

Serie 09

1. *Interpolation.* Als Interpolation bezeichnet man die Aufgabe, eine auf einem Intervall I definierte Funktion $f(x)$ zu bestimmen, deren Werte zunächst nur an einzelnen (paarweise verschiedenen) Stellen $x_i \in I$ gegeben sind. Offenbar existieren stets mehrere Funktionen, die dieser Bedingung genügen, weshalb man zusätzliche Forderungen an f stellen kann.

Gegeben seien drei Punkte $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 0)$ und $P_3 = (1, 1)$.

- a) Bestimmen Sie ein Polynom $f(x)$ von möglichst geringem Grad, dessen Graph durch P_1 , P_2 und P_3 verläuft, und skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-1, 1]$.
- b) Bestimmen Sie zwei Polynome $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von jeweils möglichst geringem Grad, so daß der Graph von f_1 durch P_1 und P_2 und der Graph von f_2 durch P_2 und P_3 verläuft. Skizzieren Sie f_1 auf $[-1, 0]$ und f_2 auf $[0, 1]$.
- c) Bestimmen Sie zwei Polynome $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von jeweils möglichst geringem Grad, so daß der Graph von f_1 durch P_1 und P_2 und der Graph von f_2 durch P_2 und P_3 verläuft und zusätzlich gilt $f_1'(0) = f_2'(0)$. Skizzieren Sie f_1 auf $[-1, 0]$ und f_2 auf $[0, 1]$.

2. *Rotationskörper.* Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie Oberflächeninhalt und Volumen (Maßzahlen) des Körpers, der durch Drehung des zwischen den Nullstellen von f gelegenen und durch $y = f(x)$ gegebenen Kurvenstücks um die x -Achse entsteht.

Lösung: $O_M = 3\pi$, $V = 3\pi/4$

3. *Rotationskörper.* Man betrachte das Flächenstück zwischen der x -Achse und dem Graphen der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$f(x) = 1 - \cos x. \quad (2)$$

Wie groß ist das Volumen (Maßzahl) des entstehenden Körpers, wenn das Flächenstück

- a) um die x -Achse bzw.
- b) um die y -Achse

rotiert?

Hinweis: Skizzieren Sie zuerst den Graphen und das Flächenstück.

Lösung: $V_a = 3\pi^2$, $V_b = 4\pi^3$

4. *Analytische Geometrie/Schwerpunkte.* Gegeben seien drei Punktmassen $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg und $m_3 = 3$ kg. Der Abstand zwischen m_1 und m_2 betrage $d_{12} = 3$ m, jener zwischen m_2 und m_3 $d_{23} = 4$ m, und jener zwischen m_3 und m_1 betrage $d_{31} = 5$ m. Wie weit ist der Massenmittelpunkt von m_1 entfernt?

Hinweis: Verwenden Sie ein geeignetes Koordinatensystem.

Lösung: $d \approx 3.2$ m