Serie 04

1. *Ableitungen*. Ein Polynom $P(x)$ habe in x_0 eine Nullstelle mit der Vielfachheit $\gamma > 0$.

   a) Seien $x_0 = 0$ und $\gamma = 2$. Zeigen Sie, daß die Funktion $P(x)$ in x_0 ein strenges Extremum besitzt.

   b) Gilt diese Aussage auch für $x_0 \neq 0$ (und $\gamma = 2$)?

   c) Seien $x_0 = 0$ und $\gamma = 3$. Zeigen Sie, daß die Funktion $P(x)$ in x_0 einen Wendepunkt hat.

   d) Überlegen Sie sich, warum bei $\gamma \geq 2$ und beliebigem x_0 gilt:
   γ gerade $\Rightarrow$ $P(x)$ hat strenges Extremum in x_0 und
   γ ungerade $\Rightarrow$ $P(x)$ hat Wendepunkt in x_0.

2. *Ableitungen*. Bestimmen Sie – sofern existent – die absoluten Extrema von

$$f(x) = (x+3)^2(x-2)^3 \tag{1}$$

   in den Intervallen

   a) $[-2, 3]$ und

   b) $(-\infty, 0]$.

3. *Ableitungen*. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch für

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)^2}. \tag{2}$$

4. *Ableitungen*. Untersuchen Sie die Stetigkeit von f und f' in $x = 0$ für

$$f(x) = |x|, \tag{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases} \tag{6}$$

5. *Ableitungen*. Seien f und g (im eigentlichen Sinne) im Intervall $[c, \infty)$ differenzierbar, wobei $g'(x) \neq 0$ in $[c, \infty)$. Weiterhin sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne.
   Zeigen Sie, daß dann die mittelbaren Funktionen $\phi(x) := f(1/x)$ und $\psi(x) := g(1/x)$ alle Voraussetzungen der ersten L'HOSPITALschen Regel erfüllen!
   Anmerkung: Folglich existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7}$$