Serie 06

1. *Matrizenmultiplikation*. Man verifiziere $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. *Matrizenmultiplikation*. Man verifiziere $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

3. *Matrizenmultiplikation*. Man berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

4. *Matrizenmultiplikation*. Man berechne A^n!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

5. *Rang einer Matrix*. Berechnen Sie die Ränge folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Lösungen: 4, 2

6. *Lineare Gleichungssysteme*. Besitzen die folgenden homogenen Gleichungssysteme eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Lösung: nein, ja

7. *Lineare Abhängigkeit*. Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Lösung: ja

8. *Lineare Abhängigkeit*. Sei V ein Vektorraum und $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß dann auch die drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ linear unabhängig sind.