

## Serie 07

1. *Grenzwerte.* Verifizieren Sie mit Hilfe der DE L'HOSPITALSchen Regel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = -\frac{3}{5}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (3)$$

2. *Extremwerte.* Auf den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems mögen sich zwei Punkte mit den Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  bewegen. Die Ausgangspunkte seien  $(a, 0)$  und  $(0, b)$ . Man ermittle den kleinsten Abstand der Punkte voneinander!

Lösung:  $r_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2}$  falls  $v_x = v_y = 0$ , sonst  $r_{\min} = \frac{|av_y - bv_x|}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

3. *Integration.* Verifizieren Sie

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 8x + 12} \approx 0.0601. \quad (4)$$

4. *Integration.* Gegeben seien nichtnegative ganze Zahlen  $m$  und  $n$ . Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen  $\sin mx \sin nx$ ,  $\cos mx \cos nx$  und  $\sin mx \cos nx$  (Lösung: Bronstein), und berechnen Sie damit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx, \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx, \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx. \quad (7)$$

Hinweis: Es sind Fallunterscheidungen nötig ( $m \neq n$ ,  $m = n$ ,  $m = 0$ , ...).

5. *Uneigentliche Integrale.* Verifizieren Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad (8)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2, \quad (9)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}. \quad (10)$$