Dr. Solyga – Mathematik III – Aufgaben – D3ET 1 – FHTW-Berlin – 2005-10-20

Serie 04

1. *Differentialgleichungen*. Berechnen Sie mittels Variation der Parameter eine partikuläre Lösung von

$$\ddot{y}(t) + y(t) \quad = \quad \tan t, \tag{1}$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem (1) mit $y(0) = \dot{y}(0) = 1$.

Lösungen: $y_p(t) = -\ln|\tan(\pi/4 + t/2)|\cos t$,
$y_{\mathrm{AWP}}(t) = -\ln|\tan(\pi/4 + t/2)|\cos t + \cos t + 2\sin t$

2. *Differentialgleichungen*. Man löse mittels LAPLACE-Transformation das AWP

$$\ddot{y} + 6\dot{y} - 16y = t, \qquad\qquad y(1) = \dot{y}(1) = 0. \tag{2}$$

Hinweis: Die Anfangsbedingungen sind in $t = 1 \neq 0$ zu erfüllen!

Lösung: $y(t) = -\frac{11}{128} - \frac{1}{16}(t-1) + \frac{3}{40}\mathrm{e}^{2(t-1)} + \frac{7}{640}\mathrm{e}^{-8(t-1)}$

3. LAPLACE-*Transformation*. Berechnen Sie die Transformierten von $|\sin t|$ und $\tan t$!

Lösungen: $\mathcal{L}\{|\sin t|\} = \frac{1}{1+p^2}\frac{1+\mathrm{e}^{-p\pi}}{1-\mathrm{e}^{-p\pi}}$, $\tan t$ ist keine L-Funktion

4. *Lineare Systeme*. Ein System sei durch die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) \quad = \quad x(t) \tag{3}$$

beschreibbar. Welchen Bedingungen sind die komplexen Konstanten δ und ω_0 zu unterwerfen, damit die Impulsantwort des Systems

a) für $t \to \infty$ verschwindet,

b) für $t \to \infty$ zwar nicht verschwindet aber beschränkt ist bzw.

c) unbeschränkt ist?

Geben Sie die Impulsantwort des Systems in einer für den reellen Fall sinnvollen Gestalt an!

5. WRONSKI-*Determinante*. Beweisen Sie folgenden Satz:

Seien $y_1(t), y_2(t)$ Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) \quad = \quad 0 \tag{4}$$

in (α, β). Dann löst ihre WRONSKI-Determinante

$$x(t) \quad = \quad W[y_1, y_2](t) \quad = \quad \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \tag{5}$$

die lineare Differentialgleichung

$$x'(t) + p(t)x(t) \quad = \quad 0 \tag{6}$$

in (α, β).