c) Die WRONSKI-Determinante $W[y_1, y_2](t)$ verschwindet identisch.

   Können y_1, y_2 auf $(-1, 1)$ Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung sein?