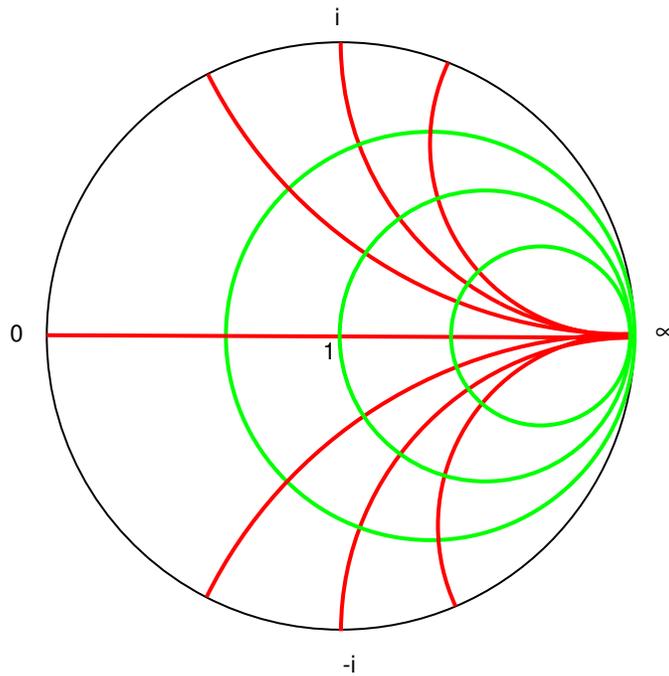


Analysis III für Ingenieure



Information. Für die erfolgreiche Teilnahme an diesem Modul erhalten Sie

6 Leistungspunkte nach ECTS.

Entsprechend erwarten wir von durchschnittlich begabten und vorgebildeten Studierenden folgenden Arbeitsaufwand:

Vorlesung	2h/Woche
Übung	2h/Woche
Häusliche Nacharbeit und Hausaufgaben	6h/Woche
Klausurvorbereitung	30h

Dieser Modul behandelt drei weitgehend voneinander unabhängige Themenkreise:

- **Komplexe Funktionentheorie**

Hier geht es um analytische und harmonische Funktionen, um konforme Abbildungen und den Themenkreis des Residuensatzes. Anwendungen finden Sie vor allem in der Potentialtheorie. Die Laurentreihen begegnen Ihnen in der z-Transformation und damit überall bei der Behandlung diskreter (digitalisierter) Probleme.

- **Rand-Eigenwert-Probleme**

Bei der Behandlung von Schwingungsproblemen, Diffusionsprozessen, Wärmeleitung oder Schalldämpfung und vielen anderen Problemen geht es um die Lösungen partieller Differentialgleichungen mit vorgegebenen Rand- und Anfangswerten. In ITPDG haben Sie gelernt, unter gewissen Symmetrien die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu reduzieren. Es entstehen für diese dann Randwert und Eigenwertprobleme. Vor allem geht es um die Entwicklung von Anfangsdaten in Gestalt willkürlicher Funktionen nach einem System von Eigenfunktionen der speziellen Differentialgleichung. Die Theorie der Fourierreihen kann man als einen Spezialfall betrachten, dessen physikalischer Hintergrund das Modell der schwingenden Saite ist. Andere Spezialfälle haben Sie bereits in ITPDG kennengelernt. Hier geht es darum, den einheitlichen Hintergrund all dieser Fälle zu verstehen.

- **Qualitative Theorie dynamischer Systeme**

Dynamische Systeme sind gewöhnliche Differentialgleichungssysteme erster Ordnung. Wir behandeln dann vor allem die Frage der Stabilität linearer und nichtlinearer Systeme. Anwendungen davon begegnen Ihnen in der Theorie der Netzwerke und in der Regelungstechnik, wo allerdings vor allem der lineare Fall anhand der Übertragungsfunktionen (Laplacetransformation) behandelt wird. Wir gehen auch auf den nichtlinearen Fall ein (Direkte Methode von Lyapunov) und verbinden das mit der Modellierung physikalischer Erhaltungssätze.

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Funktionen	9
1.1 Komplexe und analytische Funktionen	9
1.2 Eigenschaften analytischer Funktionen, harmonische Funktionen	15
1.3 Möbiustransformationen	23
1.4 Komplexe Integration	29
1.4.1 Weg(un)abhängigkeit	31
1.4.2 Der Cauchysche Integralsatz	34
1.4.3 Die Cauchysche Integralformel	35
1.5 Anwendungen der Integration auf die Potentialtheorie	37
1.6 Taylor- und Laurententwicklung	41
1.6.1 Taylorentwicklung	41
1.6.2 Singularitäten und Residuen	43
1.6.3 Typen von Singularitäten	45
1.6.4 Beispiele, Residuensatz	47
1.7 Anwendungen von Laurentreihe und Residuensatz	52
1.7.1 z-Transformation	52
1.7.2 Inverse Laplacetransformation	55
1.7.3 Nyquist-Kriterium	57
2 Rand- und Eigenwertprobleme	61
2.1 Zur Vorbereitung	61
2.1.1 Anfangswertprobleme gegen Randwertprobleme	61
2.1.2 Der Nutzen von Orthonormalsystemen	63
2.2 Selbstadjungiertheit und Orthogonalitätsrelationen	66
2.2.1 Das Sturmsche Randwertproblem	66
2.2.2 Orthogonalität der verallgemeinerten Eigenfunktionen (Sturm-Liouville)	71
2.3 Entwicklung nach Eigenfunktionen	74
3 Dynamische Systeme und Stabilität	79
3.1 Qualitative Theorie dynamischer Systeme	79
3.2 Stabilität für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	82
3.3 Stabilität bei variablen Koeffizienten und im nichtlinearen Fall	88
3.3.1 Linearisierung	88
3.3.2 Stabilitätskriterium von Lyapunov	91
4 Anhang	99
4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme (Wiederholung)	99
4.2 Ein nicht-lineares Randwertproblem: Der Eulersche Knickstab	113
4.3 Stabilitätskriterien von Routh und Hurwitz	120

Literatur

Als Lehrbücher zu dieser Veranstaltung werden empfohlen:

- **G. Bärwolff, G. Seifert: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag**
- **Meyberg, Vachenaue: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag**

Farbig unterlegt finden Sie Beispiel aus den Ingenieur Anwendungen, oft mit expliziten Hinweisen auf Ingenieurskripten des Grundstudiums:

Theoretische Elektrotechnik

Henke: Theoretische Elektrotechnik,
Skript TUB 1990/91

Werkstoffe I

Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik I,
Skript TUB, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik

Werkstoffe II

Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik II,
Skript TUB, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik

Regelungstechnik I

King: Regelungstechnik I,
Skript TUB

Signale und Systeme

Noll: Signale und Systeme,
Skript 1999

Einführung in die Netzwerktheorie

Naumin: Einführung in die Netzwerktheorie,
Skript TUB 1998

Regelung in der Luft- und Raumfahrt

K. Wilhelm: Regelung in der Luft und Raumfahrt,
Skriptum TUB, SS 2002

Wille: Strömungslehre

R. Wille: Strömungslehre,
Skript TU Berlin, 8. Auflage 2005

Zu einzelnen Veranstaltungen existieren mehrere, vielleicht auch neuere Skripten und Lehrbücher. Wir begnügen uns meistens mit *einem* Zitat, auch wenn sich der betreffende Sachverhalt in der Regel an mehreren Stellen findet.

1 Komplexe Funktionen

1.1 Komplexe und analytische Funktionen

- Komplexe Zahlen und Funktionen
- Komplex differenzierbare Funktionen
- Wie hängt die komplexe Differenzierbarkeit für Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der reellen Differenzierbarkeit für dieselben Abbildungen zusammen? ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$)
- Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Es ist Ihnen bekannt, dass die Verwendung komplexer Zahlen und Funktionen z.B. bei der Behandlung von Wechselströmen und Schwingungen oder – im Bereich der Mathematik – bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten große Rechenvorteile bringt: e^x , $\cos x$ und $\sin x$ „verschmelzen“ zu *einer* Funktion e^z .

In diesem Kapitel wollen wir die sogenannten „analytischen“ (= „holomorphen“) komplexen Funktionen studieren. Das sind komplexwertige Funktionen von einem komplexen Argument, die komplex differenzierbar sind. Wir müssen noch genauer erklären, was das bedeuten soll, aber Beispiele sind e^z oder andere konvergente komplexe Potenzreihen.

Ein wichtiger Anwendungsbereich in der Elektrotechnik ist die Potentialtheorie. Vergleichen Sie [*Theoretische Elektrotechnik*, insbesondere Kapitel 7.6]. Potentiale u quellfreier Felder $\vec{v} = -\text{grad } u$ erfüllen die Gleichung

$$\Delta u = \text{div grad } u = 0,$$

die deshalb auch *Potentialgleichung* heißt. Man nennt Funktionen u mit $\Delta u = 0$ auch *harmonische* Funktionen. Bei ebenen Problemen, also in zwei Dimensionen, besteht nun ein sehr enger Zusammenhang zwischen harmonischen Funktionen $u(x, y)$ und analytischen Funktionen $f(z)$. Aber beim Studium analytischer Funktionen ist die Mathematik so überaus erfolgreich gewesen, dass man dies Gebiet im Deutschen einfach als *Funktionentheorie* bezeichnet, als gäbe es gar keine reellen Funktionen. Und mit analytischen Funktionen rechnet es sich bedeutend leichter als mit harmonischen Funktionen. Zum Beispiel sind Produkte analytischer Funktionen wieder analytisch, aber Produkte harmonischer Funktionen meistens nicht harmonisch.

Eine zweite Anwendung, von Bedeutung ebenfalls in der Potentialtheorie aber auch anderswo, etwa in der Hochfrequenztechnik oder der Strömungsmechanik, besteht darin, dass komplexe Funktionen Bereiche der komplexen Ebene in Bereiche der komplexen Ebene abbilden, und dass diese Abbildungen für analytische Funktionen geometrisch angenehme Eigenschaften besitzen (insbesondere sind sie winkeltreu). Deshalb lassen sie sich mit Erfolg benutzen, um kompliziertere Bereiche auf einfache zu transformieren. Und harmonische Funktionen „überleben“ solche Transformationen.

Komplexe Zahlen. Wir erinnern daran, dass man komplexe Zahlen als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene interpretieren kann:

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad (x, y).$$

Also kann man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifizieren. Begriffe wie die Konvergenz von Folgen oder die Offenheit von Teilmengen, die wir im \mathbb{R}^n , also speziell auch im \mathbb{R}^2 , definiert haben, übertragen sich deshalb unmittelbar auf den Bereich der komplexen Zahlen. Allerdings haben die komplexen Zahlen eine Multiplikation, mit der sie zu einem Körper werden. Das gibt es im \mathbb{R}^n im allgemeinen nicht.

Komplexe Funktionen. Komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$, die eine Teilmenge G der komplexen Zahlen in die komplexen Zahlen abbilden, zerlegt man oft in ihren Real- und Imaginärteil, die man wieder gern als Funktionen des Real- und Imaginärteils von z auffasst: Man schreibt $z = x + iy$ mit reellen x, y und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wobei u und v reellwertige Funktionen sind. Die komplexe Funktion $f(z)$ „ist“ also nichts anderes, als die Abbildung $\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ von $G \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^2 . Deshalb ist auch klar was $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ oder die Stetigkeit von f bedeuten.

Beispiel 1. □

Wir haben folgende Zerlegungen in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} z^3 &= (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \\ e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = -\frac{i}{2} e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{i}{2} e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

Beispiel 2 (Potenzreihen). Zu der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit $a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$ gibt es eine Zahl $R, 0 \leq R \leq \infty$, so dass die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$ divergiert. Die Zahl R heißt der *Konvergenzradius* der Reihe, und der Bereich $G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ ihr *Konvergenzkreis*. Die Reihe definiert eine *stetige* Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. □

Analytische Funktionen. Weil die komplexen Zahlen wie die reellen einen Körper bilden und man deshalb eine Division hat, kann man die Ableitung komplexer Funktionen in kompletter Analogie zum reellen Fall definieren:

Definition 3. Die Funktion $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ auf der offenen Menge G heißt in $z \in G$ (*komplex*) *differenzierbar*, wenn

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

existiert. Den Grenzwert bezeichnet man dann als $f'(z)$ und nennt ihn die *Ableitung*. Eine Funktion, die überall in G differenzierbar ist, nennt man *analytisch* oder *holomorph*.

Für komplex differenzierbare Funktionen beweist man dieselben Rechenregeln wie im Reellen, insbesondere sind Linearkombinationen differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar und es gelten Produkt- und Kettenregel. Damit erhält man

Beispiel 4. Komplexe *Polynome* wie

$$f(z) = (3 + 2i)z^4 - z^2 + 1 + i$$

sind analytische Funktionen. Komplexe *Potenzreihen* wie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad |z| < 1$$

definieren (in ihrem Konvergenzkreis) analytische Funktionen.

Damit sind zum Beispiel $\sin z$, $\cos z$ und für $k \in \mathbb{N}$ auch die *Besselfunktionen*

$$J_k(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

analytische Funktionen. □

Wir kennen also schon eine große Menge von Beispielen analytischer Funktionen!

Etwas irritierend ist hingegen das folgende

Beispiel 5 (Eine einfache nicht-analytische Funktion). Wir betrachten die komplexe Konjugation

$$f(z) := \bar{z} = x - iy.$$

Dafür gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \Delta z \text{ reell ist} \\ -1, & \text{falls } \Delta z \text{ rein imaginär ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Grenzwert für $\Delta z \rightarrow 0$ existiert deshalb nicht!

Als Abbildung vom \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^2 betrachtet, sieht die Konjugation aber so aus

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

Das ist nach unserem bisherigen “reellen” Verständnis eine differenzierbare Abbildung mit der Ableitung (=Funktionalmatrix)

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial(-y)}{\partial x} & \frac{\partial(-y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diesem scheinbaren Widerspruch wollen wir nun nachgehen. □

Wir nehmen an, dass $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ in z komplex differenzierbar ist. Zur Berechnung der Ableitung können wir jede Nullfolge von Δz benutzen, und wir entscheiden uns einstweilen für reelle $\Delta z = \Delta x$. Dann finden wir

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

So kann man also für analytische Funktionen die Ableitung einfach mit Methoden der reellen Analysis ausrechnen, sie ist die partielle Ableitung nach x . Aber eben nur, wenn wir schon wissen, dass die Funktion komplex differenzierbar ist.

Nun entscheiden wir uns für rein imaginäres $\Delta z = i\Delta y$. Dann finden wir

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Aber natürlich muss beidemale dasselbe herauskommen, derselbe Realteil und derselbe Imaginärteil. Das heißt es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Man kann beweisen (nicht schwer), dass umgekehrt eine reell differenzierbare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 , deren partielle Ableitungen diese beiden Gleichungen erfüllen, eine analytische, also eine komplex differenzierbare Funktion liefert.

Satz 6 (Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen). Die komplexe Abbildung

$$f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$$

der offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar im Sinne von (1), wenn sie

(i) als Abbildung

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(reell) differenzierbar ist und außerdem

(ii) die sogenannten Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

erfüllt.

Die komplexe Ableitung ist dann

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Sind insbesondere u und v stetig partiell differenzierbar und gilt (2), so ist $f = u + iv$ komplex differenzierbar.

Beispiel 7. Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ war nirgends komplex differenzierbar. Dennoch könnte die Funktion $f(z) = \bar{z}^2$ natürlich analytisch sein. In 0 ist sie auch komplex differenzierbar:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{(0 + \Delta z)}^2 - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}}_{|\dots|=1} \overline{\Delta z} = 0.$$

Aber in allen anderen Punkten von \mathbb{C} ist die Funktion nicht komplex differenzierbar, weil die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nicht erfüllt sind: Es ist

$$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(-2xy)$$

und deshalb gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x = -2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

genau dann, wenn $x = 0 = y$, also $z = 0$. □

Beispiel 8 (Exponentialfunktion). Die Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

ist als konvergente Potenzreihe analytisch auf ganz \mathbb{C} . Wir zeigen, dass sie die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial y} &= -e^x \sin y = -\frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} \end{aligned}$$

□

Die komplexe Exponentialfunktion ist nicht injektiv, deshalb gibt es Probleme bei der Definition des komplexen Logarithmus, die man aber in den Griff bekommt. Zur Vorbereitung dient die

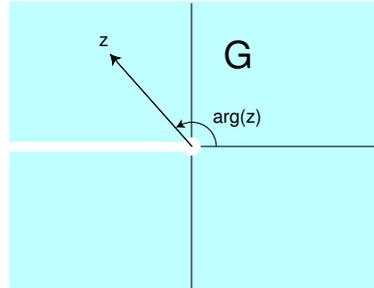
Definition 9 (Argumentfunktion). Im Komplement der abgeschlossenen negativen reellen Achse, also in

$$G := \{z = re^{i\phi} \mid r > 0, -\pi < \phi < \pi\} \quad (4)$$

definiert $\arg(re^{i\phi}) := \phi$ eine wohlbestimmte differenzierbare Funktion

$$\arg : G \rightarrow]-\pi, +\pi[$$

die wir *Argumentfunktion* nennen wollen.



Natürlich ist \arg keine analytische Funktion, denn sie ist ja reellwertig, d.h. ihr Imaginärteil ist 0. Aus den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen würde dann folgen, dass der Realteil u konstant ist. Dann wäre aber die ganze Funktion konstant.

Beachten Sie: Ohne Einschränkung auf den Bereich G ist das Argument einer komplexen Zahl nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Legt man sich willkürlich etwa auf den Bereich $]-\pi, +\pi]$ fest, so erhält man eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Funktion, die aber auf der negativen reellen Achse unstetig ist. Deshalb schränken wir uns auf das ‘‘Schlitzgebiet’’ G ein.

Die Beschreibung dieser Funktionen durch Arcus-Funktionen auf dem gesamten Definitionsbereich ist nicht so ganz einfach. Zum Beispiel ist

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0, \\ + \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y > 0, \\ - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

Daraus folgt, dass \arg stetige partielle Ableitungen hat, nämlich

$$\frac{\partial \arg}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \arg}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

Beispiel 10 (Komplexer Logarithmus). Ist $z = re^{i\phi}$ in dem Schlitzgebiet G , so folgt durch ‘‘Logarithmieren‘‘:

$$\log z = \log r + i\phi, \quad z \in G$$

wobei $\log = \ln$ den natürlichen Logarithmus bezeichnen soll. Nun war aber $\log z$ für komplexes z bisher gar nicht erklärt. Deshalb können wir mit $r(z) := |z|$ eine neue Funktion $\log : G \rightarrow \mathbb{C}$ definieren durch

$$\log(z) := \log r(z) + i \arg(z). \quad (6)$$

Wir nennen diese Funktion den *komplexen Logarithmus* oder den *Hauptwert des komplexen Logarithmus*.

Wir wollen sehen, ob diese Funktion analytisch ist. Dazu prüfen wir die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für $u(x, y) = \log r$, $v(x, y) = \arg$. Aus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und (5) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{r^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Daher ist $\log z$ eine analytische Funktion auf G mit

$$e^{\log z} = z \text{ und } \log' z = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x - iy}{r^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

□

Beispiel 11 (Allgemeine Potenz). Mit dem komplexen Logarithmus kann man für beliebiges λ und $z = re^{i\phi}$ mit $r > 0$, $-\pi < \phi < \pi$ definieren

$$z^\lambda := e^{\lambda \log z}.$$

Damit kann man zum Beispiel komplexe Besselfunktionen

$$J_\lambda(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \lambda + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

definieren.

□

1.2 Eigenschaften analytischer Funktionen, harmonische Funktionen

- Harmonische Funktionen (=Potentiale quellfreier Felder) sind im \mathbb{R}^2 die Realteile analytischer Funktionen.
- Verpflanzung von Randwertproblemen der Potentialtheorie auf einfachere Gebiete durch Transformation mit analytischen Funktionen
- Potentialströmungen
- Konformität als Hilfsmittel zur Veranschaulichung analytischer Funktionen

Wir kommen nun zur für den Ingenieur vielleicht wichtigsten Eigenschaft analytischer Funktionen. Wir erinnern daran, dass eine reelle Funktion $u(x, y)$ *harmonisch* heißt, wenn

$$\Delta u = 0.$$

Wegen $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$ sind harmonische Funktionen gerade die Potentiale von quellenfreien ebenen Vektorfeldern. Deshalb spielen sie in der Potentialtheorie eine wichtige Rolle.

Beispiel 12. Auf dem $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $n \geq 2$ ist die Funktion

$$r^{-k} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}^k}$$

genau dann harmonisch, wenn $k = n - 2$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist das konstant, also uninteressant, aber dort ist z.B. $\log r$ harmonisch. Das zeigt man durch einfaches Nachrechnen. \square

Für $n = 2$ liefert dieses Beispiel nur die Konstante r^0 . Aber die komplexe Funktionentheorie liefert viele interessante Beispiel harmonischer Funktionen für $n = 2$:

Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ in einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ analytisch. Wie wir später sehen werden, sind dann $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sogar zweimal (sogar unendlich oft) stetig differenzierbar, und deshalb gilt der Satz über die Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen. Mit den Cauchy-Riemann- Gleichungen folgt daher

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ebenso beweist man $\Delta v = 0$.

Satz 13. *Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sind harmonisch:*

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Ist umgekehrt u eine harmonische Funktion, so betrachten wir das Vektorfeld $\vec{w} := \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Hat das ein Potential v ? Wegen der Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen ist die notwendige Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x},$$

Aber nach Definition von \vec{w} gilt für harmonisches u

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial w_2}{\partial x}.$$

Lokal ist das nun auch hinreichend für die Existenz eines Potentials oder einer Stammfunktion v für \vec{w} :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = w_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = w_2 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wir sehen also, dass u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen, und daher ist $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine analytische Funktion.

Satz 14. *Lokal ist jede auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^2 harmonische Funktion der Realteil einer analytischen Funktion.*

Beispiel 15. Real- und Imaginärteil des komplexen Logarithmus, also

$$\log r(z) = \log |z| \quad \text{und} \quad \arg(z)$$

sind harmonisch auf dem Schlitzgebiet (4). Die Funktion $\log r$ ist sogar auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und harmonisch. □

Wir kennen ziemlich viele analytische Funktionen (Polynome, Potenzreihen, rationale Funktionen, Exponentialfunktion, ...), und damit nun auch ziemlich viele harmonische Funktionen. Sehr oft sucht man allerdings harmonische Funktionen, die irgendwelche Randbedingungen erfüllen. Dazu ist es gut, die Niveaulinien von (möglichst vielen) harmonischen Funktionen zu kennen. Wenn die gesuchte harmonische Funktion nämlich konstant auf gewissen Kurven sein soll und wir diese als Niveaulinien harmonischer Funktionen realisieren können, sind wir fast fertig:

Beispiel 16 (Koaxialzylinder). Man sucht das Potential des elektrischen Feldes zwischen zwei koaxialen Zylindern der Radien $r_0 < r_1$, auf denen das Potential konstant u_0 bzw u_1 ist. Wir nehmen an, dass die z -Achse¹ die Zylinderachse ist. Aus Symmetriegründen ist das Potential dann in dieser Richtung konstant $u(x, y, z) = u(x, y)$ und

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

so dass es genügt, ein Potential in der (x, y) -Ebene zu suchen. Da wir schon wissen, dass $\log r$ eine harmonische Funktion ist, sind auch die Funktionen $u = a \log r + b$ mit konstanten a und b harmonisch. Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \log r_0 + b &= u_0 \\ a \log r_1 + b &= u_1 \end{aligned}$$

bestimmt man a und b , so dass die Randbedingungen erfüllt sind. □

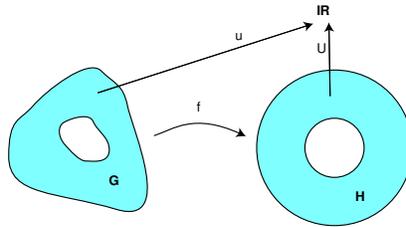
Aber man kann eventuell auch Randwertprobleme für kompliziertere Gebiete als den Kreisring des vorstehenden Beispiels lösen. Sei $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow H \subset \mathbb{C}$ analytisch und sei $U : H \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Wenigstens lokal ist U der Realteil einer analytischen Funktion $F = U + iV$. Dann ist aber $F(f(z)) = U(f(z)) + iV(f(z))$ analytisch, also $U(f(z))$ harmonisch, und wir erhalten

Satz 17. *Harmonische Funktionen von analytischen Funktionen sind harmonisch.*

¹Hier bezeichnen wir vorübergehend die Koordinaten im \mathbb{R}^3 mit x, y, z , so dass z also nicht eine komplexe Variable ist!

Dieser Satz wird auf die folgende Weise angewendet: Man sucht eine harmonische Funktion mit gewissen Randbedingungen in einem Gebiet G . Dazu transformiert man mit einer analytischen Funktion $f : G \rightarrow H$ das Gebiet G auf ein einfacheres Gebiet H , löst hier das entsprechende (hoffentlich einfachere) Randwertproblem mit einer harmonischen Funktion U und findet dann mit $u(x, y) = U(f(x + iy))$ die gesuchte Lösung für G . Man nennt das auch die *Methode der Verpflanzung*. Der Fall $U(x, y) = x$ führt wieder auf $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.

Vergleichen Sie hierzu insbesondere [*Theoretische Elektrotechnik*, Abschnitt 7.7].



Leider sieht ist die praktische Anwendung der Methode der Verpflanzung nicht so einfach: Man muss eben wissen, wie man komplizierte Gebiete auf einfache *analytisch(!)* abbildet. Und schon die analytische Abbildung einer Ellipse auf einen Kreis ist kein elementares Problem. Wir behandeln nun in zwei Beispielen eine Situation, bei der man erfolgreich war. Dann betrachten wir eine geometrische Eigenschaft analytischer Abbildungen, die einem hilft, diese besser zu verstehen. Und im nächsten Abschnitt lernen wir mit den Möbiustransformationen eine Klasse analytischer Abbildungen kennen, die eine gewisse “Sorte von Verpflanzungsproblemen” systematisch bewältigen hilft.

Beispiel 18 (Geerdeter zylindrischer Leiter im homogenen elektrischen Feld). Die analytische Abbildung

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

schreibt sich in Polarkoordinaten als

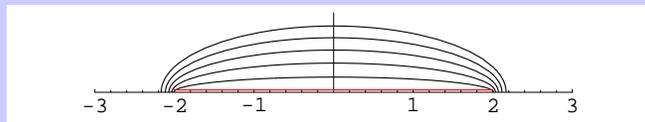
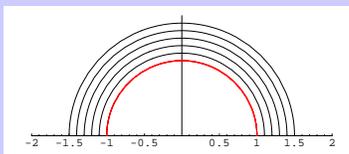
$$f(re^{i\phi}) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \phi + i\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \phi.$$

Daran erkennt man, dass f den Außenraum des Einheitskreises oberhalb der x -Achse, also

$$G := \{x + iy \mid y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \geq 1\} = \{re^{i\phi} \mid r \geq 1 \text{ und } 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

in die obere Halbebene $H := \{x + iy \mid y \geq 0\}$ abbildet.

Bei näherem Hinsehen sieht man, dass die Halbkreise mit $r = \text{const} > 1$ und $0 \leq \phi \leq \pi$ auf immer größere Ellipsen abgebildet werden:



Daraus kann man schließen, dass die Abbildung f eine Bijektion von G auf die obere Halbebene H ist. Leicht zu sehen ist, dass der Rand von G auf den Rand von H abgebildet wird. Insbesondere geht der obere Einheits-Halbkreis auf das Intervall $[-2, +2]$ der reellen Achse.

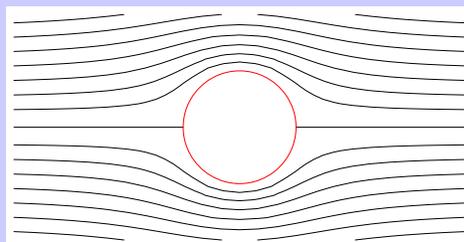


Nun ist ganz trivialerweise $U(x, y) = y$ eine harmonische Funktion auf H , die auf dem Rand von H verschwindet. Daher ist

$$u(x, y) = U(f(x + iy)) = U(f(re^{i\phi})) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \phi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

eine harmonische Funktion auf G , die auf dem Rand verschwindet.

Natürlich können wir u mit derselben Formel als harmonische Funktion auf dem Komplement des Einheitskreises, also auf $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ betrachten, und diese verschwindet auf dem Rand des Einheitskreises, also für $x^2 + y^2 = 1$. Die Niveaulinien von u sehen dann so aus: Für großes r laufen sie fast parallel zur x -Achse: $u(x, y) \approx y$.



Die Funktion u beschreibt das Potential eines homogenen elektrischen Feldes, das durch einen geerdeten zylindrischen Leiter gestört ist.

Die Abbildung $f(z)$ aus dem letzten Beispiel besitzt eine berühmte Anwendung in der Strömungsmechanik.

Beispiel 19 (Potentialströmungen).

Wille: Strömungslehre, Kapitel 8

In der Strömungsmechanik beschreibt man Flüssigkeits- oder Gasströmungen durch ihr Geschwindigkeitsfeld \vec{v} , also durch ein Vektorfeld, das vom Ort und, bei instationären Strömungen, auch noch von der Zeit abhängt. Den Einfluss physikalischer Größen auf das Feld beschreibt die sogenannte *Navier-Stokes-Gleichung*

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \partial_{\vec{v}} \vec{v} \right) = \vec{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + (\lambda + \eta) \text{grad div } \vec{v}$$

oder, in der ∇ -Notation,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + (\lambda + \eta) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}).$$

Das ist eine äußerst komplizierte nicht-lineare Differentialgleichung. Die Frage nach der (Langzeit-) Existenz von Lösungen zum Beispiel ist eines der großen ungelösten Probleme der Mathematik mit einem im Jahr 2000 ausgesetzten Preisgeld von 1 Million Dollar.

Aber auch ohne die Navier-Stokes-Gleichung kann man interessante Informationen über spezielle Typen von Strömungen erhalten. Ein solcher Spezialfall sind *wirbelfreie* Strömungen, für die also

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}.$$

Diese Forderung impliziert nach Analysis II wenigstens lokal die Existenz eines Potentials: Es gibt eine Funktion Φ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$. Wirbelfreie Strömungen nennt man deshalb auch *Potentialströmungen*. Eine andere interessante Eigenschaft von Strömungen ist das Verschwinden der Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (7)$$

Die Strömung (oder das strömende Medium) nennt man dann *quellenfrei* oder *inkompressibel* und (7) die *Kontinuitätsgleichung*.

Wirbelfreiheit und Inkompressibilität zusammen führen zu einem *harmonischen* Potential: $0 = \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi$.

Deshalb kann die Funktionentheorie bei 2-dimensionalen Strömungsproblemen helfen. Solche Probleme kann man interpretieren als 3-dimensionale Probleme, die in der z -Richtung invariant sind, vgl. die Überlegung in Beispiel 16.

Wir betrachten das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} einer *inkompressiblen, wirbelfreien und stationären Strömung* in der komplexen Ebene. Dann ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

und die Divergenz- und Rotationsfreiheit schreiben sich als

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Die Strömung besitzt ein (lokales) Potential Φ . Der Gradient $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$ ist der Tangentialvektor an die Stromlinie, die Stromlinien schneiden also die Niveaulinien von Φ senkrecht. Rechnen Sie mit (8) noch einmal nach, dass Φ harmonisch ist. Also ist Φ nach Satz 14 lokal der Realteil einer analytischen Funktion

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y).$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt

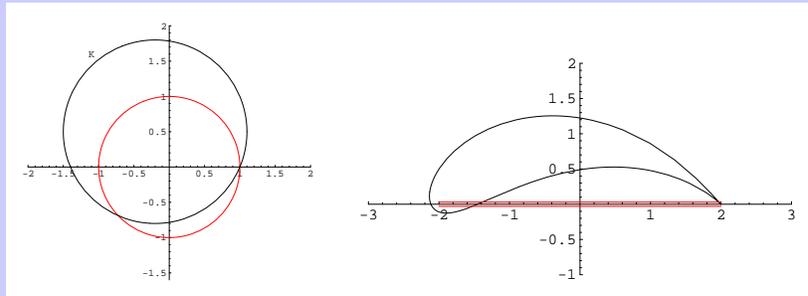
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -v_2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_1.$$

Der Gradient von Ψ ist also das um 90° gedrehte Geschwindigkeitsfeld der Strömung: Die Niveaulinien von Ψ sind (tangential an und deshalb) gleich den Stromlinien der Strömung. Umgekehrt: Ist Ψ eine harmonische Funktion, so ist das um -90° gedrehte Gradientenfeld von Ψ ein quell- und wirbelfreies Vektorfeld, dessen Stromlinien die Niveaulinien von Ψ sind. Wir kommen zurück zum letzten Beispiel: Die Niveaus von

$$\Psi_0(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

beschreiben nach der vorstehenden Überlegung auch die Stromlinien einer inkompressiblen wirbelfreien Strömung um ein Kreis (oder 3-dimensional um einen Zylinder).

Wir betrachten nun einen Kreis K um $z_0 = -0.2 + 0.5i$ vom Radius 1.3. Durch die Abbildung $f(z) = z + \frac{1}{z}$ wird er abgebildet auf eine Figur, die man (mit ein bißchen Phantasie) als Querschnitt durch eine Tragfläche deuten kann:



Die Potentialfunktion

$$\Psi_1(x, y) := \frac{y - 0.5}{1.3} - \frac{1.3(y - 0.5)}{(x + 0.2)^2 + (y - 0.5)^2}$$

entsteht durch Verschiebung und Kontraktion aus Ψ_0 und beschreibt eine inkompressible wirbelfreie Strömung um den Kreis K .

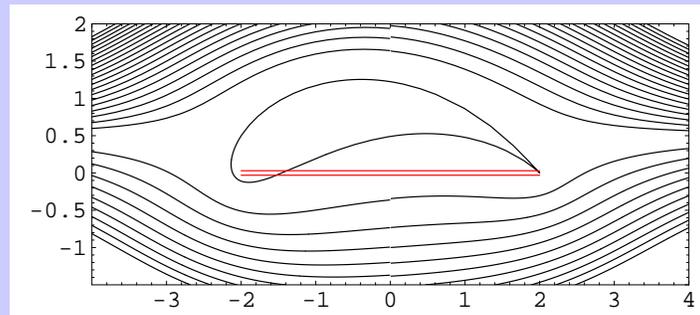
Die Umkehrabbildung von $w = f(z)$ ist die Abbildung

$$g(w) = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}.$$

Sie bildet die “Tragfläche” ab auf den Kreis K , und deshalb ist

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(g(x + iy))$$

eine harmonische Funktion, mit der “Tragfläche” als 0-Niveau. Ihre Konturlinien stellen also die Stromlinien einer inkompressiblen und wirbelfreien Strömung um die “Tragfläche” dar:



Bemerkungen.

1. Tatsächlich haben Joukowski und Kutta vor hundert Jahren mit dieser Methode zum erstenmal mathematische Modelle für die Auftriebskräfte an einer Tragfläche entwickelt. Die Abbildung $f(z) = z + \frac{1}{z}$ wird deshalb auch als *Joukowski-Abbildung* bezeichnet.
2. Bei der Visualisierung der Stromlinien muss man in der Formel für g das richtige Vorzeichen der (komplexen) Wurzel wählen. Außerdem gibt es numerische Probleme, wenn man Stromlinien näher an der Tragfläche darstellen will. Deshalb ist die vorstehende Abbildung “gestückelt”, wie Sie bei näherem Hinsehen feststellen können. Und “näher heran” kommt man bei naiver Verwendung des ContourPlot-Befehls von Mathematica nicht, man braucht speziellere numerische Software.
3. Beachten Sie, dass das Stromlinienprofil die Strömung keineswegs vollständig beschreibt. Nur die Richtung, nicht die Größe der Strömungsgeschwindigkeit kann man daraus ablesen.

Konformität analytischer Abbildungen. Um analytische Funktionen wie im vorstehenden Beispiel erfolgreich anwenden zu können, muss man sie als Abbildungen der Ebene in die Ebene geometrisch gut verstehen. Man möchte ja komplizierte Gebiete auf möglichst einfache abbilden. Dabei ist hilfreich, dass analytische Abbildungen auch sogenannte *konforme* Abbildungen sind: sie erhalten Winkel. Ist nämlich $z(t)$ eine Kurve in der komplexen Ebene, so ist $\dot{z}(t)$ ihr Tangentialvektor an der Stelle $z(t)$. Der Tangentialvektor an die Bildkurve $f(z(t))$ ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t)) \cdot \dot{z}(t). \quad (9)$$

Wir erinnern uns nun an die geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen und schreiben $f'(z(t)) = r e^{i\phi}$. Dann bedeutet (9), dass der Tangentialvektor um r gestreckt und um den Winkel ϕ gedreht wird. Der Tangentialvektor einer weiteren Kurve $\tilde{z}(t)$ durch denselben Punkt $\tilde{z}(t) = z(t)$ wird um *denselben* Winkel ϕ gedreht, und deshalb bleibt der Winkel zwischen den Kurven $z(t)$ und $\tilde{z}(t)$ unter der analytischen Abbildung f unverändert. Allerdings haben wir dabei unterstellt, dass $f'(z) \neq 0$, so dass der Winkel ϕ wohldefiniert ist. Und diese Voraussetzung ist wirklich nötig, in Nullstellen der Ableitung erhält f im allgemeinen nicht die Winkel.

Man kann beweisen, dass umgekehrt alle (orientierungstreuen) konformen Abbildungen von analytischen Funktionen herkommen.

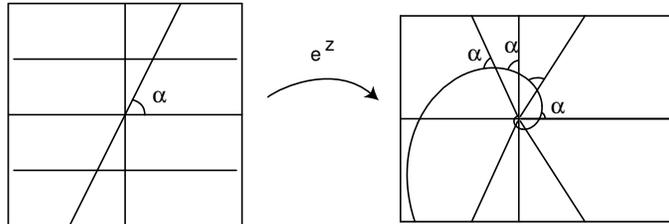
Beispiel 20 (Komplexe Exponentialfunktion). Die komplexe Exponentialfunktion

$$f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

bildet die Geraden $y = \text{const}$ in Strahlen aus dem Nullpunkt ab. Sie bildet Geraden

$$y = (\tan \alpha)x = mx$$

in Spiralen $e^x (\cos mx + i \sin mx)$ ab, die die Strahlen aus dem Nullpunkt überall unter dem Winkel α schneiden (Logarithmische Spirale).

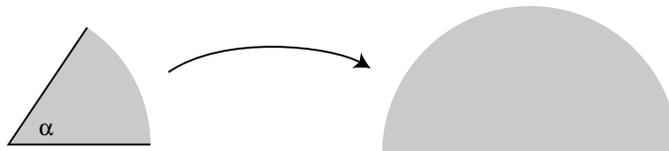


□

Beispiel 21. Der Winkelbereich $\{r e^{i\phi} \mid 0 < \phi < \alpha\}$ wird durch die analytische Funktion

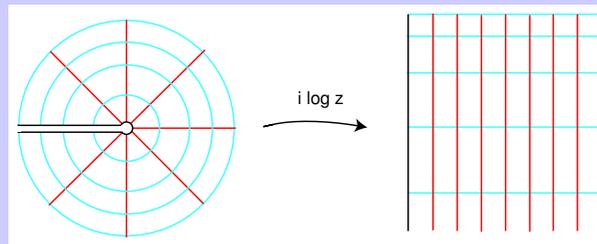
$$f(z) = z^{\pi/\alpha}$$

auf die obere Halbebene $\{x + iy \mid y > 0\}$ abgebildet.



(Zur Definition von $z^{\pi/\alpha}$ vergleiche Beispiel 6 oben.) Im Nullpunkt ist diese Abbildung offensichtlich nicht winkeltreu, aber sie ist dort auch gar nicht differenzierbar. \square

Beispiel 22 (Mercator-Projektion). Die stereographische Projektion (vgl. die Bemerkung vor Satz 25) bildet die Erdoberfläche ohne den Nordpol *konform*, also *winkeltreu* in die Ebene ab. Insbesondere geht das Netz der Längen- und Breitenkreise über in das Netz der Strahlen aus dem Ursprung und der Kreise um den Ursprung. Schlitzt man die Ebene längs der negativen reellen Achse auf und wendet darauf den komplexen Logarithmus, oder besser die Abbildung $z \mapsto i \log(z)$ an, so wird das Netz wiederum winkeltreu(!) abgebildet auf ein Netz orthogonaler Geraden.



Die Komposition der stereographischen Projektion mit $i \log(z)$ ist der für Seekarten verwendete Mercator-Entwurf der Kartographie. Ein Schiffskurs mit konstanter Kompaß-Weisung ist eine Kurve, die die Längskreise unter konstantem Winkel schneidet. Das sind nicht ganz einfache Kurven auf der Kugelfläche, die sogenannten Loxodrome. In der Mercator-Projektion gehen sie in Kurven über, die die vertikalen Geraden, also die Bilder der Längskreise, unter konstantem Winkel schneiden, also in *Geraden!*

1.3 Möbiustransformationen

- Möbiustransformationen als konkrete Hilfen für das Verpflanzungsprogramm
- Kreistreue und 6-Punkte-Satz
- Anwendungen

Eine sehr nützliche Klasse analytischer Abbildungen sind die sogenannten (*gebrochen*) *linearen Transformationen* oder *Möbiustransformationen*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Setzen wir für den Augenblick voraus, dass $c \neq 0$, so erhalten wir durch Erweitern

$$f(z) = \frac{caz + cb}{c(cz + d)} = \frac{caz + ad - (ad - bc)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Daraus ersehen wir zweierlei:

- (i) Verschwindet die “Determinante”, d.h. ist $ad - bc = 0$, so ist f konstant. Deshalb setzen wir in der Definition der Möbiustransformationen immer voraus, dass

$$\boxed{ad - bc \neq 0.}$$

- (ii) Zerlegungseigenschaft: Jede Möbiustransformation ist die Hintereinanderschaltung von einfachen Typen von Möbiustransformationen, nämlich *Translationen*, *Drehstreckungen* und *Inversionen*.

Die letzteren sind wie folgt definiert:

Definition 23. • Translationen: $f(z) = z + b$,

- Drehstreckungen: $f(z) = az = re^{i\phi}z$,

- Inversion: $f(z) = \frac{1}{z}$.

Wir hatten oben angenommen, dass $c \neq 0$. Überlegen Sie, dass die vorstehenden Eigenschaften (i), (ii) auch im Fall $c = 0$ gelten.

Übrigens sind überhaupt die Hintereinanderschaltungen von linearen Transformationen und die Inversen von linearen Transformationen wieder lineare Transformationen: Die linearen Transformationen bilden eine Gruppe.

Lineare Transformationen haben folgende wichtige Eigenschaft:

Satz 24 (Kreistreue). *Lineare Transformationen bilden Kreise in Kreise ab.*

Bemerkungen.

- Der Satz ist falsch:

Der Einheitskreis wird durch die lineare Transformation

$$f(z) = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{10}$$

auf die imaginäre Achse abgebildet:

$$f(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} - 1}{e^{i\phi} + 1} = \frac{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}{e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}} = \frac{2i \sin(\phi/2)}{2 \cos(\phi/2)} = i \tan(\phi/2).$$

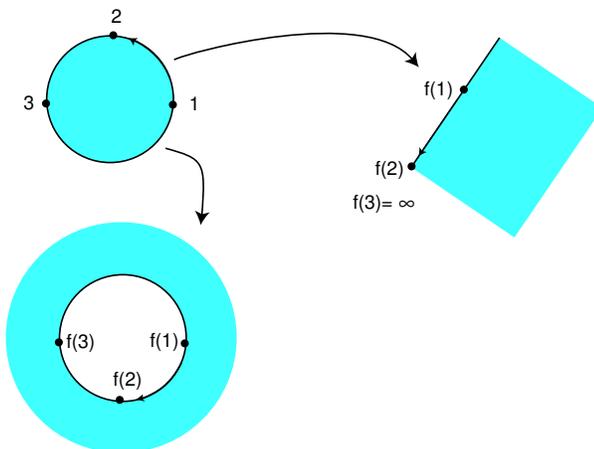
Das Bild ist also *kein* Kreis.

Der Satz wird aber richtig, wenn man auch Geraden als „Kreise mit unendlichem Radius“ zulässt, und so wollen wir ihn verstehen. Dann muss man allerdings auch ∞ als einen Punkt im Sinne des Satzes zulassen, d.h. lineare Transformationen als Abbildungen $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten. Und das wollen wir im folgenden tun:

Im Zusammenhang mit Möbiustransformationen soll „Kreise“ immer „verallgemeinerte Kreise“, bedeuten, also Kreise oder Geraden. Definitions- und Wertebereich seien um den unendlich fernen Punkt ∞ erweitert.

Auf den unendlich fernen Punkt gehen wir gleich noch näher ein.

- Zwar werden in diesem Sinne Kreise in Kreise abgebildet, aber nicht deren Mittelpunkte in die Mittelpunkte der neuen Kreise! Die Transformation (10) bildet den Mittelpunkt 0 des Einheitskreises zum Beispiel auf -1 ab, und das ist sicher nicht der Mittelpunkt des Bildkreises *imaginäre Achse*.
- Versieht man einen Kreis oder eine Gerade mit einem Durchlaufungssinn, so kann man vom *Gebiet links von der Kurve* sprechen. Überträgt man den Durchlaufungssinn mittels f auf die Bildkurve, so wird das Gebiet links von der Ursprungskurve auf das Gebiet links von der Bildkurve abgebildet: Links bleibt links!



Beweis des Satzes über die Kreistreue. Wegen der Zerlegunseigenschaft genügt es zu zeigen, dass die dort angegebenen einfachen Typen kreistreue sind. Das ist klar für Translationen und Drehstreckungen. Für die Inversion sieht man das so. Der Kreis um a vom Radius r

erfüllt die Gleichung

$$r^2 = |z - a|^2 = (z - a)\overline{(z - a)} = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}$$

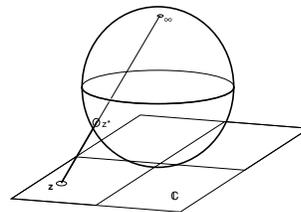
Die Bildwerte $w = \frac{1}{z}$ erfüllen dann

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{a}}{w} - \frac{a}{\bar{w}} + a\bar{a}. \\ \iff r^2 - a\bar{a} &= \frac{1 - \bar{a}\bar{w} - aw}{w\bar{w}} \\ \iff w\bar{w} &= \frac{1 - \bar{a}\bar{w} - aw}{r^2 - a\bar{a}} \\ \iff w\bar{w} - \bar{b}w - b\bar{w} + \bar{b}b &= \frac{r^2}{(r^2 - a\bar{a})^2} \end{aligned}$$

mit $b := \frac{-\bar{a}}{r^2 - a\bar{a}}$. Das ist wieder eine Kreisgleichung. \square

Bemerkung: Wo liegt ∞ ? Die reelle Achse ergänzt man durch $+\infty$ und $-\infty$, aber in welcher Richtung liegt die komplexe Zahl ∞ , die zum Beispiel im Zusammenhang mit den Möbiustransformationen eine Rolle spielt?

In diesem Zusammenhang „identifiziert“ man die Punkte der Gaußschen Zahlenebene \mathbb{C} gern mit den Punkten der sogenannten *Zahlenkugel*, wie dies in der Abbildung angedeutet ist. Jeder Punkt der Ebene entspricht genau einem Punkt auf der Kugel und umgekehrt. Nur der „Nordpol“ hat keine Entsprechung in der Ebene. Dieser Nordpol ist der Punkt ∞ . Und die Kreise durch den Nordpol entsprechen genau den Geraden der Ebene.



Den Punkt ∞ „erreicht“ man wenn man einer Geraden in beliebiger Richtung folgt.

Satz 25 (6-Punkte-Satz). Sind z_1, z_2, z_3 drei voneinander verschiedene Punkte und w_1, w_2, w_3 drei weitere voneinander verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Möbiustransformation f mit

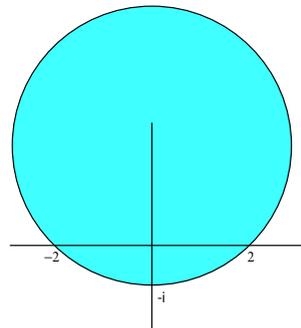
$$f(z_k) = w_k \quad \text{für } k = 1, 2, 3.$$

Wir verzichten auf den Beweis und betrachten ein konkretes Beispiel:

Beispiel 26.

Wir wollen den in der Abbildung skizzierten Kreis auf die obere Halbebene abbilden. Dazu bestimmen wir eine lineare Transformation, die die drei Punkte $-2, -i, 2$ auf die drei Punkte $0, 1, \infty$ abbildet. Das gibt die drei Gleichungen

$$\frac{-2a + b}{-2c + d} = 0, \quad \frac{-ia + b}{-ic + d} = 1, \quad \frac{2a + b}{2c + d} = \infty.$$



Aus der letzten Gleichung findet man $d = -2c$, aus der ersten $b = 2a$ und damit aus der mittleren $\frac{a}{c} \frac{2-i}{2+i} = -1$. Damit ist

$$f(z) = \frac{2+i}{2-i} \frac{2+z}{2-z}.$$

Durchläuft man den Kreis in der durch die Reihenfolge der drei Punkte angegebene Richtung, also im mathematisch positiven Sinne, so wird die reelle Achse in positiver Richtung durchlaufen. Links des Kreises liegt das Innere des Kreises, links der Achse die obere Halbebene. Also wird der Kreis wirklich auf die *obere* Halbebene abgebildet. \square

Beispiel 27 (Randwerte harmonischer Funktionen). Wenn man Möbiustransformationen zur Konstruktion von harmonischen Funktionen mit Randbedingungen benutzt, muss man auf den unendlich fernen Punkt achten. Wir erklären das am vorstehenden Beispiel. Die Funktion $u(x, y) = y$ ist harmonisch auf der oberen Halbebene (sogar auf ganz \mathbb{C}) und verschwindet auf der reellen Achse. Deshalb ist die Komposition

$$U(x, y) := \operatorname{Im} \frac{2+i}{2-i} \frac{2+z}{2-z}$$

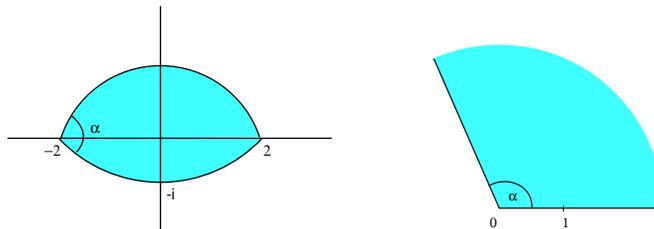
eine nicht-konstante harmonische Funktion, die auf dem Rand des Kreises durch die Punkte $-2, -i, 2$ verschwindet, **allerdings mit Ausnahme des Punktes 2**, der unter f nach ∞ geht. Betrachtet man U auf der reellen Achse:

$$U(x, 0) = \operatorname{Im} \left(\frac{3+4i}{5} \frac{2+x}{2-x} \right) = \frac{4}{5} \frac{2+x}{2-x},$$

so ist klar, dass das Potential sich im Punkt 2 nicht stetig ergänzen lässt.

Wir werden später sehen, dass harmonische Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum und Minimum auf dem Rand annehmen, vgl. Satz 42. Sie sind also konstant, wenn sie auf dem Rand verschwinden. Aber im vorstehenden Beispiel ist U eben nicht auf dem ganzen Vollkreis harmonisch!

Beispiel 28. Noch eine Ergänzung zum Beispiel 26. Was ist das Bild der unten skizzierten „Linse“ unter der oben konstruierten Möbiustransformation? Weil $f'(-2) \neq 0$, ist f in diesem Punkt winkeltreu und der obere Kreisbogen wird in einen Kreisbogen durch die Punkte $f(-2) = 0$ und $f(+2) = \infty$, also in eine Gerade abgebildet, die die reelle Achse wieder unter dem Winkel α schneidet.



\square

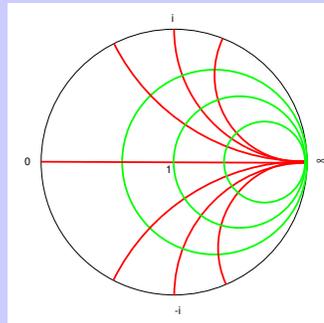
Beispiel 29 (Leitungsdiagramme). In der Hochfrequenztechnik benutzt man die sogenannten Leitungs- oder Smithdiagramme, die auf der linearen Transformation

$$r(z) := \frac{z-1}{z+1} \quad (11)$$

beruhen. (Beachten Sie, dass $r(z)$ in diesem Zusammenhang nicht $|z|$, sondern etwas anderes bedeutet.) Diese Transformation leistet $(i, 0, -i) \rightarrow (i, -1, -i)$. Die ersten drei Punkte liegen auf der imaginären Achse, die zweiten drei auf dem Einheitskreis. Daher bildet r die imaginäre Achse auf den Einheitskreis und den Bereich der rechten Halbebene $x > 0$ auf das Innere des Einheitskreises ab, weil z.B. $r(1) = 0$.

Der Punkt $z = \frac{R}{Z_L} + i \frac{X}{Z_L}$ der rechten Halbebene ist in der Hochfrequenztechnik der mit dem sogenannten *Wellenwiderstand* $Z_L > 0$ normierte komplexe Widerstand, $|r(z)|$ nennt man den *Reflexionsfaktor*.

Die Parallelen zur imaginären Achse, also die Kurven konstanten Wirkwiderstandes R/Z_L sind „Kreise“ durch ∞ . Sie entsprechen unter r daher Kreisen im Inneren des Einheitskreises durch den Punkt $r(\infty) = 1$. Die Kurven konstanten Blindwiderstandes X hingegen sind „Kreise“ durch ∞ , welche die imaginäre Achse senkrecht schneiden. Sie gehen über in Kreise durch $r(\infty) = 0$, welche den Einheitskreis senkrecht schneiden.



Auf einem Nomogramm, „Millimeterpapier“ gewissermaßen, auf dem diese Kreise eingezeichnet und mit einer Skala versehen sind, kann man also für jeden Punkt im Einheitskreis den zugehörigen (normierten) Wirk- und Blindwiderstand ablesen.

Die vielleicht wichtigste Anwendung des Smithdiagramms ist die folgende: Der Hochfrequenztechniker ist interessiert an einer Darstellung von z in der Form

$$z = \frac{m + i \tan \alpha}{1 + im \tan \alpha}$$

mit reellem m und α , wobei $m \in]0, 1[$ der sogenannte Anpassungsfaktor und $\alpha/(2\pi) = l/\lambda$ die auf die Wellenlänge λ bezogene *Leitungslänge* ist. Die Abhängigkeit des komplexen Widerstandes z von m und α ist aus dieser Formel nur schwer zu verstehen. Aber nach kurzer Rechnung ergibt sich, dass

$$r(z) = -\frac{1-m}{1+m} e^{-2i\alpha} = \frac{1-m}{1+m} e^{i(\pi-2\alpha)}.$$

Die Kurven mit konstantem m sind also einfach Kreise um den Nullpunkt. Ihr Schnittpunkt mit der Strecke $[-1, 0]$ ist $-\frac{1-m}{1+m} = r(m)$ und liefert daher m . Die Kurven mit konstantem α sind Strahlen aus dem Nullpunkt. Der entsprechende Werte von α lässt sich dann auf einer umlaufenden Skala am Rande des Smithdiagramms ablesen.

Beispiel 30 (Potential zwischen parallelen Zylindern).

Theoretische Elektrotechnik, Abschnitt 7.7

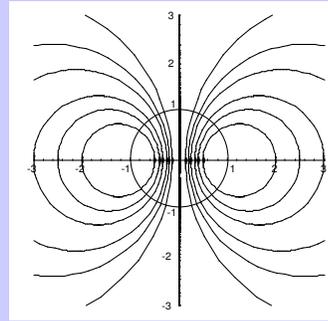
Die Abbildung (11) bildet die imaginäre Achse auf den Einheitskreis und die reelle Achse auf sich ab. Daher bildet sie Kreise um 0 auf Kreise ab, die den Einheitskreis und die reelle Achse senkrecht schneiden. Überlegen Sie, dass der Kreis vom Radius ρ abgebildet wird auf einen Kreis um $\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$ vom Radius $\frac{2\rho}{|1-\rho^2|}$.

Die Umkehrabbildung

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

bildet deshalb diese Kreisfamilie auf die konzentrischen Kreise um 0 ab. Deshalb ist $u = a \log |f(z)| + b$ eine harmonische Funktion, die die abgebildete Kreisfamilie als Niveaulinien hat. Reell geschrieben ist

$$u(x, y) = a \log \sqrt{\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}} + b.$$



Damit erhält man Potentiale für Felder mit konstanten Werten auf der imaginären Achse und einem Kreis neben der Achse (Zylinder vor Wand) oder für Zylinder mit parallelen Achsen die ineinander oder nebeneinander liegen.

1.4 Komplexe Integration

- Definition des Kurvenintegrals komplexer Funktionen
- Beispiele
- Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel als eine Mittelwertformel für analytische Funktionen.

Das Integral komplexer Funktionen ist ein *Kurven-* oder *Wegintegral*. Durch Einsetzen einer Parametrisierung wird daraus ein gewöhnliches Integral einer komplexwertigen Funktion auf einem reellen Intervall:

Definition 31. Sei $f(z)$ stetig in der offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ und sei C eine Kurve in G mit der stetig differenzierbaren Parametrisierung $z : [a, b] \rightarrow G$. Das Integral von f über C wird dann definiert als

$$\boxed{\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt.} \quad (12)$$

Der Integrand rechts ist eine komplexwertige Funktion des reellen Arguments t , und das Integral erhält man, indem man über den Real- und Imaginärteil getrennt integriert. Genauer: Sei $f = u + iv$ und $z(t) = x(t) + iy(t)$ mit reellen $u, v, x(t), y(t)$. Wenn wir der Einfachheit halber die Argumente unterdrücken, ergibt sich

$$f(z)\dot{z} = (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) = (u\dot{x} - v\dot{y}) + i(u\dot{y} + v\dot{x})$$

und wir erhalten zwei reelle Integrale

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + i \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x}) dt. \quad (13)$$

Wenn Sie so ein Integral wirklich ausrechnen wollen, brauchen Sie aber die genaue Bedeutung dieser Formel:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (u(z(t))\dot{x}(t) - v(z(t))\dot{y}(t)) dt + i \int_a^b (u(z(t))\dot{y}(t) + v(z(t))\dot{x}(t)) dt.$$

Bemerkung. Ist C nur stückweise stetig differenzierbar (Kurve mit „Knicken“), so integriert man über die Stücke und addiert die Integrale.

Beispiel 32. Ist C der positiv durchlaufene Kreis vom Radius r um a mit der Parametrisierung

$$z(t) = a + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

und eine stetige Funktion $g(z)$ auf einem Gebiet, das den Kreis enthält, erhalten wir für $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$

$$\int_{|z-a|=r} \frac{g(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} g(a + re^{it}) dt. \quad (14)$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{g(z)}{z-a} dz$$

gerade der *Mittelwert* von $g(z)$ auf dem Kreis.

Für $g = 1$ erhält man 1.

Und für beliebiges stetiges $g(z)$ ergibt sich

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{g(z)}{z-a} dz = g(a). \quad (15)$$

□

Beispiel 33 (Inverse Laplacetransformation).

Signale und Systeme, Kapitel 5

Wir betrachten eine Funktion

$$f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R},$$

deren Laplacetransformierte

$$\mathcal{L}[f](z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

in einer rechten Halbebene $\{z \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ existiert. Wir setzen $f(t) := 0$ für $t < 0$. Die Fouriertransformierte von f wird im allgemeinen nicht existieren, weil dazu f schnell fallen müsste. Aber oft ist die Funktion $e^{-\gamma t} f(t)$ mit einem großen positiven γ schnell fallend, und dann existiert die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[e^{-\gamma t} f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\gamma+i\omega)t} dt = \mathcal{L}[f](\gamma + i\omega).$$

Die Umkehrformel für die Fouriertransformation, also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

liefert dann

$$e^{-\gamma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](\gamma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

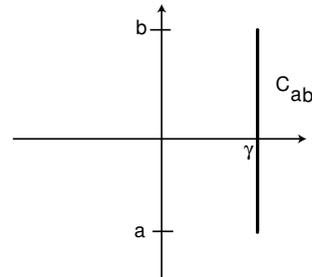
oder

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](\gamma + i\omega) e^{(\gamma+i\omega)t} d\omega.$$

Definiert man die Kurve (=Strecke) $C_{a,b}$ bei festem γ durch

$$z(\omega) := \gamma + i\omega \quad \text{für } a \leq \omega \leq b,$$

so folgt $\dot{z}(\omega) = i$ und $f(t)$ ist der Grenzwert eines Kurvenintegrals:



$$f(t) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,b}} \mathcal{L}[f](z) e^{zt} dz.$$

Das ist eine analytische Formel zur Berechnung der inversen Laplacetransformation. Wir werden später noch einmal darauf zurück kommen. Der Wert solcher Formeln ist eher ein theoretischer: An ihnen kann man besser verstehen, wie die Informationen über f in $\mathcal{L}[f]$ kodiert sind. Für die praktische Inversion der Laplacetransformation sind Partialbruchzerlegung und Tabellen einfacher. □

Zusammenhang mit dem Kurvenintegral von Vektorfeldern. Das komplexe Integral hat eine nicht nur oberflächliche Ähnlichkeit mit dem Kurvenintegral von Vektorfeldern. Wir erinnern an die Definition

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt.$$

Dabei war \vec{v} ein Vektorfeld in einem offenen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und C eine Kurve in diesem Gebiet mit einer Parametrisierung $\vec{x} : [a, b] \rightarrow G$. Tatsächlich kann man das komplexe Integral als zwei Vektorfeld-Integrale umschreiben. Ist nämlich $z(t) = x(t) + iy(t)$ die Kurve, so ergibt (13)

$$\int_C f(z) dz = \int_C \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} + i \int_C \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}. \quad (16)$$

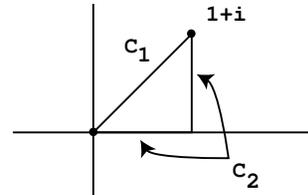
1.4.1 Weg(un)abhängigkeit

- **Parameterinvarianz.** Wie bei Kurvenintegralen von Vektorfeldern ist auch das komplexe Integral unabhängig von der Parametrisierung von C , solange die Durchlaufungsrichtung dieselbe bleibt. Durchläuft man den Weg in umgekehrter Richtung, so ändert das Integral (nur) sein Vorzeichen.
- **Wegabhängigkeit.** Wie bei Kurvenintegralen von Vektorfeldern ist auch das komplexe Integral *wegabhängig* in dem Sinne, dass das Integral über zwei Kurven mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt im allgemeinen verschiedene Werte liefert.

Beispiel 34. Sei $f(x + iy) = x + 2iy$ und seien

$$C_1 : z(t) := (1 + i)t \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : z(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + (t - 1)i & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



Es ergibt sich

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 (t + 2it)(1 + i) dt = \int_0^1 (t - 2t) dt + i \int_0^1 3t dt = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

und

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^1 t \cdot 1 dt + \int_1^2 (1 + 2(t - 1)i) i dt = \frac{1}{2} + \int_1^2 2(1 - t) dt + i \int_1^2 dt = -\frac{1}{2} + i.$$

□

- Andererseits kann man das komplexe Wegintegral als Summe von Vektorfeldintegralen schreiben, und die sind nach Analysis II wegunabhängig, wenn es dafür Potentiale gibt. Das untersuchen wir nun genauer

Wir schreiben noch einmal die Definition auf

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_C \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} + i \int_C \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \vec{ds}. \quad (17)$$

Gibt es eine analytische Funktion F mit $F' = f$, also eine Stammfunktion von f , so ist nach der Kettenregel $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \dot{z}(t)$, und aus dem mittleren Integral folgt

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b \frac{dF(z(t))}{dt} dt = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Offenbar hat aber die komplexe Funktion $f(x + iy) = x + 2iy$ aus dem letzten Beispiel keine Stammfunktion.

Nun betrachten wir die beiden Vektorfeldintegrale auf der rechten Seite von (17). Nicht jedes Vektorfeld besitzt ein Potential. Eine notwendige und lokal auch hinreichende Bedingung für die Existenz war im \mathbb{R}^3 die Wirbelfreiheit $\text{rot} = 0$. Für ein Feld $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^2 lautet dieselbe Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Für die beiden Vektorfelder aus der Gleichung (17) sind das gerade die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wenn also f analytisch ist, haben $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ wenigstens lokale Potentiale $-U$ bzw. $-V$. Für die gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= u = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -v = -\frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}$$

Also ist $F = U + iV$ eine Stammfunktion von f . Wenn der Definitionsbereich von f analytisch in einem *konvexen* Gebiet G ist, gibt es nach Analysis II auch in ganz G Potentiale und damit in ganz G eine Stammfunktion von f .

Satz 35. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig im Gebiet G .

(i) Ist F eine komplexe Stammfunktion von f , d.h. ist F analytisch mit $F' = f$, und ist $C : z(t), a \leq t \leq b$, so folgt

$$\int_C f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Insbesondere ist dann das Integral wegunabhängig.

(ii) Ist umgekehrt das Integral wegunabhängig, so besitzt f eine analytische Stammfunktion.

(iii) Jede analytische Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ in einem konvexen² Gebiet G besitzt eine Stammfunktion und damit ein wegunabhängiges Kurvenintegral.

² Hier kann man *konvex* auch ersetzen durch *einfach zusammenhängend*, vgl. nächsten Abschnitt.

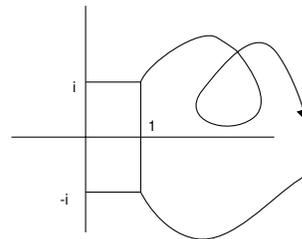
Beispiel 36. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion F , denn sonst wäre

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = F(1) - F(1) = 0.$$

Andrerseits ist die rechte Halbebene $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ konvex, und darum gibt es darauf eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, zum Beispiel $F(z) = \log(z)$.

Das Integral $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$ über die skizzierte Kurve ist

$$\begin{aligned} \log(1-i) - \log(1+i) &= \log(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}) - \log(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) \\ &= (\sqrt{2} - i\pi/4) - (\sqrt{2} + i\pi/4) \\ &= -i\pi/2. \end{aligned}$$



Die Stammfunktion $F(z) = \log(z)$ ist sogar auf dem Schlitzgebiet

$$\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$$

definiert, und Integrale über Kurven in diesem Gebiet lassen sich damit leicht berechnen. Das Schlitzgebiet ist nicht konvex, aber einfach zusammenhängend, vgl. nächsten Abschnitt.

Auch die Einschränkung auf die längs der positiven reellen Achse geschlitzte Ebene hat ein Potential, nämlich $F(z) = \log(-z)$.

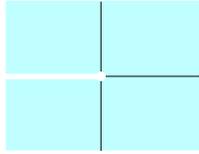
Skizzieren Sie die Menge

$$\{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) \neq 0\}.$$

und finden Sie auf ihr ein Potential von $\frac{1}{z}$. □

1.4.2 Der Cauchysche Integralsatz

Einfach zusammenhängenden Gebiete in der komplexen Ebene sind offene Teilmengen “ohne Löcher”.



einfach zusammenhängend



einfach zusammenhängend



nicht einfach-zusammenhängend

Wir präzisieren das:

Definition 37. Eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede darin liegende geschlossene, doppelpunktfreie und stückweise stetig differenzierbare Kurve nur Punkte von G umschließt, also einen ganz in G enthaltenen kompakten Bereich B berandet.

In einer solchen besitzt jede analytische Funktion eine Stammfunktion, und das Integral über *geschlossene* Kurven ist null:

Satz 38 (Cauchyscher Integralsatz, 1. Version). Sei C eine geschlossene Kurve in der einfach zusammenhängenden offenen Menge G und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

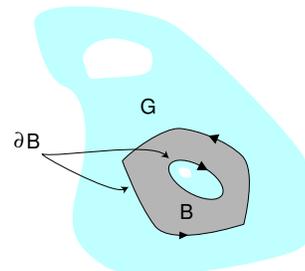
Wir wollen diesen Satz noch in einer anderen und oft bequemerem Version formulieren.

Satz 39 (Cauchyscher Integralsatz, 2. Version). Sei f analytisch in der offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$. Sei weiter $B \subset G$ ein kompakter Bereich mit stückweise glattem Rand und die Randkurve ∂B so parametrisiert, dass B zur Linken liegt. Dann gilt

$$\int_{\partial B} f(z) dz = 0.$$

In diesem Bild ist G nicht einfach-zusammenhängend, und das wird in der 2. Version auch nicht vorausgesetzt.

Außerdem hat der Rand von B mehrere Komponenten, was oft hilfreich ist.



Der Satz folgt unmittelbar aus der *Greensche Formel*

$$\iint_B \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \vec{ds},$$

die wiederum eine Konsequenz aus dem Stokesschen Integralsatz war, vgl. Analysis II.

Wenden wir das auf die beiden Integrale in (16) an, so erhalten wir

$$\int_C \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} = \iint_B \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \quad \int_C \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} = \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.³

1.4.3 Die Cauchysche Integralformel

Dem Cauchyschen Integralsatz sieht man nicht leicht an, warum er der wichtigste Satz über analytische Funktionen ist. Das ist schon anders mit der nachstehenden Folgerung:

Satz 40 (Cauchysche Integralformel). *G und B seien wie im Satz 39. Ist f analytisch in G und z₀ ein innerer Punkt von B ⊂ G, so gilt*

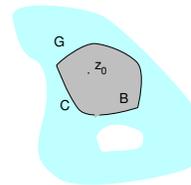
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Wir bemerken:

- Muss das Integral nicht nach dem Cauchyschen Integralsatz Null sein? Nein, denn $\frac{f(z)}{z - z_0}$ ist wegen der Nullstelle im Nenner *nicht* analytisch auf ganz G.

•

Häufigste Anwendung: B ist das Innere einer doppel-punktfreien geschlossenen Kurve C, die samt diesem Inneren in G liegt.



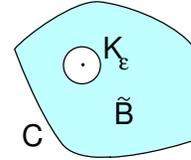
- Bei der Integration rechts kommen nur die Werte von f auf dem Rand ∂B vor. Aus ihnen berechnet sich der Wert $f(z_0)$ für *jeden* inneren Punkt z_0 .

Das ist wirklich eine bemerkenswerte Tatsache! So, als wäre eine reelle differenzierbare Funktion auf einem Intervall bereits durch ihre Werte in den Endpunkten bestimmt, was natürlich Quatsch ist.

³ Die vorstehenden Überlegungen beweisen diesen Satz nur, wenn u und v und damit f stetig differenzierbar sind, weil der Stokessche Integralsatz diese Voraussetzung benötigt. Der Cauchysche Satz lässt sich (mühsamer) aber auch beweisen ohne die Voraussetzung stetiger partieller Ableitungen. Später kommt dann allerdings heraus, dass jede einmal komplex differenzierbare Funktion ohnehin beliebig oft differenzierbar ist, so dass die partiellen Ableitungen insbesondere automatisch stetig sind.

Beweis der Integralformel. Wir wollen die Integralformel beweisen, weil der Beweis ebenso einfach wie informativ ist. Insbesondere zeigt er, dass dies wirklich auf dem Cauchyschen Integralsatz beruht.

Sei also K_ϵ eine kleine Kreisscheibe vom Radius ϵ um z_0 , die ganz in B liegt, und bezeichne \tilde{B} den Bereich zwischen K_ϵ und ∂B :



Dann ist $\frac{f(z)}{z-z_0}$ auf \tilde{B} analytisch und nach dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \tilde{B}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{\partial K_\epsilon, \text{rückwärts}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &= \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\partial K_\epsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial K_\epsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

und das gilt für jedes ϵ . Nach (15) ist aber der Grenzwert der rechten Seite für $\epsilon \rightarrow 0$ gerade $2\pi i f(z_0)$. \square

1.5 Anwendungen der Integration auf die Potentialtheorie

- Hat man ein wärmeleitendes Flächenstück mit zeitunabhängiger Temperaturverteilung auf dem Rande, wie sieht dann die stationäre Temperaturverteilung im Inneren des Flächenstückes aus?

Das ist ein Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}$. Im stationären Fall hängt u nicht von t ab, es gilt $\Delta u = 0$. Die Temperaturverteilung ist also gegeben durch eine harmonische Funktion, die die Randverteilung stetig ins Innere fortsetzt. Aber wie sieht die aus? Das ist die sogenannte *1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie*.

- Die Cauchysche Integralformel hilft bei der Lösung. Insbesondere liefert sie die Eindeutigkeit sowie, wenn die Fläche eine Kreisscheibe ist, eine explizite Formel für die Lösung.

Sei $u(x, y)$ eine (reellwertige) harmonische Funktion auf der Kreisscheibe K vom Radius R um $a \in \mathbb{C}$:

$$\Delta u = 0.$$

Dann ist $u(z)$ der Realteil einer analytischen Funktion $f(z)$ und aus der Cauchyschen Integralformel erhält man für den Mittelpunkt(!) des Kreises:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{it})}{Re^{it}} Rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) dt.$$

Durch Übergang zum Realteil ergibt sich

Satz 41 (Mittelwertformel für harmonische Funktionen).

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it}) dt \quad (18)$$

Das rechte Integral ist der Mittelwert von u auf dem Kreisrand.

Sei nun u eine harmonische Funktion auf der zusammenhängenden offenen Menge G , die in $a \in G$ ihr Maximum annimmt. Wir betrachten Kreisscheiben um a , die ganz in G liegen. Der Mittelwert von u über den Rand einer jeden solchen Kreisscheibe ist $= u(a)$. Andererseits ist aber $u(z) \leq u(a) = \max u$. Also kann der Mittelwert nur dann $= u(a)$ sein, wenn $u(z) = u(a)$ für *alle* Punkte z auf dem Rand des Kreises. Weil das für jeden Kreis gilt, ist $u(z) = u(a)$ auch für die Punkte im Inneren eines jeden Kreises um a , der ganz in G liegt: solche inneren Punkte sind ja Punkte auf dem Rand von kleineren Kreisen. Wenn also $u(a) = \max u$, so ist u auf einer kreisförmigen Umgebung von a überhaupt konstant. Daraus folgt aber, dass u überhaupt konstant ist.

Sei nämlich b irgendein Punkt in G und $z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, eine Kurve von a nach b in der zusammenhängenden offenen Menge G . Es ist $u(z(0)) = u(a) = \max u$, und wir betrachten den „letzten“ Punkt auf der Kurve, für den $u(z(t)) = u(a)$, d.h. wir betrachten $t^* = \sup\{t \mid u(z(t)) = u(a)\}$. Nach der Definition des Supremums gibt es eine Folge t_i mit $u(z(t_i)) = u(a)$, die gegen t^* konvergiert. Weil $u(z)$ und $z(t)$ stetig sind, folgt $u(z(t^*)) = \lim u(z(t_i)) = u(a)$. Also ist in diesem „letzten“ Punkt wirklich $u(z(t^*)) = u(a)$. Nach unseren vorigen Überlegungen ist dann $u(z) = u(a)$ auf einer ganzen Umgebung von $u(z(t^*))$. Wäre $t^* < 1$, so wäre deshalb $u(z(t)) = u(a)$ noch ein Stück weiter als t^* ; aber t^* war gerade der letzte Punkt mit dieser Eigenschaft. Also ist $t^* = 1$, und das heißt $u(b) = u(a)$. Weil b beliebig war, ist daher $u(b) = u(a)$ für alle $b \in G$.

Satz 42 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen). *Nimmt die harmonische Funktion auf der zusammenhängenden offenen Menge G ihr Maximum an, so ist sie konstant. Ist $B \subset G$ kompakt, so nimmt $u|_B$ sein Maximum natürlich an, und zwar in einem Randpunkt von B . Analoges gilt für das Minimum.*

Ist nun $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf dem kompakten B und 0 auf dem Rande ∂B , so ist $\max u = 0 = \min u$, also $u = 0$. Hat man zwei harmonische Funktionen, die auf ∂B übereinstimmen, so ist ihre Differenz harmonisch und = 0 auf dem Rand, also überhaupt = 0. Das beweist:

Satz 43 (Eindeutigkeitssatz für die 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie). *Zwei harmonische Funktionen auf dem kompakten Bereich B , die auf dem Rand übereinstimmen, stimmen auf ganz B überein.*

Beispiel 44. Die Funktion

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2} = u(x,y)$$

ist eine harmonische Funktion auf dem Einheitskreis, die auf dem Rand, also für $x^2 + y^2 = 1$, verschwindet. Aber $\tilde{u} = 0$ ist eine andere natürlich harmonische Funktion mit dieser Eigenschaft. Das sieht aus wie ein Widerspruch zum Eindeutigkeitssatz, ist es aber nicht, weil u im Punkt 1 auf dem Rand nicht einmal stetig ist:

$$u(x,0) = \frac{1-x^2}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{1-x} \rightarrow +\infty \text{ für } x \nearrow 1.$$

□

Wir wollen nun die Mittelwertformel (18) für harmonische Funktionen auf dem Kreis so verallgemeinern, dass sie nicht nur den Wert im Mittelpunkt sondern möglichst in einem beliebigen Punkt liefert: wie die Cauchyformel. Sei z_0 ein innerer Punkt der Kreisscheibe K_R von Radius R , der Einfachheit halber um den Punkt 0. Die Möbiustransformation

$$f(z) = R \frac{Rz + z_0}{R + z\bar{z}_0}$$

bildet Kreise in Kreise ab. Wegen

$$f(e^{2it}) = R \frac{Re^{2it} + z_0}{R + e^{2it}\bar{z}_0} = R \frac{Re^{it} + z_0e^{-it}}{Re^{-it} + \bar{z}_0e^{it}} = R \frac{Re^{it} + z_0e^{-it}}{\overline{(Re^{it} + z_0e^{-it})}}$$

ist $|f(e^{2it})| = R$, d.h. die Punkte auf dem Einheitskreis gehen in Punkte auf dem Kreis vom Radius R . Und wir haben

$$f(0) = z_0,$$

was noch einmal unterstreicht, dass bei Möbiustransformationen zwar Kreise erhalten bleiben, nicht aber deren Mittelpunkte.

Ist nun u harmonisch auf K_R , so ist $u(f(z))$ harmonisch auf K_1 , und nach der Mittelwertformel gilt

$$u(z_0) = u(f(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(e^{it})) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \left(R \frac{Re^{it} + z_0}{R + \bar{z}_0e^{it}} \right) dt$$

Wir möchten

$$e^{i\phi} = \frac{Re^{it} + z_0}{R + \bar{z}_0 e^{it}}$$

substituieren und berechnen dazu $\frac{dt}{d\phi}$. Wir lösen nach e^{it} auf und erhalten:

$$e^{it} = \frac{Re^{i\phi} - z_0}{R - e^{i\phi} \bar{z}_0}.$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach ϕ :

$$ie^{it} \frac{dt}{d\phi} = \frac{Rie^{i\phi}(R - e^{i\phi} \bar{z}_0) - (Re^{i\phi} - z_0)(-ie^{i\phi} \bar{z}_0)}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)^2} = \frac{R^2 ie^{i\phi} - ie^{i\phi} z_0 \bar{z}_0}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)^2}$$

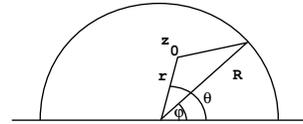
und teilen durch ie^{it} :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\phi} &= \frac{R^2 e^{i\phi} - e^{i\phi} z_0 \bar{z}_0}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)(Re^{i\phi} - z_0)} = \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{(Re^{-i\phi} - \bar{z}_0)(Re^{i\phi} - z_0)} \\ &= \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{(Re^{i\phi} - z_0)(Re^{i\phi} - z_0)} = \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{|Re^{i\phi} - z_0|^2} \end{aligned}$$

Anwendung der Substitutionsregel liefert nun

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{|Re^{i\phi} - z_0|^2} d\phi.$$

Schließlich ergibt sich mit $z_0 = re^{i\theta}$ aus dem Cosinussatz $|Re^{i\phi} - z_0|^2 = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2$ und damit



Satz 45 (Poissonsche Integralformel). Sei $u(z)$ harmonisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R um 0 . Dann gilt für alle r mit $0 \leq r < R$ und $\theta \in \mathbb{R}$:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \quad (19)$$

Für $r = 0$ bekommt man wieder die Mittelwertformel.

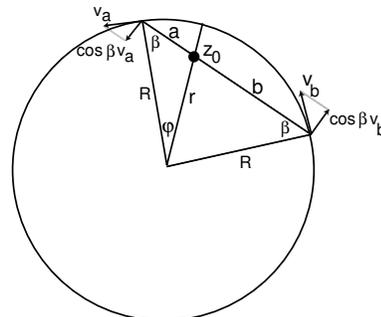
Es gibt für die Poisson-Formel eine sehr anschauliche geometrische Interpretation: Wir betrachten einen inneren Punkt z_0 im Kreis vom Radius R und lassen die Sekante durch diesen Punkt um ihn rotieren. Uns interessiert das Verhältnis der Geschwindigkeit der beiden Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreis zueinander.

Nach dem Sekantensatz ist das Produkt ab der Sekantenabschnitte dabei konstant und zwar ist

$$ab = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2,$$

wenn r der Abstand von z_0 vom Mittelpunkt ist. Diesen Wert erhält man nämlich, wenn die Sekante durch den Mittelpunkt geht. Das gesuchte Geschwindigkeitsverhältnis ist daher mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{\cos \beta v_b}{\cos \beta v_a} = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}.$$



Das ist genau der Kern aus der Poisson-Formel. Er beschreibt also die Längenverzerrung, wenn man den Rand des Kreises durch z_0 auf die gegenüberliegende Seite des Kreises projiziert. Randstücke nah bei z_0 werden dabei gestreckt, Stücke fern von z_0 entsprechend gestaucht. Wenn man die Randwertverteilung von u zunächst auf diese Weise durch z_0 projiziert, und dann über den Einheitskreis mittelt, erhält man den Wert $u(z_0)$. Im Bild der Temperaturverteilung für die Kreisscheibe: Randwerte nah bei z_0 haben großen Einfluss auf die Temperatur in z_0 , Randwerte fern von z_0 haben geringen Einfluss.

Ist u harmonisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R , so liefert die Poisson-Formel also die Werte im Inneren berechnet aus den Randwerten. Aber man kann beweisen, dass man diese Formel auch zur Lösung der Randwertaufgabe benutzen kann:

Satz 46 (Existenzsatz für die 1. Randwertaufgabe). Sei u_0 eine stetige Funktion auf der Kreislinie vom Radius R um 0 . Dann definiert

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \quad (20)$$

eine auf der abgeschlossenen Kreisscheibe stetige und im Inneren harmonische Funktion u mit $u(Re^{i\phi}) = u_0(Re^{i\phi})$.

1.6 Taylor- und Laurententwicklung

- Reelle differenzierbare Funktionen lassen sich zwar gut durch Taylorpolynome approximieren, aber nicht immer durch *Taylorreihen* darstellen. Bei komplex differenzierbaren Funktionen konvergiert die Taylorreihe hingegen immer gegen die Funktion.
- Wichtiger für die Anwendungen ist die Reihenentwicklung um *singuläre Punkte*, zum Beispiel um die Punkte, in denen die Ladungen eines Potentials sitzen, die Entwicklung in eine sogenannte Laurentreihe.
- In gewisser Weise ist fast die ganze Information über analytische Funktionen in den Singularitäten konzentriert. Der Residuensatz liefert den Schlüssel dazu.

1.6.1 Taylorentwicklung

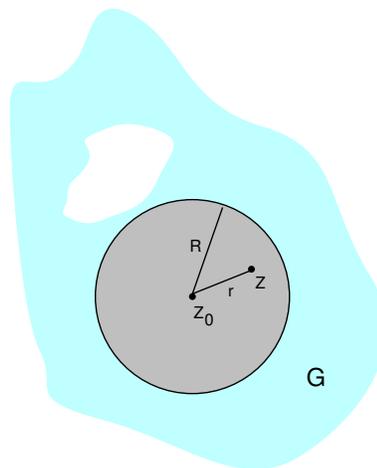
Man nennt Funktionen einer *reellen* Variablen (reell) analytisch, wenn sie sich überall in eine konvergente Taylorreihe entwickeln lassen. Natürlich müssen die Funktionen dazu unendlich oft differenzierbar sein. Aber das genügt nicht, wie etwa die Funktion mit $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ belegt. Sie geht für $x \rightarrow 0$ so schnell gegen 0, dass auch alle ihre Ableitungen in 0 verschwinden. Ihre Taylorreihe ist also 0 und stimmt nur für $x = 0$ mit f überein.

Wir wollen nun zeigen, dass das bei komplexen Funktionen völlig anders ist: Jede komplex differenzierbare Funktion ist nicht nur überall beliebig oft differenzierbar, sie lässt sich sogar um jeden Punkt in eine konvergente Taylorreihe entwickeln.

Damit sind die reell-analytischen Funktionen wirklich das reelle Gegenstück zu den komplex-analytischen Funktionen in unserem bisherigen Sinne.

Wir betrachten eine analytische Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und eine ganz im Gebiet G enthaltene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius R . Wir betrachten im Inneren der Kreisscheibe einen Punkt z mit $|z - z_0| = r < R$. Dann liefert die Cauchyschen Integralformel (mit einer kleinen Änderung in der Bezeichnungsweise)

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}}_{|\cdot| = \frac{r}{R} < 1} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.
 \end{aligned}$$



Weil die unendliche Reihe eine konstante Majorante hat, darf man sie gliedweise integrieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=R} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^n \\ &=: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Darstellung von $f(z)$ als Potenzreihe um z_0 . Weil die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt sind, nämlich durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

spielt der Radius R offenbar keine Rolle, solange der Kreis in G liegt. Wir erhalten

Satz 47 (Taylorentwicklung analytischer Funktionen). Sei $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ auf der offenen Menge G analytisch und $z_0 \in G$. Sei U die größte ganz in G enthaltene offene Kreisscheibe um z_0 (eventuell $U = \mathbb{C}$). Dann besitzt $f(z)$ eine auf U konvergente Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Dabei ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

und $R > 0$ beliebig, aber kleiner als der Radius von U .

Beispiel 48. Nach Beispiel 10 ist $\log z$ eine analytische Funktion auf dem Komplement der negativen reellen Achse. Also besitzt es um $z_0 = 1$ eine Taylorentwicklung mit dem Konvergenzradius $R = 1$. Aus $\log 1 = 0$ und

$$\frac{d^n \log z}{dz^n} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{z^n} \quad \text{für } n > 0$$

folgt

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}, \quad |z-1| < 1.$$

□

Beispiel 49. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf ganz \mathbb{R} definiert, aber ihre Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ konvergiert nur für $|x| < 1$. Das versteht man besser, wenn man die komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ betrachtet. Die ist nämlich bei $z = \pm i$ nicht definiert, und der offene Kreis um 0 vom Radius 1 ist der größte, der ganz im Definitionsbereich von f liegt. □

1.6.2 Singularitäten und Residuen

Komplexe wie reelle Funktionen haben in aller Regel Punkte, in denen sie nicht definiert sind, zum Beispiel Polstellen. In der Potentialtheorie tritt das z.B. dort auf, wo Ladungen sitzen.

- Das Coulomb-Potential einer Ladung im Punkt \vec{x}_0 des dreidimensionalen Raumes ist bis auf eine von der Ladung und dem Maßsystem abhängige Konstante gegeben durch

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}.$$

In \vec{x}_0 ist es nicht definiert.

Ähnliches gilt für das Potential \tilde{u} eines Dipols im Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, wenn die Richtung der Dipolachse die erste Koordinatenachse ist:

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \frac{x - x_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}.$$

- Im ebenen Fall ist das Potential einer Ladung im Punkt $z_0 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$u(z) = \log \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Entsprechend findet man für das Potential eines Dipols in $z_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit Achse in Richtung der reellen Achse:

$$\tilde{u}(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) = \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}.$$

Diese Potentiale sowie das zugehörige *komplexe Dipolpotential* $\frac{1}{z - z_0}$ sind in z_0 nicht definiert.

Gerade in den Ladungspunkten, die ja das Feld erzeugen, konzentriert sich gewissermaßen die Information über das Feld. Deshalb ist es wichtig, analytische Funktionen „in diesen Singularitäten“, d.h. in ihrer Nähe, zu studieren. Im ebenen Fall ist das wieder sehr viel einfacher als im 3-Dimensionalen, weil man das Hilfsmittel der analytischen Funktionen hat.

Wir wollen eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ betrachten und darin eine Menge $\Sigma \subset G$ von isolierten Punkten: um jeden Punkt von $z_0 \in \Sigma$ gibt es eine Kreisscheibe, in der keine weiteren Punkte von Σ liegen. Ist $f(z)$ auf $G \setminus \Sigma$ analytisch, so sagen wir $f(z)$ ist *analytisch auf G bis auf isolierte Singularitäten*, eben bis auf die Punkte von Σ . Typischerweise ist f in den Punkten von Σ gar nicht definiert, es kann aber sein, dass f in einzelnen dieser Punkte auch analytisch ist, dass wir das nur nicht wissen. Der nächste Satz zeigt, dass analytische Funktionen sich überraschenderweise auch um isolierte Singularitäten herum in einer Reihe entwickeln lassen. Der Satz ist noch etwas allgemeiner formuliert, der eben beschriebene Sachverhalt betrifft den Fall $r = 0$.

Satz 50 (Laurententwicklung analytischer Funktionen). Seien $0 \leq r < R \leq \infty$ und sei f auf dem offenen Kreisring

$$A = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$$

analytisch. Dann besitzt f in A eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (21)$$

die sogenannte Laurentreihe von f in A . Ihre Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

mit beliebigem $\rho \in]r, R[$.

Bemerkungen.

- Die Darstellung sieht der Taylorentwicklung sehr ähnlich. Nur gibt es für die Koeffizienten keine Formel mit den Ableitungen in z_0 (natürlich nicht), und es handelt sich auch nicht um eine Potenzreihenentwicklung! Vielmehr stehen auf der rechten Seite von (21) zwei „Potenzreihen“, eine in $(z - z_0)$ und eine in $\frac{1}{z - z_0}$, weil die Summation von $-\infty$ bis ∞ erfolgt. Reihen dieser Form heißen genau dann konvergent, wenn beide Potenzreihen konvergieren. Ihr Konvergenzbereich ist also immer ein solches Ringgebiet.
- Für $R = \infty$ ist der „Kreisring“ das Äußere des Kreises $|z - z_0| = r$.
- Für $r = 0$ ist der Kreisring ein Kreis von Radius R ohne den Mittelpunkt z_0 . Ist f analytisch auf der ganzen Kreisscheibe $\{z \mid |z| < R\}$, so ist für negatives n auch der Integrand $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ dort analytisch, und deshalb ist nach dem Cauchyschen Integralsatz $a_n = 0$ für $n < 0$. Also erhält man die Taylorentwicklung.
- Der Beweis des Satzes benutzt wie der Beweis der Taylorformel die Cauchysche Integralformel und die Entwicklung in eine geometrische Reihe. Er ist nicht schwer, aber wir gehen darauf nicht näher ein.
- Wir überlegen allerdings, warum die a_n so aussehen wie angegeben:
Ist $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$, so multiplizieren wir mit $(z - z_0)^{-n-1}$ und integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} \right) dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^{k-n-1} dz. \end{aligned}$$

Aber der Integrand $(z - z_0)^{k-n-1}$ hat für alle $k \neq n$ eine Stammfunktion $\frac{(z-z_0)^{k-n}}{k-n}$, und dann ist das Integral über die geschlossene Kurve $|z - z_0| = \rho$ gleich Null. Also bleibt in der Summe nur der Term für $k = n$, und das Integral $\int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^{-1} dz$ liefert $2\pi i$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{a_n}{2\pi i} 2\pi i = a_n.$$

- Die Formel für die a_n liefert insbesondere

$$\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Deshalb spielt der Koeffizient a_{-1} eine besondere Rolle. Im Fall $r = 0$ nennt man ihn das *Residuum* von $f(z)$ in z_0 :

$$\boxed{\text{Res}(f(z), z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz.} \quad (22)$$

- In den Anwendungen gewinnt man oft die Laurentreihe einer Funktion auf andere Weise als durch Berechnung der Kreisintegrale. Dann kann man umgekehrt das Residuum benutzen, um das Integral von f zu berechnen. Das werden wir im folgenden genauer untersuchen.

1.6.3 Typen von Singularitäten

Sei $f(z)$ analytisch in der Kreisscheibe $\{z \mid |z - z_0| < R\}$ bis auf eine isolierte Singularität in z_0 . Wir betrachten die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (23)$$

von f im Kreisring $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.

Dann gibt es folgende drei Fälle:

1. Für kein $n < 0$ ist $a_n \neq 0$. Im Klartext: $a_n = 0$ für alle negativen n . Dann definiert die Reihe (23) eine auch in z_0 analytische Funktion und z_0 ist nicht wirklich eine Singularität. Man nennt z_0 deshalb dann auch eine *hebbare Singularität*. Der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert in diesem Fall, und "behebt" die Singularität, indem er $f(z)$ zu einer auch in z_0 analytischen Funktion ergänzt.
2. Nur für endlich viele $n < 0$ ist $a_n \neq 0$. Dann gibt es ein kleinstes $n < 0$ mit $a_n \neq 0$ und es gilt

$$f(z) \approx \frac{a_n}{(z - z_0)^{|n|}}$$

für kleines $|z - z_0|$. In diesem Fall heißt z_0 ein *Pol* oder eine *Polstelle der Ordnung* $|n|$ von f . Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

3. Für unendlich viele $n < 0$ ist $a_n \neq 0$. In diesem Fall nennt man z_0 eine *wesentliche Singularität* von f . Der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ existiert in diesem Falle nicht, die Funktionswerte in der Nähe von z_0 benehmen sich überaus "wild".

Als Anwendung beweisen wir die Regel von de l'Hospital im Komplexen:

Satz 51 (Regel von de l'Hospital). Seien f und g analytisch in G bis auf eine isolierte Singularität z_0 und nicht die Nullfunktion: $f \neq 0 \neq g$. Gilt dann

(i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ oder

(ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$

und existiert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$, so ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad (24)$$

Beweis. Nach Voraussetzung haben f und g in z_0 eine Nullstelle oder eine Polstelle. Also gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass auf einer Umgebung von z_0

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k}_{=: \tilde{f}(z)}$$

mit einer analytischen Funktion $\tilde{f}(z)$, für die

$$\tilde{f}(z_0) = a_m \neq 0.$$

Entsprechend ist $g(z) = (z - z_0)^n \tilde{g}(z)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und analytisches $\tilde{g}(z)$ mit $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Damit erhält man

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} \tilde{f}(z) + (z - z_0)^m \tilde{f}'(z)}{n(z - z_0)^{n-1} \tilde{g}(z) + (z - z_0)^n \tilde{g}'(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{m \tilde{f}(z) + (z - z_0) \tilde{f}'(z)}{n \tilde{g}(z) + (z - z_0) \tilde{g}'(z)}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } m > n \\ \frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)}, & \text{falls } m = n \\ \infty, & \text{falls } m < n, \end{cases}$$

und wegen $\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ die Behauptung

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

□

1.6.4 Beispiele. Residuensatz

Zunächst berechnen wir Beispiele von Laurentreihen:

Beispiel 52. Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ist für $z \neq 0$ analytisch. Ihre Laurentreihe ist

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n.$$

In 0 hat die Funktion eine wesentliche Singularität. □

Beispiel 53. Dieses Beispiel ist wegen der verwendeten Methode sehr wichtig. Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$. Diese Funktion ist analytisch für $z \neq 0$. Es gilt

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} =: \frac{1}{z} h(z).$$

Aus der Laurentreihe von $\frac{1}{h(z)}$ um 0 ergibt sich deshalb natürlich sofort die für $f(z)$.

Die Funktion $h(z)$ ist als konvergente Potenzreihe analytisch und $h(0) \neq 0$. Daher ist $\frac{1}{h(z)}$ auf einer Umgebung von 0 analytisch und die Laurentreihe ist eine Taylorreihe:

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

Aber es ist

$$\begin{aligned} 1 &= h(z)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \\ &= \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \\ &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots + \frac{b_0}{2!} z + \frac{b_1}{2!} z^2 + \dots + \frac{b_0}{3!} z^2 + \frac{b_1}{3!} z^3 + \dots \\ &= b_0 + \left(b_1 + \frac{b_0}{2!}\right) z + \left(b_2 + \frac{b_1}{2!} + \frac{b_0}{3!}\right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Daraus berechnen sich die b_n rekursiv durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= -\frac{b_0}{2!} = -\frac{1}{2}, \\ b_2 &= -\frac{b_1}{2!} - \frac{b_0}{3!} = \frac{1}{12}, \\ b_3 &= -\frac{b_2}{2!} - \frac{b_1}{3!} - \frac{b_0}{4!} = 0, \\ b_4 &= \dots = -\frac{1}{720}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} - \frac{z^3}{720} + \sum_{k=5}^{\infty} b_k z^{k-1}.$$

Die Funktion $g(z) := \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$ ist ungerade:

$$g(-z) + g(z) = \frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{e^z - 1} + 1 = \frac{e^z}{1 - e^z} + \frac{1}{e^z - 1} + 1 = 0.$$

Daher ist $b_3 = b_5 = b_7 = \dots = 0$, was aus der Rekursionsformel nur mühsam nachzuweisen ist. Die Zahlen

$$B_k := k! b_k$$

heißen *Bernoullizahlen*. □

Wir haben im letzten Beispiel zwei Standard-Tricks angewendet:

- Wenn $f(z)(z - z_0)^k =: g(z)$ analytisch ist und man die Taylorentwicklung von $g(z)$ in z_0 kennt, kennt man auch die Laurententwicklung von $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$.
- Wenn man die Taylorreihe von $h(z)$ in z_0 kennt, und $h(z_0) \neq 0$ ist, findet man die Taylorreihe von $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ aus $1 = f(z)h(z)$ durch Bilden des Cauchyproduktes der Reihen und Koeffizientenvergleich.

Die letztere Aufgabe kann man auch mit einer anderen Methode lösen, nämlich unter Benutzung der geometrischen Reihe. Wegen

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{c_1}{c_0}(z - z_0) + \frac{c_2}{c_0}(z - z_0)^2 + \dots\right)}$$

ist nämlich $\frac{c_0}{h(z)}$ von der Form

$$\frac{c_0}{h(z)} = \frac{1}{1 + q} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^k, \quad |q| < 1.$$

Daher ist für hinreichend kleines $|z - z_0|$

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{h(z)} &= 1 - \left(\frac{c_1}{c_0}(z - z_0) + \frac{c_2}{c_0}(z - z_0)^2 + \dots\right) + \left(\frac{c_1}{c_0}(z - z_0) + \frac{c_2}{c_0}(z - z_0)^2 + \dots\right)^2 \mp \dots \\ &= 1 - \frac{c_1}{c_0}(z - z_0) + \left(-\frac{c_2}{c_0} + \frac{c_1^2}{c_0^2}\right)(z - z_0)^2 + \left(-\frac{c_3}{c_0} - \frac{c_1^3}{c_0^3}\right)(z - z_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2}(z - z_0) + \left(-\frac{c_2}{c_0^2} + \frac{c_1^2}{c_0^3}\right)(z - z_0)^2 + \left(-\frac{c_3}{c_0^2} - \frac{c_1^3}{c_0^4}\right)(z - z_0)^3 + \dots$$

Beispiel 54. Seien $g(z), h(z)$ analytisch auf einer Umgebung von z_0 und sei

$$h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) \neq 0.$$

Dann haben diese Funktionen Taylorentwicklungen der Form

$$\begin{aligned} g(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \\ h(z) &= c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

wobei offenbar $a_0 = f(z_0)$ und $c_1 = h'(z_0)$ ist. Die Funktion $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$ hat dann in z_0 eine isolierte Singularität und es gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \dots}{c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots} = \frac{1}{z - z_0} \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \dots}{c_1 + c_2(z - z_0) + \dots}$$

Mit den vorangehenden Überlegungen zu reziproken Taylorreihen (unter Beachtung der Indexverschiebung!) ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - z_0} (a_0 + a_1(z - z_0) + \dots) \left(\frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1^2}(z - z_0) + \dots\right) \\ &= \frac{a_0}{c_1} (z - z_0)^{-1} + \text{Potenzreihe in } (z - z_0). \end{aligned}$$

Wir halten fest: Ist $h(z_0) = 0 \neq h'(z_0)$ so ist

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}. \quad (25)$$

Aus (22) und (25) ergibt sich z.B. ohne Rechnung für $r \in]0, \pi[$:

$$\int_{|z|=r} \frac{\cos z}{\sin z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z}, 0\right) = 2\pi i \frac{\cos 0}{\cos 0} = 2\pi i.$$

□

Die Formel (25) kann man betrachten als Spezialfall des folgenden Rezeptes zur Berechnung von Residuen: Hat $f(z)$ in z_0 einen n -fachen Pol, so sieht die Laurententwicklung um z_0 so aus:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{1}{(z - z_0)^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z - z_0)^k \right)$$

oder

$$(z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z - z_0)^k.$$

In z_0 ist $f(z)$ gar nicht definiert, aber $(z - z_0)^n f(z)$ hat dort eine hebbare Singularität, und wenn man diese "beheben" hat, steht auf der rechten Seite der letzten Gleichung ihre Taylorentwicklung. Der gesuchte Koeffizient a_{-1} steht vor der Potenz $(z - z_0)^{n-1}$. Mit der Formel für die Taylorkoeffizienten ergibt sich also

Satz 55 (Residuum in Polstellen). *Hat f in z_0 einen n -fachen Pol, so gilt*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n f(z))^{(n-1)}. \quad (26)$$

Beispiel 56. Berechne das Residuum

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}, 0\right).$$

In 0 haben wir einen doppelten Pol. Wir finden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}, 0\right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2 e^z}{\sin^2 z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^z \sin^2 z + z^2 e^z \sin^2 z - 2z^2 e^z \sin z \cos z}{\sin^4 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(e^z \frac{z^2}{\sin^2 z} + 2e^z \frac{z}{\sin z} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} \right). \end{aligned}$$

Für den letzten Bruch findet man mit dem Satz von de l'Hospital 51

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - \cos z + z \sin z}{2 \sin z \cos z} = 0.$$

Damit folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}, 0\right) = 1.$$

□

Die Integralberechnung mit dem Residuum kann man noch verbessern:

Satz 57 (Residuensatz). Sei $f(z)$ analytisch in G bis auf isolierte Singularitäten und $B \subset G$ kompakt mit stückweise glatter Randkurve ∂B , auf dem keine Singularität von f liegt. Dann liegen in B nur endlich viele Singularitäten z_1, \dots, z_n von f und es gilt

$$\int_{\partial B} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k). \quad (27)$$

Beweis. Zum Beweis legt man sehr kleine disjunkte Kreisscheiben um die z_i , die ganz im Inneren von B liegen, und betrachtet das Gebiet zwischen diesen Kreisscheiben und ∂B . Es wird von ∂B und den Kreisenlinien berandet, und in ihm ist $f(z)$ analytisch. Dann wendet man den Cauchyschen Integralsatz an und findet, dass das Integral über ∂B gleich der Summe der Integrale über die kleinen Kreise ist. Aber die geben gerade die Residuen. \square

Beispiel 58. Die Nullstellen von $\sin z$ sind genau die reellen Nullstellen $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Für $r \in]\pi, 2\pi[$ finden wir daher

$$\int_{|z|=r} \frac{\cos z}{\sin z} dz = 2\pi i \sum_{k=-1}^{+1} \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z}, k\pi\right) = 2\pi i \sum_{k=-1}^{+1} \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 6\pi i.$$

\square

Beispiel 59. Ist $f(z)$ analytisch in ganz G , so gibt es keine Residuen, und aus dem Residuensatz wird der Cauchysche Integralsatz. Ist wieder $f(z)$ analytisch in ganz G , und wendet man den Residuensatz auf die Funktion $\frac{f(z)}{z-z_0}$ an, deren Residuum nach (25) gerade $f(z_0)$ ist, so folgt die Cauchysche Integralformel. \square

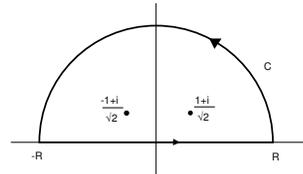
Beispiel 60. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

ist analytisch in ganz \mathbb{C} mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners, und die sind $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 - i)$. Die Residuen in diesen Punkten sind z.B.

$$\operatorname{Res}(f(z), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i)) = \frac{1}{4(\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i))^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}(\mp 1 - i).$$

Wir wählen nun $G = \mathbb{C}$ und für B den Halbkreis mit Radius $R > 1$ wie abgebildet. Darin liegen genau die beiden Singularitäten mit positivem Imaginärteil. Es folgt für $C := \partial B$



$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i) \right) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Interessant wird dies vor allem durch die Möglichkeit, auf dem Weg übers Komplexe *reelle* uneigentliche Integrale zu berechnen. Wählt man R sehr groß, so ist der Integrand auf dem

Halbkreis von der Größenordnung $\frac{1}{R^4}$, und die Länge des Halbkreises ist πR . Daher trägt die Integration über den Halbkreis für großes R nur wenig zum Ergebnis bei, es ist

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} = \int_{[-R,R]} \frac{dz}{1+z^4} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Für eine präzise Abschätzung des Fehlers benutzt man

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{Halbkreis}} \frac{dz}{1+z^4} \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+(Re^{it})^4} iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{1}{1+(Re^{it})^4} iRe^{it} \right| dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{R^4-1} R dt = \frac{R\pi}{R^4-1} \end{aligned}$$

Für $R \rightarrow \infty$ geht das gegen 0, und daher folgt

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.}$$

Anders ist das schwer zu berechnen. □

Beispiel 61. Das vorangehende Beispiel läßt sich verallgemeinern, zum Beispiel unter folgenden Bedingungen:

- (i) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, wo p und q Polynome mit reellen Koeffizienten sind.
- (ii) Die Nullstellen von q sind alle einfach und liegen nicht auf der reellen Achse.

Für hinreichend großes R liegen dann alle Singularitäten von f im Kreis $|z| < R$, und wenn C wieder den Halbkreis vom Radius R wie im vorangehenden Beispiel bezeichnet, ist unabhängig von R

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \operatorname{Re} z > 0} \frac{p(z)}{q'(z)}.$$

Damit das Halbkreisintegral verschwindet, setzt man weiter voraus, dass

- (iii) $\operatorname{Grad}(q) \geq \operatorname{Grad}(p) + 2$.

Dann folgt wie oben

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \operatorname{Re} z > 0} \frac{p(z)}{q'(z)},$$

wobei die rechte Seite mit der linken automatisch reell wird. □

1.7 Anwendungen von Laurentreihe und Residuensatz

- Die z -Transformation transformiert diskrete Folgen in Laurentreihen. Sie ist ein wichtiges Hilfsmittel der Signalverarbeitung.
- Die inverse Laplacetransformation dient eher der Analyse von Transformaten und damit der Vermeidung expliziter Rechnungen als der praktischen Rücktransformation. Das ist zum Beispiel von Bedeutung für die Regelung und Steuerung von Netzwerken oder Prozessen, insbesondere für Fragen der Stabilität.
- Das vielbenutzte Stabilitätskriterium von Nyquist basiert auf dieser Grundlage.

1.7.1 z -Transformation

Jeder Zahlenfolge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kann man auf ganz banale Weise eine (in 0 zentrierte) Laurentreihe zuordnen:

Definition 62. Die Abbildung

$$\mathcal{Z} : (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} \quad (28)$$

heißt die z -Transformation.

Wo die Laurentreihe konvergiert, liefert sie also eine analytische Funktion $Y(z)$. Die Umkehrtransformation wird nach Satz 50 dann gegeben durch

$$y_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{Y(z)}{z^{k+1}} dz$$

oder

$$y_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} Y(z) z^{k-1} dz.$$

Beispiel 63. Für $a \in \mathbb{C}$ hat die Folge $(a^k) = (1, a, a^2, \dots)$ die Transformierte

$$\mathcal{Z}[(a^k)](z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}. \quad (29)$$

Diese ist konvergent für $|z| > |a|$. Allgemeiner gilt: Ist die Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von exponentieller Ordnung, d.h. gilt $|y_k| \leq a^k$ für ein positives a und alle k , so konvergiert die z -Transformierte $\mathcal{Z}[(y_k)](z)$ für $|z| > a$, so wie die Laplacetransformierte für hinreichend großen Realteil $\operatorname{Re}(z)$ konvergierte.

Die Folge $0, 1, a, a^2, \dots$ liefert die Transformierte

$$0 + 1z^{-1} + az^{-2} + a^2z^{-3} + \dots = \frac{1}{z} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}. \quad (30)$$

Durch Differentiation von (30) findet man

$$0 + (-1)1z^{-2} + (-2)az^{-3} + (-3)a^2z^{-4} + \dots = \frac{-1}{(z-a)^2}$$

Also ist

$$\mathcal{Z}[0, 0, 1a^0, 2a^1, 3a^2, \dots](z) = \frac{1}{(z-a)^2}$$

oder

$$\boxed{\mathcal{Z}[0, 1a^1, 2a^2, 3a^3, \dots](z) = \frac{az}{(z-a)^2}.} \quad (31)$$

□

Beispiel 64. Für die z -Transformation von $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt, wenn man z durch e^s ersetzt,

$$Y(e^s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k e^{-sk}.$$

Das ist offenbar ein diskretes Analogon der kontinuierlichen Laplacetransformation

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt.$$

Die z -Transformation spielt deshalb für lineare Differenzgleichungen (lineare Regressionen) mit konstanten Koeffizienten eine ähnliche Rolle, wie die *Laplacetransformation* für Differentialgleichungen, vgl. Beispiel 67. □

Neben der oben definierten z -Transformation kann man für Folgen, deren Index die ganzen Zahlen durchläuft, auch eine *doppelseitige* z -Transformation

$$\mathcal{Z} : (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z^{-k}$$

definieren. Sie entspricht der Fouriertransformation im kontinuierlichen Fall.

Die ungeheure Bedeutung diskreter Systeme im Zuge der Digitalisierung schlägt sich mathematisch nieder in der großen Bedeutung von Differenzgleichungen neben den klassischen Differentialgleichungen. Ein Beispiel bietet die Signalverarbeitung, siehe [*Signale und Systeme*]. Damit gewinnt auch die z -Transformation als Ersatz für die Laplace- und Fouriertransformation eine große Bedeutung.

Wir geben die fundamentalen Eigenschaften der z -Transformation an. Dabei sei $y_m := 0$ für $m < 0$, so dass also zum Beispiel

$$(y_{k-3}) = 0, 0, 0, y_0, y_1, \dots$$

Satz 65 (Rechenregeln für die z -Transformation). Seien $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und seien $Y(z)$ und $\tilde{Y}(z)$ deren z -Transformierte. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}[(ay_k + b\tilde{y}_k)](z) = aY(z) + b\tilde{Y}(z) \quad (\text{Linearität})$$

$$\mathcal{Z}[(y_{k+n})](z) = z^n \left(Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^{-k} \right) \quad (\text{Verschiebungsregel})$$

$$\mathcal{Z}[(ky_k)](z) = -zY'(z) \quad (\text{Differentiationsregel})$$

$$\mathcal{Z}\left[\left(\sum_{j=0}^k y_{k-j}\tilde{y}_j\right)\right] = Y(z)\tilde{Y}(z) \quad (\text{Faltungsregel})$$

Die Beweise sind ganz leicht. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[(y_{k+n})](z) &= y_n + y_{n+1}z^{-1} + y_{n+2}z^{-2} + \dots \\ &= z^n(y_n z^{-n} + y_{n+1}z^{-(n+1)} + y_{n+2}z^{-(n+2)} + \dots) \\ &= z^n \left(Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^{-k} \right).\end{aligned}$$

Beispiel 66. Aus der Verschiebungsregel ergeben sich folgende Spezialfälle:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[(y_{k-n})](z) &= z^{-n}Y(z) \quad \text{für } n \geq 0, \\ \mathcal{Z}[(y_{k+1})](z) &= z(Y(z) - y_0).\end{aligned}$$

Den Ableitungen wie y' und y'' bei Differentialgleichungen entsprechen im diskreten Fall Differenzen wie $y_{k+1} - y_k$ oder $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$. Deren z -Transformierte ergeben sich als

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[(y_{k+1} - y_k)](z) &= (z - 1)Y(z) - zy_0, \\ \mathcal{Z}[(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)](z) &= (z - 1)^2Y(z) - z(z - 2)y_0 - zy_1.\end{aligned}$$

□

Die Rechenregeln sind denen der Laplacetransformation sehr ähnlich, wenn auch in in den beiden letzten Identitäten die Translationen in z etwas komplizierter erscheinen. Aber es ist unmittelbar klar, dass ganz analog zum kontinuierlichen Fall Differenzengleichung der Form

$$a_n y_{k+n} + \dots + a_0 y_k = b_k$$

mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangswerten y_0, \dots, y_{n-1} zu einer Gleichung für die analytische Funktion $Y(z) = \mathcal{Z}[y](z)$ führt, die häufig von der Form $Y(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen p und q ist. Die Rücktransformation kann man theoretisch mit der oben angegebenen Umkehrtransformation durch Integration vornehmen, in der Praxis ist aber wie bei der Laplacetransformation Partialbruchzerlegung und Verwendung einer Tabelle (oder der geometrischen Reihe) meistens günstiger.

Beispiel 67. Wir betrachten das diskrete Anfangswertproblem

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0, \quad y_0, y_1 \text{ vorgegeben.} \quad (32)$$

Anwendung der z -Transformation liefert

$$z^2(Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1}) - 5(Y(z) - y_0) + 6Y(z) = 0$$

und daraus

$$Y(z)(z^2 - 5z + 6) = y_0(z^2 - 5z + 6) - 6y_0 + y_1 z$$

oder, nach Division mit $z^2 - 5z + 6 = (z - 2)(z - 3)$ und Partialbruchzerlegung,

$$Y(z) = y_0 - \frac{2y_1 - 6y_0}{z - 2} + \frac{3y_1 - 6y_0}{z - 3}.$$

Mit (30) finden wir für $k \geq 2$

$$y_k = (3y_1 - 6y_0)3^{k-1} - (2y_1 - 6y_0)2^{k-1}.$$

Achtung. Die Rekursionsgleichung

$$y_k - 5y_{k-1} + 6y_{k-2} = 0, \quad k \geq 2, \quad y_0, y_1 \text{ vorgegeben} \quad (33)$$

scheint dasselbe Problem zu beschreiben wie (32). Aber die z-Transformation dieser Gleichung liefert

$$Y(z) - 5z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = 0$$

und damit $Y(z) = 0$. Der Grund ist die Bedingung $k \geq 2$. Für $k = 0$ bzw. $k = 1$ liefert (33)

$$y_0 = 0, y_1 = 0,$$

aber das war nicht gemeint. □

Wie bei der Laplacetransformation wird aber auch bei der z-Transformation der wahre Nutzen erst erzielt, wenn man ohne die Rücktransformation auskommt, indem man wesentliche Teile der (angewandten) Theorie direkt im z-Bereich formuliert.

Beispiel 68. Ein kausales, zeitdiskretes, LTI-System S transformiert die Wertereihe $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in die Wertereihe

$$S[(y_k)] = \left(\sum_{j=0}^k a_j y_{k-j} \right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Geht man in den z-transformierten Bereich, so ergibt sich aus der Faltungsregel

$$\mathcal{Z}[S[(y_k)]](z) = A(z)Y(z).$$

Nach z-Transformation bewirkt das System also einfach eine Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $A(z)$.

Ein sehr schönes explizites Beispiel (Besselfilter) finden Sie in *Meyberg-Vachenaueer, Höhere Mathematik 2, Springer 1991* auf Seite 266.

1.7.2 Inverse Laplacetransformation

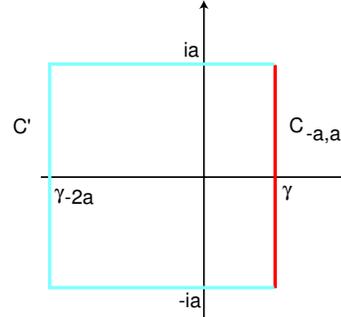
Sei $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Laplacetransformierter $F(z) := \mathcal{L}[f](z)$. Sei $F(z)$ analytisch für alle z mit $\operatorname{Re} z > \gamma$ und im übrigen analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten z_k . Wenn Sie eine Tafel zur Laplacetransformation ansehen, stellen Sie fest, dass die Voraussetzung oft erfüllt ist. Weiter sei γ so groß, dass

$$f(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{-a,a}} F(z) e^{zt} dz.$$

vgl. Beispiel 33.

Wir betrachten (für festes t) das Integral von $F(z)e^{zt}$ über den in der nebenstehenden Abbildung beschriebenen quadratischen Weg $C = C_{-a,a} \cup C'$. Wir wollen annehmen, dass $|F(z)| \leq \frac{A}{|z|}$ für großes $|z|$. (Das ist für Laplacetransformierte der "Normalfall".) Dann gilt für das Integral über die obere Quadratseite:

$$\begin{aligned} \left| \int F(z)e^{zt} dz \right| &= \left| \int_0^{2a} F((\gamma - \tau) + ia)e^{t(\gamma - \tau)} e^{ita} d\tau \right| \\ &\leq \int_0^{2a} |F((\gamma - \tau) + ia)e^{t(\gamma - \tau)} e^{ita}| d\tau \\ &\leq \frac{A}{a} \int_0^{2a} e^{t(\gamma - \tau)} d\tau \\ &= \frac{A}{a} \frac{1}{-t} (e^{t(\gamma - \tau)}) \Big|_0^{2a} \\ &= \frac{A}{a} \frac{1}{t} (e^{t\gamma} - e^{t(\gamma - 2a)}). \end{aligned}$$



Für $a \rightarrow +\infty$ geht das gegen Null. Dasselbe zeigt man für das Integral über die untere oder linke Quadratseite. Damit ist das Integral über das Quadrat einerseits gleich der $2\pi i$ -fachen Summe der Residuen von $F(z)e^{zt}$, andererseits im Grenzwert gleich dem Integral über die rechte Seite, also $2\pi i f(t)$.

Also haben wir für die Umkehrung der Laplacetransformation die Formel

$$f(t) = \sum_k \text{Res}(F(z)e^{zt}, z_k). \quad (34)$$

Summiert wird dabei über die sämtlichen (endlich vielen) Singularitäten von $F(z)$.

Beispiel 69. Konkret betrachten wir für ein festes $\omega > 0$ die Funktion

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + \omega^2}.$$

Die Funktion

$$F(z)e^{zt} = \frac{e^{zt}}{z^2 + \omega^2} = \frac{e^{zt}}{(z - i\omega)(z + i\omega)}$$

hat Pole bei $z = \pm i\omega$ mit Residuen $\frac{e^{\pm i\omega t}}{\pm 2i\omega}$, vgl. (25). Für die Rücktransformation ergibt sich also

$$f(t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \frac{1}{\omega} \sin \omega t.$$

Das kennen Sie aus der früheren Behandlung der Laplacetransformation. \square

Aus der Gleichung

$$\frac{e^{zt}}{(z - a)^k} = e^{at} \frac{e^{(z-a)t}}{(z - a)^k} = \frac{e^{at}}{(z - a)^k} \left(1 + (z - a)t + \dots + \frac{(z - a)^{k-1} t^{k-1}}{(k - 1)!} + \dots \right)$$

ersehen wir, dass

$$\text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{(z - a)^k}, a \right) = e^{at} \frac{t^{k-1}}{(k - 1)!},$$

und das kennen wir schon als Rücktransformation von $\frac{1}{(z - a)^k}$. Daher bietet die Formel (34) eigentlich nichts neues, Sie finden Sie aber öfters in der Literatur.

1.7.3 Nyquist-Kriterium

Abschließend beweisen wir dieses für die Stabilität von Systemen wichtige und in den Ingenieurwissenschaften gern benutzte Kriterium, vgl. [Regelung in der Luft- und Raumfahrt, Abschnitt 6]. Stabilität von Systemen läßt sich oft anhand eines sogenannten *charakteristischen Polynoms* untersuchen, das als Übertragungsfunktion fungiert. Die Nullstellen $\lambda = \alpha + i\omega$ dieses Polynoms treten “physikalisch” als Exponenten von Exponentialfunktionen

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

in Erscheinung, und $\alpha < 0$ bedeutet dann zeitliches Abklingen des Effektes – im Gegensatz zum “explosiven” Wachstum bei $\alpha > 0$. Wir betrachten deshalb das folgende

Problem: Gegeben ein Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (35)$$

mit reellen Koeffizienten a_k . Wieviele seiner Nullstellen haben negativen Realteil, liegen also in der (offenen) linken Halbebene? Wir sind insbesondere interessiert an dem Fall, dass alle n Nullstellen in der linken Halbebene liegen. In diesem Fall nennen wir das Polynom *stabil* oder auch ein *Hurwitz-Polynom*.

Wir nehmen zunächst an, dass keine Nullstellen von p auf der imaginären Achse liegen.

Das Nullstellen zählende Kurvenintegral. Sei m die Anzahl der Nullstellen links von der imaginären Achse. Wir wählen einen Halbkreis B in der linken Halbebene mit Zentrum im Nullpunkt und mit einem so großen Radius R , dass alle “linken” Nullstellen in seinem Inneren liegen.

Wenn z_1, \dots, z_n die Nullstellen von $p(z)$ sind (k -fache Nullstellen k -mal aufgeführt!), so ist

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n),$$

und $p'(z)$ ist nach der Produktregel die Summe aller Ausdrücke, die man erhält, indem man hier je einen Faktor $(z - z_k)$ weglässt. Daher hat $\frac{p'(z)}{p(z)}$ die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}. \quad (36)$$

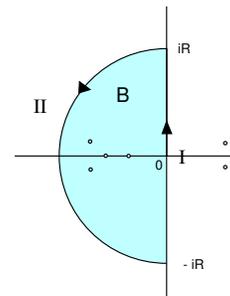
Und weil $\frac{1}{z - z_k}$ in z_k einen Pol mit Residuum 1 hat, folgt aus dem Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \text{Anzahl der } z_k, \text{ die in } B \setminus \partial B \text{ liegen} = m. \quad (37)$$

Wir zerlegen das Konturintegral in die Integration (I) längs der imaginären Achse und die Integration (II) über den Halbkreis, vgl. die Abbildung.

Integral über II. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{II} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \stackrel{(36)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{Re^{it} - z_k} iRe^{it} dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{ie^{it}}{e^{it} - \frac{z_k}{R}} dt.$$



Für $R \rightarrow \infty$ strebt das gegen

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \frac{n}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{n}{2}.$$

Der Grenzwert hängt also nur vom Grad des Polynoms ab, nicht von der Nullstellenverteilung. Daher steckt (im Grenzwert) die uns interessierende Information in dem anderen Integral:

Integral über I. Weil wir vorausgesetzt haben, dass keine Nullstellen auf der imaginären Achse liegen, können wir die sogenannte *Nyquistkurve*

$$\nu(t) := p(it), -\infty < t < \infty$$

schreiben in der Form

$$\nu(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$$

mit einer stetigen(!) Argumentfunktion $\phi(t)$, die dann sogar differenzierbar ist. Weil p ein reelles Polynom ist, ist

$$\overline{p(it)} = p(-it),$$

also ist $r(-t) = r(t)$ und $\phi(-t) = -\phi(t) + 2k\pi i$. Zum anderen gilt

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = (\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\phi}(t))e^{i\phi(t)}.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{p'(it)}{p(it)} i dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{\frac{d\nu(t)}{dt}}{\nu(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \left(\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} + i\dot{\phi}(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \log r(t) \Big|_{-R}^{+R} + \frac{1}{2\pi} \phi(t) \Big|_{-R}^{+R} = 0 + \frac{\phi(R) - \phi(-R)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Die Anzahl m der Nullstellen links der imaginären Achse ist also durch den Argumentzuwachs der Nyquistkurve bestimmt:

$$m = \frac{n}{2} + \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\phi(R) - \phi(-R)}{2\pi}$$

oder

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} (\phi(R) - \phi(-R)) = (2m - n)\pi.$$

Weil ein stabiles Polynom natürlich keine Nullstellen auf der imaginären Achse hat, erhalten wir

Satz 70 (Nyquist-Kriterium, 1. Version). *Das reelle Polynom $p(z)$ vom Grad n ist genau dann stabil, wenn die zugehörige Nyquistkurve $\nu(t) = p(it)$, $-\infty < t < +\infty$ nicht durch 0 geht und den Argumentzuwachs $n\pi$ besitzt.*

In den Anwendungen setzt man für das reelle Polynom p meistens $p(0) > 0$ voraus und wählt die (ja nur bis auf ein festes Vielfaches von 2π eindeutige) Funktion ϕ so, dass $\phi(0) = 0$. Dann ist $\phi(-t) = -\phi(t)$, und die auf $[0, +\infty[$ eingeschränkte Nyquistkurve hat Argumentzuwachs

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (\phi(t) - \phi(0)) = n \frac{\pi}{2}$$

genau im Falle der Stabilität.

Satz 71 (Nyquist-Kriterium, 2. Version). Das Polynom (35) habe reelle Koeffizienten mit $a_n > 0$. Genau dann ist $p(z)$ stabil, wenn die eingeschränkte Nyquistkurve $\nu(t) = p(it), 0 \leq t < \infty$ von $p(z)$ folgende drei Bedingungen erfüllt:

(i) Die Kurve läuft nicht durch 0, also

$$\nu(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$$

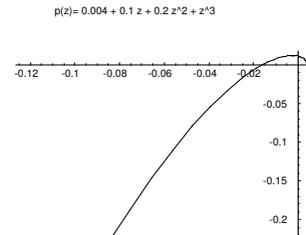
mit differenzierbaren $r, \phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) Die Kurve beginnt auf der positiven reellen Achse, also können wir $\phi(0) = 0$ wählen.

(iii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = n \frac{\pi}{2},$$

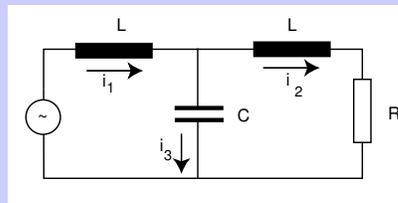
wobei n also der Grad des Polynoms ist. Man sagt auch: $\nu(t)$ durchläuft im positiven Sinne genau n Quadranten.



Beispiel 72. Die Ströme im abgebildeten Netzwerk werden durch ein lineares Differentialgleichungssystem der Form $\frac{d}{dt}\vec{i} = A\vec{i} + \vec{b}$ mit einer (3×3) -Systemmatrix A gegeben, vgl. Beispiel 108.

Das charakteristische Polynom dazu ist

$$p(z) = z^3 + \frac{R}{L}z^2 + \frac{2}{LC}z + \frac{R}{L^2C}$$



(In der linearen Algebra heißt die Variable im charakteristischen Polynom meistens λ , aber das macht nichts.)

Wir betrachten allgemeiner ein Polynom

$$p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

mit

$$a, b, c, d > 0 \text{ und } bc - ad > 0. \quad (38)$$

Diese Bedingungen sind für das obige Netzwerk erfüllt, denn

$$\frac{R}{L} \frac{2}{LC} - \frac{R}{L^2C} > 0.$$

Wir zeigen, dass jedes $p(z)$ mit den Bedingungen (38) die Voraussetzungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt.

Dazu schreiben wir $\nu(t) = p(it) = x(t) + iy(t)$ mit

$$x(t) = d - bt^2, \quad y(t) = ct - at^3. \quad (39)$$

Bedingungen (i), (ii). Aus $\nu(t) = 0$ folgt $t^2 = d/b$ und

$$0 = t(c - at^2) = \frac{t}{b}(bc - ad)$$

und daraus $t = 0$. Aber $\nu(0) = d > 0$.

Bedingung (iii). Weil

$$y(t) = 0 \iff t = 0 \text{ oder } t^2 = \frac{a}{c}$$

und weil

$$x\left(\pm\sqrt{\frac{a}{c}}\right) = \frac{1}{a}(ad - bc) < 0,$$

trifft die Nyquistkurve die positive reelle Achse nur einmal, nämlich für $t = 0$. Für sehr kleine positive t ist $y(t) > 0$, also $\phi(t) > 0$, und daher liegen die Werte von $\phi(t)$ für $t > 0$ im Intervall $]0, 2\pi[$.

Für großes t ist aber $\nu(t) = p(it) \approx a(it)^3 = -iat^3$. Daher folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 3\frac{\pi}{2}.$$

2 Rand- und Eigenwertprobleme

- Anfangswertprobleme von halbwegs “anständigen” Differentialgleichungen sind eindeutig lösbar. Ganz anders sieht das aus mit den in vielen Anwendungen auftretenden Randwertproblemen, die wir zunächst untersuchen.
- Oft sind sie nur für spezielle Werte der mit dem Problem verbundenen Parameter lösbar, was auf sogenannte Rand-Eigenwert-Probleme und sogenannte Eigenlösungen führt.
- Zusätzliche Anfangsbedingungen bei partiellen Differentialgleichungen erhält man durch Superposition von Eigenlösungen, wobei wie in der Fouriertheorie die Orthogonalität von Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten die Bestimmung der Koeffizienten für die Superposition erheblich vereinfacht.

In diesem Abschnitt vertiefen wir die Untersuchung von Phänomenen, die im ITPDG-Modul im Zusammenhang mit den Bessel- und Legendregleichungen bereits angesprochen worden sind. Die wichtigen Beispiele haben Sie also bereits kennengelernt.

2.1 Zur Vorbereitung

2.1.1 Anfangswertprobleme gegen Randwertprobleme

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = h(x) \quad (40)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung sieht dann so aus

$$y = y_P + c_1y_1 + c_2y_2.$$

Dabei ist y_P irgendeine Lösung von (40) auf $[a, b]$, eine sogenannte partikuläre Lösung, y_1 und y_2 sind zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung und c_1, c_2 sind zwei beliebige Konstanten. Gibt man Anfangsbedingungen vor:

$$y(a) = \eta_a, \quad y'(a) = \eta'_a, \quad (41)$$

so erhält man ein lineares Gleichungssystem für c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1y_1(a) + c_2y_2(a) &= \eta_a - y_P(a) \\ c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) &= \eta'_a - y_P'(a). \end{aligned}$$

Die Systemmatrix ist gerade die Wronskimatrix (vgl. Modul *Lineare Algebra für Ingenieure* oder ITPDG). Weil y_1, y_2 linear unabhängig sind, ist die zugehörige Determinante $\neq 0$, d.h. das Gleichungssystem besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung c_1, c_2 . Also besitzt das **Anfangswertproblem** (40), (41) genau eine Lösung, von der man überdies weiß, dass sie auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ definiert ist.

Vielfach ist man aber an Lösungen von (40) interessiert, die an beiden Randpunkten des Intervalls $[a, b]$ ein bestimmtes Verhalten haben. Man spricht dann von einem **Randwertproblem**. Statt (41) kann man zum Beispiel die Funktionswerte

$$y(a) = \eta_a, \quad y(b) = \eta_b \quad (42)$$

oder auch die Ableitungswerte in den Randpunkten vorschreiben. Denken Sie etwa an die Schwingung einer an den Enden eingespannten Saite. Man erhält wieder ein lineares Gleichungssystem für c_1, c_2 :

$$\begin{aligned}c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) &= \eta_a - y_P(a) \\c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) &= \eta_b - y_P(b).\end{aligned}$$

Im "Normalfall" wird das eine eindeutig bestimmte Lösung haben. Aber im Gegensatz zum Anfangswertproblem muss die Systemmatrix nicht unbedingt regulär sein, und dann gibt es keine oder unendlich viele Lösungen. Genau diese Fälle sind oft interessant.

Beispiel 73 (Schwingende Saite). Die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x).$$

Betrachtet man die Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \eta,$$

so folgt

$$c_1 = 0, \quad c_2 \sin(\lambda\pi) = \eta.$$

Wenn λ nicht ganzzahlig ist, ist der Sinus $\neq 0$ und das Randwertproblem hat eine eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \frac{\eta}{\sin(\lambda\pi)} \sin(\lambda x).$$

Ist andererseits $\lambda \in \mathbb{Z}$, so gibt es nur für $\eta = 0$ eine Lösung. Dann ist aber c_2 beliebig, und man hat unendlich viele Lösungen. Das ist gerade die Situation der schwingenden Saite.

Dieses Beispiel steht für eine ganze Familie ähnlicher Randwertprobleme für eine Differentialgleichung mit einem Parameter λ , die nur für spezielle Werte des Parameters eine nicht-triviale Lösung besitzen. Man nennt solche Probleme *Rand-Eigenwert-Probleme*.

Singuläre Randwertprobleme. Wir werden im folgenden auch Differentialgleichungen der Form

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = h(x) \tag{43}$$

mit stetigen Koeffizienten $a_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Wenn a_0 keine Nullstelle hat, kann man damit kürzen und ist wieder im Fall (40). Wenn aber $a_0(a) = 0$ und/oder $a_0(b) = 0$, oder wenn die a_k nur auf dem offenen Intervall $]a, b[$ definiert sind, spricht man von linearen Differentialgleichungen mit Singularitäten. In diesem Fall ist es nicht mehr klar, ob es überhaupt auf ganz $[a, b]$ definierte Lösungen der Differentialgleichung gibt.

Beispiel 74. Die Legendregleichung

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k+1)y = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

auf dem Intervall $[-1, +1]$ hat singuläre Stellen bei $x = \pm 1$. Eine Lösungsbasis ist gegeben durch das Legendrepolynom $P_k(x)$ und die Legendrefunktion 2. Art

$$Q_k(x) := \frac{1}{2}P_k(x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} P_{j-1}(x) P_{k-j}(x).$$

Letztere ist nur auf dem offenen Intervall $] -1, +1[$ definiert und hat in ± 1 Singularitäten. \square

Wir können im Rahmen dieser Vorlesung nicht genauer auf die Theorie von Differentialgleichungen mit singulären Stellen eingehen. Gleichwohl spielen diese eine wichtige Rolle in den Anwendungen. Oft ist es sinnvoll dann *Randwerte* durch *Bedingungen an das Randverhalten* zu ersetzen, etwa indem man fordert, dass die Lösungen und/oder ihre Ableitungen am Rand, also für $x \searrow a$ bzw. $x \nearrow b$, beschränkt bleiben oder schnell abfallen sollen.

2.1.2 Der Nutzen von Orthonormalsystemen

Wir wiederholen, dem Anschein nach etwas unmotiviert, ein wenig lineare Algebra. Am Ende dieses Abschnitts werden Sie ahnen, welchen Zusammenhang es mit der Theorie der Differentialgleichungen gibt:

Will man einen Vektor \vec{v} nach einer Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ entwickeln

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k,$$

so bekommt man die Entwicklungskoeffizienten λ_k , indem man diese Gleichung als ein lineares Gleichungssystem für die λ_k betrachtet und löst. In großen Dimensionen kann das sehr mühsam sein, erst recht in unendlich-dimensionalen Räumen. Wenn aber die v_k eine Orthonormalbasis im \mathbb{R}^n bilden sind die Entwicklungskoeffizienten einfach gegeben durch

$$\lambda_k = \langle \vec{v}, \vec{v}_k \rangle,$$

wobei wir mit $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ das übliche Skalarprodukt bezeichnet haben. Sie sind also viel einfacher zu ermitteln als bei allgemeinen Basen.

Ebenfalls aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Eigenvektoren einer selbstadjungierten Matrix (d.h. $A = A^T$) zu *verschiedenen* Eigenwerten immer orthogonal sind. Das ist sehr leicht einzusehen: Ist $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ und $A\vec{y} = \mu\vec{y}$, so folgt

$$\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^T \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad (44)$$

Wenn $\lambda \neq \mu$, so ist also $\langle x, y \rangle = 0$.

Wir haben dabei benutzt, dass

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) y_j = \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} y_j \right) = \langle \vec{x}, A^T \vec{y} \rangle$$

ist. Die adjungierte (=transponierte) Matrix ist durch diese Gleichung charakterisiert.

Wir fassen zusammen:

1. Entwicklung nach *Orthonormalbasen* ist sehr bequem, weil die Entwicklungskoeffizienten einfach Skalarprodukte sind.
2. Man bekommt Orthonormalbasen als Eigenvektoren einer selbstadjungierten Matrix.

Diese angenehme Situation wiederholt sich bei den Fourierreihen. Wir betrachten der Einfachheit halber die Entwicklung einer stetig differenzierbaren *ungeraden* T -periodischen Funktion nach harmonischen Schwingungen

$$f(t) = \sum b_k \sin(k\omega t), \quad \omega = 2\pi/T.$$

Das ist leicht: Man muss nur die *Fourierkoeffizienten* bestimmen, und die sind wieder Skalarprodukte. Allerdings ist das Skalarprodukt nicht mehr durch eine Summe definiert, sondern durch Integration:

$$b_k = \langle f(t), \sin(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

Also ist

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt.$$

Wesentlich ist, dass die $\sin(k\omega t)$ orthonormal sind, was jetzt bedeutet, dass

$$\langle \sin(k\omega t), \sin(l\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (45)$$

Und wesentlich ist, dass die $\sin(k\omega t)$ eine Basis für die ungeraden T -periodischen Funktionen bilden: D.h.⁴ T -periodische ungerade Funktionen, die auf allen $\sin(k\omega t)$ senkrecht stehen, sind Null.

Für T -periodische Funktionen, die nicht unbedingt ungerade sind, bilden die Sinusfunktionen keine Orthonormalbasis, weil zum Beispiel $\langle \cos(\omega t), \sin(k\omega t) \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann muss man noch Cosinus-Terme hinzunehmen – und die Notation wird etwas aufwendiger.

Wenn man schon eine Orthonormalbasis hat, muss man sich natürlich keine Gedanken machen, wie man eine bekommt. Aber es ist trotzdem nützlich, sich klarzumachen, dass man auch im Rahmen der Fouriertheorie die $\sin(k\omega t)$ als Eigen“vektoren”, man sagt *Eigenfunktionen*, einer selbstadjungierten linearen Abbildung bekommen kann: Das liefert nämlich eine Methode, die man auch in anderen Fällen anwenden kann.

Durch

$$L(y) := y''$$

erhält man eine lineare Abbildung vom Raum der (beliebig oft differenzierbaren) T -periodischen Funktionen in sich selbst, die selbstadjungiert ist und $\sin(k\omega t)$ als Eigenfunktion zum Eigenwert $-(k\omega)^2$ besitzt. Die zweite Eigenschaft rechnen Sie im Kopf nach. Für die erste muss man zeigen, dass

$$\langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle$$

gilt.

Beweis: Aus

$$L(f)g - fL(g) = f''g - fg'' = (f'g - fg')'$$

folgt

$$\langle L(f), g \rangle - \langle f, L(g) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T (f'g - fg')' dt = \frac{2}{T} (f'g - fg')|_0^T = \frac{2}{T} \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}_0^T$$

Wegen der Periodizität von f und g hat die rechts stehende Wronskideterminanten in 0 und T denselben Wert, also ist der Ausdruck $= 0$ und $\langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle$.

Den Beweis, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten von L bezüglich des Integral-Skalarproduktes senkrecht stehen, kann man dann von der obigen Matrixversion wörtlich übernehmen, vgl. (44). Insbesondere braucht man also (45) nicht mehr mühsam mittels Additionstheoremen oder komplexer Schreibweise nachzurechnen.

⁴ In unendlich-dimensionalen Vektorräumen wie den Funktionsräumen ist der Begriff einer Basis komplizierter als in der endlich-dimensionalen linearen Algebra. Aber im hier betrachteten Fall ist dies eine präzise Definition.

Wir fassen zusammen:

1. Entwicklung nach *orthonormalen Funktionen* (bezüglich des Integral-Skalarproduktes) ist sehr bequem, weil die Entwicklungskoeffizienten einfach Skalarprodukte sind.
2. Das System $(\sin k\omega t)_{k>0}$ ist orthonormal, *weil* es aus Eigenfunktionen des selbstadjungierten Differentialoperators $Ly = y''$ zu verschiedenen Eigenwerten besteht.

Der oben geführte Beweis zeigt, dass die Selbstadjungiertheit mit Randwerten zu tun hat, weil eben für T -periodisches y

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

Tatsächlich gibt es eine enge Verbindung zwischen Randwertproblemen für Differentialgleichungen und der Entwicklung nach orthonormalen Eigenfunktionen. Das ist das Thema der folgenden Abschnitte.

Ehe wir uns aber darauf stürzen, wollen wir noch einmal an einem einfachen Beispiel erklären, warum man überhaupt daran interessiert ist Funktionen nach Eigenfunktionen zu entwickeln.⁵

Die Funktionen

$$u(x, t) = \sin(k\omega x) \cos(k\omega ct)$$

oder

$$u(x, t) = \sin(k\omega x) \sin(k\omega ct)$$

erfüllen alle die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ und $L = \frac{\pi}{\omega}$, sie beschreiben die Schwingungsmoden einer bei 0 und L eingespannten Saite. Auch Linearkombinationen

$$u(x, t) = \sum_k [a_k \sin(k\omega x) \cos(k\omega ct) + b_k \sin(k\omega x) \sin(k\omega ct)] \quad (46)$$

erfüllen dieses Randwertproblem, und man kann fragen, wie die Schwingung bei vorgegebenem Anfangsprofil $u(x, 0) = u_0(x)$ aussieht. Dazu muss man also die a_k , so bestimmen, dass

$$\sum_k a_k \sin(k\omega x) = u_0(x) \quad (47)$$

wird, und das ist gerade das Entwicklungsproblem.

Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ bietet offenbar noch nicht genug Information, um auch die b_k zu bestimmen, die Lösung des Schwingungsproblems ist noch nicht eindeutig. Aber wenn wir auch noch die Zeitableitung $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ vorschreiben, erhalten wir mit

$$\sum_k (k\omega c) b_k \sin(k\omega x) = u_1(x) \quad (48)$$

ein weiteres Entwicklungsproblem nach Eigenfunktionen und eine eindeutig festgelegte Lösung.

⁵Vergleichen Sie dazu ITPDG.

2.2 Selbstadjungiertheit und Orthogonalitätsrelationen

- Die “Eigen-Lösungen” selbstadjungierter Differentialgleichungen mit geeigneten Randbedingungen erfüllen typischerweise Orthogonalitätsbedingungen.
- Wir betrachten diverse Beispiele, die schon in ITPDG vorkamen, jetzt genauer.

2.2.1 Das Sturmische Randwertproblem

Wir wollen die vorstehenden Überlegungen auf Verallgemeinerungen des Differentialoperators $L(y) = y''$ übertragen. Wir betrachten homogene lineare Differentialgleichungen der Form

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0,$$

die wir aber aus demnächst klar werdenden Gründen so schreiben:

$$\boxed{L(y) := (p(x)y')' + q(x)y = 0} \quad (49)$$

Die Koeffizientenfunktionen p und q sollen *reellwertig*, q stetig und p stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$ sein.

Durch

$$\langle y_1, y_2 \rangle := \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx \quad (50)$$

definieren wir ein Skalarprodukt für stetige Funktionen auf $[a, b]$ und erhalten wie oben:

$$\begin{aligned} \langle L(y_1), y_2 \rangle - \langle y_1, L(y_2) \rangle &= \int_a^b [(p(x)y_1'(x))'y_2(x) + q(x)y_1(x)y_2(x)] dx \\ &\quad - \int_a^b [(p(x)y_2'(x))'y_1(x) + q(x)y_1(x)y_2(x)] dx \\ &= \int_a^b [(p(x)y_1'(x))'y_2(x) - (p(x)y_2'(x))'y_1(x)] dx \\ &= \int_a^b [p(x)(y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x))] dx \\ &= [p(x)(y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x))]_a^b \end{aligned} \quad (51)$$

Also ist L selbstadjungiert zum Beispiel auf dem Raum aller (zweimal differenzierbaren) Funktionen $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$y(a) = 0 = y(b) \quad (\text{Dirichletsche Randbedingung})$$

oder

$$y'(a) = 0 = y'(b) \quad (\text{Neumannsche Randbedingung})$$

Allgemeiner folgt

Satz 75 (Selbstadjungiertheit im Sturmischen Randwertproblem).*Der Differentialoperator*

$$L(y) = (p(x)y')' + q(x)y$$

ist bezüglich (50) selbstadjungiert auf dem Raum aller (zweimal stetig differenzierbaren) Funktionen $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Randbedingungen

$$\alpha p(a)y(a) + \beta y'(a) = 0 = \gamma p(b)y(b) + \delta y'(b), \quad (52)$$

wobei für die Konstanten

$$(\alpha, \beta) \neq (0, 0) \neq (\gamma, \delta).$$

Für je zwei solche Funktionen y_1, y_2 gilt also

$$\langle L(y_1), y_2 \rangle = \langle y_1, L(y_2) \rangle. \quad (53)$$

Beweis. Aus (52) folgt

$$\begin{pmatrix} p(a)y_1(a) & y_1'(a) \\ p(a)y_2(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weil das ein homogenes Gleichungssystem mit nichttrivialer Lösung ist, folgt

$$\det \begin{pmatrix} p(a)y_1(a) & y_1'(a) \\ p(a)y_2(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} = p(a)(y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)) = 0$$

und ebenso im Punkte b . Dann folgt die Behauptung aber aus (51). \square

Bemerkungen. 1. Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen interpretiert man gern so, dass man für die Differentialgleichung den Lösungsraum bestimmen, und aus diesem dann durch die Anfangsbedingungen die "richtige" Lösung des gestellten Problems herausfischen soll. Bei der Betrachtung von Randwertproblemen ist eine andere Vorstellung hilfreicher: Die Randbedingungen definieren einen gewissen Raum von Funktionen und nun versucht man in diesem Raum Funktionen y zu finden, die eine der folgenden Typen von Differentialgleichungen erfüllt:

$$L(y) = 0,$$

$$L(y) = h(x),$$

$$L(y) = -\lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (Eigenwertproblem),}$$

$$L(y) = -\lambda Q(x)y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (verallgemeinertes Eigenwertproblem).}$$

Dabei hat das erste Problem $L(y) = 0$ auf dem durch die homogenen Randbedingungen (52) Raum im allgemeinen nur die triviale Lösung, die interessanteren Probleme sind die letzten beiden Typen, also sogenannte *Rand-Eigenwert-Probleme*, wo man Werte λ sucht, für die nicht-triviale Lösungen des Randwertproblems existieren. Wir kommen darauf zurück.

2. In **wichtigen** Anwendungen sind die Voraussetzungen des obigen Satzes **nicht** erfüllt. Insbesondere kommt es vor, dass die Koeffizientenfunktionen p und q nur auf einem offenen Intervall $]a, b[$ erklärt sind. Dabei kann insbesondere das Intervall auch $] - \infty, +\infty[$ sein.

Die Behauptung (53) gilt dann immer noch für zweimal stetig differenzierbare Funktionen

auf $]a, b[$, wenn

$$\langle L(y_1), y_2 \rangle = \int_a^b [(p(x)y_1'(x))' y_2(x) + q(x)y_1(x)y_2(x)] dx$$

und

$$\langle y_1, L(y_2) \rangle = \int_a^b [(p(x)y_2'(x))' y_1(x) + q(x)y_1(x)y_2(x)] dx$$

als *uneigentliche* Integrale existieren und

$$\lim_{x \searrow a} p(x) (y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)) = 0 = \lim_{x \nearrow b} p(x) (y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)). \quad (54)$$

Das ist nach der Rechnung (51) klar. Insbesondere erhält man die Selbstadjungiertheit auf dem Raum der auf $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit der folgenden "Randbedingung":

$\lim_{x \searrow a} p(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} p(x)$ <p>und</p> $y \text{ und } y' \text{ sind beschränkt.} \quad (55)$
--

Wir geben zwei wichtige Beispiele für Differentialgleichungen in selbstadjungierter Form.

Beispiel 76 (Legendregleichung). Die Separation der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten führte für den θ -Anteil auf die Legendregleichung. Diese ist in selbstadjungierter Form:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + \lambda y = ((x^2 - 1)y')' + \lambda y = 0.$$

Wählt man $[a, b] = [-1, +1]$, so hat $p(x) = x^2 - 1$ Nullstellen in a und b . Man hat Selbstadjungiertheit des Differentialoperators auf diesem Intervall zum Beispiel für Polynome, vgl. (55).

Beachten Sie, dass man die (76) auch als

$$((x^2 - 1)y')' = -\lambda y$$

schreiben kann, um das Eigenwertproblem zu unterstreichen. □

Beispiel 77 (Besselgleichung). Im Gegensatz dazu ist die Besselgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

nicht in selbstadjungierter Form. Aber nach Division mit x erhält man

$$xy'' + y' + (x - \frac{\lambda^2}{x})y = (xy')' + (x - \frac{\lambda^2}{x})y = 0,$$

und das *ist* in selbstadjungierter Form. Als (verallgemeinertes) Eigenwertproblem schreibt man das deutlicher so:

$$(xy')' + xy = \frac{\lambda^2}{x}y.$$

(53) gilt unter der Randbedingung (52) auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b$.

Es gilt nach dem Zusatz auf $[0, b]$, wenn man (52) in b fordert und nur Funktionen betrachtet, die samt ihrer Ableitung auf $]0, b]$ beschränkt sind. □

Selbstadjungierte Schreibweise. Der Trick aus dem letzten Beispiel lässt sich tatsächlich ganz allgemein anwenden: Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (56)$$

hat dieselbe Lösungsmenge, wie

$$e^{s(x)}(a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) = 0,$$

mit einer beliebigen Funktion $s(x)$. Man kann sie also „umnormieren“. Setzt man nun voraus, dass

$$a_0 > 0$$

und wählt man $s(x) = \int \frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)} dx$, so ergibt sich $a_1 - a_0'(x) - s'(x)a_0(x) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} e^{s(x)}(a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) &= (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)}(a_1 - a_0'(x) - s'(x)a_0(x))y' + e^{s(x)} a_2 y \\ &= (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)} a_2 y. \end{aligned}$$

Jede Differentialgleichung der Form (56) lässt sich also in selbstadjungierter Form schreiben, man muss nur den Faktor $e^{s(x)}$ bestimmen.

Auch Randbedingungen „im Unendlichen“ kommen in den Anwendungen vor. Dazu das folgende

Beispiel 78 (Schrödingergleichung, Hermitesche Differentialgleichung).

Werkstoffe II, Abschnitt 1

Die *Schrödingergleichung* spielt in der Quantenmechanik, zum Beispiel in der Halbleiterphysik, eine prominente Rolle. Eine einfache zeitinvariante Form ist der sogenannte *harmonische Oszillator* der Quantenmechanik:

$$\frac{\hbar}{2m} \psi'' + \left(E - \frac{m\omega^2}{2} x^2\right) \psi = 0.$$

Durch eine Substitution $\psi(x) = u(ax)$ können wir das vereinfachen zu

$$u'' + (A - x^2)u = 0. \quad (57)$$

Diese Gleichung hat für $A = 1$ die Lösung $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Sucht man Lösungen (Wellenfunktionen) für beliebiges A , die im Unendlichen schnell abfallen, so ist es deshalb naheliegend, die Substitution

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} y(x)$$

zu versuchen. Dafür ist

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} (-xy(x) + y'(x)), \\ u''(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 y(x) - xy'(x) - y(x) - xy'(x) + y''(x)), \end{aligned}$$

und (57) wird zu

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 y(x) - xy'(x) - y(x) - xy'(x) + y''(x) + (A - x^2)y(x)) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} (y''(x) - 2xy'(x) + (A - 1)y(x)). \end{aligned}$$

Das liefert (mit $(A - 1) =: \lambda$) die *Hermiteische Differentialgleichung*

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (58)$$

Lösen Sie diese Gleichung durch einen Potenzreihenansatz und zeigen Sie, dass es für $\lambda = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ eine Polynomlösung vom Grad k gibt. Das n -te *Hermitepolynom* $H_k(x)$ ist diese Lösung in der Normierung mit Leitkoeffizient 2^k :

$$H_k(x) = 2^k x^k + \dots$$

Man findet

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Die Gleichung (58) ist nicht selbstadjungiert, sie wird es aber nach Multiplikation mit e^{-x^2} :

$$(e^{-x^2} y')' = -\lambda e^{-x^2} y. \quad (59)$$

Für jedes Polynom $y(x)$ fällt $y(x)e^{-x^2}$ für $x \rightarrow \pm\infty$ so schnell gegen 0 ab, dass diese Funktion von $-\infty$ bis $+\infty$ uneigentlich integrierbar ist. Deshalb ist der Differentialoperator $L(y) = (e^{-x^2} y')'$ auf den Polynomen selbstadjungiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(e^{-x^2} y_1'(x))'] y_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x) [(e^{-x^2} y_2'(x))'] dx.$$

2.2.2 Orthogonalität der verallgemeinerten Eigenfunktionen (Sturm-Liouville)

Wir haben gezeigt, dass ein Differentialoperator der Form $L(y) = (py')' + qy$ unter gewissen Randbedingungen selbstadjungiert ist bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

d.h. dass $\langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle$ gilt. Wie im Abschnitt 2.1.2 und insbesondere der dort vorgeführten Untersuchung der Fourierreihen folgt daraus, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten von L aufeinander senkrecht stehen.

Die Beispiele 77 und 78 der Besselschen und der Hermiteschen Differentialgleichung zeigen, dass es sinnvoll sein kann, *verallgemeinerte Eigenfunktionen* zu betrachten. Wir betrachten dazu eine weitere reellwertige Funktion $Q(x)$ und dazu Funktionen $y \neq 0$, die

- (i) die Randbedingungen (52) bzw. (54) erfüllen und
- (ii) für die es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$L(y) = -\lambda Q(x)y,$$

d.h.

$$(py')'(x) + (q(x) + \lambda Q(x))y(x) = 0.$$

Das Problem, solche Funktionen zu finden nennt man auch das *Rand-Eigenwert-Problem von Sturm und Liouville*. Aus der Sicht der linearen Algebra ist das Minuszeichen in der vorletzten Gleichung irritierend. Es hat historische Gründe. Sachlich ist es natürlich egal, ob man λ oder $-\lambda$ den Eigenwert nennt.

Satz 79 (Orthogonalitätssatz zum Sturm-Liouville-Problem). *Seien y_1, y_2 zwei verallgemeinerte Eigenfunktionen von L bezüglich Q zu verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte*

$$(p(x)y_k')' + (q(x) + \lambda_k Q(x))y_k = 0, \quad k = 1, 2 \tag{60}$$

für $k = 1, 2$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Weiter gelte für beide Funktionen y_1, y_2 eine der Randbedingungen (52) bzw. (54). Dann gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)Q(x)dx = 0.$$

Beweis. Aus

$$\langle L(y_1), y_2 \rangle = \langle y_1, L(y_2) \rangle$$

folgt

$$-\lambda_1 \langle Qy_1, y_2 \rangle = -\lambda_2 \langle y_1, Qy_2 \rangle = -\lambda_2 \langle Qy_1, y_2 \rangle,$$

denn im Integral $\int y_1 y_2 Q dx$ kann man das Q beliebig verschieben. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ bedeutet das aber $\langle y_1, y_2 Q \rangle = 0$ und damit die Behauptung. \square

Beispiel 80. Für die schwingende Saite auf $[0, \pi]$ haben wir

$$\begin{aligned} y'' &= -\lambda y \\ y(0) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Mit den Eigenwerten $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und den Eigenfunktionen $y = \sin kx$ erhalten wir die bekannte Relation

$$\int_0^\pi \sin kx \sin lx dx = 0, \quad k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l.$$

Beispiel 81. Die Legendrepolynome P_k sind Eigenfunktionen der Legendregleichung

$$((1-x^2)y')' = -\lambda y.$$

Für sie gilt offenbar

$$\lim(1-x^2)P_k(x) = 0$$

für $x \rightarrow \pm 1$ und daher

$$\int_{-1}^1 P_k(x)P_l(x)dx = 0 \text{ für } k \neq l.$$

□

Beispiel 82. Die Hermitepolynome H_k (vgl. Beispiel 78) sind Eigenfunktionen der hermiteschen Differentialgleichung

$$(e^{-x^2}y')' = -\lambda e^{-x^2}y$$

zu den Eigenwerten $\lambda = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, die die Randbedingung

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x)e^{-x^2} = 0$$

erfüllen. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(x)H_l(x)e^{-x^2} dx = 0 \text{ für } k \neq l.$$

□

Beispiel 83. Die Besselgleichung $(xy')' + (x - \frac{\lambda^2}{x})y = 0$ könnte man ähnlich behandeln.

In den Anwendungen ist aber das folgende Eigenwertproblem viel wichtiger:

Ist y eine beschränkte Lösung der Besselgleichung zum Parameter m , also y ein Vielfaches von J_m , und ist $r > 0$, so erfüllt (Nachrechnen!) die Funktion

$$u(x) = y(rx)$$

die Differentialgleichung

$$(xu')' - \frac{m^2}{x}u = -r^2xu.$$

Betrachte man das Randwertproblem $u(0) = 0 = u(1)$, also $y(0) = 0 = y(r)$, so sind die Eigenwerte die Quadrate der Nullstellen $j_{m;k}$ von J_m . Die Orthogonalitätsrelation liefert dann

$$\int_0^1 J_m(j_{m;k}x)J_m(j_{m;l}x)xdx = 0 \text{ für } k \neq l.$$

□

Wir fassen die Ergebnisse für die Schwingungsgleichung und die Gleichungen von Legendre, Hermite und Bessel noch einmal in einer Tabelle zusammen. Dabei sind k, l verschiedene natürliche Zahlen.

Gleichung	Randbedingung	λ	Orthogonalitätsrelation
$y'' = -\lambda y$	$y(0) = 0 = y(\pi)$	$k^2 > 0$	$\int_0^\pi \sin kx \sin lx dx = 0$
$y'' = -\lambda y$	$y'(0) = 0 = y'(\pi)$	$(k + \frac{1}{2})^2$	$\int_0^\pi \cos(k + \frac{1}{2})x \cos(l + \frac{1}{2})x dx = 0$
$((1 - x^2)y')' = -\lambda y$	y Polynom auf $[-1, +1]$	$k(k + 1)$	$\int_{-1}^{+1} P_k(x)P_l(x)dx = 0$
$(e^{-x^2}y')' = -\lambda e^{-x^2}y$	y Polynom auf \mathbb{R}	$2k$	$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(x)H_l(x)e^{-x^2} dx = 0$
$(xy')' - \frac{m^2}{x} = -\lambda xy$	y, y' bei 0 beschränkt, $y(1) = 0$	$j_{m;k}^2, k > 0$	$\int_0^1 J_m(j_{m;k}x)J_m(j_{m;l}x)xdx = 0$

2.3 Entwicklung nach Eigenfunktionen

- Warum sind Eigenwerte und -funktionen von selbstadjungierten Randwertproblemen und ihre Orthogonalitätsrelationen überhaupt von Interesse?
- Vor allem deshalb, weil die *Entwicklung nach Eigenfunktionen* die Lösung von Rand-Anfangswertproblemen zum Beispiel bei Schwingungs- oder Transportphänomenen ermöglicht.

Wir erläutern das am Beispiel der schwingenden Saite der Länge π :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0 = u(\pi, t).$$

Der Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ führt auf das Rand-Eigenwertproblem

$$X'' = -\lambda X, \quad X(0) = 0 = X(\pi).$$

Man findet die Lösungen $X(x) = \sin kx$ und damit

$$u(x, t) = \sin kx \cos kct \text{ und } u(x, t) = \sin kx \sin kct.$$

Nach dem Superpositionsprinzip sind weitere Lösungen gegeben durch unendliche Linearkombination, also durch Reihen der Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \cos kct + b_k \sin kx \sin kct.$$

Sind das nun *alle* Lösungen für die schwingende Saite? Aus physikalischen Gründen ist das plausibel, wenn man Lösungen mit beliebigen "Anfangsdaten", also mit einer beliebig vorgegeben Anfangsform und Anfangsgeschwindigkeit der Saite darstellen kann. Weil aber

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} cb_k \sin kx$$

gilt, ist das äquivalent zur Frage, ob sich "beliebige" Funktionen $u_0(x)$ mit

$$u_0(0) = 0 = u_0(\pi)$$

nach den $\sin kx$ entwickeln lassen. Aus der Theorie der Fourierreihen wissen wir, dass das wahr ist.

Bei den anderen betrachteten Differentialgleichungen (Legendre, Bessel, Hermite) gibt es ebenfalls eine unendliche Eigenwertfolge und man kann entsprechend nach der Möglichkeit fragen, beliebige Funktionen nach den zugehörigen Eigenfunktionen zu entwickeln. Wie bei der Saite wäre das ein brauchbares Werkzeug zur Lösung von Rand-Anfangswertproblemen in verschiedensten Konstellationen.

Wir betrachten ganz allgemein ein selbstadjungiertes Rand-Eigenwert-Problem. Dafür gilt der folgende

Satz 84 (Eigenwerte, Oszillation und Entwicklung nach Eigenfunktionen).

Wir betrachten das selbstadjungierte Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} (py')' + qy &= -\lambda Qy \\ \alpha p(a)y(a) + \beta y'(a) = 0 &= \gamma p(b)y(b) + \delta y'(b) \end{aligned}$$

und setzen voraus, dass

$$p, Q > 0 \text{ auf dem ganzen Intervall } [a, b]. \quad (61)$$

Dann gilt

(i) Die Eigenwerte des Rand-Eigenwertproblems bilden eine unendliche Folge

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$$

reeller Zahlen, die gegen $+\infty$ konvergiert. Jede Eigenfunktion zu λ_n hat in $]a, b[$ genau n Nullstellen.

(ii) Ist $y_n(x)$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen zu den λ_n , d.h. gilt

$$\langle y_n, y_n Q \rangle = \int_a^b y_n^2(x) Q(x) dx = 1, \text{ f\u00fcr alle } n,$$

so l\u00e4sst sich jede stetig differenzierbare Funktion f , die die Randbedingungen erf\u00fcllt, darstellen durch eine punktweise (sogar gleichm\u00e4\u00dfig) konvergente Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n. \quad (62)$$

Dabei sind die Koeffizienten gegeben durch

$$a_n = \langle f, y_n Q \rangle = \int_a^b f(x) y_n(x) Q(x) dx.$$

Beweisidee. Der Beweis \u00fcbersteigt die M\u00f6glichkeiten dieser Veranstaltung bei weitem. Wir geben nur eine grobe Skizze der Beweisidee f\u00fcr (i) mit den Randwerten $y(a) = 0 = y(b)$ und $\alpha = 0$.

Wir verwenden einen Trick, der in ITPDG auch das Nullstellenverhalten der Besselfunktionen lieferte: Wir machen aus der Differentialgleichung f\u00fcr $y(x)$ eine f\u00fcr $v(x) := \frac{y(x)}{m(x)}$ und bestimmen m so, dass die neue Gleichung keinen v' -Term enth\u00e4lt. Wir finden $m = p^{-1/2}$ und dann die \u00e4quivalente Differentialgleichung

$$v'' + \left(\frac{q}{p} + \frac{(p')^2 - 2pp''}{4p^2} + \lambda \frac{Q}{p} \right) v = 0. \quad (63)$$

Die Nullstellen von v sind gleichzeitig die von y . F\u00fcr sehr gro\u00dfes $|\lambda|$ sieht das aus wie die Differentialgleichung

$$v'' + \lambda \frac{Q}{p} v = 0. \quad (64)$$

Ist $Q/p = C$ konstant (und nat\u00fcrlich > 0), so hat sehen die L\u00f6sungen von (64) mit $y(0) = 0$

folgendermaßen aus:

$$v(x) = \begin{cases} A \sinh(\sqrt{-C\lambda}x) & \text{für } \lambda < 0, \\ Ax & \text{für } \lambda = 0, \\ A \sin(\sqrt{C\lambda}x) & \text{für } \lambda > 0. \end{cases}$$

Lässt man λ aus dem Negativen langsam wachsen, so geschieht folgendes:

- Zunächst gibt es keine positiven Nullstellen, weil $\sinh x > 0$ für $x > 0$.
- Wird λ positiv, so ist die erste positive Nullstelle bei $x = \pi/\sqrt{C\lambda}$, also zunächst viel größer als b .
- Wächst λ weiter, so wird dieser Wert kleiner, bis schließlich $\pi/\sqrt{C\lambda} = b$. Dieses λ ist der erste Eigenwert λ_0 von (64).
- Wächst λ weiter, so „rutschen“ immer mehr Nullstellen in das Intervall $[0, b]$, und für jeden „Durchgang“ einer Nullstelle durch b erhält man einen Eigenwert von (64).

Mit einigem Aufwand an Mathematik lässt sich dieses Argument auf den Fall von variablem Q/p ausdehnen – auch für kleines $|\lambda|$ – und schließlich auf (63) übertragen. \square

Beispiel 85 (Ringmembran, Fourier-Bessel-Reihen).

Vgl. auch *Theoretische Elektrotechnik*, Abschnitt 7.4

Wir betrachten Wellen in einem ebenen Ringbereich

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$$

mit $0 < a < b$, d.h wir suchen Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, \\ u(x, y, t) &= 0 \text{ für } x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } x^2 + y^2 = b^2. \end{aligned}$$

Das kann man interpretieren als eine am Rand eingespannte Ringmembran oder als eine elektromagnetische Schwingung in einem langen Doppelzylinder.

Die Standardmethode ist die Separation dieser partiellen Differentialgleichung in Polarkoordinaten: Man schreibt u als Produkt $R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$, wendet den Laplaceoperator in Polarkoordinaten darauf an und separiert die Variablen. Das wird im Zusammenhang mit der Besselgleichung in ITPDG gemacht und führt auf folgendes System entkoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{T} + \omega^2 T &= 0, \\ \Phi'' + n^2 \Phi &= 0, \\ \rho^2 R'' + \rho R' + \left(\rho^2 \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\right) R &= 0. \end{aligned}$$

Da die Winkelfunktion Φ natürlich 2π -periodisch sein soll, folgt $n \in \mathbb{N}$. Diese Zahl kontrolliert also die Zahl der Wellenmaxima beim Umlauf um die Achse.

Nach Division durch das in unserem Fall positive ρ können wir die letzte Gleichung (die Besselgleichung) schreiben als

$$(\rho R')' - \frac{n^2}{\rho} R + \omega^2 \frac{\rho}{c^2} R = 0, \tag{65}$$

mit der Randbedingung

$$R(a) = 0 = R(b).$$

Nach dem obigen Satz gibt es für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ eine gegen Unendlich konvergierende Folge

$$\omega_{n,0}^2 < \omega_{n,1}^2 < \dots$$

von Eigenwerten mit zugehörigen Eigenfunktionen $R_{n,k}$. Die $\omega_{n,k}$ sind die radialen Eigenfrequenzen der Membran und k zählt die Wellenmaxima in radialer Richtung.

Die Schwingungsmodi sind also durch zwei ganze Zahlen n und k charakterisiert, und in komplexer Schreibweise gegeben durch

$$u_{n,k}(\rho, \phi, t) = R_{n,k}(\rho)e^{in\phi}e^{i\omega_{n,k}t}.$$

Wir wollen noch den Zusammenhang mit den Standard-Besselfunktionen klären und dadurch die Folge der $\omega_{n,k}$ genauer angeben. Die Besselgleichung in der üblichen Form

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

hat als Lösungsbasis die Besselfunktionen erster und zweiter Art J_n und Y_n . Eine Lösungsbasis von (65) sind dann die Funktionen $J_n(\frac{\omega}{c}\rho)$ und $Y_n(\frac{\omega}{c}\rho)$. Also lassen sich für gewisse Frequenzen $\omega = \omega_{n,k}$ diese beiden Funktionen so nicht-trivial linear kombinieren, dass sie in a und b verschwinden:

$$\begin{aligned}\alpha_{n,k}J_n\left(a\frac{\omega_{n,k}}{c}\right) + \beta_{n,k}Y_n\left(a\frac{\omega_{n,k}}{c}\right) &= 0, \\ \alpha_{n,k}J_n\left(b\frac{\omega_{n,k}}{c}\right) + \beta_{n,k}Y_n\left(b\frac{\omega_{n,k}}{c}\right) &= 0.\end{aligned}$$

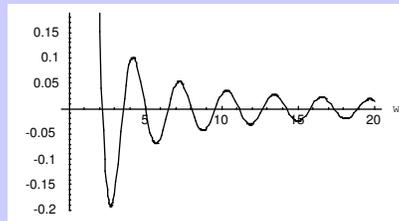
Aber das hat genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Systemmatrix die Determinante null hat:

$$d(\omega) = J_n\left(a\frac{\omega}{c}\right)Y_n\left(b\frac{\omega}{c}\right) - J_n\left(b\frac{\omega}{c}\right)Y_n\left(a\frac{\omega}{c}\right) = 0.$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind also die Eigenfrequenzen unseres Randwertproblems, die Eigenfunktionen sind $R_{n,k}(\rho) = \alpha_{n,k}J_n\left(\frac{\omega_{n,k}}{c}\rho\right) + \beta_{n,k}Y_n\left(\frac{\omega_{n,k}}{c}\rho\right)$.

Wir geben einen Mathematica-Plot dieser Funktion

```
a = 1; b = 3; n = 3; c = 1;
Plot[BesselJ[n, a \omega]]BesselY[n, b \omega] -
BesselJ[n, b \omega]BesselY[n, a \omega],
{\omega, 0, 20},
AxesLabel -> {\omega, None}];
```



Wenn wir uns der Einfachheit halber auf den rotationssymmetrischen Fall ($n = 0$) beschränken, finden wir für das Ringmembranproblem folgende Lösungen

$$u(\rho, t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_{0,k}(\rho)(a_k \cos(\omega_{0,k}t) + b_k \sin(\omega_{0,k}t))$$

Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ ergeben sich als

$$u(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R_{0,k}(\rho), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_{0,k} R_{0,k}(\rho).$$

Stetig differenzierbare Anfangsbedingungen lassen sich nach dem Entwicklungssatz realisieren. Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_k := \frac{1}{c_{0,k}} \int_a^b u(\rho, 0) R_{0,k}(\rho) \rho d\rho, \quad b_k c \omega_{0,k} := \frac{1}{c_{0,k}} \int_a^b u_t(\rho, 0) R_{0,k}(\rho) \rho d\rho,$$

mit den Normierungsfaktoren

$$c_{0,k} := \sqrt{\int_a^b R_{0,k}^2(\rho) \rho d\rho}.$$

Bemerkung. Im vorstehenden Beispiel haben wir die Besselgleichung auf ein positives Intervall eingeschränkt und haben deshalb positives $p(x)$ und reguläre Randbedingungen, so dass wir den Entwicklungssatz anwenden können.

Wenn man hingegen singuläre Gleichungen, also zum Beispiel

- die Legendregleichung $((1 - x^2)y')' = -\lambda y$ auf $[-1, +1]$,
- die Hermitegleichung auf $] -\infty, \infty[$ oder
- die Besselgleichung auf einem Intervall von 0 aus

betrachtet, so ist die Voraussetzung (61) nicht erfüllt, weil $p(x)$ an den Intervallenden verschwindet. Der Satz in dieser Version versagt hier also. Andererseits kennen wir für die hier aufgeführten Fälle schon die unendliche Folge der Eigenwerte, so dass die Behauptung (i) des Satzes richtig bleibt. Auch die Behauptung (ii) bleibt richtig für die Entwicklung von Funktionen, die auf dem *abgeschlossenen* Intervall stetig differenzierbar sind oder im Fall eines unbeschränkten Intervalls hinreichend schnell abfallen. Vgl. auch *Tychonoff/Samarski: Differentialgleichungen der Mathematischen Physik, Berlin 1959, p. 589 ff.* Eine allgemeinere Formulierung von Satz 84 erfordert ein genaueres Studium der Singularitäten und wir verzichten darauf.

3 Dynamische Systeme und Stabilität

3.1 Qualitative Theorie dynamischer Systeme

- Gleichgewichtszustände von Systemen können auf Störung sehr unterschiedlich reagieren. Zunächst untersuchen wir, wie.
- Besonders interessieren wir uns für stabile Gleichgewichtszustände.

Ein dynamisches System ist nichts anderes als ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}).$$

Die unabhängige Variable ist häufig die Zeit t , und wir folgen gängigen Konventionen, indem wir die abhängige Variable \vec{x} statt \vec{y} nennen.

Das Anfangswertproblem mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ hat bei stetig differenzierbarem $\vec{F} : \mathbb{R}^{n+1} \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung $\vec{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall J um t_0 , die eindeutig ist, wenn man das Intervall so groß wie möglich wählt. Im linearen Fall, wenn also

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

ist, ist das maximale Intervall das gemeinsame Definitionsintervall von $A(t)$ und $b(t)$. Im nichtlinearen Fall ist aber nicht a priori klar, wie groß das maximale Intervall ist, die Lösungen können nach endlicher Zeit am Rand des Gebietes G oder im Unendlichen “verschwinden”. Wir interessieren uns hier aber für das Langzeitverhalten der Lösungen und setzen deshalb stillschweigend deren Existenz auf einem rechtsseitig unendlichen Intervall $[t_0, +\infty[$ voraus.

Wir betrachten nur sogenannte *stationäre* oder *autonome* Systeme, bei denen \vec{F} nicht explizit von der Zeit abhängt, Systeme also, die von der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \tag{66}$$

sind. Ein Beispiel sind lineare Differentialgleichungssysteme $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ mit konstanten Koeffizienten. Selbst in diesem Fall ist die Berechnung expliziter Lösungen exakt oft nicht möglich oder zu aufwendig, zum Beispiel wenn die charakteristische Gleichung höheren Grad hat. Ungleich schwieriger wird es im nichtlinearen Fall.

Es ist deshalb von großer Bedeutung, wenigstens qualitative Eigenschaften der Lösungen direkt aus der Differentialgleichung abzulesen, ohne die Lösungen explizit zu berechnen. Eine wichtige Frage bezieht sich dabei auf das Verhalten bei Störung sogenannter Gleichgewichtszustände: Ist

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0},$$

so ist

$$\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$$

eine Lösung der Differentialgleichung, das System „ruht im Gleichgewicht“, und solche Punkte \vec{x}_0 heißen deshalb *Gleichgewichtspunkte* des Systems. In anderer Terminologie heißen sie auch *stationäre*, *singuläre* oder *kritische Punkte*. Wir möchten nun wissen, ob ein solches Gleichgewicht stabil ist, in dem Sinne, dass das System nach einer Störung, d.h. bei Anfangswerten nahe \vec{x}_0 auch in der Nähe des Gleichgewichtes bleibt, vielleicht sogar dahin zurückkehrt, oder ob es sich “dramatisch” aus der Gleichgewichtslage entfernt, denken Sie an die untere und obere Extremposition eines Pendels. Dieses ist eine fundamentale Frage der Systemtheorie, insbesondere der Regelungstechnik, vergleichen Sie etwa *Regelung in der Luft- und Raumfahrt*, Abschnitte 2 und 6.

Bevor wir den Stabilitätsbegriff exakt definieren, wollen wir noch eine Sprechweise motivieren und geben dazu das folgende

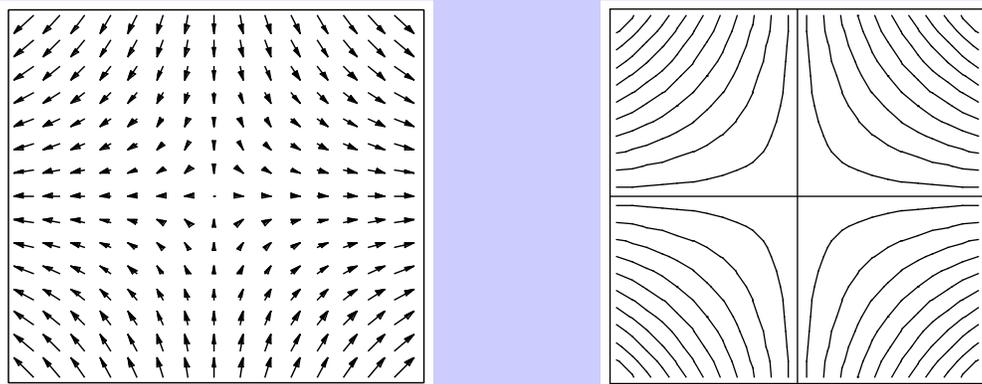
Beispiel 86 (Planetenbewegung). Das Newtonsche Bewegungsgesetz „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ liefert die Differentialgleichung $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Wir führen den Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ ein, und erhalten mit der Formel für die zentrale Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= m^{-1}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\gamma m M \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.\end{aligned}$$

Das ist von der Form (66) mit offensichtlich nichtlinearer rechter Seite. Der Vektor \vec{x} ist ersetzt durch den Vektor $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ mit 6 Komponenten für Ort und Impuls, der im sogenannten *Phasenraum* des Systems liegt.

Diese Situation ist typisch für Modelle der Mechanik im weitesten Sinne. Jede Lösung des Differentialgleichungssystems ist eine Kurve im Phasenraum, eine sogenannte *Phasenkurve*, und diese Terminologie überträgt man ganz allgemein auf dynamische Systeme: Man bezeichnet die Lösungskurven - ohne Rücksicht auf die physikalische Bedeutung - oft als Phasenkurven.

Insbesondere im zweidimensionalen Fall kann man (66) als ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ darstellen, etwa das (stationäre) Strömungsfeld einer Flüssigkeit, zu dem man die Flusslinien sucht. Die Darstellung dieser Flusslinien, also der Phasenkurven von (66) liefern das sogenannte *Phasendiagramm*.



Definition 87. Wir nennen einen Gleichgewichtspunkt \vec{x}_0 *stabil* bzw. *asymptotisch stabil* bzw. *instabil*, je nachdem wie sich die Phasenkurven, die in der Nähe von \vec{x}_0 starten, verhalten:

- **Stabil:** Alle Lösungen, die nahe x_0 starten, bleiben in der Nähe des Gleichgewichts, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| < \epsilon \quad \text{für alle } t > 0,$$

für jede Lösung $\vec{x}(t)$ mit $|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta$.

- **Asymptotisch stabil:** \vec{x}_0 ist stabil und alle Lösungen, die nahe \vec{x}_0 starten, nähern sich asymptotisch dem Gleichgewicht, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = x_0$$

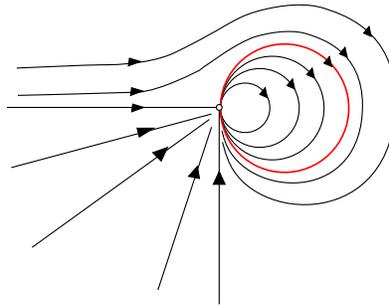
für jede Lösung $\vec{x}(t)$ mit $|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta$.

- Instabil: Nicht alle Lösungen, die nahe x_0 starten, bleiben in der Nähe des Gleichgewichts, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ eine Lösung $\vec{x}(t)$ und ein $t_1 > 0$, so dass

$$|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta, \text{ aber } |\vec{x}(t_1) - \vec{x}_0| > \epsilon.$$

Beispiele gibt es in der Folge reichlich. Hier nur ein “exotischer” Fall, um den Zusammenhang zwischen *stabil* und *asymptotisch stabil* zu klären.

Beispiel 88. Machen Sie sich klar, dass der Gleichgewichtspunkt im folgenden Phasenporträt *nicht* stabil ist, obwohl alle Lösungen für $t \rightarrow +\infty$ gegen 0 gehen.



Ein solches Verhalten scheint aber in der Praxis selten aufzutreten. Im asymptotisch stabilen Fall nähern sich die Lösungen in der Regel monoton dem Gleichgewichtspunkt. \square

3.2 Stabilität für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

- In diesem Fall hat man Exponentiallösungen, deren asymptotisches Verhalten wesentlich von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms, genauer von der Eigenwert- und Eigenvektorstruktur der Matrix bestimmt wird.
- Allerdings ist die Berechnung der Eigenwerte bei größeren Systemen keineswegs trivial, und eigentlich will man nur wissen, ob sie alle negativ sind. Verfahren zur Beantwortung dieser Frage (ohne explizite Berechnung der Eigenwerte) liefern die sogenannten *Stabilitätskriterien*.

Wir betrachten die Gleichung

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$$

mit konstanter Matrix A und wir nehmen an dass $A\vec{x}_0 + \vec{b} = \vec{0}$, also \vec{x}_0 ein Gleichgewichtspunkt ist. Dann ist $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Für die allgemeine Lösung kommen noch Linearkombinationen von Funktionen der Form $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ hinzu, wobei die λ die Eigenwerte von A und die Koeffizienten Konstanten oder im schlimmsten Fall (wenn man nämlich Hauptvektorlösungen braucht) Polynome in t sind. Weil aber für alle $k \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k e^{\lambda t} = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re} \lambda < 0, \\ +\infty & \text{für } \operatorname{Re} \lambda > 0, \end{cases}$$

weiß man ziemlich gut, wie sich die Lösungen verhalten:

Satz 89 (Stabilitätssatz: Linearer Fall). *Das Gleichgewicht \vec{x}_0 von*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$$

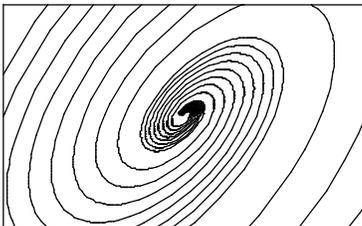
ist

- (i) *instabil, falls mindestens ein Eigenwert von A positiven Realteil hat,*
- (ii) *asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.*
- (iii) *Haben alle Eigenwerte Realteil ≤ 0 , so hat man Stabilität genau dann, wenn für alle Eigenwerte mit Realteil = 0 die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist.*

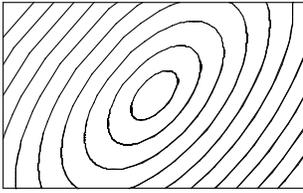
Beispiel 90. Wir betrachten im \mathbb{R}^2 das System

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

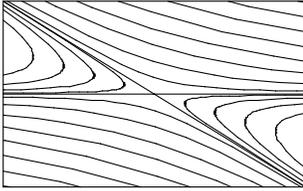
mit einer konstanten (2×2) -Matrix A . Typische Phasenporträts:



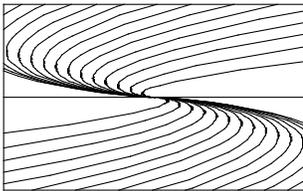
Die Realteile der Eigenwerte haben gleiches Vorzeichen. Ist es positiv, laufen die Spiralkurven nach außen und das Gleichgewicht ist instabil, ist es negativ, laufen sie nach innen und das Gleichgewicht ist asymptotisch stabil.



Zwei konjugierte und rein imaginäre Eigenwerte. Das Gleichgewicht ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.



Ein positiver, ein negativer Eigenwert. Das Gleichgewicht ist instabil.



Ein doppelter reeller Eigenwert $\neq 0$ mit geometrischer Vielfachheit 1. Abhängig vom Vorzeichen ist das Gleichgewicht instabil oder asymptotisch stabil.

□

Beispiel 91. Wir betrachten das System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R}{L_1} & -\frac{L_2}{L_1} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{L_2 C} & -\frac{1}{L_2 C} & -\frac{R}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

der gekoppelten Schwingkreise aus Beispiel 108. Die charakteristische Gleichung ist

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{R}{L_1} & -\frac{L_2}{L_1} \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{L_2 C} & -\frac{1}{L_2 C} & -\frac{R}{L_2} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^2 \left(\frac{R}{L_2} + \lambda \right) - \frac{R}{L_1 L_2 C} - \frac{1}{L_1 C} \lambda - \frac{1}{L_2 C} \lambda \\ &= - \left(\lambda^3 + \underbrace{\frac{R}{L_2}}_{=:b} \lambda^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{L_2 C} \right)}_{=:c} \lambda + \underbrace{\frac{R}{L_1 L_2 C}}_{=:d} \right) \\ &= -(\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Eigenwerte müsste man also eine kubische Gleichung lösen. Das ist möglich, aber lästig, und zum Glück können wir zurückgreifen auf Beispiel 72 zum Nyquist-Kriterium. Weil (mit $a = 1$) offenbar

$$bc - ad = \frac{R}{L_2} \left(\frac{1}{L_1 C} - \frac{1}{L_2 C} \right) - \frac{R}{L_1 L_2 C} = \frac{R}{L_2^2 C} > 0,$$

haben alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung negativen Realteil.

Beispiel 92. Nach Satz 89 Teil (iii) kann man bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten die Frage der Stabilität nicht immer anhand des charakteristischen Polynoms allein

entscheiden, auch die geometrische Vielfachheit von rein imaginären Eigenwerten ist von Bedeutung. Die beiden Systeme

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \dot{\vec{x}} = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

haben dieselbe charakteristische Gleichung $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ mit den doppelten Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$. Die Matrix A besitzt dazu vier linear unabhängige Eigenvektoren und das Gleichgewicht ist deshalb stabil. Die Eigenwerte der Matrix B hingegen haben beide nur geometrische Vielfachheit = 1 und das Gleichgewicht ist deshalb instabil. \square

Das Beispiel 91 zeigt, dass die Berechnung der Eigenwerte bei höheren Dimensionen nicht einfach ist. Auch numerisch ergeben sich bei großen Systemen erhebliche Probleme. Andererseits muss man für die Anwendung des Satzes die Eigenwerte nicht kennen, sondern nur entscheiden, ob sie alle negativen Realteil haben. Dazu gibt es sogenannte *Stabilitätskriterien*. Das Nyquist-Kriterium ist eines von ihnen.

Zwei weitere in der Regelungstechnik häufig verwendete Stabilitätskriterien geben wir hier als Rezept an und behandeln den mathematischen Hintergrund im Anhang 4.3.

Das Routh-Kriterium. Wir wollen $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ mit reellen Koeffizienten und

$$a_n > 0.$$

auf Stabilität untersuchen. Dazu betrachten wir die zweireihige Matrix

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{bmatrix}.$$

Nach rechts gehen die Zeilen so weit, bis man alle Koeffizienten untergebracht hat, die kürzere Zeile ergänzt man durch Nullen. Ähnlich wie beim Gauß-Verfahren ziehen wir nun von der ersten Zeile ein geeignetes Vielfaches der zweiten ab, so dass eine Zeile mit einer 0 in der ersten Spalte entsteht. Die Null lassen wir weg und schreiben den Rest in die 3. Zeile der Matrix, wobei wir rechts wieder mit Nullen ergänzen. Genauer definieren wir

$$a_{n-2k}^2 := a_{n-2k} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-2k-1}, \quad a_m^2 = 0 \text{ für } m < 0,$$

wobei der obere Index ein Index für die 2. Zeile und kein Exponent sein soll, setzen aus Schönheitsgründen

$$a_{n-2k} =: a_{n-2k}^0, \quad a_{n-2k-1} =: a_{n-2k-1}^1,$$

und betrachten

$$\begin{bmatrix} a_n^0 & a_{n-2}^0 & a_{n-4}^0 & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-3}^1 & a_{n-5}^1 & \dots \\ a_{n-2}^2 & a_{n-4}^2 & a_{n-6}^2 & \dots \end{bmatrix}.$$

Natürlich müssen wir dabei voraussetzen, dass $a_{n-1} = a_{n-1}^1 \neq 0$.

Ist $a_{n-2}^2 \neq 0$, so können wir auf dieselbe Weise aus den beiden letzten Zeilen dieser Matrix eine weitere Zeile konstruieren:

$$\begin{bmatrix} a_n^0 & a_{n-2}^0 & a_{n-4}^0 & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-3}^1 & a_{n-5}^1 & \dots \\ a_{n-2}^2 & a_{n-4}^2 & a_{n-6}^2 & \dots \\ a_{n-3}^3 & a_{n-5}^3 & a_{n-7}^3 & \dots \end{bmatrix}$$

und so fort, vgl. (122) im Anhang 4.3. Ist ein Term $a_{n-k}^k = 0$, so bricht das Verfahren ab.

Nun gilt: $p(z)$ ist genau dann stabil, wenn

- man das Verfahren fortsetzen kann bis zur Zeile $a_0^n 0 \dots 0$ und
- alle Terme a_{n-j}^j für $j \in \{0, \dots, n\}$ in der ersten Spalte *positiv* sind.

Der Beweis dafür, d.h. die Erklärung, warum das so ist, ist nicht einfach und wir verbannen ihn in den Anhang 4.3.

Vorsicht mit der Terminologie: Ein *Polynom* heißt stabil, wenn alle sein Wurzeln negativen Realteil haben. Das Gleichgewicht eines *linearen dynamischen Systems* mit einem solchen stabilen Polynom ist aber sogar asymptotisch stabil!

Beispiel 93. Sei wie im Beispiel 72

$$p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

ein Polynom mit positiven Koeffizienten a, b, c, d . Das Routhsche Koeffizientenschema ist im Fall $bc - ad \neq 0$ regulär und sieht so aus:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \\ \frac{bc-ad}{b} & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$$

In der 1. Spalte liegt genau dann kein Vorzeichenwechsel vor, wenn $bc - ad > 0$. Genau dann ist $p(z)$ also stabil.

Versuchen Sie die Stabilität festzustellen, indem Sie mit einem Computeralgebra-System die Nullstellen von $p(z)$ berechnen. □

Das Routh-Hurwitz-Kriterium. Gegeben sei wieder ein Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizienten und $a_n > 0$. Notwendig und hinreichend für die Stabilität ist dann, dass

- (i) alle Koeffizienten a_k positiv sind und
- (ii) die folgenden n Determinanten sämtlich positiv sind:

$$D_m := \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & a_{n-m-1} & a_{n-m} \end{bmatrix} \quad (1 \leq m \leq n).$$

Die Matrizen kann man sich so merken:

Auf der Diagonalen stehen a_{n-1}, \dots, a_{n-m} , und in den Zeilen stehen die a_k 's mit monoton wachsenden Indizes, wobei $a_k = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.

Bemerkung: Weil $D_1 = a_{n-1}$ und $D_n = a_0 D_{n-1}$, muss man in (ii) nur prüfen, dass

$$D_2 > 0, \dots, D_{n-1} > 0.$$

Dieses Kriterium läßt sich mittels Matrix-Umformungen auf das Routh-Kriterium zurückführen, vergleichen Sie wieder den Anhang 4.3.

Beispiel 94. Wie in den Beispielen 72, 93 sei

$$p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

ein Polynom mit positiven Koeffizienten a, b, c, d . Die volle Hurwitzsche Matrix sieht dann so aus:

$$\begin{bmatrix} b & a & 0 \\ d & c & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$p(z)$ ist genau dann stabil, wenn

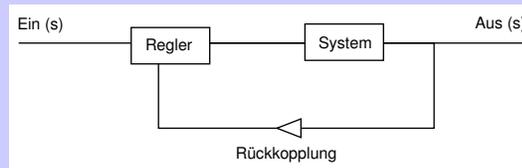
$$D_2 = bc - ad > 0.$$

□

Bemerkungen zur Regelungstechnik.

Vergleichen Sie [Regelungstechnik I, Abschnitt 4].

1. In der Regelungstechnik studiert man Stabilität meistens anhand der Pole der Übertragungsfunktion, d.h. der Nullstellen ihres Nenners. Wenn die Übertragungsfunktion wie üblich aus einer skalaren linearen Differentialgleichung durch Laplacetransformation entsteht, ist ihr Nenner einfach das charakteristische Polynom der Differentialgleichung, und wir sind genau in der hier betrachteten Situation.
2. Häufig interessiert nicht die Stabilität eines konstanten, sondern eines parameter-abhängigen Systems. Die Übertragungsfunktion des abgebildeten offenen Regelkreises (ohne die Rückkopplung) sei $kG_0(s)$ mit einer Konstanten $k > 0$.



Im geschlossenen Regelkreis mit Rückkopplung bewirkt der Regler die Verminderung des Eingangssignals um das Ausgangssignal:

$$kG_0(s)(Ein(s) - Aus(s)) = Aus(s),$$

also

$$Aus(s) = \frac{kG_0(s)}{1 + kG_0(s)} Ein(s).$$

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises ist also

$$G(s) = \frac{kG_0(s)}{1 + kG_0(s)}.$$

Ist $G_0(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ mit zwei reellen Polynomen $Z(s)$ und $N(s)$, für die $\text{Grad } Z(s) < \text{Grad } N(s)$, so ist

$$G(s) = \frac{kZ(s)}{N(s) + kZ(s)}.$$

Eine typische Frage der Regelungstechnik ist dann, für welche Werte $k > 0$ alle Nullstellen des Nenners negativen Realteil haben. Die Nullstellen (=Wurzeln) von $kZ(s) + N(s)$ sind von k abhängige Kurven in der komplexen Ebene, die sogenannten *Wurzelortskurven*. Man setzt voraus, dass man die Nullstellen von $Z(\lambda)$ und $N(\lambda)$, also die Nullstellen und Polstellen der Übertragungsfunktion $kG_0(s)$ des offenen Regelkreises, bereits kennt. Dann gibt es graphische Verfahren, um aus diesen a priori-Informationen die Wurzelortskurven von $kZ(\lambda) + N(\lambda)$ in der komplexen Ebene darzustellen und daraus die Stabilität direkt abzulesen. Vergleichen Sie das oben zitierte Skript.

3.3 Stabilität bei variablen Koeffizienten und im nichtlinearen Fall

- Der einfachste Ansatz in diesem Fall ist die lineare Approximation mit der Funktionalmatrix des Systems im Gleichgewichtspunkt, der aber (ähnlich wie die Kriterien für lokale Extremwerte) nur Aussagen liefert, wenn diese keine verschwindenden Eigenwerte besitzt.
- Ein ganz anderes Verfahren, die sogenannte *direkte Methode von Lyapunov*, benutzt den Vergleich der Richtungsvektoren der Lösungskurven mit dem Gradienten einer Funktion, die im untersuchten Gleichgewichtspunkt ein striktes Minimum besitzt. Der Erfolg dieses Verfahrens hängt ab von der geschickten Wahl einer solchen *Lyapunov-Funktion*.
- Eine spezielle Situation tritt ein, wenn die Lyapunov-Funktion auf den Lösungen konstant ist. Solche Funktionen nennt man in der Mechanik *Integrale der Bewegung*, und sie sind eine große Hilfe bei der Lösung des Systems. Wir demonstrieren das an vier Beispielen (aus der Mechanik, der Populationsdynamik, der Aerodynamik und der klassischen Himmelsmechanik).

3.3.1 Linearisierung

Das Standardverfahren zur Behandlung nichtlinearer Probleme, oft, aber natürlich keineswegs immer, erfolgreich, ist die Linearisierung. Ist \vec{x}_0 ein Gleichgewichtspunkt von

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}),$$

also $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$, so gilt

$$\vec{F}(\vec{x}) \approx \vec{F}(\vec{x}_0) + \vec{F}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{F}'(\vec{x}_0)\vec{x} - \vec{F}'(\vec{x}_0)\vec{x}_0 =: A\vec{x} + \vec{b}.$$

Wir erwarten also, dass die Ableitungsmatrix $A = \vec{F}'(\vec{x}_0)$ Aufschluss über das Verhalten der Lösungen in der Nähe von \vec{x}_0 liefert. Das ist mit gewissen Einschränkungen tatsächlich der Fall:

Satz 95 (Stabilitätssatz: Nichtlinearer Fall). *Ist $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und haben die Eigenwerte der $(n \times n)$ -Matrix*

$$F'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)$$

sämtlich negativen Realteil, so ist \vec{x}_0 ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht. Hat wenigstens ein Eigenwert einen positiven Realteil, so ist \vec{x}_0 ein instabiles Gleichgewicht.

Beispiel 96 (Räuber-Beute-Modell). Wir betrachten ein häufig benutztes dynamisches System der Populationsdynamik, das sogenannte Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra. In einem System mit Beute- und Räuberindividuen nimmt man an, dass die Zahl x der Beutetiere exponentiell wächst, wenn keine Räuber vorhanden sind: $\dot{x} = ax$. Beim Vorhandensein von y Räubern ist die Zahl der Räuber-Beute-Begegnungen proportional zu xy , und deshalb korrigiert sich die vorstehende Gleichung zu $\dot{x} = ax - bxy$. Ebenso nehmen die Räuber in Abwesenheit von Beute exponentiell ab und man findet $\dot{y} = cxy - dy$.

Sind schließlich die Ressourcen für die Beutetiere nicht unbegrenzt, so kommt ein Korrekturterm für die „soziale Reibung“ hinzu, und Analoges gilt für die Räuber. Schließlich ergibt sich das sogenannte *Volterra-Lotka-Modell*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy - \lambda x^2 \\ \dot{y} &= cxy - dy - \mu y^2\end{aligned}$$

mit nicht-negativen Konstanten a, b, c, d, λ, μ . (Für negatives c und d moduliert dieses System die Populationsdynamik zweier konkurrierender Spezies.) Das System hat (für $ac < d\lambda$) im Bereich $x > 0, y > 0$ genau einen Gleichgewichtspunkt bei

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{bd + a\mu}{bc + \lambda\mu}, \frac{ac - d\lambda}{bc + \lambda\mu} \right).$$

Zur Anwendung des Satzes berechnen wir

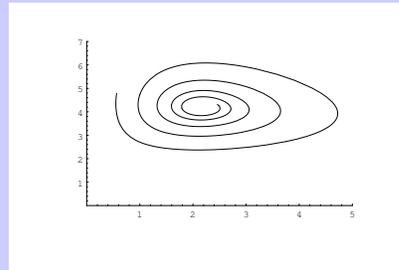
$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\lambda x_0 & -bx_0 \\ cy_0 & -\mu y_0 \end{pmatrix}$$

und daraus die folgende Gleichung für die Eigenwerte ξ :

$$\xi^2 + (\mu y_0 + \lambda x_0)\xi + x_0 y_0 (\lambda\mu + bc) = 0.$$

Sind $\lambda, \mu > 0$, so sind alle Koeffizienten dieser quadratischen Gleichung positiv. Aber dann haben (Beweis?) alle Lösungen negativen Realteil. Also ist (x_0, y_0) ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

Den Fall $\lambda = \mu = 0$ betrachten wir später, vgl. Beispiel 103.



Beispiel 97 (Nichtlinearer LRC-Kreis). Die Gleichung für den linearen Schwingkreis war

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass der Widerstand vom Strom $I = \dot{q}$ abhängt. Dann sieht die Gleichung so aus:

$$L\ddot{q} + R(\dot{q})\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Das zugehörige dynamische System ist

$$\begin{aligned}\dot{q} &= I, \\ \dot{I} &= -\frac{1}{LC}q - \frac{R(I)I}{L}\end{aligned}$$

Gleichgewicht hat man genau für $(q, I) = (0, 0)$ und

$$\vec{F}'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R(0)}{L} \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung

$$\xi^2 + \frac{R(0)}{L}\xi + \frac{1}{LC} = 0$$

hat bei $R(0) > 0$ lauter positive Koeffizienten und wie im letzten Beispiel ist das Gleichgewicht deshalb asymptotisch stabil. Bei verschwindendem R_0 , d.h. bei fehlender Dämpfung, sind die Eigenwerte rein imaginär, und die Frage der Stabilität für das nichtlineare System bedarf einer gesonderten Untersuchung.

Beispiel 98 (Pendelgleichung). Die Bewegungsgleichung für das Pendel ist gegeben durch

$$mL\ddot{\phi} = -mg \sin \phi. \quad (67)$$

Das schreiben wir als autonomes System in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= L^{-1}\omega \\ \dot{\omega} &= -g \sin \phi. \end{aligned}$$

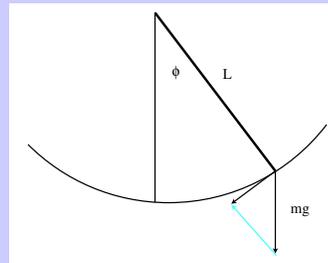
Gleichgewichtspunkte im (ϕ, ω) -Phasenraum sind die Punkte der Form

$$(n\pi, 0), \quad n \text{ ganzzahlig.}$$

Die Ableitungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & L^{-1} \\ -g \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \frac{g}{L} \cos \phi = 0$. Für $\phi = n\pi$ mit ungeradem n hat man also zwei reelle Eigenwerte $\pm\sqrt{\frac{g}{L}}$, von denen einer positiv ist: Das Gleichgewicht ist instabil, wie auch aus physikalischen Gründen offensichtlich ist. Für gerades n , d.h. für das Pendel in unterster Position liegt aus physikalischen Gründen ein stabiles Gleichgewicht vor, aber die Eigenwerte sind $\pm i\sqrt{\frac{g}{L}}$, haben also Realteil = 0, und der vorstehende Satz macht keine Aussage.



3.3.2 Stabilitätskriterium von Lyapunov

Wir geben nun noch ein Stabilitätskriterium ganz anderer Art. Wir betrachten wieder die Gleichung

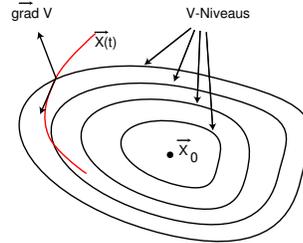
$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}(t)), \quad \vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0} \quad (68)$$

um einen Gleichgewichtspunkt \vec{x}_0 .

Eine *Lyapunovfunktion* für dieses Problem ist eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung U von \vec{x}_0 mit folgenden Eigenschaften:

- (i) V hat in \vec{x}_0 ein strenges lokales Minimum und
- (ii) $\langle \text{grad}_{\vec{x}} V, \vec{F}(\vec{x}) \rangle \leq 0$ für alle $\vec{x} \in U$.

Niveauflächen (oder -kurven) von V umschließen also die Gleichgewichtslage und aus der Differentialgleichung und der Bedingung (ii) folgt mit der Kettenregel für jede Phasenkurve



$$\frac{d}{dt}(V(\vec{x}(t))) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \langle \text{grad}_{\vec{x}(t)} V, \dot{\vec{x}}(t) \rangle = \langle \text{grad}_{\vec{x}(t)} V, \vec{F}(\vec{x}(t)) \rangle \leq 0. \quad (69)$$

Die Lösungskurven laufen also in Richtung abnehmender Werte von V . Man kann nun zeigen:

Satz 99 (Stabilitätskriterium von Lyapunov). *Gibt es für das Problem (68) eine Lyapunovfunktion V , so ist \vec{x}_0 ein stabiles Gleichgewicht. Ist sogar*

$$\langle \text{grad}_{\vec{x}} V, \vec{F}(\vec{x}) \rangle < 0 \text{ für alle } \vec{x} \in U \setminus \{\vec{x}_0\},$$

so ist \vec{x}_0 ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

Bemerkungen.

1. Im allgemeinen gibt es kein Verfahren, um Lyapunovfunktionen zu konstruieren. Man ist dabei auf Glück und Erfahrung angewiesen.
2. Wenn für alle \vec{x}

$$\langle \text{grad}_{\vec{x}} V, \vec{F}(\vec{x}) \rangle = 0,$$

so bedeutet das Gleichheit in (69), also

$$V(\vec{x}(t)) = \text{const.}$$

Dann ist V eine Konstante der Bewegung, es gilt für V ein Erhaltungssatz, und die Phasenkurven liegen in einem Niveau von V . Im zweidimensionalen Fall liefert ein Plot der V -Niveaus also im wesentlichen das Phasenporträt!

Das gilt auch ohne die Voraussetzungen (i) einer Lyapunovfunktion.

3. Umgekehrt: Kennt man (zum Beispiel aus physikalischen Erwägungen) ein Integral der Bewegung, so hat man eine Funktion V , die die komplizierte Bedingung (ii) einer Lyapunovfunktion erfüllt. Gelegentlich hilft das, eine wirkliche Lyapunovfunktion zu finden.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel zu den beiden letzten Bemerkungen:

Beispiel 100. Wir betrachten das System für einen Massenpunkt der Newtonschen Mechanik in einer Raumdimension

$$\begin{aligned}\dot{x} &= m^{-1}p, \\ \dot{p} &= F(x).\end{aligned}\tag{70}$$

Wir nehmen an, dass $U(x)$ eine Stammfunktion von $-F(x)$ ist, und wir definieren

$$E(x, p) = U(x) + \frac{1}{2m}p^2.$$

Ist dann $(x(t), p(t))$ eine Lösungskurve von (70), so findet man:

$$\frac{d}{dt}E(x(t), p(t)) = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial p}\dot{p}(t) = -F(x)\dot{x}(t) + \frac{1}{m}p\dot{p} = -F(x)\dot{x}(t) + \dot{x}F(x) = 0.$$

Also ist E auf den Phasenbahnen konstant. In diesem Beispiel ist U gerade das Potential des Kraftfeldes und E die Summe aus potentieller und kinetischer Energie: Wir haben den Energieerhaltungssatz bewiesen.

Beispiel 101 (Pendelgleichung). Für die Pendelgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= L^{-1}\omega \\ \dot{\omega} &= -g \sin \phi.\end{aligned}$$

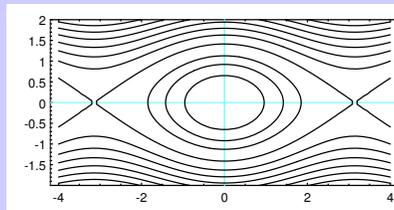
ist $E(\phi, \omega) = -g \cos \phi + \frac{1}{2L}\omega^2$ ein Integral, wieder die Energie des Pendels. In der Nähe von $(0, 0)$ ist

$$E(\phi, \omega) \approx -g + \frac{g}{2}\phi^2 + \frac{1}{2L}\omega^2,$$

die Kurven $E = \text{const}$ für kleine Konstante sind also ellipsenartige Kurven um $(0, 0)$. Deshalb ist $(0, 0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt: Bei kleiner Auslenkung bleibt das Pendel in der Nähe von $(0, 0)$. Das war physikalisch klar, folgte aber nicht aus unseren bisherigen Einsichten.

Weil die Phasenkurven in den Niveaulinien von E liegen, bekommt man außerdem aus den letzteren ein komplettes Phasenporträt.

Beachten Sie: Dieses Bild gibt zwar die Lösungskurven als Punktemengen im (ϕ, ω) -Phasenraum wieder, nicht aber den Zeitparameter auf den einzelnen Kurven. Deshalb ist mit diesem Bild die Differentialgleichung keineswegs vollständig gelöst.



Damit das Bild überzeugt, muss das Niveau durch die instabilen Gleichgewichtspunkte sichtbar sein. Bei dem ContourPlot-Befehl von Mathematica sucht sich das Programm aber die Niveaus für den Plot selbst aus, und das fragliche ist in der Regel nicht dabei. Deshalb wurden 3 Bilder überlagert:

```

niveau[u_, v_, z_] = Contourplot[-Cos[x] + y^2,
    {x, -4, 4}, {y, -2, 2},
    AspectRatio -> Automatic,
    Contours -> z,
    ContourShading -> False,
    Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0},
    PlotPoints -> 50, PlotRange -> {u, v}]
Show[niveau[1, 1, 1], niveau[-1, .8, 3], niveau[1.01, 6, 5], PlotRange -> {-2, 2}]

```

Beispiel 102. Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 \\ -x^3 - y \end{pmatrix} = \vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(0, 0)$ ist ein Gleichgewichtspunkt, und

$$F' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ -3x^2 & -1 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat einen Eigenwert 0. Deshalb liefert der Stabilitätssatz keine Aussage. Aber

$$V(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$$

ist eine Lyapunovfunktion für das System mit

$$\langle \text{grad } V, \vec{F} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ -x^3 - y \end{pmatrix} \right\rangle = x^3 y^3 - y^3 x^3 - y^4 \leq 0.$$

Daher ist $(0, 0)$ ein stabiles Gleichgewicht. □

Beispiel 103. Das Volterra-Lotka-Modell mit unbegrenzten Ressourcen ($\lambda = \mu = 0$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= cxy - dy\end{aligned}\tag{71}$$

hat einen Gleichgewichtspunkt bei $(x_0, y_0) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. Die Ableitung an dieser Stelle hat rein imaginäre Eigenwerte und gibt deshalb keine Auskunft über die Stabilität. Die Funktion

$$V(x, y) = a \ln y - by + d \ln x - cx$$

ist ein Integral der Bewegung:

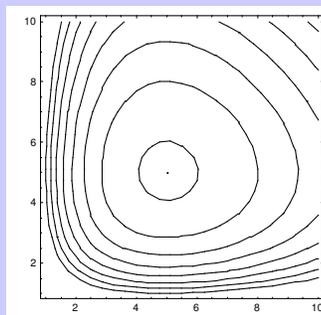
$$\langle \text{grad } V, \vec{F} \rangle = \left\langle \left(\frac{d}{x} - c, \frac{ax - bxy}{y} \right), \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy - dy \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Weiter ist $\text{grad}_{(x_0, y_0)} V = \vec{0}$, und die Hessematrix der zweiten Ableitungen ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{x_0^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{y_0^2} \end{pmatrix}.$$

Also hat V in (x_0, y_0) nach dem Kriterium über lokale Extremwerte ein strenges lokales Maximum, und $V(x_0, y_0) - V(x, y)$ ist eine Lyapunovfunktion. Das Gleichgewicht ist stabil und man erhält das folgende Phasenporträt:

Es ist dabei nicht so ohne weiteres klar, dass die Lösungskurven des Systems die Niveaulinien von V ganz brav “monoton” durchlaufen, die könnten auch auf einem Stückchen einer solchen Kurve hin und her laufen. Tun sie aber nicht, sondern sie sind geschlossene Kurven, wie das Bild suggeriert.



Die Populationen variieren zyklisch. Das zeitliche Mittel über einen ganzen Umlauf $0 \leq t \leq T$ zum Beispiel für x ist gegeben durch

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \stackrel{(71)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{y}(t) + dy(t)}{cy(t)} dt = \frac{1}{T} \ln y(t) \Big|_0^T + \frac{d}{c} = \frac{d}{c}.$$

Es ist also über jede Bahn dasselbe, nämlich gerade das Gleichgewicht.

Interpretiert man die Beute als Schädlinge, die Räuber als Nützlinge und wendet ein Gift an, das die Ausbreitung der Schädlinge aber im gleichen Maße auch das der Nützlinge reduziert, so entspricht das der Addition von Termen $-\epsilon x$ bzw. $-\epsilon y$ auf der rechten Seite, d.h. a wird zu $a - \epsilon$ und d zu $d + \epsilon$.

Der Mittelwert d/c der Schädlinge *erhöht* sich auf $(d+\epsilon)/c$, statt sich zu reduzieren (*Volterra-Prinzip*).

Beispiel 104. Wir betrachten ein Flugzeug im Gleitflug mit vernachlässigbarem Widerstandsbeiwert ($c_D = 0$). Wir nehmen weiter an, dass die Flugbahn in einer vertikalen Ebene liegt. m sei die Masse des Flugzeugs, θ der Steigwinkel und v die Bahngeschwindigkeit. Weiter sei L der Auftrieb senkrecht zur Bahn.

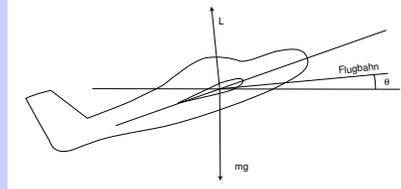
Dann ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \end{pmatrix}$$

die vektorielle Geschwindigkeit und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

die aus Schwerkraft und Auftriebskraft zusammengesetzte Gesamtkraft.



Wir setzen wie üblich $L = c_L v^2$ mit dem Auftriebsbeiwert c_L . Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} m\dot{v} \cos \theta - mv \sin \theta \dot{\theta} &= -c_L v^2 \sin \theta, \\ m\dot{v} \sin \theta + mv \cos \theta \dot{\theta} &= -mg + c_L v^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Auflösen dieses linearen Gleichungssystems liefert die Bewegungsgleichungen für den Gleitflug in der Form

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg \sin \theta, \\ mv\dot{\theta} &= -mg \cos \theta + c_L v^2. \end{aligned}$$

Durch Normierung, genauer durch die Substitutionen $v\sqrt{\frac{c_L}{mg}} \rightarrow v$ und $gt\sqrt{\frac{c_L}{mg}} \rightarrow t$, beseitigen wir daraus die Konstanten und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\cos \theta}{v} + v. \end{aligned} \tag{72}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist

$$(v_0, \theta_0) = (1, 0),$$

der einem horizontalen Flug mit konstanter Geschwindigkeit entspricht. Anwendung des Satzes 95 liefert keine Aussage über Stabilität, weil die Eigenwerte rein imaginär sind.

Wir zeigen nun, dass

$$V(v, \theta) = \frac{2 + v^3}{3} - v \cos \theta$$

eine Lyapunovfunktion ist.

Es ist nämlich $V(1, 0) = 0$, und auch der Gradient

$$\text{grad}_{(v, \theta)} V = \begin{pmatrix} v^2 - \cos \theta \\ v \sin \theta \end{pmatrix}$$

verschwindet an der Stelle $(v, \theta) = (1, 0)$. Weiter ist die Hessematrix der zweiten Ableitungen

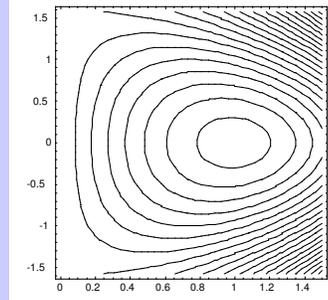
$$\begin{pmatrix} 2v & \sin \theta \\ \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und nach dem Kriterium über lokale Extremwerte hat V in $(1, 0)$ ein strenges lokales Minimum. Damit ist die Bedingung (i) erfüllt.

Weiter gilt die Gradientenbedingung:

$$\langle \text{grad } V, \vec{F} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v^2 - \cos \theta \\ v \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\frac{\cos \theta}{v} + v \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Also folgt die (einfache) Stabilität des Gleichgewichtes $(1, 0)$ aus dem Kriterium von Lyapunov. Genauer liefern wegen der Gleichheit die Niveaulinien von V im (v, θ) -Raum das nebenstehende Phasenporträt. Die Lösungen in der Nähe des Gleichgewichts entsprechend einem annähernd horizontalen "Wellenflug".



Im letzten Beispiel dokumentieren wir eine der ganz großen Leistungen in der Geschichte der Naturwissenschaften. Die Newtonschen Bewegungsgesetze für einen Planeten im Gravitationsfeld der Sonne lassen sich nicht explizit lösen. Aber man kann so viele Integrale der Bewegung finden, so viele Funktionen also, in deren Niveaus die Planetenbahnen verlaufen, dass man schliesslich doch ein wunderbares Bild von ihnen bekommt: Nämlich genau das Bild, das Johannes Kepler aus seinen Beobachtungsdaten erschlossen hat.

Beispiel 105 (Keplersche Gesetze als Konsequenz der Newtonschen Bewegungsgleichung). Die Keplerschen Gesetze für die Bewegung der Planeten in einem Zentralfeld besagen:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Man darf schon darüber staunen, wie Kepler aus den ihm vorliegenden astronomischen Beobachtungsdaten diese Gesetze gefunden hat. Und noch mehr darf man darüber staunen, dass sie sich auf ein ganz einfaches Prinzip reduzieren lassen: Sie sind eine Folge der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma m M \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r = \|\vec{x}\|. \quad (73)$$

Das zugehörige dynamische System im 6-dimensionalen Phasenraum sieht so aus:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= m^{-1} \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\gamma m M \frac{\vec{x}}{r^3}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun aus physikalischer Motivation den *Drehimpuls*

$$\vec{J}(\vec{x}, \vec{p}) := \vec{x} \times \vec{p}.$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt} \vec{J}(\vec{x}, \vec{p}) = \dot{\vec{x}} \times \vec{p} + \vec{x} \times \dot{\vec{p}} = -m^{-1} \vec{p} \times \vec{p} - \vec{x} \times \left(\gamma m M \frac{\vec{x}}{r^3} \right) = \vec{0}.$$

Also ist der Drehimpuls \vec{J} auf jeder Phasenkurve konstant. Wegen $\vec{J} \perp \vec{x}$ liegt die Bahn in einer Ebene senkrecht zu \vec{J} . Und weil

$$\frac{1}{2m} \|\vec{J}\| = \frac{1}{2m} \|\vec{x} \times \vec{p}\| = \frac{1}{2} \|\vec{x} \times \dot{\vec{x}}\|$$

gerade die Fläche des Dreiecks mit Seiten \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$ ist, überstreicht der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Vgl. auch die Flächenformel

$$F = \frac{1}{2} \int (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)) dt$$

aus der Analysis II.

Aus einem vektoriellen Integral der Bewegung, also eigentlich aus drei reellwertigen Erhaltungsgrößen, bekommt man bereits das 2. Keplersche Gesetz und die Tatsache, dass die Bahnen *ebene* Kurven sind. Aber anders als bei 2-dimensionalem Phasenraum ist damit das „Phasenporträt“ noch keineswegs festgelegt.

Zwischenrechnung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{J} \times \vec{p}) &= \underbrace{\dot{\vec{J}}}_{=\vec{0}} \times \vec{p} + \vec{J} \times \dot{\vec{p}} = (\vec{x} \times \vec{p}) \times \dot{\vec{p}} = (\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{p} - (\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{x} \\ &= -\gamma m^2 M \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}}{r^3} \vec{x} \right). \end{aligned}$$

Wenn man Erfahrung im Differenzieren von Vektorfeldern hat, kommt einem der Klammerausdruck bekannt vor:

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{x} = \frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}}{r^3} \vec{x}.$$

Wir definieren deshalb

$$\vec{A}(\vec{x}, \vec{p}) := \frac{\vec{J} \times \vec{p}}{\gamma m^2 M} + \frac{\vec{x}}{r}.$$

Dann ist auch \vec{A} eine Erhaltungsgröße.

Wir nehmen jetzt an, dass \vec{J} in Richtung der z -Achse zeigt. Dann liegen $\vec{J} \times \vec{p}$ und \vec{x} in der xy -Ebene. Also liegt auch \vec{A} in der xy -Ebene, und wir nehmen an, dass das konstante(!) \vec{A} in Richtung der positiven x -Achse zeigt. Wir schreiben $\vec{x} = r(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ in Zylinderkoordinaten. Mit $\|\vec{A}\| =: \epsilon$ ist dann

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \epsilon r \cos \phi.$$

Andrerseits ist

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \frac{(\vec{J} \times \vec{p}) \cdot \vec{x}}{\gamma m^2 M} + r = -\frac{\vec{J} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})}{\gamma m^2 M} + r = -\frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{\gamma m^2 M} + r$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=: \eta}$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$r(1 - \epsilon \cos \phi) = \eta.$$

Das ist die Polarkoordinaten-Gleichung eines Kegelschnitts mit Brennpunkt im Ursprung und für $\epsilon < 1$ eine Ellipse. Um das zu sehen und ihre Achsen zu bestimmen, rechnen wir weiter:

$$r - \epsilon \cos \phi = r - \epsilon x = \eta,$$

also

$$r = \epsilon x + \eta,$$

und nach Quadrieren

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \epsilon^2 x^2 + 2\epsilon\eta x + \eta^2 \\ x^2(1 - \epsilon^2) - 2\epsilon\eta x + y^2 &= \eta^2 \\ x^2 - 2\epsilon \underbrace{\frac{\eta}{1 - \epsilon^2}}_{=:a} x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \eta \frac{\eta}{1 - \epsilon^2} = \eta a = (1 - \epsilon^2)a^2 \\ (x - \epsilon a)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= (1 - \epsilon^2)a^2 + \epsilon^2 a^2 = a^2 \end{aligned}$$

Nach Division mit a^2 folgt schließlich – falls $\epsilon < 1$ – die Gleichung für eine in Richtung der x -Achse verschobene Ellipse mit den Halbachsen a und $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$:

$$\frac{(x - \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1.$$

Damit ist das 1. Keplersche Gesetz bewiesen.

Ist T die Umlaufzeit, so ist die Fläche der Ellipse $F = T \frac{\|\vec{J}\|}{2m}$. Andererseits gilt für Ellipsen, dass $F = \pi ab$. Daher erhalten wir

$$\frac{T^2}{4m^2} \|\vec{J}\|^2 = \pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = \pi^2 a^3 p \epsilon = \pi^2 a^3 \frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma m^2 M}.$$

Also

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3.$$

Das ist das 3. Keplersche Gesetz.

4 Anhang

4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme (Wiederholung)

Dieser Abschnitt soll aus den Modulen *Lineare Algebra für Ingenieure* und *ITPDG* bekannt sein. Er steht hier zur Erinnerung.

Wir untersuchen gekoppelte Systeme aus mehreren linearen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ &\quad \dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned} \quad (74)$$

mit stetigen Funktionen a_{ij} und b_i auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Mit Matrizen schreibt sich das kurz als

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}. \quad (75)$$

Warnung. Genauso wie bei gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen hat man auch bei *Differentialgleichungssystemen* ein kleines Problem mit der Bezeichnung: *Eine* Lösung von (74) ist eine vektorwertige Funktion

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

mit den Komponentenfunktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Wenn man dagegen verschiedene Lösungen von (74) oder (75) betrachtet, bezeichnet man die gern als $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots$. Jetzt numeriert der Index also verschiedene Lösungen und nicht verschiedene Komponenten ein und derselben Lösung. Die Komponenten von \vec{y}_1 bezeichnen wir, wenn es nötig ist, mit $y_{11}(x), \dots, y_{n1}(x)$. Der *zweite* Index soll dann die Lösungen, der *erste* die Komponenten numerieren.

Beispiel 106. Die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = F$ ergibt mit der Definition der Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ das lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F, \end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 107.

Regelung in der Luft- und Raumfahrt, Abschnitt 4

Diese Umformulierung einer skalaren Gleichung 2. Ordnung in eine System 1. Ordnung ist hier motiviert durch den Umstand, dass die Geschwindigkeit eine etablierte physikalische Größe ist. Aber man kann allgemein eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b$$

durch Einführung der Hilfsvariablen $y_1 := y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ in ein System 1. Ordnung umschreiben, das dann die Form

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

besitzt.

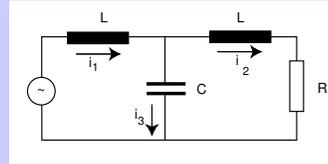
Beispiel 108. Wir betrachten folgendes Netzwerk gekoppelter Schwingkreise:

Für den äußeren Kreis gilt

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = u$$

und für den rechten Kreis

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 - \frac{q}{C} = 0.$$



Nach Differenzieren wird daraus mit $\frac{dq}{dt} = i = i_1 - i_2$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R \frac{di_2}{dt} - \frac{i_1 - i_2}{C} = 0.$$

Wir setzen nun $y_1 := i_1, y_2 := i_2, y_3 := \frac{di_2}{dt} = \dot{y}_2$. Damit werden unsere Gleichungen zu

$$\begin{aligned} L_1 \dot{y}_1 + L_2 y_3 + R y_2 &= u \\ L_2 \dot{y}_3 + R y_3 - \frac{1}{C} (y_1 - y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Wir lösen das nach den Ableitungen auf und verwenden noch einmal die Definition von y_3 :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{R}{L_1} y_2 - \frac{L_2}{L_1} y_3 + \frac{u}{L_1} \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{L_2 C} y_1 - \frac{1}{L_2 C} y_2 - \frac{R}{L_2} y_3 \end{aligned} \tag{76}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R}{L_1} & -\frac{L_2}{L_1} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{L_2 C} & -\frac{1}{L_2 C} & -\frac{R}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Fundamental für lineare Differentialgleichungen ist der folgende

Satz 109 (Existenz und Eindeigkeitsatz). Haben $A(x)$ und $\vec{b}(x)$ auf dem Intervall I stetige Koeffizienten $a_{ij}(x)$ und $b_i(x)$ und ist $x_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b} \tag{78}$$

$$\vec{y}(x_0) = \vec{\eta}_0 \tag{79}$$

für jedes $\vec{\eta}_0 = (\eta_{01}, \dots, \eta_{0n})$ genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Struktur des Lösungsraumes

Die Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme hat viel formale Ähnlichkeit mit der Theorie gewöhnlicher linearer Gleichungssysteme und auch mit der Theorie skalarer Differentialgleichungen höherer Ordnung, weil eben

$$L : \vec{y}(x) \mapsto A(x)\vec{y}$$

eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen ist.

Satz 110 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). *Der Lösungsraum der homogenen Gleichung*

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}. \quad (80)$$

ist ein Vektorraum der Dimension n . Das heißt:

- *Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Man sagt auch, es gilt das Superpositionsprinzip.*
- *Es gibt n linear unabhängige Lösungen.*
- *Sind die Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ linear unabhängig, so ist jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen:*

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1 + \dots + c_n\vec{y}_n \quad (81)$$

Man nennt $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ eine Lösungsbasis oder ein Fundamentalsystem von Lösungen und (81) „die allgemeine Lösung von (80)“.

Lineare Unabhängigkeit: Wronskitest. Wir betrachten Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ von (80) und wollen wissen, ob sie linear unabhängig sind. Sind zunächst die Vektoren

$$\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)$$

an einer Stelle x_0 linear unabhängig, so sind $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ als Funktionen linear unabhängig:

Aus

$$\lambda_1\vec{y}_1(x) + \dots + \lambda_n\vec{y}_n(x) = \vec{0}$$

für *alle* x folgt nämlich insbesondere

$$\lambda_1\vec{y}_1(x_0) + \dots + \lambda_n\vec{y}_n(x_0) = \vec{0}.$$

Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem folgt für Lösungen von (80) auch die Umkehrung. Daher sind die Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionswerte $\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)$ an einer Stelle (und dann an jeder Stelle) linear unabhängig sind.

Sind $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ Lösungen von (80), so bezeichnet man die Matrix mit diesen vektorwertigen Funktionen als Spalten als *Wronskimatrix*:

$$W_x(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) = (\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x))$$

(Wenn man eine skalare Gleichung n -ter Ordnung wie oben in eine System umschreibt, so sind die Wronskimatrizen dieselben.)

Weil die Spalten einer $(n \times n)$ -Matrix genau dann linear unabhängig sind, wenn die Matrix Rang = n hat, d.h. wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist, sind also die Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ von

(80) genau dann linear unabhängig, wenn die Wronskideterminante an einer Stelle von null verschieden ist.

Satz 111 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). Sei $y_s(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \quad (82)$$

Man nennt das auch eine spezielle oder partikuläre Lösung von (82). Dann findet man alle Lösungen von (82), indem man zu \vec{y}_S alle Lösungen \vec{y}_H von (80) addiert. Man sagt,

$$\vec{y} = \vec{y}_S + \vec{y}_H$$

ist die allgemeine Lösung von (82), wenn \vec{y}_H die allgemeine Lösung von (80) ist.

Ist $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung, so ist also die Menge der Lösungen der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\vec{y} = \vec{y}_S + c_1\vec{y}_1 + \dots + c_n\vec{y}_n$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_n .

Beispiel 112. Warum sind Linearkombinationen von Lösungen eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems im allgemeinen keine Lösung dieses Systems? Warum gilt das aber für Linearkombinationen mit Koeffizientensumme=1? \square

Satz 113 (Variation der Konstanten). Sei $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (80). Mit der Wronskimatrix der \vec{y}_i bilde man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen c'_i integriere man. Dann erhält man mit

$$\vec{y}_S(x) = c_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c_n(x)\vec{y}_n(x)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (78).

Der Beweis ist für Systeme 1. Ordnung viel einfacher als im skalaren Fall n -ter Ordnung, deshalb machen wir ihn jetzt vor. (Auch den skalaren Fall führt man am besten durch Umschreibung in ein System hierauf zurück.)

Beweis. Wir machen den Ansatz $\vec{y}(x) = \vec{y}_S(x) = c_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c_n(x)\vec{y}_n(x)$ und setzen dies in das Differentialgleichungssystem ein. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \vec{y}'(x) &= c_1(x)\vec{y}'_1(x) + \dots + c_n(x)\vec{y}'_n(x) + c'_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c'_n(x)\vec{y}_n(x) \\ &= c_1(x)A(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c_n(x)A(x)\vec{y}_n(x) + c'_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c'_n(x)\vec{y}_n(x) \\ &= A(x)(c_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c_n(x)\vec{y}_n(x)) + c'_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c'_n(x)\vec{y}_n(x) \\ &= A(x)\vec{y} + c'_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c'_n(x)\vec{y}_n(x) \end{aligned}$$

Also ist $\vec{y}(x)$ genau dann eine Lösung des inhomogenen Systems (78), wenn

$$c'_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + c'_n(x)\vec{y}_n(x) = \vec{b}(x).$$

In Matrixschreibweise ist das aber gerade (83). □

Beispiel 114. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + 3y_2 + 2\cos^2 x \\ y'_2 &= 3y_1 + y_2 + 2\sin^2 x \end{aligned} \tag{84}$$

Das zugehörige homogene System hat folgende Lösungsbasis

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y_S = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$ führt auf

$$\begin{pmatrix} e^{4x} & e^{-2x} \\ e^{4x} & -e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2 x \\ 2\sin^2 x \end{pmatrix}.$$

Lösen liefert

$$c'_1(x) = e^{-4x}, \quad c'_2(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)e^{2x} = \cos 2x e^{2x}$$

und Integration

$$c_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x}, \quad c_2(x) = \frac{1}{4}(\sin 2x + \cos 2x)e^{2x}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{y}_S(x) &= -\frac{1}{4}e^{-4x} \begin{pmatrix} e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(\sin 2x + \cos 2x)e^{2x} \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sin 2x + \cos 2x - 1) \\ -\frac{1}{4}(\sin 2x + \cos 2x + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung von (84). □

Erraten einer Lösung. Wir wollen hier nur folgenden Fall betrachten:

$$\vec{y}' = A\vec{y} - e^{\mu x}\vec{b} \tag{85}$$

mit konstanten A und \vec{b} . Der Parameter μ kann reell oder auch komplex sein, so dass der Fall einer "trigonometrischen" rechten Seite mit erfasst ist, vgl. das nachstehende Beispiel. Wir machen den Ansatz

$$\vec{y}(x) = e^{\mu x}\vec{v} \tag{86}$$

mit einem konstanten Vektor \vec{v} . Einsetzen liefert

$$\mu e^{\mu x}\vec{v} = e^{\mu x}A\vec{v} - e^{\mu x}\vec{b}$$

oder

$$A\vec{v} - \mu\vec{v} = \vec{b}.$$

Das sieht in Komponenten so aus:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \mu)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= b_1 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \mu)v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \mu)v_n &= b_n \end{aligned}$$

Also ist (86) genau dann eine Lösung von (85), wenn \vec{v} dieses lineare Gleichungssystem löst. Beachten Sie aber, dass das Gleichungssystem nicht unbedingt lösbar sein muss; dann führt der obige Ansatz nicht zum Ziel. Das kann passieren, wenn μ ein sogenannter *Eigenwert* der Matrix A ist (vgl. unten), d.h. wenn das System mit Schwingungen in Eigenfrequenz angeregt wird (*Resonanzfall*).

Im folgenden Beispiel betrachten wir eine Gleichung der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} - \cos \omega x \vec{b}$$

mit reellen A und \vec{b} . Stattdessen löst man

$$\vec{y}' = A\vec{y} - e^{i\omega x} \vec{b}$$

mit der vorstehenden Methode und nimmt dann den Realteil von $e^{i\omega x} \vec{b}$.

Beispiel 115. Wir betrachten die Netzwerkgleichung (77) mit $u = u_0 \cos \omega t$. Wir müssen dann also

$$A\vec{v} - i\omega\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{-u_0}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen und erhalten mit

$$\vec{y}(t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \vec{v})$$

eine Lösung von (77). Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -\frac{R}{L_1} & -\frac{L_2}{L_1} \\ 0 & -i\omega & 1 \\ \frac{1}{L_2 C} & -\frac{1}{L_2 C} & -\frac{R}{L_2} - i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-u_0}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert mit dem Gaußschen Algorithmus nach einiger Rechnung

$$vecv = \frac{u_0}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} (p - iq)(1 - L_2 C \omega^2 + iRC\omega) \\ p - iq \\ \omega q + i\omega p \end{pmatrix},$$

wobei

$$p = R - \omega^2 RL_1 C, \quad q = (L_1 + L_2)\omega - L_1 L_2 C \omega^3.$$

Wir wollen die Realteilbildung nur für die 2. Komponente $y_2 = i_2$ durchführen, weil der Spannungsabfall $u_2 = Ri_2$ am Ohmschen Widerstand von besonderem Interesse ist.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{i\omega t} \frac{u_0}{p^2 + q^2} (p - iq) \right) &= \frac{u_0}{p^2 + q^2} (p \cos \omega t + q \sin \omega t) \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{p^2 + q^2}} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \omega t \right) \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

mit

$$\phi = \arctan \frac{q}{p}.$$

Die Spannung $u_2(t) = \frac{u_0 R}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos(\omega t - \phi)$ ist also eine phasenverschobene Wechselspannung der anregenden Frequenz ω mit stark frequenzabhängiger Amplitude: Für kleines ω ist $p \approx R$ und $q \approx 0$, also die Ausgangsamplitude annähernd gleich der Eingangsamplitude. Für großes ω hingegen ist auch $\sqrt{p^2 + q^2}$ groß und die Ausgangsamplitude klein. Das Netzwerk wirkt als Tiefpassfilter.

Die Eigenwertmethode

In diesem Abschnitt behandeln wir eine Methode zur Lösung homogener linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten, die analog zum Exponentialansatz bei skalaren Gleichungen n -ter Ordnung ist. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei die Theorie der Eigenwerte.

Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\&\quad \dots \\y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n\end{aligned}$$

mit Konstanten a_{ij} . Mit Matrizen schreibt sich das kurz als

$$\vec{y}' = A\vec{y}. \quad (87)$$

Bei skalaren Gleichungen, insbesondere bei $y' = ay$, ist der Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ erfolgreich gewesen. Die einfachste Weise, das auf Systeme zu verallgemeinern, ist der Ansatz

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{v} \quad (88)$$

mit einem konstanten Vektor \vec{v} . Wie im letzten Abschnitt erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung, dass dies genau dann eine Lösung liefert, wenn $\lambda e^{\lambda x} \vec{v} = A(e^{\lambda x} \vec{v})$, d.h. wenn nach Division mit $e^{\lambda x} \neq 0$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Diese Gleichung für λ und \vec{v} hat natürlich immer die Lösung $\vec{v} = 0$ und λ beliebig, aber die liefert auch nur die triviale Lösung der homogenen Differentialgleichung. Daran sind wir nicht interessiert. Interessant sind Lösungen mit $\vec{v} \neq 0$.

Definition 116. Man nennt λ einen *Eigenwert* der Matrix A , wenn es ein $\vec{v} \neq 0$ gibt, so dass

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

In diesem Fall nennt man \vec{v} einen zu λ gehörigen *Eigenvektor* von A .

Wir müssen nun also sehen, wie man zu einer gegebenen Matrix die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen kann. Das wissen Sie aber aus dem Modul *Lineare Algebra für Ingenieure*. Wir stellen die Ergebnisse noch einmal zusammen:

Wiederholung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte λ findet man als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (89)$$

Zu jedem Eigenwert λ findet man die Eigenvektoren \vec{v} durch Lösen der Eigenvektorgleichung

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}. \quad (90)$$

Die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms von höherem Grad bleibt natürlich eine schwierige Aufgabe. Auch numerisch gibt es bei großen Matrizen (20×20 und größer) Probleme: So sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms und damit seine Nullstellen sehr sensitiv gegenüber Störungen der Matrixelemente. Deshalb zieht man zur Berechnung der Eigenwerte und -vektoren andere Verfahren vor. Aber das sind eben Probleme der numerischen Mathematik, auf die wir hier nicht eingehen können.

Gleichung (90) ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, das nicht-triviale Lösungen hat und deshalb nicht eindeutig lösbar ist. Die Eigenvektoren zu λ bilden einen Vektorraum, den *Eigenraum* zum Eigenwert λ .

Wieviele EigenWERTE gibt es? Sei A eine (n, n) -Matrix. Dann ist das charakteristische Polynom vom Grad n und hat daher n Nullstellen.

Natürlich können Nullstellen zusammenfallen. Ist λ eine k -fache Nullstelle, so nennt man λ einen Eigenwert der *algebraischen Vielfachheit* k .

Es kann auch vorkommen, dass das charakteristische Polynom *komplexe* Nullstellen hat. Dann ist $A - \lambda E$ eine komplexe Matrix und die Eigenvektorgleichung ein komplexes lineares Gleichungssystem. Die Lösungsmethoden dafür sind dieselben wie im Reellen (Gaußalgorithmus). Die zugehörigen Eigenvektoren liegen dann im \mathbb{C}^n , d.h es sind Vektoren mit komplexen Komponenten.

Beispiel 117. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

hat die charakteristische Gleichung $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Die Eigenvektorgleichung für $\lambda_1 = 1 + i$ ist

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die zweite Gleichung das i -fache der ersten und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + i$. Für den Eigenwert $\lambda_2 = 1 - i$ findet man einen Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Konjugierte Eigenwerte und -vektoren. Im vorstehenden Beispiel unterscheiden sich die beiden Eigenwerte nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils, sie sind *konjugiert* zu einander. Das ist bei *reellen* Matrizen immer so: Ist $\lambda = \alpha + i\omega$ ein Eigenwert, so auch

die dazu konjugiert-komplexe Zahl $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$. Das liegt daran, dass das charakteristische Polynom $a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ reelle Koeffizienten a_i hat. Daher ist

$$a_0 + a_1\bar{\lambda} + \dots + a_n\bar{\lambda}^n = \overline{a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n} = 0.$$

Zum konjugierten Eigenwert gehören die (komponentenweise) konjugierten Eigenvektoren.

Wieviele EigenVEKTOREN gibt es? Natürlich unendlich viele, weil Vielfache von Eigenvektoren wieder Eigenvektoren sind. Und zu jedem Eigenwert gibt es wenigstens einen Eigenvektor. Wir fragen deshalb präziser:

Wieviele linear unabhängige Eigenvektoren gibt es? Zunächst gilt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ einer n -reihigen Matrix A hat n komplexe Nullstellen, wenn man sie mit Vielfachheiten zählt.

1. Fall Wenn alle n Eigenwerte verschieden sind, findet man dazu n (eventuell auch komplexe) linear unabhängige Eigenvektoren. Mehr kann man im n -dimensionalen reellen oder komplexen Raum auch gar nicht haben. Sie bilden dann eine Basis und jeder Vektor ist Linearkombination dieser Eigenvektoren.

2. Fall Wenn das charakteristische Polynom eine k -fache Nullstelle λ besitzt, $k > 1$, gibt es zwei Möglichkeiten:

- Die Eigenvektorgleichung hat k linear unabhängige Lösungen zu λ . Dann ist dieser k -fache Eigenwert „so gut“ wie k verschiedene Eigenwerte.
- Die Eigenvektorgleichung zu λ liefert weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren. Man sagt, die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes sei kleiner als seine algebraische Vielfachheit.

Mehr als k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ kann es nicht geben.

Beispiel 118. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den doppelten Eigenwert 2. Aber

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 1, und deshalb gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor zu diesem Eigenwert, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Defizite bei den Eigenvektoren: Hauptvektoren. Sei λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A , aber es gebe weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ .

Jeder λ -Eigenvektor von A erfüllt

$$(A - \lambda E)\vec{v} = 0 \tag{91}$$

und damit erst recht die Gleichung

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0. \tag{92}$$

A priori hat aber (92) *mehr* Lösungen als (91). Sie heißen *Hauptvektoren*. Eigenvektoren sind spezielle Hauptvektoren. Zu einer k -fachen Nullstelle λ gibt es immer k linear unabhängige Hauptvektoren.

Selbstadjungierte Matrizen. Das ist ein bequemer Fall: Ist A eine symmetrische (=selbstadjungierte) (n, n) -Matrix, also $a_{ij} = a_{ji}$, so gibt es im \mathbb{R}^n immer eine Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ aus Eigenvektoren von A , die zueinander orthogonal und von der Länge 1 sind, eine sogenannte Orthonormalbasis. Insbesondere sind alle Eigenwerte reell, es gibt keine echt komplexen, und ist λ ein k -facher Eigenwert, so besitzt er k -linear unabhängige (sogar orthonormale) Eigenvektoren. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten (einer symmetrischen Matrix) sind immer orthogonal zueinander.

Wir kommen zum Ausgangspunkt der Überlegungen über homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zurück:

$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{v}$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}' = A\vec{y},$$

wenn λ ein Eigenwert und \vec{v} ein zugehöriger Eigenvektor von A sind.

Beispiel 119. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem $\vec{y}' = A\vec{y}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\det(A - \lambda E) = 45 + 21\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Sie hat die Lösungen -3 und 5 , wobei -3 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Eigenvektoren zum Eigenwert -3 . Wir erhalten das Gleichungssystem

$$(A - (-3)E) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Man sieht mit bloßem Auge, dass die zweite und dritte Gleichung Vielfache der ersten sind. Es bleibt also nur die Gleichung

$$x + 2y - 3z = 0$$

und wir können zwei Parameter frei wählen: Der Lösungsraum, der sogenannte Eigenraum zum Eigenwert -3 ist zweidimensional.

$$z = 0, y = 1 \implies x = -2$$

$$z = 1, y = 0 \implies x = 3$$

Mit diesen Wahlen erhalten wir zwei linear unabhängige Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = -3$.

Eigenvektoren zum Eigenwert 5. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$(A - 5E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Mit dem Gaußalgorithmus ergibt sich das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

mit der Lösung $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 5.

Die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist daher

$$\vec{y}(x) = e^{-3x} \left(c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Komplexe Eigenwerte. Sei A eine reelle Matrix. Wenn das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen hat, treten diese in komplex-konjugierten Paaren $\lambda = \alpha + i\omega$ und $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ auf. Auch die entsprechenden Eigenvektoren sind dann konjugiert-komplex.

Für die Lösung der Differentialgleichung kann man von komplex-konjugierten Paaren von Lösungen je eine vergessen, wenn man von der verbleibenden den Real- und Imaginärteil nimmt.

Das ist klar, weil Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, die Gleichung ist ja homogen(!), und weil

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}z - \frac{1}{2i}\bar{z}.$$

Beispiel 120. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

hat die charakteristische Gleichung $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Offensichtlich ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + i$. Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

hat daher die komplexe Lösung

$$\vec{y}(x) = e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^x (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Sie liefert die reelle Lösungsbasis

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

□

Defizite bei den Eigenvektoren. Wir beschreiben ein Verfahren zur Gewinnung einer Lösungsbasis, wenn es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Sei also etwa λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A , aber es gebe weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ . Wir haben früher festgestellt, dass es dann k linear unabhängige Hauptvektoren zu λ gibt, also Vektoren mit

$$(A - \lambda E)^m \vec{v} = 0, \quad m \leq k. \quad (93)$$

Wir beschreiben nun, wie man daraus Lösungen der Differentialgleichung erhält. Das Verfahren wird verständlicher, wenn wir vorher ein "geniales" Lösungsverfahren beschreiben, das ganz ohne Eigenwerte etc. auskommt. Ist nämlich \vec{v} ein beliebiger Vektor, und setzt man $\vec{y}(x) := e^{xA} \vec{v}$, so folgt

$$\vec{y}'(x) = A e^{xA} \vec{v} = A \vec{y}(x)$$

und wir haben eine Lösung gefunden. Allerdings mussten wir dazu e^{xA} differenzieren, und bisher wissen wir nicht einmal, was "e hoch Matrix" überhaupt bedeuten soll. Das ist aber einfach: Für eine quadratische Matrix B ist B^j das j -fache Produkt dieser Matrix mit sich selbst und

$$e^B := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j.$$

Dann ist $e^{xA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} A^j$, und diese Funktion ist nach den üblichen Regeln nach x differenzierbar.

Warnung. Man könnte meinen, wenn $B(x)$ allgemeiner eine matrixwertige Funktion und $B'(x) = A(x)$ ist, dann sei $\vec{y}(x) = e^{B(x)} \vec{v}$ eine Lösung von

$$\vec{y}' = A(x) \vec{y}.$$

Das ist falsch, weil im allgemeinen $\frac{d}{dx} e^{B(x)} \neq B'(x) e^{B(x)}$. Der Grund liegt in der Nicht-Kommutativität der Matrizenmultiplikation. Es gilt

$$\frac{d}{dx} B^2(x) = B'(x)B(x) + B(x)B'(x) \neq 2B'(x)B(x).$$

Aber $B(x) = xA$ kommutiert natürlich mit $B'(x) = A$.

Mit

$$e^{\lambda x E} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j x^j}{j!} E^j = e^{\lambda x} E$$

erhalten wir für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{xA} \vec{v} = e^{\lambda x E + x(A - \lambda E)} \vec{v} = e^{\lambda x E} e^{x(A - \lambda E)} \vec{v} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}.$$

Hieran sehen wir nun folgendes: Ist \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A , so ist also $(A - \lambda E) \vec{v} = 0$ und in der Summe verschwinden alle Terme bis auf den für $j = 0$. Daher ist

$$e^{xA} \vec{v} = e^{\lambda x} \vec{v}.$$

Man bekommt genau die "Eigenvektor-Lösung" der Differentialgleichung. Ist hingegen \vec{v} ein Hauptvektor, also etwa $(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0$, so ergibt sich eine *endliche* Summe

$$e^{xA} \vec{v} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}. \quad (94)$$

Wir haben etwas großzügig mit unendlichen Matrizenreihen argumentiert, um diese Formel zu finden. Nun kann man aber sehr einfach direkt die Probe machen, dass (94) für einen Hauptvektor \vec{v} tatsächlich die Ableitung $Ae^{xA}\vec{v}$ besitzt und deshalb eine Lösung der Differentialgleichung liefert. Das beweist den

Satz 121 (Hauptvektorlösungen). Ist λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängige Lösungen von

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0,$$

so sind die Funktionen

$$\vec{y}_i = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}_i \quad (95)$$

linear unabhängige Lösungen von

$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$

Beachten Sie: Bei den skalaren Differentialgleichungen führten mehrfache charakteristische Nullstellen zu Lösungen der Form $x^j e^{\lambda x}$ und zu linearkombinierten Lösungen

$$e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}).$$

Die Lösungen (95) sind von genau derselben Struktur, nur dass die Koeffizienten jetzt Vektoren $\frac{1}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}_i$ sind.

Die direkte Anwendung des Satzes mit den Hauptvektoren ist mühsam, denn man muss die Matrixpotenzen bis $(A - \lambda E)^k$ bilden. Einfacher geht es bei doppelten Nullstellen:

Beispiel 122. Ist λ ein **zweifacher** Eigenwert bei beliebiger Dimension, so berechnet man zunächst einen Eigenvektor \vec{v}_1 . Dazu muss man die Matrix $A - \lambda E$ bilden. Gibt es nun zu λ keinen zweiten linear unabhängigen Eigenvektor, so gibt es einen von \vec{v}_1 linear unabhängigen *Hauptvektor* \vec{v}_2 . Für den gilt

$$0 = (A - \lambda E)^2 \vec{v}_2 = (A - \lambda E)((A - \lambda E)\vec{v}_2).$$

Das heißt, $(A - \lambda E)\vec{v}_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , also von der Form $a\vec{v}_1$. Wir haben daher

$$(A - \lambda E)\left(\frac{1}{a}\vec{v}_2\right) = \vec{v}_1.$$

Weil es auf Vielfache $\neq 0$ bei Eigen- und Hauptvektoren nicht ankommt, können wir den Faktor $1/a$ vergessen.

Ist λ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2 und der geometrischen Vielfachheit 1, und ist \vec{v}_1 ein zugehörigen Eigenvektor, so ist das Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

lösbar und liefert „den“ fehlenden Hauptvektor zum Eigenwert λ . Die zugehörige Lösung ist dann

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} (\vec{v}_2 + x\vec{v}_1).$$

□

Beispiel 123. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Gleichung

$$(A - 1E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert einen linear unabhängigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Daher liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1, der offenbar von dem Eigenvektor linear unabhängig ist. Das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}$$

hat in diesem Fall eine Lösungsbasis aus

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(x) = e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und einer weiteren Lösung $\vec{y}_3(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. □

4.2 Ein nicht-lineares Randwertproblem: Der Eulersche Knickstab

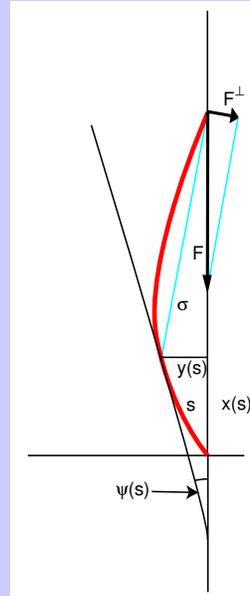
Bemerkung. Die Abbildungen in diesem Abschnitt wurden (bis auf die von Hand gezeichnete erste) mit Mathematica erzeugt. Für Hilfe dabei und bei den Jacobischen elliptischen Funktionen danke ich Ekkehard Tjaden.

Als Beispiel für ein nicht-lineares Randwertproblem untersuchen wir ein Standardproblem der klassischen Mechanik, ein Problem der Balkenbiegung, das etwas dramatisierend als Problem der ‘Eulerschen Stabknickung’ bezeichnet wird.

Gegeben sei ein vertikaler biegeelastischer Stab der Länge L , der vertikal mit der Kraft F belastet wird. Fuß und Spitze des Stabes sollen auf der Vertikalen und der Stab in einer Ebene bleiben. Wir verwenden als unabhängige Variable die vom Fuß aus gemessene Bogenlänge s auf dem Stab und bezeichnen mit $y(s)$ die horizontale Auslenkung. Weiter sei $\psi(s)$ der Steigungswinkel der Tangente an den Stab. Die Änderung dieses Winkels (oder die Krümmung des Stabes) ist nach der Mechanik proportional zum Biegemoment $M(s)$

$$\psi'(s) = -cM(s),$$

wobei $c = 1/EI$ eine von Material und Geometrie der Stabes bestimmte Konstante ist. EI heißt die *Biegesteifigkeit*.



Das Biegemoment ist gegeben durch das Drehmoment, welches die Kraft F im jeweiligen Punkt des Stabes ausübt, also durch das Produkt der Sehne σ mit der dazu senkrechten Komponente F^\perp der Kraft. Aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken der Skizze erhalten wir

$$\frac{F^\perp}{F} = \frac{y(s)}{\sigma}.$$

Es folgt

$$M(s) = F^\perp \sigma = F y(s)$$

und

$$\psi'(s) = -cF y(s). \quad (96)$$

Insbesondere ist nach Voraussetzung $y(0) = y(L) = 0$, also

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(L) = 0. \quad (97)$$

Weil wir die Bogenlänge verwenden, ist $(x'(s), y'(s))$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente, und daher ist $y'(s) = \sin \psi(s)$. Zusammen mit den obigen physikalischen Beziehungen und der Abkürzung $\omega = \sqrt{cF}$ folgt daraus die Biegleichung

$$\boxed{\psi''(s) + \omega^2 \sin \psi(s) = 0.} \quad (98)$$

Linearisierung. Für kleine Werte von ψ ist $\sin \psi \approx \psi$, und damit erhalten wir die Gleichung

$$\psi''(s) + \omega^2 \psi(s) = 0. \quad (99)$$

Für diese linearisierte Gleichung ist das Randwertproblem mit den Bedingungen (97) leicht zu lösen, es ist $\psi(s) = A \cos(\omega_n s)$ mit beliebigem (wegen der Approximationsvoraussetzung aber sehr kleinem) A und mit

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (100)$$

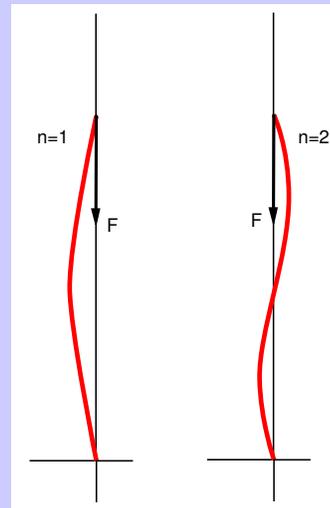
Also ist $y(s) = \int_0^s \sin \psi(\sigma) d\sigma \approx \int_0^s \psi(\sigma) d\sigma = \frac{A}{\omega_n} \sin(\omega_n s)$, und im Hinblick auf spätere Untersuchungen schreiben wir das als

$$y(s) = \frac{A}{\omega_n} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{L} s\right). \quad (101)$$

Der kleinste positive Wert von ω , für den eine nicht-triviale Lösung des Eigenwertproblems existiert ist also $\frac{\pi}{L}$, und das entspricht einer Belastung mit der Kraft

$$F = \frac{\omega^2}{c} = EI \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Das ist die sogenannte *Eulersche Knicklast*. Weitere nichttriviale Lösungen hat man dann für $F = EI \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Sie entsprechen einer sinusartigen Biegung des Stabes mit n "Bögen".



Beachten Sie, dass s die Bogenlänge auf dem Stab bezeichnet, nicht die Höhe auf der vertikalen x -Achse, so dass die Stabkurve nicht einfach der Graph von (101) ist. Allerdings haben wir

$$x(s) = \int_0^s x'(\sigma) d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - y'(\sigma)^2} d\sigma \approx \int_0^s d\sigma = s.$$

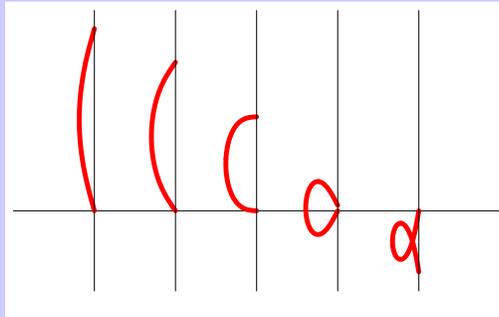
Die nicht-lineare Gleichung. Die oben betrachtete Linearisierung hat wenig mit der Realität zu tun, weil eben die Approximation $\sin \psi \approx \psi$ nur für sehr kleine ψ -Werte brauchbar ist und bei stärkerer Verbiegung unsinnig wird. Dann muss man die nicht-lineare Gleichung (98) betrachten. Diese ist schon im 19. Jahrhundert sehr gründlich studiert worden, zumal sie gleichzeitig die Schwingung eines ebenen Pendels beschreibt (Gleichung des sogenannten *mathematischen Pendels*).

Wir möchten das Randwertproblem (97), (98) lösen, betrachten aber zunächst einmal ein Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \psi'' + \omega^2 \sin \psi &= 0, \\ \psi(0) &= \alpha, \quad \psi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Später versuchen wir dann α so zu wählen, dass $\psi'(L) = 0$ wird.

Weil die Sinusfunktion stetig differenzierbar ist, ist (102) eindeutig lösbar. Andererseits ist die Differentialgleichung nicht-linear, und deshalb hilft kein Exponentialansatz beim Lösen der Differentialgleichung und kein Superpositionsprinzip bei der Erfüllung der Randbedingungen, man braucht andere Methoden. Diese liefern Lösungen, die nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden können, sondern man braucht sogenannte *elliptische Funktionen*. Wir beschreiben zunächst das Ergebnis. Für $0 \leq \omega \leq \omega_1$, d.h. für eine Belastung unterhalb der Eulerschen Knicklast, hat auch das nicht-lineare Problem nur die triviale Lösung, der Stab bleibt gerade. Für $\omega > \omega_1$ gibt es zunächst eine weitere Lösung, die der anschaulichen Vorstellung einer (annähernd sinusförmigen) Verbiegung des Stabes entspricht. Bei wachsendem ω , also steigender Belastung wird die maximale Auslenkung y_{max} des Stabes immer größer.

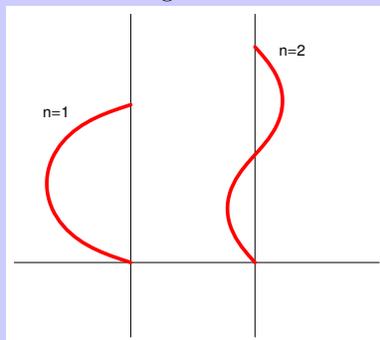


Im letzteren Bild hat die Kraft das ehemals obere Stabende unter den Fußpunkt des Stabes gedrückt und zieht nun nach unten.

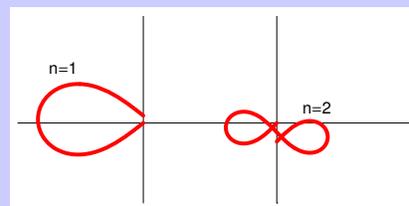
Aber bei $\omega_2 = \frac{2\pi}{L}$, dem 2. Eigenwert des *linearisierten* Problems, gibt es daneben eine (physikalisch instabile) weitere nicht-triviale Lösung, die zunächst annähernd einer vollen Sinusperiode entspricht, also zwei "Bäuche" besitzt. Bei weiter steigender Belastung vergrößern sich auch die Bäuche dieser Lösung. Bei weiter wachsendem ω kommt bei jedem ω_n eine weitere nicht-triviale Lösung mit einem weiteren Bauch hinzu.

Hier sind jeweils zwei nicht-triviale Lösungen bei gleicher

großer



und sehr großer Belastung



Im nicht-linearen Fall hat man also im Gegensatz zum homogenen linearen Fall nicht diskrete Eigenwerte mit jeweils einem Vektorraum von Eigenlösungen, sondern ein Kontinuum von "Spektralwerten" ω mit jeweils einer diskreten Zahl zugehöriger nicht-trivialer Lösungen.

Lösung der nicht-linearen Gleichung. Der wesentliche Trick zur Lösung ist die Multiplikation mit ψ' :

$$0 = \psi' \psi'' + \omega^2 \psi' \sin \psi = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} (\psi')^2 - \omega^2 \cos \psi \right).$$

Also hat man

$$\frac{1}{2} (\psi')^2 - \omega^2 \cos \psi = \text{const.}$$

Aus der Anfangsbedingung (102) folgt $\text{const} = -\omega^2 \cos \psi(0) = -\omega^2 \cos \alpha$ und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} (\psi')^2 = \omega^2 (\cos \psi - \cos \alpha) = 2\omega^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (103)$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{\psi'}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} = -2\omega. \quad (104)$$

Beim Wurzelziehen haben wir uns inspiriert von der Abbildung für das Minuszeichen entschieden, aber das muss man im Augen behalten. Für die Integration der linken Seite substituieren wir eine neue Variable u für ψ mit

$$\sin u = \frac{\sin \psi/2}{\sin \alpha/2}.$$

Wir halten fest, dass dann $\sin u(0) = 1$, also o.E. $u(0) = \frac{\pi}{2}$.

Dann wird $\psi' = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\cos u}{\cos \psi/2} u'$ und wir erhalten

$$-2\omega = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\cos u}{\cos \psi/2} u'}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} = \frac{2u'}{\cos \frac{\psi}{2}} = \frac{2u'}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} = 2 \frac{d}{dt} F(k; u). \quad (105)$$

Dabei ist $k := \sin \frac{\alpha}{2}$ und

$$F(k; \phi) := \int_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}}$$

das sogenannte *elliptische Integral 1. Art*, das mit den von der Schule bekannten elementaren Funktionen nicht lösbar ist und darum eine neue Funktion darstellt. Das Semikolon soll andeuten, dass wir F nicht als Funktion von zwei Variablen k und ϕ interpretieren (was natürlich auch richtig ist), sondern als Funktion einer Variablen ϕ , wobei die Funktion noch von einem Parameter k abhängt, so dass wir eigentlich über eine Familie von Funktionen reden.

Diese Funktionen kann man als Beginn einer wunderbaren Reihe neuer Funktionen, der *elliptischen Funktionen*, auffassen, die sich sämtlich mit einfachsten Methoden der Analysis I erklären lassen. Hier stellen wir zusammen, was wir darüber für das Eulersche Knickstab-Problem wissen müssen.

Intermezzo: Die elliptischen Funktionen von Jacobi.

Der Integrand von

$$F(k; \phi) := \int_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad (106)$$

ist π -periodisch und zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch. Man nennt deshalb

$$K(k) := F(k; \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad (107)$$

das *vollständige elliptische Integral 1. Art*. Damit folgt

$$F(k; \phi + \pi) = F(k; \phi) + 2K(k). \quad (108)$$

Offenbar ist die Funktion K monoton steigend, und mit Hilfe von

$$\int_0^b \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \tau}} = 2 \tanh^{-1}(\tan \frac{b}{2}), \quad 0 < b < \pi,$$

beweist man $\lim_{k \nearrow 1} K(k) = +\infty$.

Weiter ist F in ϕ monoton wachsend und besitzt eine Umkehrfunktion, die sogenannte *Jacobische Amplitude* $\text{am}(k; t)$:

$$\text{am}(k; F(k, \phi)) = \phi. \quad (109)$$

Aus der Periodizität (108) folgt

$$\text{am}(k; t + 2K(k)) = \text{am}(k; t) + \pi \quad (110)$$

und insbesondere $\text{am}(k; nK(k)) = n\frac{\pi}{2}$.

Die *Jacobischen Kosinus-* bzw. *Sinusfunktionen* werden definiert durch

$$\text{cn}(k; t) := \cos \text{am}(k; t), \quad \text{sn}(k; t) := \sin \text{am}(k; t). \quad (111)$$

Weil $F(0; \phi) = \phi$ und deshalb $\text{am}(k; t) = t$ ist, ist

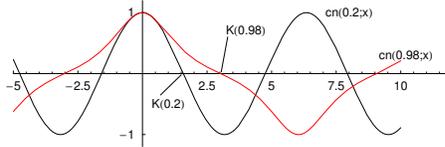
$$\text{cn}(0; t) = \cos t, \quad \text{sn}(0; t) = \sin t.$$

Die Jacobischen Funktionen sind also Verallgemeinerungen des üblichen Kosinus und Sinus. Dabei übernimmt $K(k)$ die Rolle von $\frac{\pi}{2} = K(0)$. Die Funktionen sind nach (110) periodisch mit der Periode $4K(k)$ und haben Nullstellen bei $nK(k)$ für ungerades bzw. gerades $n \in \mathbb{Z}$.

Schließlich können Sie mit der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion aus der Analysis I leicht nachrechnen, dass

$$\text{sn}'(k; t) = \text{cn}(k; t) \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(k; t)}, \quad \text{cn}'(k; t) = -\text{sn}(k; t) \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(k; t)}. \quad (112)$$

Die Graphen von zwei der Jacobischen Kosinusfunktionen geben ein anschauliches Bild:



Zurück zu unserem mechanischen Problem. Aus (105) erhalten wir

$$F(k; u(s)) = F(k; u(0)) - \omega s = K(k) - \omega s,$$

damit

$$u(s) = \operatorname{am}(k; K(k) - \omega s)$$

und schließlich

$$\boxed{\psi(s) = 2 \arcsin(k \sin u) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(k; K(k) - \omega s))}. \quad (113)$$

Mit (112) verifiziert man, dass das wirklich die Differentialgleichung löst, und damit ist auch das Vorzeichenproblem in (104) erledigt. Die Funktion (113) ist also die Lösung des Anfangswertproblems

$$\psi'' + \omega^2 \psi = 0, \quad \psi(0) = \alpha, \psi'(0) = 0 \quad (114)$$

mit $k := \sin \frac{\alpha}{2}$.

Randwert adjustieren. Für gegebenes L und hinreichend großes ω müssen wir nun ein oder mehrere nicht-triviale k bzw. α finden, so dass $\psi'(L) = 0$ wird, vgl. (97). Nach (103) ist

$$\begin{aligned} (\psi'(L))^2 &= 4\omega^2 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\psi(L)}{2} \right) \\ &= 4\omega^2 \left(k^2 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(k; K(k) - \omega L) \right) \\ &= 4\omega^2 k^2 \cos^2 \operatorname{am}(k; K(k) - \omega L) \\ &= 4\omega^2 k^2 \operatorname{cn}^2(k; \omega L - K(k)) \quad (\operatorname{cn} \text{ ist eine gerade Funktion}). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\operatorname{cn}(k; s)$ waren aber die ungeraden Vielfachen von $K(k)$, und deshalb sind unsere Randbedingungen erfüllt für

$$\omega L - K(k) = L\sqrt{cF} - K(k) = (2n - 1)K(k), \quad n \in \mathbb{Z},$$

oder

$$K(k) = \frac{L\sqrt{cF}}{2n}. \quad (115)$$

Wir haben festgestellt, dass $K : [0, 1[\rightarrow [\frac{\pi}{2}, +\infty[$ bijektiv ist. Deshalb gibt es für (115) und damit für unser Randwertproblem so viele nicht-triviale Lösungen, wie es positive ganze Zahlen n gibt, für die

$$\frac{\pi}{2} < \frac{L\sqrt{cF}}{2n}$$

ist. Wie im linearen Fall sind also die Belastungen mit $\sqrt{cF} = \omega = \frac{n\pi}{L}$, die sogenannten *Verzweigungswerte* von besonderer Bedeutung, aber anders als dort hat man jetzt für *alle* Werte von $\sqrt{cF} > \frac{n\pi}{L}$ eine Familie von n nicht-trivialen Lösungen

$$\psi_j(s) = 2 \arcsin \left(k_j \operatorname{sn} \left(k_j; K(k_j) - s\sqrt{cF} \right) \right)$$

charakterisiert durch $K(k_j) = \frac{L\sqrt{cF}}{2j}$ mit $1 \leq j \leq n$.

Bisher haben wir nur den Tangentenwinkel ψ berechnet. Um ein Bild der tatsächlichen Gestalt zu bekommen, müssen wir $x(s), y(s)$ bestimmen. Aus (96) und (104) ergibt sich

$$\begin{aligned} y(s) &= -\frac{1}{cF} \psi'(s) = \frac{2}{\sqrt{cF}} \sqrt{k^2 - k^2 \operatorname{sn}^2(k; K(k) - \omega s)} \\ &= \frac{2k}{\sqrt{cF}} \operatorname{cn}(k; K(k) - \omega s). \end{aligned}$$

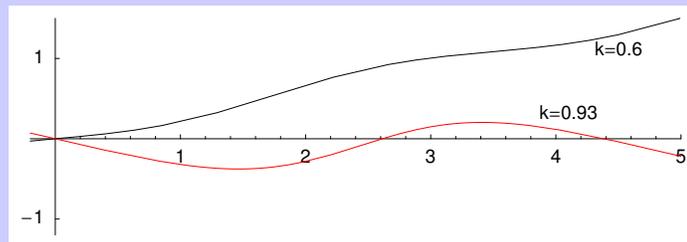
(Bemerkung: Hier haben wir wieder das alte Problem mit dem Vorzeichen der Wurzel. Die Berechnung von $y(s)$ durch Integration von $y'(s) = \sin \psi(s)$ vermeidet das und liefert dasselbe Ergebnis.) Daran sieht man insbesondere, dass die j -te Lösung kosinusförmig schwingt und j "Bäuche" hat.

Die Berechnung von $x(s)$ durch Integration von $x'(s) = \cos \psi(s)$ ist etwas komplizierter. Sie erfordert ein weiteres elliptisches Integral, das Integral $E(k; \phi)$ von 2. Art, auf das ich hier aber nicht mehr eingehen will, und liefert

$$x(s) = \frac{2}{\omega} \left(E(k; \operatorname{am}(k; \omega s - K(k))) - \frac{1}{2} \omega s + E(k, \frac{\pi}{2}) \right).$$

Für $k = 0$ ist $x(s) = s$, und für kleine Werte von k ist $x(s)$ monoton wachsend. Das gilt aber nicht mehr für k -Werte nahe bei 1, und dann wird $x(s)$ rückläufig wie in den beiden letzten Figuren der Abbildung (??).

Hier sind die Graphen für zwei Werte von k :



Mit dieser (x, y) -Parametrisierung bekommt man die oben abgebildeten und beschriebenen Verbiegungen des Stabes.

4.3 Stabilitätskriterien von Routh und Hurwitz

Das Nyquist-Kriterium aus Satz 70 ist ein anschauliches geometrisches Kriterium. Wir wollen nun die Frage, wann der Argumentzuwachs (der vollen Nyquist-Kurve) $n\pi$ ist, auf algorithmische Weise untersuchen. Das geschieht in zwei Schritten. Im ersten konstruieren wir aus $p(z)$ mit einem Euklidischen Algorithmus eine endliche Polynomfolge (eine sogenannte *Sturmsche Kette*), an der man den Argumentzuwachs ablesen kann. Im zweiten Schritt geben wir dafür ein einfaches Rechenschema an (*Routh-Algorithmus*).

Anschließend geben wir eine Umformulierung der Routhschen Methode an, die unter dem Namen (*Routh-Hurwitz*) läuft.

Erster Schritt: Cauchy-Index und Sturmsche Ketten. Zum Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

mit reellen a_k definieren wir die Nyquist-Kurve $\nu(t) := p(it)$ und zerlegen diese in Real- und Imaginärteil

$$\nu(t) = u(t) + iv(t).$$

Beachten Sie, dass $u(t)$ und $v(t)$ reelle Polynome sind, auf die wir gleich genauer eingehen. Ist der Grad von u größer als der von v , so ist

$$0 = \lim_{R \rightarrow \pm\infty} \frac{v(t)}{u(t)} = \lim_{R \rightarrow \pm\infty} \tan \phi(t)$$

und deshalb $\tan \phi(-t) = \frac{v(-t)}{u(-t)} \approx 0$ für große t . Wächst t so ändert sich $\phi(t)$ und durchläuft Polstellen des Tangens, nämlich gerade dann, wenn t Polstellen der rationalen Funktion $\frac{v(t)}{u(t)}$ durchläuft. Dabei springt das Vorzeichen von $\tan \phi(t) = \frac{v(t)}{u(t)}$ vom Positiven ins Negative, wenn $\phi(t)$ monoton wächst, vom Negativen ins Positive, wenn $\phi(t)$ monoton fällt. Zählt man die Pole entsprechend mit dem Index -1 bzw. $+1$, so ist die Summe über alle Indizes der von t durchlaufenen Pole gerade das Negative des Argumentwachstums von ϕ auf \mathbb{R} , weil der Tangens in jedem Intervall $[a, a + \pi[$ einen Pol vom Index -1 hat. Die Indexsumme nennt man den *Cauchy-Index* $I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t)}{u(t)}$:

$$2m - n = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t)}{u(t)}. \quad (116)$$

Ist der Grad von u kleiner als der von v , so gilt eine analoge Überlegung für $\frac{u(t)}{v(t)}$, und weil der Cotangens an den Polen vom Negativen ins Positive wechselt, erhalten wir

$$2m - n = +I_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{v(t)}. \quad (117)$$

Bestimmung von u und v . Die Zerlegung von $\nu(t) = p(it)$ für

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ist abhängig von der Parität von n .

Für gerades $n = 2k$ ist

$$\begin{aligned} u(t) &= (-1)^k (a_n t^n - a_{n-2} t^{n-2} + \dots), \\ v(t) &= (-1)^{k-1} (a_{n-1} t^{n-1} - a_{n-3} t^{n-3} + \dots). \end{aligned}$$

Für ungerades $n = 2k + 1$ ist

$$\begin{aligned} u(t) &= (-1)^k (a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-3}t^{n-3} + \dots), \\ v(t) &= (-1)^k (a_n t^n - a_{n-2}t^{n-2} + \dots). \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir aus (116), (117)

$$2m - n = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-3}t^{n-3} + \dots}{a_n t^n - a_{n-2}t^{n-2} + \dots} \quad (118)$$

Berechnung des Cauchy-Indexes mittels Sturmscher Kette. Wie berechnet man den Cauchy-Index $I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{f_0(t)}$ der rationalen Funktion $\frac{u}{v}$ bzw. $\frac{v}{u}$ mit Zählergrad < Nennergrad? Wir definieren eine Folge von Polynomen, die sogenannte *Sturmsche Kette* zu f_0, f_1 durch

$$f_{k+1}(t) := -\text{Rest der Division von } f_{k-1}(t) \text{ durch } f_k(t).$$

D.h. wir wenden auf f_0, f_1 den Euklidischen Algorithmus an und benutzen die negativen Reste zur Definition der f_k . Dann gilt also

$$f_{k-1}(t) = q_{k-1}(t)f_k(t) - f_{k+1}(t), \quad \text{Grad } f_{k+1} < \text{Grad } f_k. \quad (119)$$

Der Algorithmus endet mit

$$f_{r-1}(t) = q_{r-1}(t)f_r(t),$$

wobei der letzte nicht verschwindende Rest f_r der größte gemeinsame Teiler von f_0, f_1 ist.

1. Fall: $\text{Grad } f_r > 0$. In diesem Fall haben f_0 und f_1 entweder einen Linearfaktor gemeinsam, also eine gemeinsame Nullstelle t_0 und damit ist $p(it_0) = 0$, oder sie haben einen quadratischen Faktor der Form $((t + \alpha)^2 + \beta^2)$ mit $\beta \neq 0$ gemeinsam, und dann ist $p(\mp\beta - i\alpha) = 0$. In beiden Fällen ist $p(z)$ nicht stabil. In diesem Fall verfolgen wir die Bestimmung der Anzahl m der "linken" Nullstellen nicht weiter.

2. Fall: $f_r = \text{const} \neq 0$. In diesem Fall haben f_0 und f_1 keine gemeinsame Nullstelle und $p(z)$ keine Nullstelle auf der imaginären Achse.

Wir bezeichnen mit $V(t)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_r(t),$$

wobei etwa auftretende Nullen ignoriert werden. Bei Änderung von t kann sich $V(t)$ nur ändern, wenn ein f_k bei t das Vorzeichen wechselt, wenn also $f_k(t) = 0$. Für $0 < k < r$ ist nach (119) dann aber $f_{k-1}(t) = -f_{k+1}(t)$, so dass sich $V(t)$ nicht ändert. Weil weiter $f_r = \text{const} \neq 0$, ändert sich V an der Stelle t höchstens dann, wenn $f_0(t) = 0$, und zwar wächst bzw. fällt V an dieser Stelle um 1, wenn $\frac{f_1}{f_0}$ an dieser Stelle einen Pol hat und vom Negativen ins Positive bzw. vom Positiven ins Negative springt. Also ist für $a < b$

$$V(a) - V(b) = I_a^b \frac{f_1(t)}{f_0(t)} = I_a^b \frac{v(t)}{u(t)}. \quad (120)$$

Man nennt f_0, f_1, \dots, f_r die *Sturmsche Kette* zu f_0, f_1 und die Gleichung (120) den *Satz von Sturm*. Weil f_0 nur endlich viele Nullstellen besitzt, ändert sich V nur in einem kompakten Intervall, so dass trivialerweise die Grenzwerte $V(\pm\infty) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} V(t)$ existieren. Aus (118) erhalten wir

$$2m - n = V(-\infty) - V(+\infty). \quad (121)$$

Stabilität bedeutet $m = n$, und weil es in einer Folge von $r + 1$ Funktionswerten höchstens r Vorzeichenwechsel gibt, ist $r = n$ und $V(-\infty) = n, V(+\infty) = 0$. eine hinreichende und

notwendige Bedingung für Stabilität. Ist $r = n$, so fällt der Grad beim Euklidischen Algorithmus jedesmal um 1, d.h. f_k ist vom Grad $n - k$. Wir nennen das den *regulären Fall* der Sturmschen Kette.

Damit erhalten wir den

Satz 124. *Bilden wir zum Polynom $p(z)$ mit reellen Koeffizienten die Sturmsche Kette $f_0(t), \dots, f_r(t)$ wie oben beschrieben und ist $f_r = \text{const} \neq 0$, so liegen auf der imaginären Achse keine und links von ihr*

$$m = \frac{1}{2}(n + V(-\infty) - V(+\infty))$$

Nullstellen von $p(z)$.

Insbesondere ist $p(z)$ genau dann stabil, wenn $r = n$ und $V(-\infty) = n$ und $V(+\infty) = 0$.

Zu Berechnung von $V(\pm\infty)$ braucht man $V(\pm t_0)$ für *hinreichend großes* t_0 . Hinreichend groß bedeutet, dass alle Nullstellen von $f_0(t)$ im Intervall $[-t_0, +t_0]$ liegen. Das ist jedenfalls erfüllt, wenn

$$t_0^n > \max\left(1, \frac{|a_{n-2}| + |a_{n-4}| + \dots}{|a_n|}\right)$$

(Dreiecksungleichung).

Zweiter Schritt: Der Algorithmus von Routh. Zur Berechnung der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Sturmschen Kette braucht man (eigentlich nur) die Vorzeichen von $f_k(\pm t)$ für großes t , und die sind natürlich gegeben durch die Leitkoeffizienten der f_k . Für die Funktion $\frac{f_1(t)}{f_0(t)}$ aus (118) geben wir einen Algorithmus zur rekursiven Berechnung der (Koeffizienten der) f_k im regulären Fall. Wir berechnen

$$\begin{aligned} a_n t^n - a_{n-2} t^{n-2} + \dots &= \frac{a_n}{a_{n-1}} t (a_{n-1} t^{n-1} - a_{n-3} t^{n-3} + \dots) \\ &- \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}\right) t^{n-2} + \left(a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}\right) t^{n-4} \mp \dots \\ &= \frac{a_n}{a_{n-1}} t f_1(t) - f_2(t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $f_2(t)$, und mit derselben Formel $f_{k+1}(t)$ aus $f_{k-1}(t)$ und $f_k(t)$. Schreiben wir

$$f_k(t) = a_{n-k}^k t^{n-k} - a_{n-k-2}^k t^{n-k-2} \pm \dots$$

so ist also

$$a_{n-j}^{k+1} := a_{n-j}^{k-1} - \frac{a_{n-k+1}^{k-1}}{a_{n-k}^k} a_{n-j-1}^k. \quad (122)$$

Im sogenannten *Routhschen Koeffizientenschema*

a_n^0	a_{n-2}^0	a_{n-4}^0	\dots
a_{n-1}^1	a_{n-3}^1	a_{n-5}^1	\dots
\vdots			
a_{n-k}^k	a_{n-k-2}^k	a_{n-k-4}^k	\dots
\vdots			
a_0^n			

(123)

erhält man also die $(k + 1)$ -te Zeile, indem man

1. von der $(k - 1)$ -ten Zeile die normierte k -te Zeile subtrahiert, wobei die Normierung (wie beim Gaußschen Algorithmus) so gewählt ist, dass der erste Term der Differenz Null wird, und
2. den ersten Term der Differenz streicht.

Rechts kann man die Zeilen abbrechen, wenn der untere Index von a negativ wird.

Natürlich funktioniert dieses Verfahren bis zur n -ten Zeile genau dann, wenn alle auftretenden Leitkoeffizienten a_{n-k}^k für $k \leq n$ ungleich Null sind. Das ist äquivalent dazu, dass die Sturmsche Kette regulär ist.

Weil a_{n-k}^k der Leitkoeffizient von f_k ist, ist für große t das Vorzeichen von $f_k(t)$ gleich dem Vorzeichen von a_{n-k}^k und das Vorzeichen von $f_k(-t)$ gleich dem von $(-1)^{n-k} a_{n-k}^k$. Daher ist $V(+\infty)$ gleich der Anzahl $V(a_n^0, a_{n-1}^1, \dots, a_0^n)$ der Vorzeichenwechsel in der Leitkoeffizientenfolge und entsprechend

$$\begin{aligned} V(-\infty) &= V((-1)^n a_n^0, (-1)^{n-1} a_{n-1}^1, \dots, a_0^n) \\ &= V(a_n^0, -a_{n-1}^1, \dots, (-1)^n a_0^n) \\ &= n - V(a_n^0, a_{n-1}^1, \dots, a_0^n). \end{aligned}$$

Aus (121) folgt $n - 2V(a_n^0, a_{n-1}^1, \dots, a_0^n) = 2m - n$ oder

$$m = n - V(a_n^0, a_{n-1}^1, \dots, a_0^n).$$

Also erhalten wir

Satz 125 (Routh-Kriterium). *Das Polynom $p(z)$ vom Grad n mit reellen Koeffizienten ist genau dann stabil, wenn sein Routh-Schema (123) n Zeilen hat und in der ersten Spalte keinen Vorzeichenwechsel aufweist.*

Noch einmal zur Erinnerung: Das Routh-Schema von

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

erhält man, indem man die Koeffizienten a_n, a_{n-2}, \dots in die erste, a_{n-1}, a_{n-3}, \dots in die zweite Zeile einer Matrix schreibt und daraus rekursiv die weiteren Zeilen mit dem oben beschriebenen Algorithmus ("vom Gauß-Typ") bestimmt.

Das folgende Kriterium ist eigentlich nur eine Umformulierung des Routh-Kriteriums. Der Gauß-Euklidische Algorithmus des Routh-Verfahrens wird dabei durch die Berechnung von Determinanten ersetzt.

Aus der Zerlegung eines reellen Polynoms in reelle lineare und quadratische Faktoren sieht man sofort eine notwendige Stabilitätsbedingung: Wenn $p(z)$ stabil ist, sind alle seine Koeffizienten > 0 oder alle seine Koeffizienten < 0 . Ohne Einschränkung kann man sich dann auf den ersten Fall beschränken.

Satz 126 (Routh-Hurwitz-Kriterium). *Gegeben sei das reelle Polynom*

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

mit $a_n > 0$. *Notwendig und hinreichend dafür, dass alle seine Nullstellen negativen Realteil haben ist, dass*

- (i) *alle seine Koeffizienten a_k positiv sind und*
- (ii) *die folgenden n Determinanten sämtlich positiv sind:*

$$D_m := \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & a_{n-m-1} & a_{n-m} \end{bmatrix} \quad (1 \leq m \leq n).$$

Die Matrizen kann man sich so merken: Auf der Diagonalen stehen a_{n-1}, \dots, a_{n-m} , und in den Zeilen stehen die a_k 's mit monoton wachsenden Indizes, wobei $a_k = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.

Bemerkung: *Weil $D_1 = a_{n-1}$ und $D_n = a_0 D_{n-1}$, muss man in (ii) nur prüfen, dass*

$$D_2 > 0, \dots, D_{n-1} > 0.$$

Nach Liénard und Chipart [Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, J. Math. pures et appl. 10 (1914)] ist ein reelles Polynom mit positiven Koeffizienten genau dann stabil, wenn alle geraden Hurwitzdeterminanten D_{2j} positiv sind, oder auch wenn alle ungeraden Hurwitzdeterminanten D_{2j+1} positiv sind. Das sind etwa halb so viele Bedingungen wie im Routh-Hurwitz-Kriterium. Wir können hier aber nur die schwächere Variante beweisen:

Beweis. Wir benutzen die Notation aus dem Routh-Algorithmus. In der Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & a_{n-m} \end{bmatrix}$$

subtrahieren wir von den geraden Spalten das $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ -fache der vorangehenden Spalte und

erhalten:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3}^1 & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-5}^1 & a_{n-4}^2 & a_{n-3}^1 & a_{n-2}^2 & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & * \end{bmatrix}$$

Nun subtrahieren wir von der dritten und den folgenden ungeraden Spalten das $\frac{a_{n-1}^1}{a_{n-2}^2}$ -fache der jeweils vorangehenden Spalte und erhalten

$$\begin{bmatrix} a_{n-1}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3}^1 & a_{n-2}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-5}^1 & a_{n-4}^2 & a_{n-3}^2 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & * \end{bmatrix}$$

Fortsetzung der Verfahrens liefert eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} a_{n-1}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3}^1 & a_{n-2}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-5}^1 & a_{n-4}^2 & a_{n-3}^2 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & a_{n-m}^m \end{bmatrix}$$

und damit

$$D_m = a_{n-1}^1 \cdot \dots \cdot a_{n-m}^m.$$

Der beschriebene Gaußalgorithmus setzt voraus, dass die a_{n-k}^k für $1 \leq k < m$ alle $\neq 0$ sind, und dann ist $a_{n-m}^m \neq 0$ genau dann, wenn $D_m \neq 0$ ist. Also sind alle D_m für $1 \leq m \leq n$ positiv genau dann, wenn alle a_{n-m}^m positiv sind. Damit folgt der Satz aus Satz 125. \square