

## Serie 09

1. *Interpolation.* Als Interpolation bezeichnet man die Aufgabe, eine auf einem Intervall  $I$  definierte Funktion  $f(x)$  zu bestimmen, deren Werte zunächst nur an einzelnen (paarweise verschiedenen) Stellen  $x_i \in I$  gegeben sind. Offenbar existieren stets mehrere Funktionen, die dieser Bedingung genügen, weshalb man zusätzliche Forderungen an  $f$  stellen kann.

Gegeben seien drei Punkte  $P_1 = (-1, 0)$ ,  $P_2 = (0, 0)$  und  $P_3 = (1, 1)$ .

- a) Bestimmen Sie ein Polynom  $f(x)$  von möglichst geringem Grad, dessen Graph durch  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  verläuft, und skizzieren Sie  $f$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$ .
- b) Bestimmen Sie zwei Polynome  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  von jeweils möglichst geringem Grad, so daß der Graph von  $f_1$  durch  $P_1$  und  $P_2$  und der Graph von  $f_2$  durch  $P_2$  und  $P_3$  verläuft. Skizzieren Sie  $f_1$  auf  $[-1, 0]$  und  $f_2$  auf  $[0, 1]$ .
- c) Bestimmen Sie zwei Polynome  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  von jeweils möglichst geringem Grad, so daß der Graph von  $f_1$  durch  $P_1$  und  $P_2$  und der Graph von  $f_2$  durch  $P_2$  und  $P_3$  verläuft und zusätzlich gilt  $f_1'(0) = f_2'(0)$ . Skizzieren Sie  $f_1$  auf  $[-1, 0]$  und  $f_2$  auf  $[0, 1]$ .

2. *Rotationskörper.* Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie Oberflächeninhalt und Volumen (Maßzahlen) des Körpers, der durch Drehung des zwischen den Nullstellen von  $f$  gelegenen und durch  $y = f(x)$  gegebenen Kurvenstücks um die  $x$ -Achse entsteht.

Lösung:  $O_M = 3\pi$ ,  $V = 3\pi/4$

3. *Rotationskörper.* Man betrachte das Flächenstück zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen der auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  definierten Funktion

$$f(x) = 1 - \cos x. \quad (2)$$

Wie groß ist das Volumen (Maßzahl) des entstehenden Körpers, wenn das Flächenstück

- a) um die  $x$ -Achse bzw.
- b) um die  $y$ -Achse

rotiert?

Hinweis: Skizzieren Sie zuerst den Graphen und das Flächenstück.

Lösung:  $V_a = 3\pi^2$ ,  $V_b = 4\pi^3$

4. *Analytische Geometrie/Schwerpunkte.* Gegeben seien drei Punktmassen  $m_1 = 1$  kg,  $m_2 = 2$  kg und  $m_3 = 3$  kg. Der Abstand zwischen  $m_1$  und  $m_2$  betrage  $d_{12} = 3$  m, jener zwischen  $m_2$  und  $m_3$   $d_{23} = 4$  m, und jener zwischen  $m_3$  und  $m_1$  betrage  $d_{31} = 5$  m. Wie weit ist der Massenmittelpunkt von  $m_1$  entfernt?

Hinweis: Verwenden Sie ein geeignetes Koordinatensystem.

Lösung:  $d \approx 3.2$  m