Wirtschaftsmathematischer Vorkurs WS 2003/2004

S. Solyga

Lösungen zu den Einführungsaufgaben

1. *Prozentrechnung*. Die Jahresumsätze seinen bezeichnet mit $u_1, u_2, \ldots, u_5$ und die durchschnittlichen Jahresumsätze mit $d_1, d_2, \ldots, d_5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_1 &= u_1, && (1)\\ d_2 &= (u_1 + u_2)/2, && (2)\\ d_3 &= (u_1 + u_2 + u_3)/3 && (3)\\ d_4 &= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/4 && (4)\\ d_5 &= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)/5, && (5) \end{aligned}$$

wobei u_5 =455000 € und d_4 =325000 € gegeben sind. Es sei zunächst d_5 – der durchschnittliche Jahresumsatz am Ende des fünften Geschäftsjahres – berechnet. Gemäß Gleichung (4) gilt $4d_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, und Einsetzen in (5) liefert

$$d_5 = \frac{4d_4 + u_5}{5}. \qquad (6)$$

Werden die gegebenen Werte für d_4 und u_5 eingesetzt, so erhält man d_5 =351000 €. Der Wachtumsfaktor beträgt daher

$$\frac{d_5}{d_4} = \frac{351000}{325000} = 1.08, \qquad (7)$$

was einem Prozentwert von 108 entspricht. Der erwartete prozentuale Zuwachs des durchschnittlichen Jahresumsatzes beträgt folglich 8%.

2. *Regelmäßige Zahlungen*. Die jährliche Rate beträgt R =1200 €, und aus dem garantierten Zinssatz von $p = 3\,\%$ folgt ein Zinsfaktor von $q = 103\,\%/100\,\% = 1.03$.
Die Aufgabe besteht aus zwei Teilen; zunächst wird das Mindestkapital unmittelbar **nach** Einzahlung der Raten berechnet. Nach dem Einzahlen der ersten Rate sind noch keine Zinsen fällig geworden, so daß das Kapital im ersten Jahr genau der Rate entspricht:

$$K_1 = R. \qquad (8)$$

Genau ein Jahr später (im zweiten Jahr also) ist das Kapital K_1 verzinst ($K_1 q$), und die zweite Rate (R) wurde gezahlt; dann beträgt das neue Kapital folglich

$$K_2 = K_1 q + R = Rq + R. \qquad (9)$$

Ein weiteres Jahr später ist das Kapital K_2 verzinst ($K_2 q$) und die dritte Rate wurde gezahlt; das neue Kapital beträgt also

$$K_3 = K_2 q + R = Rq^2 + Rq + R. \qquad (10)$$

Im vierten Jahr hat man daher

$$K_4 = K_3 q + R = Rq^3 + Rq^2 + Rq + R. \tag{11}$$

Offenbar setzt sich der Kapitalwert also immer aus n Summanden zusammen, wenn n das laufende Jahr bzw. die Anzahl der bislang gezahlten Raten bezeichnet. Dabei fallen die Exponenten des Zinsfaktors von $n-1$ bis 0 ab (zur Erinnerung: $q^0 = 1$, also $R = Rq^0$). Daraus läßt sich ersehen, wie hoch das Kapital im n-ten Jahr, also unmittelbar **nach** Zahlung der n-ten Rate sein wird:

$$K_n = Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + \ldots + Rq^2 + Rq + R, \tag{12}$$
$$K_n = R\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1). \tag{13}$$

Um die letzte Gleichung zu vereinfachen, bedient man sich sinnvollerweise der Identität

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}), \tag{14}$$

welche aus dem Umfeld der binomischen Formeln stammt und für $a = q$ und $b = 1$ die Gestalt

$$(q^n - 1) = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1) \tag{15}$$

oder umgeformt

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{16}$$

annimmt. Setzt man dies in Gleichung (13) ein, so erhält man schließlich die gesuchte Formel für den Kapitalwert unmittelbar **nach** Einzahlung der n-ten Rate[1]

$$K_n = R\,\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{17}$$

Einsetzen der Zahlenwerte in diese Formel liefert die gesuchten Werte K_1 =1200 €, K_2 =2436 €, K_3 =3709.08 € und $K_n = 40000\,(1.03^n - 1)$ €.

Es sei nun der Kapitalwert unmittelbar **vor** Einzahlung der jeweils nächsten Rate berechnet. Zum Ende des ersten Jahres (vor Zahlung der zweiten Rate) ist die erste Rate bereits zinsfällig, womit sich im Unterschied zu Gleichung (8) nun

$$K_1 = Rq \tag{18}$$

ergibt. Zum Anfang des zweiten Jahres erfolgt die zweite Zahlung, so daß zum Ende desselben Jahres nicht mehr nur K_1 sondern $K_1 + R$ zinsfällig wird:

$$K_2 = (K_1 + R)q = Rq^2 + Rq. \tag{19}$$

[1]Man nennt diesen Wert auch Zahlungs- oder **Rentenendwert bei nachschüssiger Zahlung**; der Begriff nachschüssig entspringt einer anderen Betrachtungsweise des Zahlungs- und Verzinsungsvorganges, auf welche hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Ein Vergleich dieser beiden Werte mit (8) und (9) zeigt, daß alle Kapitalwerte mit q zu multiplizieren sind, also auch K_n aus Gleichung (17). Daher hat man für den Kapitalwert nach n Jahren (unmittelbar **vor** Einzahlung der $(n+1)$-ten Rate)[2]

$$K_n = Rq\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{20}$$

Einsetzen der Zahlenwerte in diese Formel liefert die gesuchten Werte K_1 =1236 €, K_2 =2509.08 €, K_3 =3820.35 € und $K_n = 41200\,(1.03^n - 1)$ €.

3. *Optimierung*. Da sich der Blechverbrauch proportional zur Oberfläche der kreiszylindrischen Büchse verhält, hat man deren Oberfläche bei gegebem Volumen zu minimieren. Für die Oberfläche O und das Volumen V eines Kreiszylinders der Höhe h und des Radius' r gilt bekanntlich[3]

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \tag{21}$$
$$V = \pi r^2 h. \tag{22}$$

Da die Oberfläche zu minimieren ist, interessiert vor allem die erste dieser beiden Gleichungen. Diese enthält jedoch mit r und h zwei unbekannte Größen. Allerdings besteht aufgrund des gegeben Volumens gemäß (22) ein funktionaler Zusammenhang zwischen r und h, nämlich

$$h = \frac{V}{\pi r^2}. \tag{23}$$

Diese Beziehung wird verwendet, um die Zylinderhöhe h aus Gleichung (21) zu entfernen. Setzt man (23) in Gleichung (21) ein, so taucht nur noch die Unbekannte r in der Gleichung auf

$$O = 2\pi r^2 + \frac{2V}{\pi r}. \tag{24}$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß diese Funktion $O(r)$ ein Minimum annimmt, besteht im Verschwinden ihrer ersten Ableitung

$$O' = 4\pi r - \frac{2V}{\pi r^2}. \tag{25}$$

Aus

$$0 = 4\pi r_{\mathrm{opt}} - \frac{2V}{\pi r_{\mathrm{opt}}^2} \tag{26}$$

folgt durch Multiplikation mit $r_{\mathrm{opt}}^2/(4\pi)$ und Auflösen nach r_{opt}

$$r_{\mathrm{opt}}^3 = \frac{V}{2\pi^2}, \tag{27}$$
$$r_{\mathrm{opt}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}; \tag{28}$$

[2]Man nennt diesen Wert auch Zahlungs- oder **Rentenendwert bei vorschüssiger Zahlung**.

[3]Die Oberfläche eines Zylinders besteht aus der Deck- und Bodenfläche und aus der Mantelfläche. Erstere betragen als Kreisflächen jeweils πr^2, und letztere ergibt sich als Produkt des Kreisumfangs $2\pi r$ und der Zylinderhöhe h zu $2\pi rh$.

an dieser Stelle verschwindet also die erste Ableitung von $O(r)$. Da außerdem die zweite Ableitung dieser Funktion

$$O'' = 4\pi + \frac{4V}{\pi r^3}. \tag{29}$$

an der interessanten Stelle $r = r_{\text{opt}}$ positiv ist (der Wert beträgt dort 12π), ist auch die hinreichende Bedingung für ein Minimum von $O(r)$ in $r = r_{\text{opt}}$ erfüllt; r_{opt} – gegeben durch Gleichung (28) – ist also in der Tat eine Minimumstelle von $O(r)$. Aus (23) ergibt sich die zugehörige Zylinderhöhe mit (27) zu

$$h_{\text{opt}} = \frac{V}{\pi r_{\text{opt}}^2} = r_{\text{opt}} \frac{V}{\pi r_{\text{opt}}^3} = 2r_{\text{opt}}. \tag{30}$$

Für einen minimalen Blechverbrauch ist daher die Höhe der Büchse gleich ihrem Durchmesser zu wählen.

Das zu fassende Volumen spielt also für die Beantwortung der Frage gar keine Rolle! Nichtsdestotrotz seien die optimalen Maße für ein Volumen von 1 l angegeben: Sie betragen $r_{\text{opt}} = 3.7\,\text{cm}$ und $h_{\text{opt}} = d_{\text{opt}} = 7.4\,\text{cm}$.[4]

[4]Umrechnung von Litern in Kubikzentimetern: $1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3 = (1\,\text{dm})^3 = (10\,\text{cm})^3 = 1000\,\text{cm}^3$.