

Serie 03

1. *Ableitungen.* Die hyperbolischen Funktionen sind folgendermaßen definiert:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (1)$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (2)$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad (3)$$

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}. \quad (4)$$

Berechnen Sie die Ableitungen dieser vier Funktionen.

2. *Ableitungen.* Ist die Funktion

$$f(x) = e^{|x|} \quad (5)$$

in $x_0 = 0$ differenzierbar?

3. *Ableitungen.* Mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion leite man ab:

$$f(x) = \ln x, \quad (6)$$

$$f(x) = \operatorname{arsinh} x. \quad (7)$$

Anmerkung: Gilt $y = \sinh x$, so ist $x = \operatorname{arsinh} y$ (area sinus hyperbolicus).

4. *Ableitungen.* Man berechne f' :

$$f(y) = (1 - 2\sqrt{y})^2, \quad (8)$$

$$f(x) = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}, \quad (9)$$

$$f(x) = \ln \tan(x/2), \quad (10)$$

$$f(x) = \arccos(1/x). \quad (11)$$

5. *Ableitungen.* Es sei

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{wenn } x \leq 0 \\ x^2, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Untersuchen Sie f , f' und f'' hinsichtlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf \mathbb{R} , und skizzieren Sie diese drei Funktionen auf $[-1, 1]$.

6. *Ableitungen.* Seien $a_{11}(x)$, $a_{12}(x)$, $a_{21}(x)$ und $a_{22}(x)$ differenzierbare Funktionen. Man zeige:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a'_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix}. \quad (13)$$