Serie 05

1. *Komplexe Zahlen*. Für welche n ist $(1+\mathrm{j})^n$ reell?

2. *Lineare Gleichungssysteme*. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ hat das folgende System eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 4x & - & \lambda y & - & 4z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

3. *Lineare Gleichungssysteme*. Prüfen Sie, ob das folgende System lösbar ist, und berechnen Sie die allgemeine Lösung.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \end{array} . \tag{2}$$

Lösung: $x_3 = (x_5 + x_4 + 5)/3$, $x_2 = (8x_5 - x_4 - 5)/6$, $x_1 = (-4x_5 + 5x_4 + 7)/6$

4. *Lineare Gleichungssysteme*. Ermitteln Sie die Koeffizienten a_i des Polynoms

$$P(z) \;=\; a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \tag{3}$$

derart, daß $P(-2) = 3$, $P(-1) = 1$, $P(0) = 1$, $P(1) = -3$ und $P(2) = -1$ gilt! Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

5. *Lineare Räume*. Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Lösung: Schon.

6. *Lineare Räume*. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

linear unabhängig sind, und stellen Sie den Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{6}$$

als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ dar.