Serie 09

1. *Raumkurven*. Man zeige, daß die Produktregel $[x(t)y(t)]' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$ auch für vektorielle Funktionen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ gilt:

$$[\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)]' = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t), \tag{1}$$
$$[\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)]' = \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}'(t). \tag{2}$$

2. *Raumkurven*. Man beweise die Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{x}(t)|^2 = 2\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t)! \tag{3}$$

   Anmerkung: Deutet man $\mathbf{x}(t)$ als zeitabhängige Geschwindigkeit einer Punktmasse, so folgt aus diesem Zusammenhang: Eine senkrecht zur Bewegungsrichtung eines Körpers wirkende Kraft ändert dessen kinetische Energie nicht.

3. *Raumkurven*. Man beweise, daß für eine differenzierbare Funktion $\mathbf{x}(t)$ gilt:

$$|\mathbf{x}(t)| = 0 \quad \vee \quad |\mathbf{x}(t)|' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0. \tag{4}$$

   Anmerkung: Deutet man $\mathbf{x}(t)$ als zeitabhängigen Ortsvektor einer Punktmasse, so folgt aus diesem Zusammenhang: Steht die Richtung eines Körpers senkrecht auf seinem Ort, so bewegt er sich auf einer Kugeloberfläche (oder er ruht).

4. *Raumkurven*. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente der Kurve

$$x = r\cos\omega t, \tag{5}$$
$$y = r\sin\omega t, \tag{6}$$
$$z = vt \tag{7}$$

   (r, ω und v konstant) in $t = \frac{9\pi}{4\omega}$!

5. *Flächen*. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene der Einheitskugel im Punkt (x, y, z)! Es sind x und y als gegeben zu betrachten.