Serie 05

1. *Lineare Systeme*. Bestimmen Sie Sprungantwort (Erregung $x(t) = U_0 u(t)$ mit der üblichen Definition für $u(t)$ als Einheitssprung in $t = 0$) und Frequenzgang des in Abbildung 1 dargestellten RL-Hochpasses, und skizzieren Sie seinen Amplituden- und Phasengang!

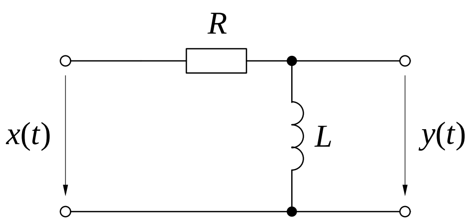

Abbildung 1: RL-Hochpaß

Zeigen Sie ferner auf rechnerischem Wege, daß es sich beim Frequenzgang um einen Halbkreis im ersten Quadranten der komplexen Ebene mit dem Mittelpunkt $z_0 = 1/2$ handelt!

Hinweis: Da die rechte Seite der das System beschreibenden Dgl. von der Standardform abweicht, sollten Sie die Rechnung „zu Fuß" durchführen und nicht auf bekannte Formeln zurückgreifen.

Lösung: $y_u(t) = U_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, $G(\mathrm{j}\omega) = \frac{(\omega\tau)^2 + \mathrm{j}\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}$ mit $\tau = L/R$.

2. *Potenzreihen*. Bestimmen Sie für $c > 0$ Summenwert und Konvergenzbereich von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_0}{c}\right)^{\nu}, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x - x_0}{c}\right)^{\nu}. \tag{2}$$

Lösung: $\frac{c}{c-(x-x_0)}$, $|x - x_0| < c$, $\frac{(x-x_0)}{c-(x-x_0)}$, $x \in (x_0 - c, x_0 + c)$

3. *Potenzreihen*. Bestimmen Sie reelle Zahlen a_ν derart, daß für gewisse $x \neq 2$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-2)^\nu = \frac{x-2}{x^2 - 2x + 1}. \tag{3}$$

Für welche Zahlen x gilt Gleichung (3)? Sind die a_ν vermöge (3) eindeutig bestimmt?

Lösung: $a_\nu = \nu(-1)^{\nu+1}$

4. Wronski-*Determinante*. Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $\{y_1(t), y_2(t)\}$ ein Fundamentalsystem von

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{4}$$

in (α, β). Dann gilt

a) $y_1(t)$ und $y_2(t)$ besitzen in (α, β) keine gemeinsame Nullstelle.

b) Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $y_1(t)$ liegt genau eine Nullstelle von $y_2(t)$.