Serie 10

1. *Analytische Geometrie*. Es sei g diejenige Gerade, welche durch die Punkte $P_0 = (1, 1, 0)$ und $P_1 = (0, 1, 1)$ verläuft. Berechnen Sie den Abstand zwischen $P_2 = (1, 0, 1)$ und g, die HESSEsche Normalform der durch g und P_2 definierten Ebene E, sowie den Abstand des Ursprunges $O = (0, 0, 0)$ von E!

   Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Geraden g versteht man den Betrag desjenigen Normalenvektors von g, der von g nach P zeigt.

2. *Analytische Geometrie*. Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt der Geraden

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

   durch die Ebene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

3. *Analytische Geometrie*. Gegeben seien zwei Ebenen E_1

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

   und E_2

$$x + 2y + 2z + 3 = 0. \qquad (4)$$

   Zeigen Sie, daß die Ebenen nicht parallel zueinander sind, und geben Sie die Schnittgerade in Parameterform an!

4. *Komplexe Zahlen*. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

$$z^2 = 1 + \mathrm{j}. \qquad (5)$$

5. *Polynome*. Sei $P(z) = z^5+2z^4-3z^3+4z^2-5z+6$. Bestimmen Sie mit Hilfe des HORNERschen Schemas $P(2)$ und mittels Polynomdivision ein $Q(z)$ derart, daß gilt
   $P(z) = P(2) + (z - 2)Q(z)$!

6. *Polynome*. Bestimmen Sie die Koeffizienten eines Polynoms dritten Grades $P(z)$ mit den Nullstellen -1, -2, -3 und $P(2) = 10$. Gibt es mehrere derartige Polynome?

7. *Polynome*. Berechnen Sie alle Nullstellen von

$$P(z) = 2z^7 - 4z^6 + 2z^5 - 2z^4 + 4z^3 - 2z^2 \qquad (6)$$

   und stellen Sie $P(z)$ in reeller und komplexer Produktform dar!

Lösungen

1. $\sqrt{3/2}$, $(x + y + z - 2)/\sqrt{3} = 0$, $2/\sqrt{3}$

2. $(-1, 4, 3)$

3.
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

4. $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{8}) \approx 1.1 + 0.45\mathrm{j}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8} + \mathrm{j}\sin\frac{9\pi}{8}) \approx -1.1 - 0.45\mathrm{j}$

5.
$$\begin{aligned} P(2) &= 52, && (8)\\ Q(z) &= z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 14z + 23 && (9) \end{aligned}$$

6.
$$P(z) = \frac{1}{6}z^3 + z^2 + \frac{11}{6}z + 1 \tag{10}$$

Das Polynom ist eindeutig bestimmt.

7.
$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^2(z-1)^3(z^2 + z + 1) && (11)\\ &= 2z^2(z-1)^3(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j})(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}) && (12) \end{aligned}$$