Serie 06

1. *Integration*. An einem ohmschen Widerstand R falle eine mit $T = 2\pi/\omega$ in der Zeit periodische Spannung ab, welche für $\omega t \in (-\pi, \pi]$ gemäß

$$u(t) = \frac{\hat{U}}{\pi}\,\omega t \tag{1}$$

geschrieben werden kann (Sägezahn).

   a) Berechnen Sie den linearen Mittelwert

$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

   der im Widerstand umgesetzten zeitabhängigen Leistung $p(t) = u^2(t)/R$!

   b) Berechnen Sie den quadratischen Mittelwert (Effektiv- oder RMS-Wert)

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{3}$$

   der zeitabhängigen Spannung $u(t)$ und das Verhältnis zwischen ihrem Maximal- und Effektivwert $\hat{U}/U_{\text{eff}}$!

   c) Derselbe Widerstand R sei an einer Gleichspannungsquelle der Spannung $U_=$ betrieben; die umgesetzte Leistung beträgt dann $P_= = U_=^2/R$. Welchen Wert muß $U_=$ annehmen, damit der Leistungsumsatz jenem des Sägezahnfalles entspricht? Drücken Sie diesen Wert mit Hilfe von U_{eff} aus! Welche Bedeutung kommt folglich dem Effektivwert einer Spannung zu?

2. *Partielle Integration*. Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion von

$$f(y) = y^2 \sinh y, \tag{4}$$
$$f(u) = u^2 \ln u, \tag{5}$$
$$f(z) = z^3 \sin z. \tag{6}$$

3. *Integration*. Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von $\tan x$, $\cot x$, $\tanh x$ und $\coth x$!

4. *Arithmetik*. Beweisen Sie mithilfe der Definitionen der hyperbolischen Funktionen die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \tag{7}$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{8}$$

5. *Integration*. Berechnen Sie

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \tag{9}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \tag{10}$$

$$\int \frac{2x^3 + 9x^2 + 8x + 5}{x^2 + 4x + 5} \, dx, \tag{11}$$

$$\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} \, dx, \tag{12}$$

$$\int_2^4 \sqrt{1 - (u - 3)^2} \, du. \tag{13}$$