Serie 01

1. *Logik*. Betrachtet sei folgender Satz der Analysis: *„Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.“*

   a) Zerlegen Sie den Satz in Teilaussagen A, B und C über eine allgemeine Folge reeller Zahlen $\{x_n\}$.

   b) Geben Sie die logische Struktur des Satzes unter Verwendung der Symbole A, B und C in formaler Form an.

   c) Wie lautet die Kontraposition des Satzes formal, und wie lautet sie sprachlich?

   d) Geben Sie die Umkehrung des Satzes formal und sprachlich an.

   e) Geben Sie die Wahrheitswerte des Satzes, seiner Kontraposition und seiner Umkehrung an!

2. *Funktionen*. Gegeben seien die Mengen A, B mit $A = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen). Vermöge der Gleichung $b = 10^a$ seien gewissen $a \in A$ gewisse $b \in B$ zugeordnet.

   a) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ für die Abbildung an.

   b) Geben Sie den zugehörigen Wertebereich $\mathbb{W}$ an.

   c) Ist die derart definierte Abbildung eindeutig, also eine Funktion?

   d) Wenn ja, ist diese Funktion eineindeutig und somit umkehrbar?

   e) Wenn ja, geben Sie eine Vorschrift (Gleichung) für die zugehörige Umkehrfunktion sowie ihren Definitions- und Wertebereich an.

3. *Rechenregeln*. Zeigen Sie, daß aus den Grundgesetzen der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen (inkl. Distributivgesetz) für das neutrale Element der Addition n, das neutrale Element der Multiplikation e und jede beliebige Zahl a folgt: $-n = n$, $-(-a) = a$, $an = n$ und $(-e)a = -a$.

4. *Ungleichungen*. Beweisen Sie mit Hilfe der Grundgesetze (Axiome) der Anordnung reeller Zahlen folgende Sätze für die reellen Zahlen a, b und c:

   a) $c < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -c > 0$

   b) $a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc$

   Formulieren Sie Satz 4b sprachlich, und geben Sie seine formale (d.h. formelmäßige) Kontraposition an! (Negationen sind weitestmöglich aufzulösen.)

5. *Ungleichungen*. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der von der reellen Variablen x abhängigen Aussageform:

$$2 + \frac{4-x}{2x-5} \quad < \quad 3. \tag{1}$$

6. *Potenzgleichungen*. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender von der reellen Veränderlichen x abhängigen Aussageformen:

$$2x^2 - 4 = 0, \tag{2}$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0, \tag{3}$$

$$4\pi^x - 1 = 0, \tag{4}$$

$$\pi^x + 2 = 0. \tag{5}$$