

Wiederholungsklausur

1. *Extremwerte.* Wird ein Kreissektor mit dem Radius s und dem Zentriewinkel α zu einem geraden Kreiskegel zusammengerollt, so beträgt dessen Volumen

$$V(\alpha) = \frac{s^3}{12\pi} \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}. \quad (1)$$

Für welchen Zentriewinkel α_{opt} wird dieses Volumen bei gegebenem Sektorradius s maximal, und wie groß ist es (in Abhängigkeit von s allein)?

2. *Kurvendiskussion.* Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = x \ln^2 x \quad (2)$$

d.h. bestimmen Sie den Definitionsbereich von f , ihre Nullstellen, die Nullstellen ihrer ersten Ableitung, ihre Monotonieintervalle, ihre relativen Extrema, die Nullstellen ihrer zweiten Ableitung, ihre Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle, ihre Wendepunkte und ihre Asymptoten, und fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze des Graphen von f an.

3. *Partielle Integration.* Berechnen Sie mittels partieller Integration für **alle** Werte der reellen Konstanten a und b eine Stammfunktion von

$$f(x) = \cos(ax) \sinh(bx). \quad (3)$$

4. *Geometrische Anwendung der Integralrechnung.* Gegeben seien die positive reelle Konstante R und die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} (3R - x)/2 & : x \geq R \\ \sqrt{R^2 - (x - R)^2} & : x \leq R \end{cases}. \quad (4)$$

- Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_{01} und x_{02} der Funktion f , und skizzieren Sie ihren Graphen auf dem Intervall $[x_{01}, x_{02}]$.
- Skizzieren Sie die Fläche F , welche durch den Graphen von f und die x -Achse berandet wird, und berechnen Sie deren Inhalt A **mittels Integration**.
- Berechnen Sie **mittels Integration** das Volumen **und** den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers, der bei Rotation der unter Punkt 4b besprochenen Fläche F um die x -Achse entsteht.
- Optional (3 Zusatzpunkte): Berechnen Sie die in Punkten 4b und 4c gesuchten Größen mithilfe bekannter Formeln.

5. *Differentialgleichungen.* Gegeben sei folgende Differentialgleichung für $x(t)$

$$x' + 2tx = 2te^{-t^2}. \quad (5)$$

- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von (5).
- Geben Sie die allgemeine Lösung von (5) an.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem bestehend aus der Differentialgleichung (5) und der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Zeit: 120 Minuten, **Punkte:** 10 pro Aufgabe, **Hilfsmittel:** alles außer PCs und Handys