Serie 08

1. *Komplexe Zahlen*. Seien z_1, z_2 komplexe Zahlen und z_1^*, z_2^* die zugehörigen konjugiert komplexen Zahlen. Beweisen Sie die Identitäten

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^*, && (1) \\ (z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^*, && (2) \end{aligned}$$

und zeigen Sie, daß $z_1 + z_1^*$ und $z_1 z_1^*$ stets reell sind.

2. *Matrizen*. Zeigen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme, daß

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}. \tag{3}$$

3. *Matrizen*. Man berechne die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

sowohl mittels ihrer Adjunkten als auch mittels Gaussschem Algorithmus.

Lösung: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. *Analytische Geometrie*. Bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ des E_3 seien drei Vektoren wie folgt gegeben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ \sqrt{32}/3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Berechnen Sie $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{ab}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sowie die Richtungskosinus' von $\mathbf{a}$!

Lösungen: $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{13}$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 2.2 \approx 126.04°$, $\mathbf{ab} = -12$,
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (16/3\sqrt{2} \quad -28/3 \quad -8\sqrt{2})^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -4(7 + 2\sqrt{2})/3 \approx -13.1$,
$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) = -1/(3\sqrt{2})$, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2) = 2/3$, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3) = -1/\sqrt{2}$

5. *Entwicklungssatz der Vektoralgebra*. Zeigen Sie mittels Koordinatendarstellung, daß für beliebige Vektoren des Raumes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E_3$ gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{6}$$