Serie 05 - Lösungen

1. *Lineare Systeme.*
Sprungantwort. Der Maschensatz liefert $x(t) = Ri(t) + y(t)$ bzw. differenziert $x'(t) = Ri'(t)+y'(t)$, und mit $y(t) = Li'(t)$ (kein Strom durch die Ausgangsklemmen) und $\tau = L/R$ ergibt sich die gesuchte Differentialgleichung zu

$$y'(t) + \frac{1}{\tau} y(t) = x'(t). \tag{1}$$

Wegen $x'(t) = U_0\delta(t)$ lautet die LAPLACE-Transformierte der Dgl.

$$pY(p) - y(+0) + \frac{1}{\tau} Y(p) = U_0, \tag{2}$$

und wegen $y(+0) = 0$ (Sprungantwort ist erzwungene Antwort, was verschwindende Anfangswerte impliziert) folgt für die Sprungantwort

$$Y(p) = \frac{U_0}{p + 1/\tau}, \tag{3}$$

$$y(t) = U_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{4}$$

Frequenzgang. Für die Eingangsspannung gilt

$$x(t) = U_0 u(t), \tag{5}$$

$$X(p) = \frac{U_0}{p}, \tag{6}$$

und wegen $G(p) = Y(p)/X(p)$ folgt für den Frequenzgang der Schaltung

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega + 1/\tau} = \frac{\mathrm{j}\omega\tau}{1 + \mathrm{j}\omega\tau} = \frac{(\omega\tau)^2 + \mathrm{j}\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \tag{7}$$

Ortskurve. Offenbar sind Real- und Imaginärteil für alle Frequenzen nicht negativ, d.h. die Ortskurve verläuft vollständig im ersten Quadranten der komplexen Ebene. Setzt man zur Abkürzung $\omega\tau = t$, hat man für Real- und Imaginärteil des Frequenzganges

$$x(t) = \frac{t^2}{1 + t^2}, \tag{8}$$

$$y(t) = \frac{t}{1 + t^2}. \tag{9}$$

Offenbar gilt

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = \left(\frac{t^2}{1 + t^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{1 + t^2}\right)^2 \tag{10}$$

$$= \frac{(t^2 - 1)^2}{4(1 + t^2)^2} + \frac{4t^2}{4(1 + t^2)^2} \tag{11}$$

$$= \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4(1 + t^2)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \tag{12}$$

es handelt sich also um einen Kreis vom Radius $1/2$ mit dem Mittelpunkt in $(1/2, 0)$.

2. *Potenzreihen*. Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe für $|q| < 1$, und es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} = \frac{1}{1-q}. \tag{13}$$

Mit $q = (x - x_0)/c$ erhält man daher

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{c}\right)^{\nu} = \frac{c}{c-(x-x_0)} \tag{14}$$

für $|x - x_0| < c$ (wegen $c > 0$ kann rechts der Betrag entfallen) oder - was dasselbe ist - für $x \in (x_0 - c, x_0 + c)$. Für *dieselben* x gilt ferner

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{c}\right)^{\nu} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{c}\right)^{\nu} - \sum_{\nu=0}^{0} \left(\frac{x-x_0}{c}\right)^{\nu} && (15)\\
&= \frac{c}{c-(x-x_0)} - 1 && (16)\\
&= \frac{x-x_0}{c-(x-x_0)}. && (17)
\end{aligned}$$

3. *Potenzreihen*. Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{x-2}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\frac{1}{x-1}. \tag{18}$$

Bei den rechtsseitigen Termen handelt es sich jeweils um den Summenwert einer geometrischen Reihe, d.h. es gilt

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1+(x-2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \big(-(x-2)\big)^{\nu} \tag{19}$$

für $|x - 2| < 1$ $(x - 2 = -q)$. Für $x \in (1, 3)$ gilt also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}(x-2)^{\nu}, && (20)\\
\frac{1}{x-1}\frac{1}{x-1} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}(x-2)^{\nu} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}(x-2)^{\nu} && (21)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-2)^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu} (-1)^{n}(-1)^{\nu-n} && (22)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-2)^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu} (-1)^{\nu} && (23)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-2)^{\nu}(-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu} 1 && (24)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-2)^{\nu}(-1)^{\nu}(\nu+1), && (25)\\
\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\frac{1}{x-1} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}(x-2)^{\nu}(-\nu), && (26)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(-1)^{\nu+1}(x-2)^{\nu} && (27)
\end{aligned}$$

und folglich $a_\nu = \nu(-1)^{\nu+1}$. Für den Konvergenzradius der Reihe folgt

$$r = \lim_{\nu\to\infty} \left| \frac{\nu(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)(-1)^{\nu+2}} \right| = 1. \tag{28}$$

In Abbildung 1 sind die Grafen der gebrochen rationalen Funktion (18) und der nach dem n-ten Glied abgebrochenen Potenzreihe (27) für verschiedene Werte von n dargestellt. Je näher man den Rändern des Konvergenzintervalls der Reihe kommt, desto mehr Glieder sind erforderlich, um eine gegebene Güte der Näherung zu erreichen.

4. Wronski-*Determinante*. Die Wronski-Determinante von y_1, y_2 lautet

$$W[y_1, y_2](t) = y_1'(t)y_2(t) - y_1(t)y_2'(t). \tag{29}$$

a) Wäre ein gewisses $t_0 \in (\alpha, \beta)$ Nullstelle von y_1 und von y_2, so verschwände an dieser Stelle auch W. Die Wronski-Determinante verschwindet für Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung aber genau dann, wenn sie linear abhängig sind. Ein Fundametalsystem ist per Definition aber linear unabhängig.

b) Seien t_1, t_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von y_1. Angenommen, y_2 besäße keine Nullstelle auf (t_1, t_2). Dann wäre die Funktion $g(t) = y_1(t)/y_2(t)$ auf $[t_1, t_2]$ wohl definiert, denn weder im Inneren des Intervalls noch auf seinem Rand dürfte y_2 verschwinden. Ferner wäre g auf (t_1, t_2) differenzierbar, denn y_1 und y_2 müssen als Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung wenigstens einmal differenzierbar sein

$$g'(t) = \frac{y_1'(t)y_2(t) - y_1(t)y_2'(t)}{y_2^2(t)} = \frac{W(t)}{y_2(t)}. \tag{30}$$

Außerdem gilt $g(t_1) = g(t_2)$. Nach dem Satz von Rolle existierte daher ein $\tau \in (t_1, t_2)$, so daß $g'(\tau) = 0$, also $W(\tau) = 0$. Die Wronski-Determinante von y_1, y_2 müßte also irgendwo im Innern von $[t_1, t_2]$ verschwinden. Daher muß die Annahme falsch sein, d.h. y_2 besitzt auf (t_1, t_2) wenigstens eine Nullstelle.

Angenommen, y_2 besäße mehr als eine Nullstelle auf (t_1, t_2). Zwischen jeweils zwei von diesen müßte aber nach obiger Überlegung wenigstens eine Nullstelle von y_1 liegen. Das jedoch wäre ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß t_1, t_2 zwei *aufeinanderfolgende* Nullstellen von y_1 sind. Die Annahme muß also falsch sein, d.h. y_2 besitzt auf (t_1, t_2) *genau* eine Nullstelle.

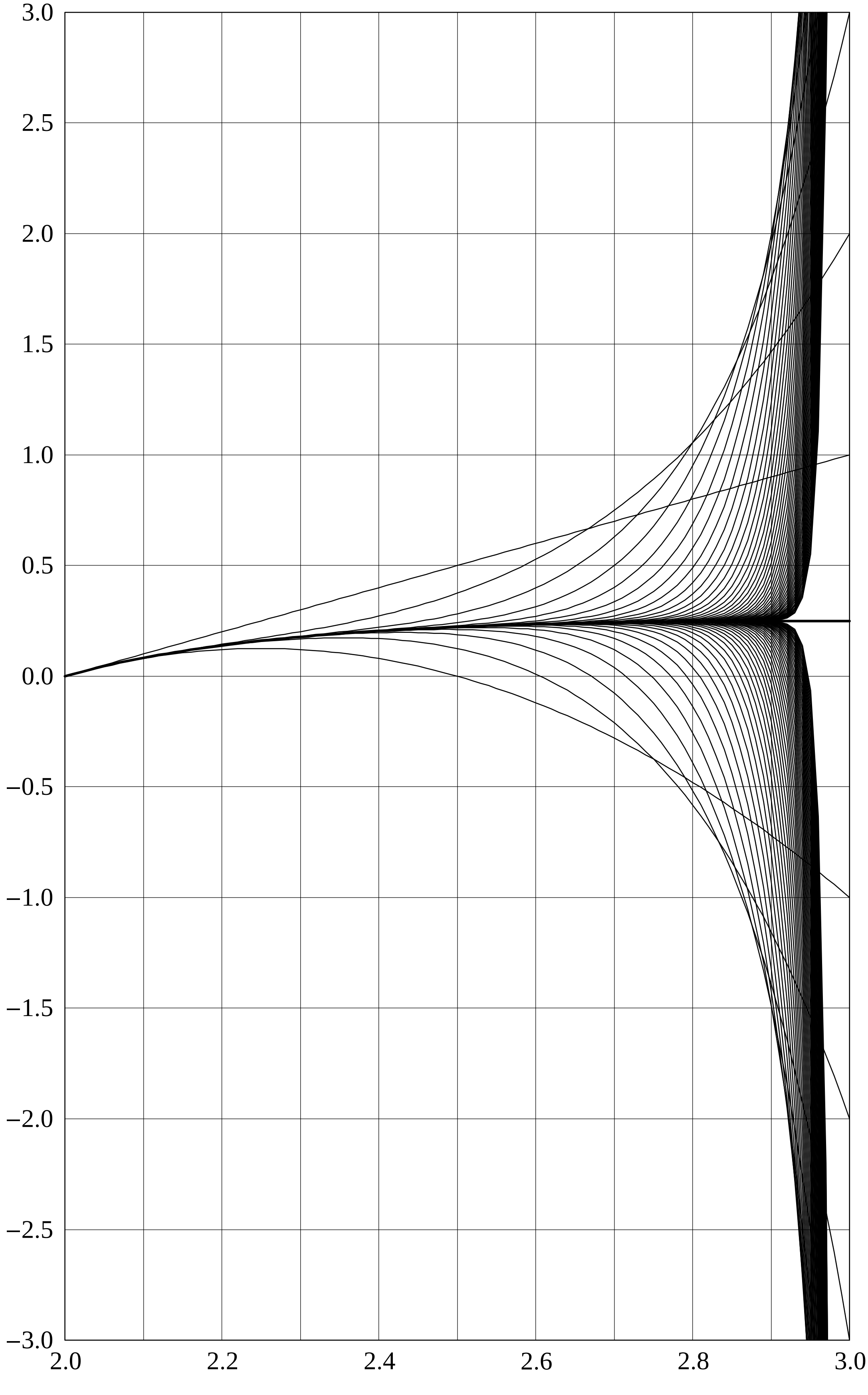

Abbildung 1: Grafen von $\dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$ (dicke Linie) und $\sum_{\nu=0}^{n} \nu(-1)^{\nu+1}(x-2)^{\nu}$ (dünne Linien) für $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$.