Serie 07

1. *Lineare Gleichungssysteme*. Seien $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ ein Fundamentalsystem eines homogenen linearen Gleichungssystems und $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ reelle Konstanten. Zeigen Sie, daß dann auch $\{c_1\mathbf{x}_1, c_2\mathbf{x}_2\}$ ein Fundamentalsystem desselben Gleichungssystems ist!

2. *Lineare Gleichungssysteme*. Man ermittle ein Fundamentalsystem von

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 \end{array} . \tag{1}$$

Lösung: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

3. *Lineare Gleichungssysteme*. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \end{array} \tag{2}$$

in der Form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{p} + \mathbf{x}_\mathrm{H}$!

Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ -5/6 \\ 5/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. *Lineare Räume*. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

linear unabhängig sind, und stellen Sie

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

als Linearkombination von $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_4$ dar. Ist diese Darstellung eindeutig?

Anmerkung. Es sei M_{22} die Menge der zweireihigen quadratischen Matrizen reeller Zahlen. Definiert man die Addition dieser Matrizen und ihre Multiplikation mit reellen Zahlen wie gewohnt, so bildet M_{22} (mit den beiden Operationen) einen vierdimensionalen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Seine Elemente – die zweireihigen quadratischen Matrizen – sind daher Vektoren.