Klausur

1. *Extremwerte*. Für das Volumen eines geraden Kreiskegels mit dem Grundflächenradius r und der Mantellänge s gilt bekanntlich

$$V(r) \quad = \quad \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2}. \tag{1}$$

   Für welchen Radius r_{opt} wird dieses Volumen bei gegebener Mantellänge s maximal, und wie groß ist es (in Abhängigkeit von s allein)?

2. *Kurvendiskussion*. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) \quad = \quad x^2 \ln x \tag{2}$$

   d.h. bestimmen Sie den Definitionsbereich von f, ihre Nullstellen, die Nullstellen ihrer ersten Ableitung, ihre Monotonieintervalle, ihre relativen Extrema, die Nullstellen ihrer zweiten Ableitung, ihre Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle, ihre Wendepunkte und ihre Asymptoten, und fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze des Graphen von f an.

3. *Partielle Integration*. Berechnen Sie mittels partieller Integration für **alle** Werte der reellen Konstanten a und b eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \sin(ax)\cosh(bx). \tag{3}$$

4. *Geometrische Anwendung der Integralrechnung.* Gegeben seien die reelle Konstante R und die Funktion

$$y \quad = \quad f(x) \quad = \quad \begin{cases} 2R + x & : \quad x \le -R \\ \sqrt{R^2 - (x+R)^2} & : \quad x \ge -R \end{cases}. \tag{4}$$

   a) Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_{01} und x_{02} der Funktion f, und skizzieren Sie ihren Graphen auf dem Intervall $[x_{01}, x_{02}]$.
   b) Skizzieren Sie die Fläche F, welche durch den Graphen von f und die x-Achse berandet wird, und berechnen Sie deren Inhalt A **mittels Integration**.
   c) Berechnen Sie **mittels Integration** das Volumen **und** den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers, der bei Rotation der unter Punkt 4b besprochenen Fläche F um die x-Achse entsteht.
   d) Optional (3 Zusatzpunkte): Berechnen Sie die in Punkten 4b und 4c gesuchten Größen mithilfe bekannter Formeln.

5. *Differentialgleichungen*. Gegeben sei folgende Differentialgleichung für $x(t)$

$$tx'(t) + 2x(t) \quad = \quad 3t. \tag{5}$$

   a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung von (5).
   b) Geben Sie eine partikuläre Lösung von (5) an.
   c) Lösen Sie das Anfangswertproblem bestehend aus der Differentialgleichung (5) und der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Zeit: 120 Minuten, **Punkte**: 10 pro Aufgabe, **Hilfsmittel**: alles außer PCs und Handys