

Analysis I

Prof. Dr. A. Raphaélian
Fachbereich 1 - Ingenieurwissenschaften I
Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

Vorwort

Dies ist kein Buch, sondern ein Vorlesungsskript. Der Unterschied besteht darin, daß ein Skript zum Selbststudium weniger gut geeignet ist, also den Besuch einer Vorlesung nicht ersetzen kann. Ein Skript verschafft während der Vorlesung Zeit zum Nachdenken und erleichtert die Nachbereitung. Der Besitz eines Skriptes vermittelt aber auch das trügerische Gefühl, das in ihm enthaltene Wissen bereits zu „besitzen“ oder es sich jederzeit rasch aneignen zu können. Es verführt somit auch dazu, nicht zur Vorlesung zu erscheinen.

Dieses Skript ist Teil eines Skriptes zur Vorlesung “Mathematik I für das Grundstudium“. Das Besondere an dieser Vorlesung – wie an allen anderen Mathematik-Vorlesungen auch – ist, daß man durch Lesen und Zuhören allein nicht genug lernt. Das Wesentliche ist neben dem Nachvollziehen der Theorie das selbständige Durchrechnen von Beispielen, und zwar “mit der Hand“.

Vorausgesetzt werden hier lediglich – allerdings umfassende – Kenntnisse im

- Bruchrechnen,
- Umstellen und Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen,
- Lösen einfacher Linearer Gleichungssysteme.

Gebrauchsanleitung für Studienanfänger¹

Für das Studium eines mathematischen Textes – insbesondere also des vorliegenden Skriptes – benötigt man

- einen ruhigen Ort,
- eine Sitzgelegenheit (möglichst mit Tisch), auf der man längere Zeit bequem (aber aufrecht) sitzen kann,
- einen (nicht zu kleinen) Stapel beschreibbaren Papiers (freie Rückseiten),
- ein Schreibgerät,

¹aus: W. Mackens, H. Voß : Mathematik I, HECO-Verlag, 1993

- eine nicht zu kurze Zeitspanne (minimal eine Stunde), in der man störungsfrei arbeiten kann,
- einen festen Willen, wirklich verstehen zu wollen
- und jede Menge Ausdauer und Hartnäckigkeit.

Es ist selten sinnvoll, einen mathematischen Text beim ersten Lesen wie eine Zeitung in der Bahn oder im Bus, im Schwimmbad, in einem zum Eindösen verleitenden Sessel oder in einer kurzen Pause zwischen anderen Aktivitäten zu lesen. Es ist besser, sich an solchen Orten und bei solchen Gelegenheiten schöne Gedanken zu anderen Dingen zu machen und sich – u.a. für die ernsthafte Bearbeitung eines mathematischen Textes – zu entspannen.

Es ist sehr sinnvoll, einen mathematischen Text in einer Gruppe zu besprechen, da hierdurch bislang übersehene Aspekte des Textes auffallen können, mögliche eigene Defizite von anderen Gruppenmitgliedern beseitigt werden können und man Gelegenheit findet, Gelerntes in eigenen Worten zu formulieren. Die Zeit für eine solche Gruppenarbeit ist aber nur dann sinnvoll investiert, wenn man sich vorher allein intensiv mit dem zu besprechenden Text auseinandergesetzt hat. Die Teilnahme an einer Gruppenarbeit ohne vorhergehendes Studium ist meistens für das gründliche Verstehen eher hinderlich, da es zur falschen Annahme verführen kann, ein positives Endergebnis der gesamten Gruppe hätte auch (notwendig) eigenes Verstehen zur Konsequenz.

Einen mathematischen Text erarbeitet man, indem man

- alle Aussagen gründlich liest,
- sich klarmacht, ob man alle darin verwendeten “Vokabeln“ kennt, d.h. die Definitionen der mathematischen Begriffe parat hat,
- Unkenntnis von Vokabeln oder Unsicherheit hinsichtlich ihrer Bedeutung gegebenenfalls (mit Hilfe des Stichwortverzeichnisses) sofort eliminiert,
- die Schlüsse zu verstehen versucht, mit denen Beziehungen zwischen den betroffenen mathematischen Begriffen hergestellt werden,
- anhand gegebener Beispiele das Verständnis eines Sachverhaltes vertieft,
- sich oft bemüht, eigene Anwendungsbeispiele zu konstruieren,
- alles haarklein auf dem Papier nachvollzieht (die Mathematik gewinnt einen Großteil ihrer Schlagkraft aus der Anwendbarkeit formaler Kalküle mit denen man Ergebnisse “einfach“ ausrechnen kann, und Rechnen will immer wieder geübt werden),
- viele Aufgaben zu dem behandelten Sachverhalt rechnet
- und sich immer wieder zwei Fragen stellt:

- Habe ich den dargestellten Sachverhalt wirklich verstanden? und
- Was könnte ich als Studentin oder Student einer Ingenieurwissenschaft mit der Kenntnis dieses Sachverhaltes anfangen?

Insbesondere der oben angesprochene Punkt “Ausdauer und Hartnäckigkeit“ ist von allergrößter Wichtigkeit! Viele Untersuchungen haben ergeben, daß große Leistungen (nobelpreiswürdige Entdeckungen, Spitzenleistungen in den Bereichen Wissenschaft, Sport, Musik oder Kunst) nur zu etwa 25 - 30% durch Begabung oder angeborene Fähigkeiten zustandekommen, immer aber wesentlich von immenser Arbeit abhängen.

Die gute Nachricht ist, daß so etwas jeder kann! Jedenfalls kann es jeder lernen. Diese Dinge kosten natürlich Zeit, manchmal sogar viel Zeit.

Nehmen Sie sich diese Zeit!

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	ii
1 Zahlen	1
1.1 Reelle Zahlen	1
1.1.1 Axiomatische Einführung	1
1.1.1.1 Spezielle Zahlbereiche in \mathbb{R}	4
1.1.1.2 Potenzen	6
1.1.2 Ordnung in \mathbb{R}	6
1.1.2.1 Ungleichungen	8
1.1.2.2 Intervalle	9
1.1.3 Vollständigkeit von \mathbb{R}	10
1.1.3.1 Vollständigkeitsaxiom von \mathbb{R}	11
1.1.4 Betrags- und Signumsfunktion	12
1.2 Komplexe Zahlen	15
1.2.1 Erweiterung von \mathbb{R} zum Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	15
1.2.2 Trigonometrische Form und Exponentialform komplexer Zahlen	24
1.2.3 Abbildungen der Ebene	36
1.2.4 Anwendungen komplexer Zahlen in der Elektrotechnik . .	40
1.2.4.1 Symbolische Methode	40
1.2.4.2 Procedere (am Beispiel der Spannung)	43
1.2.4.3 Reelles und komplexes Zeigerdiagramm	44
1.2.4.4 Behandlung eines Wechselstromkreises mit der symbolischen Methode	46
1.2.4.5 Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis .	54
1.3 Zusammenfassung	56
2 Funktionen	57
2.1 Allgemeine Eigenschaften	57
2.2 Algebraische Funktionen	65
2.2.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	66
2.2.1.1 Horner-Schema	67
2.2.1.2 Übergang zu einem neuen Entwicklungspunkt .	71
2.2.1.3 Divisionsalgorithmus	74
2.2.1.4 Linearfaktorzerlegung von Polynomen	76
2.2.1.5 Interpolation	78

2.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	83
2.2.2.1	Definitionslücken	85
2.2.2.2	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	89
2.2.3	Potenz- und Wurzelfunktionen	91
2.2.3.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	91
2.2.3.2	Wurzelfunktionen	93
2.2.3.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	95
2.2.4	Kegelschnitte	98
2.3	Transzendente Funktionen	103
2.3.1	Exponential- und Logarithmusfunktionen	103
2.3.1.1	Exponentialfunktionen	103
2.3.1.2	Logarithmusfunktionen	112
2.3.1.3	Exponential- und Logarithmusgleichungen	119
2.3.2	Trigonometrische Funktionen	121
2.3.2.1	Definition, Periodizität, Graph	121
2.3.2.2	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	125
2.3.2.3	Arcusfunktionen	128
2.3.2.4	Trigonometrische Gleichungen	133
2.3.3	Hyperbelfunktionen und Areafunktionen	136
2.3.3.1	Hyperbelfunktionen	136
2.3.3.2	Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	139
2.3.3.3	Areafunktionen	143
2.3.4	Harmonische Schwingungen	147
2.3.4.1	Superposition von Schwingungen	150
2.4	Zusammenfassung	169
3	Folgen und Reihen	170
3.1	Reelle und komplexe Zahlenfolgen	170
3.1.1	Konvergenz von Folgen	171
3.1.2	Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen	175
3.1.3	Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß	181
3.1.4	Beispiele	184
3.2	Numerische Reihen	186
3.2.1	Einführung	186
3.2.2	Definition, Konvergenz	188
3.2.3	Beispiele	190
3.2.4	Umordnung von Reihen, absolute Konvergenz	193
3.2.5	Konvergenzkriterien	198
3.3	Potenzreihen	207
3.3.1	Konvergenz von Potenzreihen	208
3.3.2	Eigenschaften von Potenzreihen	213
3.3.3	Beispiele	215
3.4	Zusammenfassung	217
4	Grenzwerte und Stetigkeit	218
4.1	Grenzwerte von Funktionen	218

4.1.1	Problemstellung	218
4.1.2	Eigentlicher Grenzwert	222
4.1.3	Einseitiger Grenzwert	230
4.1.4	Uneigentlicher Grenzwert	232
4.2	Stetigkeit von Funktionen	233
4.2.1	Rechenregeln für stetige Funktionen	239
4.2.2	Eigenschaften stetiger Funktionen	240
4.3	Zusammenfassung	243
5	Differentiation von Funktionen einer reellen Variable	245
5.1	Differenzierbarkeit einer Funktion	246
5.1.1	Definition und Beispiele	246
5.1.2	Zur historischen Entwicklung der Differentialrechnung	251
5.2	Ableitung elementarer Funktionen	253
5.3	Differentiationsregeln	256
5.3.1	Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenregel	257
5.3.2	Kettenregel	260
5.3.3	Differentiation der Umkehrfunktion	261
5.4	Wichtige Sätze der Differentialrechnung	264
5.4.1	Satz von Rolle	265
5.4.2	Mittelwertsätze der Differentialrechnung	268
5.5	Anwendungen der Differentialrechnung	275
5.5.1	Höhere Ableitungen	275
5.5.2	Grenzwertbestimmung unbestimmter Ausdrücke	276
5.5.3	Kurvendiskussion	283
5.5.4	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen	295
5.5.5	Fehlerrechnung	301
5.5.5.1	Absoluter - und relativer Fehler	303
5.5.5.2	Fehlerfortpflanzung und logarithmische Differentiation	304
5.5.5.3	Das Differential	307
5.5.6	Newton'sches Tangentenverfahren	311
5.6	Differentiation von Potenzreihen	314
5.7	Taylor-Polynome und Taylor-Reihen	318
5.7.1	Taylor'sche Formel (Satz von Taylor)	320
5.7.2	Anwendungen der Taylor'schen Formel	327
5.7.3	Taylor-Reihen	328
5.7.3.1	Taylor-Reihen und Potenzreihen	333
5.7.3.2	Beispiele	334
5.8	Zusammenfassung	339
	Stichwortverzeichnis	340

Kapitel 1

Zahlen

1.1 Reelle Zahlen

1.1.1 Axiomatische Einführung

\mathbb{R} bezeichne die Menge der reellen Zahlen, also aller endlichen- oder unendlichen Dezimalbrüche, periodisch oder nichtperiodisch. Im Umgang mit ihnen sollen die folgenden Gesetze (*Axiome*) gelten:

Definition 1.1 Axiome der reellen Zahlen

In \mathbb{R} werden zwei Verknüpfungen (Operationen) definiert, genannt *Addition* und *Multiplikation*, die den folgenden Gesetzen gehorchen:

(a) Summe:

(i) Innere Verknüpfung:

$$a + b \in \mathbb{R} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(ii) Assoziativgesetz:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

(iii) Neutrales Element: Es gibt genau eine reelle Zahl 0 (*Null*) mit der Eigenschaft

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

(iv) Inverses Element: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert genau ein Element $(-a) \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

(v) Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(b) Produkt:

(i) Innere Verknüpfung:

$$a \cdot b \in \mathbb{R} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(ii) Assoziativgesetz:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

(iii) Neutrales Element: Es gibt genau eine reelle Zahl 1 (*Eins*) mit der Eigenschaft

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

(iv) Inverses Element: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ existiert genau ein Element $(a^{-1}) \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

(v) Kommutativgesetz:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(c) Distributivgesetze:

$$(i) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

$$(ii) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Bemerkung

(i) Wegen der Kommutativität der Multiplikation ist (c) (ii) hier überflüssig.

(ii) Gelten von (a) und (b) nicht alle Gesetze, so bezeichnet man (abhängig von den Gesetzen, welche gültig sind) die jeweiligen Mengen wie folgt:

- | | | |
|------------------------------------|---|--|
| (a) (i)-(iv) | : | <i>Gruppe</i> |
| (a) (i)-(v) | : | <i>kommutative oder Abel'sche Gruppe</i> |
| (a) (i)-(v) \wedge (b) (i)-(ii) | : | <i>Ring</i> |
| (a) (i)-(v) \wedge (b) (i)-(iii) | : | <i>Integritätsbereich</i> |
| (a) (i)-(v) \wedge (b) (i)-(iv) | : | <i>Körper</i> |
| (a) (i)-(v) \wedge (b) (i)-(v) | : | <i>kommutativer Körper</i> |

- (iii) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ ist eine kommutative Gruppe
 $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ ist eine kommutative Gruppe
 $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ ist eine kommutative Gruppe
 $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ ist ein kommutativer Körper

(iv) Trägermengenkonvention:

Man spricht von \mathbb{R} als „Körper der reellen Zahlen“, obwohl man $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ meint, also die Menge \mathbb{R} , versehen mit der Struktur der Addition und der Multiplikation.

Aus den Körperaxiomen lassen sich alle bekannten Rechenregeln herleiten ($a, b, x \in \mathbb{R}$):

$$(i) \quad a + x = b \implies x = (-a) + b =: b - a$$

$$(ii) \quad a \cdot x = b \implies x = a^{-1} \cdot b =: \frac{b}{a} = b/a \quad (a \neq 0)$$

$$(iii) \quad a \cdot 0 = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0 \quad (\text{Nullteilerfreiheit})$$

$$(v) \quad b/a = 0 \implies b = 0$$

Die multiplikative Sonderrolle der Null drückt sich darin aus, daß sie kein (multiplikatives) Inverses besitzt. Andernfalls wäre nämlich

$$0 \cdot 0^{-1}$$

sowohl $= 0$ (s. (iii) oben) als auch $= 1$ (da Produkt mit ihrem Inversen).

Man beschreibt diese Tatsache durch den Satz, die Division durch 0 sei unmöglich oder sie sei „verboten“. Man gewöhne sich an, vor jeder Division zu prüfen, ob der Divisor ungleich Null ist.

Auch eine Zahl $a \neq 0$ läßt sich nicht durch Null teilen. Andernfalls folgte aus

$$\frac{a}{0} =: b$$

die Aussage

$$a = 0 \cdot b = 0,$$

also ein Widerspruch zur Voraussetzung $a \neq 0$.

Die Assoziativgesetze erlauben das Weglassen von Klammern in Summen bzw. Produkten von mehr als zwei Operanden (Summanden bzw. Faktoren). Damit sind die folgenden Ausdrücke eindeutig definiert:

$$\sum_{i=1}^n c_i := c_1 + \dots + c_n$$

$$\prod_{i=1}^n c_i := c_1 \cdot \dots \cdot c_n$$

Das Kommutativgesetz der Addition ermöglicht die folgenden Regeln für den Umgang mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^n (c_i + d_i) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$$

Die letzte Regel besagt, daß man eine Matrix spalten- oder zeilenweise aufsummieren kann. Das Distributivgesetz läßt sich verallgemeinern zu

$$\sum_{i=1}^n (a \cdot c_i) = a \cdot \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Beispiel 1.1

Arne, Björn, Christine und Doris planen eine zweiwöchige Tauchreise ans Mittelmeer. Zur Ermittlung der Gesamtkosten erstellen sie eine Tabelle (Tab. 1.1), welche die Einzelkosten aufschlüsselt. Um jetzt die Gesamtkosten zu ermitteln, lassen sich einerseits die Kosten k pro Gegenstand g ermitteln und danach über die Anzahl der Personen addieren als auch umgekehrt:

$$\sum_{p=1}^4 \left(\sum_{g=1}^6 k_{pg} \right) = \sum_{g=1}^6 \left(\sum_{p=1}^4 k_{pg} \right).$$

1.1.1.1 Spezielle Zahlbereiche in \mathbb{R}

\mathbb{N} :

Innerhalb der reellen Zahlen \mathbb{R} bildet man durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} 1 &:= 1, 0 \\ 2 &:= 1 + 1 \\ 3 &:= 1 + 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

die Teilmenge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ der *natürlichen Zahlen*. Man setzt weiterhin

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Achtung

Diese Definitionen der Mengen \mathbb{N} und \mathbb{N}_0 sind zwar üblich, aber nicht unbedingt in allen Disziplinen. In der Informatik beispielsweise wird die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0 mit dem Symbol \mathbb{N} bezeichnet, also unsere

	Arne	Björn	Christine	Doris	Summe
Reisekosten	162	154	154	162	632
Unterkunft	280	280	280	280	1 120
Verpflegung	210	210	210	210	840
12 Tauchgänge	180	180	180	180	720
Geräteausleihe	--	70	70	140	280
Nachttauchgänge	20	--	10	--	30
Summe	852	894	904	972	3 622

Tabelle 1.1: Gesamtkosten einer Tauchreise

Menge \mathbb{N}_0 . Das hat damit zu tun, daß Feldindices normalerweise bei 0 anfangen.

\mathbb{Z} :

Diejenigen reellen Zahlen x , welche Lösungen der Gleichungen

$$a + x = b \quad (a, b \in \mathbb{N})$$

sind, nennt man *ganze Zahlen*:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

\mathbb{Q} :

Diejenigen reellen Zahlen x , welche Lösungen der Gleichungen

$$a \cdot x = b \quad (a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0)$$

sind, nennt man *rationale Zahlen*:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ geeignet, } a \neq 0 \right\}.$$

Beispiele 1.2

- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ sind kommutative Körper.
- $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist ein Integritätsbereich, also ein Ring mit einem multiplikativen Einselement.
- $\langle 2\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist ein Ring.
- $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ ist keine Gruppe.
- $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ ist auch keine Gruppe.

1.1.1.2 Potenzen

Aufgrund des Assoziativgesetzes der Multiplikation ist die Definition von *Potenzen* möglich:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 & (a \in \mathbb{R}) \\ a^{n+1} &:= a^n \cdot a & (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0) \\ a^{-n} &:= (a^{-1})^n & (a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Dann gelten die bekannten *Potenzgesetze* $(a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & (a \neq 0) \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & (b \neq 0) \end{aligned}$$

Wenn a und b größer als Null sind, dann gelten diese Gesetze auch für beliebige reelle Exponenten m oder n . Problem dabei: Was bedeutet das, also etwa 2^π oder $\pi^{\sqrt{2}}$?

1.1.2 Ordnung in \mathbb{R}

Neben den Körpereigenschaften besitzen die reellen Zahlen eine weitere vorteilhafte Eigenschaft, sie lassen sich nämlich anordnen.

Definition 1.2

Das Quadrupel $\langle \mathbb{K}, +, \cdot, < \rangle$ heißt ein *geordneter Körper*, wenn $\langle \mathbb{K}, +, \cdot \rangle$ ein kommutativer Körper und dort eine Relation „ $<$ “ erklärt ist, welche den folgenden Bedingungen genügt:

(i) *Trichotomiegesetz:*

Für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{K}$ gilt *genau eine* der folgenden drei Beziehungen:

$$a < b \quad \vee \quad a = b \quad \vee \quad b < a.$$

(ii) *Transitivitätsgesetz:*

$$\bigwedge_{a,b,c \in \mathbb{K}} a < b \quad \wedge \quad b < c \quad \implies \quad a < c$$

(iii) *Monotoniegesetze:*

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{K}} a < b \quad \implies \quad \begin{cases} a + c < b + c & (c \in \mathbb{K}) \\ a \cdot c < b \cdot c & (c \in \mathbb{K}, 0 < c) \end{cases}$$

Satz 1.1

In \mathbb{R} ist eine Relation $a < b$ erklärbar, welche den Bedingungen von Definition 1.2 genügt, \mathbb{R} ist also bzgl. „ $<$ “ ein geordneter Körper.

Definition 1.3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann wird bezeichnet:

- (i) $a > b$: $\iff b < a$
- (ii) $a \leq b$: $\iff a < b \vee a = b$
- (iii) $a \geq b$: $\iff a > b \vee a = b$
- (iv) a heißt *positiv* : $\iff a > 0$
- (v) a heißt *negativ* : $\iff a < 0$
- (vi) a heißt *nichtpositiv* : $\iff a \leq 0$
- (vii) a heißt *nichtnegativ* : $\iff a \geq 0$

Aufgabe

Kann man auf \mathbb{R}^2 eine Ordnung im Sinne von Definition 1.2 erklären? Wenn ja, wie?

* Beispiel 1.3

Dieses Beispiel soll nur aufzeigen, daß es in der Mathematik durchaus noch andere Situationen gibt, in denen der Ordnungsbegriff eine Rolle spielt als diejenigen, welche man sich für gewöhnlich vorstellt.

Seien \mathcal{M} eine endliche Menge und $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ ihre Potenzmenge. Für zwei Elemente $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ werde erklärt:

$$\begin{aligned} A + B &:= A \cup B \\ A \cdot B &:= A \cap B \\ A < B &:\Leftrightarrow A \subsetneq B \end{aligned}$$

Ist damit auf $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ eine Ordnung im Sinne von Definition 1.2 erklärt? Wenn nicht, welches der drei Gesetze ist verletzt?

1.1.2.1 Ungleichungen

Das Umgehen mit den „Ungleichheitszeichen“, also das Rechnen mit „Ungleichungen“ gehört mit zum wichtigsten in der Analysis. Im folgenden Satz werden dazu einige Regeln zusammengestellt, die zum „Handwerkszeug“ gehören ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

Satz 1.2

- (i) $a < b \iff b - a > 0$
- (ii) $a > 0 \iff (-a) < 0$
- (iii) $a < b \wedge c < 0 \implies a \cdot c > b \cdot c$
- (iv) $a > 0 \iff 1/a > 0$
- (v) $a > b > 0 \iff 1/b > 1/a > 0$
- (vi) $a > b > 0 \implies a/b > 1$
- (vii) $a \neq 0 \iff a^2 > 0$

Beispiel 1.4

Man bestimme die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ x : x \in \mathbb{R}, x \neq 4, \frac{x+4}{x-4} \geq 3 \right\}.$$

Lösung

Sei $x \in \mathcal{M}$. Dann wird eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen des Nenners der definierenden Aussageform von \mathcal{M} vorgenommen:

(i) $x - 4 > 0$: $\rightarrow x > 4$

Unter dieser Bedingung läßt sich die Ungleichung $\frac{x+4}{x-4} \geq 3$ mit dem Nenner multiplizieren, ohne daß sich das Ungleichheitszeichen ändert, und man erhält

$$x + 4 \geq 3x - 12 \iff 16 \geq 2x \iff 8 \geq x,$$

insgesamt also

$$\mathcal{L}_1 := \{x : x \in \mathbb{R}, 4 < x \leq 8\}.$$

(ii) $x - 4 = 0$: Dieser Fall kommt nicht vor, also ist $\mathcal{L}_2 = \emptyset$.

(iii) $x - 4 < 0$: $\rightarrow x < 4$

Unter dieser Bedingung läßt sich die Ungleichung $\frac{x+4}{x-4} \geq 3$ mit dem Nenner multiplizieren, wobei sich das Ungleichheitszeichen ändert, und man erhält

$$x + 4 \leq 3x - 12 \iff 16 \leq 2x \iff 8 \leq x,$$

insgesamt also

$$x < 4 \quad \wedge \quad x \geq 8.$$

Solch ein x kann es nicht geben, man erhält hier $\mathcal{L}_3 = \emptyset$.

Somit lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \\ &= \{x : x \in \mathbb{R}, 4 < x \leq 8\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{x : x \in \mathbb{R}, 4 < x \leq 8\}. \end{aligned}$$

1.1.2.2 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißen

$$[a, b] := \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad \text{abgeschlossenes Intervall}$$

$$(a, b) := \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad \text{offenes Intervall}$$

$$[a, b) := \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \quad \text{halboffene Intervalle}$$

Es wird gesetzt:

$$[a, \infty) := \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$$

$$(a, \infty) := \{x : x \in \mathbb{R}, a < x\}$$

$$(-\infty, a] := \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x : x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) := \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Bemerkung

Die obigen Setzungen mit dem ∞ -Zeichen sind ausschließlich symbolisch zu verstehen, keinesfalls ist damit gemeint, daß es sich bei ∞ oder $-\infty$ um reelle Zahlen handelt, mit denen man nach den Körperaxiomen rechnen darf. „Rechnungen“ der Form „ $\infty - \infty = 0$ “ oder „ $\infty/\infty = 1$ “ sind also weder richtig noch falsch, sondern einfach unsinnig.

Definition 1.4

- (i) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

ε -Umgebung von x .

- (ii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. A heißt *Umgebung von x* , wenn es eine ε -Umgebung von x gibt, die in A enthalten ist:

$$U_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

1.1.3 Vollständigkeit von \mathbb{R} **Definition 1.5**

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$.

- (i) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt eine *untere (obere) Schranke* von \mathcal{M} , falls gilt:

$$a \leq x \quad (a \geq x) \quad (x \in \mathcal{M}).$$

Wenn eine untere (obere) Schranke von \mathcal{M} existiert, so heißt \mathcal{M} *nach unten (nach oben) beschränkt*. Ist \mathcal{M} nach unten und nach oben beschränkt, so heißt \mathcal{M} *beschränkt*.

- (ii) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt

untere Grenze oder *Infimum* von \mathcal{M}
(*obere Grenze* oder *Supremum* von \mathcal{M}),

falls gilt:

a ist untere (obere) Schranke von \mathcal{M} , und es gibt keine untere (obere) Schranke von \mathcal{M} , welche größer (kleiner) als a ist. M.a.W., die untere (obere) Grenze von \mathcal{M} ist die größte untere (kleinste obere) Schranke von \mathcal{M} .

Abkürzung¹: $\inf \mathcal{M}, \sup \mathcal{M}$

also:

Infimum von \mathcal{M} = untere Grenze von \mathcal{M} = größte untere Schranke von \mathcal{M}
 Supremum von \mathcal{M} = obere Grenze von \mathcal{M} = kleinste obere Schranke von \mathcal{M}

(iii) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Minimum* (*Maximum*) von \mathcal{M} , falls gilt:

- a ist Infimum (Supremum) von \mathcal{M}
- $a \in \mathcal{M}$

Abkürzung: $\min \mathcal{M}, \max \mathcal{M}$

Beispiele 1.5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\inf [a, b] = \inf (a, b) = \inf (a, b) = a$$

$$\sup [a, b] = \sup [a, b) = \sup (a, b) = b$$

$$\min [a, b] = \min [a, b) = a$$

$$\max [a, b] = \max (a, b) = b$$

$\min (a, b), \min (a, b), \max [a, b), \max (a, b)$ existieren nicht!

1.1.3.1 Vollständigkeitsaxiom von \mathbb{R}

Definition 1.6

Ein geordneter Körper \mathbb{K} heißt *vollständig*, wenn gilt:

Jede nach unten beschränkte Teilmenge von \mathbb{K} besitzt ein Infimum (in \mathbb{K} !).

Satz 1.3

- (i) Der geordnete Körper $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, < \rangle$ ist vollständig.
- (ii) Der geordnete Körper $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, < \rangle$ ist nicht vollständig.

¹Im Englischen heißen diese Begriffe bezeichnenderweise

$\inf \mathcal{M} = \text{glb } \mathcal{M}$ (greatest lower bound),

$\sup \mathcal{M} = \text{lub } \mathcal{M}$ (lowest upper bound).

Beweis von (ii):

Die Menge

$$\mathcal{M} := \{x : x \in \mathbb{Q}, x \geq 0, x^2 > 2\}$$

ist zwar nach unten beschränkt, besitzt aber kein Infimum (welches per definitionem in \mathbb{Q} liegen müßte!)

Eine zur Vollständigkeit äquivalente Formulierung ist, daß die „Zahlengerade \mathbb{R} “ keine „Löcher“ hat in folgendem Sinne:

Sind $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ ($x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}$), dann gibt es mindestens ein $c \in \mathbb{R}$, welches „zwischen“ \mathcal{M} und \mathcal{N} liegt:

$$\bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ y \in \mathcal{N}}} x \leq c \leq y$$

Beispiel 1.6

\mathbb{Q} ist nicht vollständig, denn zwischen den Mengen

$$\mathcal{M} := \{x : x \in \mathbb{Q}, x \in [0, 4], x^2 < 2\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N} := \{x : x \in \mathbb{Q}, x \in [0, 4], x^2 > 2\}$$

liegt kein Element aus \mathbb{Q} :

$$\neg \left(\bigvee_{c \in \mathbb{Q}} \bigwedge_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ y \in \mathcal{N}}} x \leq c \leq y \right) \equiv \bigwedge_{c \in \mathbb{Q}} \bigvee_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ y \in \mathcal{N}}} c < x \vee y < c$$

1.1.4 Betrags- und Signumsfunktion

Der „Abstand“ zweier reeller Zahlen auf der reellen Zahlengeraden muß stets eine nichtnegative reelle Zahl sein. Die Vorstellung dieses Abstandes soll jetzt präzisiert werden:

Definition 1.7

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x (lies: Betrag x). Die dadurch definierte Funktion

$$\begin{array}{ccc} |\cdot| : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

heißt *Betragsfunktion*. Geometrische Veranschaulichung s. Abb. 1.1.

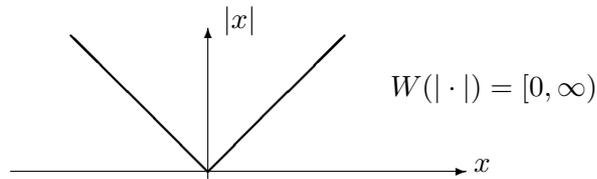


Abbildung 1.1: Betragsfunktion

Die im folgenden definierte Funktion ordnet jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zu bzw. der Null die Null:

Definition 1.8

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ -1 & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

das *Signum* von x (lies: Signum x). Die dadurch definierte Funktion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sgn} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sgn} x \end{array}$$

heißt *Signumsfunktion*. Geometrische Veranschaulichung s. Abb. 1.2.

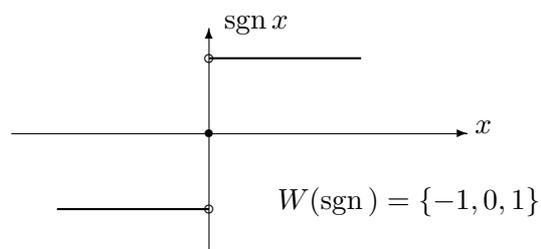


Abbildung 1.2: Signumsfunktion

Satz 1.4

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $|x| \geq 0$
- (ii) $|x| = 0 \iff x = 0$
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung
- (iv) $|x| = |-x|$

- (v) $x \leq |x|$
- (vi) $|x| - |y| \leq |x + y|$, $|y| - |x| \leq |x + y|$
 $\longrightarrow | |x| - |y| | \leq |x + y|$
- (vii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (viii) $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$ ($x \neq 0$)
- (ix) $|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)
- (x) $|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$)
- (xi) $|x| \cdot |x| = |x|^2 = x^2$
- (xii) $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$
- (xiii) $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$

Beispiel 1.7

Man bestimme die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ x : x \in \mathbb{R}, x \neq 4, \left| \frac{x+2}{x-4} \right| \leq 2 \right\}.$$

Lösung

Sei $x \in \mathcal{M}$. Dann gilt nach Satz 1.4

$$\left| \frac{x+2}{x-4} \right| \stackrel{\text{(vii)}}{=} |x+2| \cdot \left| \frac{1}{x-4} \right| \stackrel{\text{(viii)}}{=} |x+2| \cdot \frac{1}{|x-4|} = \frac{|x+2|}{|x-4|},$$

und es folgt durch Multiplikation mit der positiven Zahl $|x-4|$ die Bedingung

$$|x+2| \leq 2|x-4|.$$

1. $x+2 \geq 0$: $\rightarrow x \geq -2$

(a) $x-4 \geq 0$: $\rightarrow x \geq 4$

Beide Bedingungen zusammen bedeuten $x \geq 4$. Damit erhält man

$$x+2 \leq 2x-8 \iff 10 \leq x,$$

und als Lösungsgesamtheit dieses Punktes: $\mathcal{L}_{1.(a)} = [10, \infty)$.

$$(b) \quad x - 4 < 0 : \rightarrow x < 4$$

Beide Bedingungen zusammen bedeuten $x \in [-2, 4)$. Damit erhält man

$$x + 2 \leq -2(x - 4) = -2x + 8 \iff 3x \leq 6 \iff x \leq 2,$$

und als Lösungsgesamtheit dieses Punktes: $\mathcal{L}_{1.(b)} = [-2, 2]$.

$$2. \quad x + 2 < 0 : \rightarrow x < -2$$

$$(a) \quad x - 4 \geq 0 : \rightarrow x \geq 4$$

Beide Bedingungen zusammen bedeuten einen Widerspruch! Damit erhält man als Lösungsgesamtheit dieses Punktes: $\mathcal{L}_{2.(a)} = \emptyset$.

$$(b) \quad x - 4 < 0 : \rightarrow x < 4$$

Beide Bedingungen zusammen bedeuten $x < -2$. Damit erhält man

$$-(x + 2) \leq -2(x - 4) = -2x + 8 \iff x \leq 10,$$

und als Lösungsgesamtheit dieses Punktes: $\mathcal{L}_{2.(b)} = (-\infty, -2)$.

Somit lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{L}_{1.(a)} \cup \mathcal{L}_{1.(b)} \cup \mathcal{L}_{2.(a)} \cup \mathcal{L}_{2.(b)} \\ &= [10, \infty) \cup [-2, 2] \cup \emptyset \cup (-\infty, -2) \\ &= (-\infty, 2] \cup [10, \infty) \\ &= \mathbb{R} \setminus (2, 10). \end{aligned}$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Erweiterung von \mathbb{R} zum Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen

Für jede reelle Zahl x ist stets $x^2 = |x|^2 \geq 0$. Daher kann die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung besitzen.

Man könnte nun einfach ein neues Symbol „erfinden“ – etwa $\sqrt{-1}$. Dieses Symbol kann dann keine reelle Zahl mehr sein, müßte also etwas sein, was „jenseits“ der reellen Zahlen liegt, also über sie hinausgeht. Dann ist aber auch nicht bekannt, welchen Rechengesetzen dieses Symbol denn gehorcht. Als „Lösung“ der Gleichung $x^2 = -1$ müßte allerdings auf jeden Fall gelten:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

Nimmt man nun an, daß das Symbol $\sqrt{-1}$ auch den Körperaxiomen genügt, wie sie für die reellen Zahlen gelten, so erhielte man für jede quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

die folgenden „Lösungen“:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{-1}.$$

Der zweite Ausdruck ist, da er das Symbol $\sqrt{-1}$ enthält, keine reelle Zahl. Selbst die Operationen „+“ und „·“ haben hier nur formale Bedeutung, da Addition und Multiplikation bisher nur für reelle Zahlen, Funktionen, Vektoren, Matrizen o.ä. definiert sind, und $\sqrt{-1}$ gehört zu keiner dieser Mengen.

Im folgenden wird dieser Gedanke weitersponnen. Man tut einfach so, als ob Ausdrücke der Form $a + b \cdot \sqrt{-1}$ für reelle Zahlen a und b definiert sind und den für \mathbb{R} bekannten Körperaxiomen genügen. Daraus leitet man Folgerungen ab. Zum Schluß überlegt man sich dann, wie diese Größen auf eine solide Grundlage gestellt, d.h. mit Hilfe schon bekannter Begriffsbildungen definiert werden können.

Der Grund für die Reihenfolge dieser Vorgehensweise liegt darin, daß man hofft, auf diese Weise auf Ideen zu kommen, mit Hilfe welcher Menge diese neuen Symbole – welche später *komplexe Zahlen* genannt werden – denn nun realisiert werden können.

Annahme

Es existiert eine Menge \mathbb{K} mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$
2. \mathbb{K} ist ein Körper.
3. In \mathbb{K} existiert eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, also ein Element, i genannt, welches der Bedingung $i^2 = -1$ genügt.

Die anschließende Folgerung liefert notwendige Konsequenzen, die sich aus den obigen Annahmen ergeben:

Folgerung

- (i) \mathbb{K} muß alle Elemente der Form

$$x + i \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

enthalten.

- (ii) $x + iy = u + iv \iff x = u \wedge y = v \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$
- (iii) $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$
- (iv) $(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$
- (v) $\mathbb{C} := \{z : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}$ bildet mit den Operationen (iii) und (iv) einen Körper, und zwar den kleinsten, in dem alle quadratischen Gleichungen lösbar sind. Er wird *Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen* genannt.

Beweis

(i) Folgt aus allen drei Annahmen.

(ii) Seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x + iy = u + iv &\iff (x - u) = i(v - y) \\ &\implies (x - u)^2 = i^2(v - y)^2 = -(v - y)^2 \\ &\iff (x - u)^2 + (v - y)^2 = 0 \\ &x = u \quad \wedge \quad y = v. \end{aligned}$$

(iii) Folgt aus 2. und 3. der Annahme.

(iv) Folgt aus 2. und 3. der Annahme.

(v) In der Einleitung dieses Abschnittes wurde gezeigt, daß jede quadratische Gleichung lösbar ist, wenn nur $i := \sqrt{-1}$ bekannt ist. Jeder andere Körper mit den oben aufgeführten Eigenschaften muß mindestens alle Ausdrücke der Form $x + iy$ für reelle Zahlen x und y enthalten, also ist \mathbb{C} der kleinste solche Körper.

Nach der Herleitung dieser Konsequenzen bleibt zu zeigen, daß \mathbb{C} tatsächlich definiert werden kann, d.h. daß man eine bekannte Menge so strukturieren kann, daß dabei \mathbb{C} herauskommt.

Die Folgerungen (ii) und (iii) für die Gleichheit und Addition komplexer Zahlen sind ersichtlich dieselben wie die entsprechenden Vorschriften für die Punkte $\langle x, y \rangle$ des Vektorraumes \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle &\iff x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 = y_2 \\ \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle \end{aligned}$$

Daß es die komplexen Zahlen gibt, kann man mit der Tatsache begründen, daß man die Ausdrücke $x + iy$ mit den Punkten $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ identifizieren kann, wenn man für letztere noch eine Multiplikation definiert, die zu obiger Multiplikation analog verläuft, also

$$\langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle := \langle x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1 \rangle.$$

Achtung

Dieses Produkt ist kein Skalarprodukt!

Satz 1.5

Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien zwei Operationen erklärt durch

$$+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\langle x, y \rangle + \langle u, v \rangle := \langle x + u, y + v \rangle,$$

$$\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\langle x, y \rangle \cdot \langle u, v \rangle := \langle xu - yv, xv + yu \rangle.$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper, genannt der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

Bemerkung

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist ein Element $\langle x, y \rangle$ der Menge \mathbb{R}^2 , auf der zusätzlich die obige Addition und Multiplikation definiert worden sind. In Zukunft wird daher nicht mehr zwischen komplexen Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und Punkten $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$, für die zusätzlich die beiden obigen Rechenoperationen definiert wurden, unterschieden. In diesem Sinne wird z synonym als Zahl aus \mathbb{C} oder als Punkt $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ angesprochen, s. Abb. 1.3.

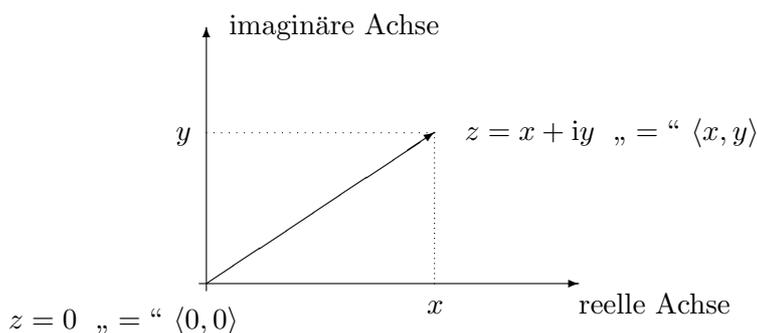


Abbildung 1.3: Komplexe Zahl

Nun soll überlegt werden, wie die reellen Zahlen in die komplexen Zahlen *eingebettet* werden können. Darunter versteht man den folgenden Vorgang:

Man arbeitet beispielsweise im Bereich der reellen Zahlen auch mit natürlichen Zahlen, etwa wenn eine reelle Zahl den Wert einer natürlichen Zahl hat. So spricht man von der Zahl „4“, wenn man die Zahl „4,0“ meint. Genauso möchte

man nun mit denjenigen komplexen Zahlen verfahren, die vor dem „i“ den Faktor Null haben. Dabei macht man die folgende Beobachtung:

$$\begin{aligned}\langle x, 0 \rangle + \langle u, 0 \rangle &= \langle x + u, 0 \rangle & (x, u \in \mathbb{R}), \\ \langle x, 0 \rangle \cdot \langle u, 0 \rangle &= \langle x \cdot u, 0 \rangle & (x, u \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Mit den speziellen Paaren $\langle x, 0 \rangle$ läßt sich also wie mit reellen Zahlen selbst rechnen. Da ferner gilt

$$\begin{aligned}\langle 0, 1 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle &= \langle -1, 0 \rangle & \text{und} \\ \langle x, y \rangle &= \langle x, 0 \rangle + \langle 0, 1 \rangle \cdot \langle y, 0 \rangle & (x, y \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

kann man durch die folgende Identifizierung zu der anfangs dieses Abschnittes eingeführten Schreibweise übergehen:

$$\begin{aligned}\langle x, 0 \rangle &\longleftrightarrow x & (x \in \mathbb{R}) \\ \langle 0, 1 \rangle &\longleftrightarrow i, \\ \langle x, y \rangle &= \langle x, 0 \rangle + \langle 0, 1 \rangle \cdot \langle y, 0 \rangle & (x, y \in \mathbb{R}) \\ z &= x + i \cdot y & (x, y \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl $z := \langle x, y \rangle$ mit reellen Zahlen x und y wird demnach in der Form $z = x + iy$ geschrieben.

Definition 1.9

Die Darstellung der komplexen Zahl z in der Form $z = x + iy$ mit reellen Zahlen x und y heißt *Normalform* (auch: *algebraische Form* oder *kartesische Form*) komplexer Zahlen.

Bemerkung

Die komplexe Zahl i wurde eingeführt, um die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zu lösen. Formal ergab sich „so etwas wie $\sqrt{-1}$ “. Man sollte diese Motivation allerdings nur als eine solche benutzen und nicht als Hilfsmittel, um damit Dinge konkret auszurechnen, selbst wenn das in einigen Büchern so verwendet wird. Man läuft sonst Gefahr, einige für reelle Wurzeln gültige Beziehungen zu übernehmen, welche im Komplexen nicht mehr gelten.

Beispiel

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Grundrechenarten mit komplexen Zahlen in der Normalform

Generell läßt sich sagen, daß komplexe Zahlen sich bzgl. der Grundrechenarten so verhalten wie Brüche, lediglich die Beziehung $i^2 = -1$ ist zusätzlich zu berücksichtigen.

Seien $z_1 := x_1 + iy_1$, $z_2 := x_2 + iy_2$. Dann gilt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Beispiele 1.8

$$(1 + 2i) + (3 + i) = 4 + 3i$$

$$(4 + 3i) - (7 - 2i) = -3 + 5i$$

$$(2 - i) \cdot (1 + i) = 2 + 2i - i - i^2 = 3 + i$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2i}{3 + 4i} &= \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &= \frac{3 - 4i + 6i - 8i^2}{3^2 - (4i)^2} = \frac{11 + 2i}{25} = \frac{11}{25} + i \frac{2}{25} \end{aligned}$$

Geometrische Deutung

Als geordnete Paare lassen sich die komplexen Zahlen auch durch Pfeile veranschaulichen. Zur Unterscheidung von Vektoren des \mathbb{V}^2 nennt man sie dann *Zeiger*. Dabei ist es manchmal üblich, die komplexe Zahl in diesem Fall zu unterstreichen: \underline{z} bedeutet demnach eine komplexe Zahl, die als Zeiger zu veranschaulichen ist.

Die Addition bzw. Subtraktion läßt sich im \mathbb{R}^2 dann geometrisch als Addition bzw. Subtraktion von „Pfeilen“ deuten (Kräfteparallelogramm), s. Abb. 1.4.

Definition 1.10

(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + iy$. Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \Re z &:= x && (\text{Realteil von } z) \\ \Im z &:= y && (\text{Imaginärteil von } z) \end{aligned}$$

Man beachte: $\Im z$ ist eine reelle Zahl.

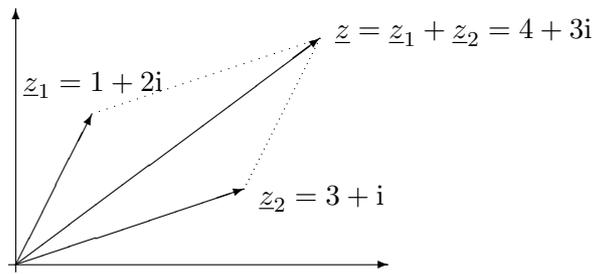


Abbildung 1.4: Addition komplexer Zahlen

- (ii) Eine komplexe Zahl z mit $\Im z = 0$ heißt *reell*, eine solche mit $\Re z = 0$ heißt *rein-imaginär*.

Da komplexe Zahlen als Elemente des \mathbb{R}^2 dargestellt werden, ja Elemente des \mathbb{R}^2 sind, auf denen zusätzlich eine Addition und eine Multiplikation definiert sind, lassen sich noch mehr Rechenoperationen mit ihnen geometrisch veranschaulichen, nicht nur die Addition. Eine wichtige ist die Spiegelung an der reellen Achse:

Definition 1.11

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + iy$. Dann heißt die Zahl

$$\bar{z} := x - iy = \Re z - i \cdot \Im z$$

die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

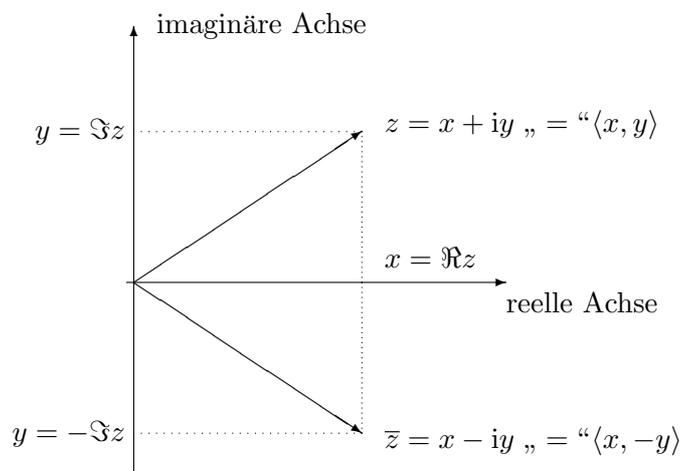


Abbildung 1.5: Konjugiert komplexe Zahl

Satz 1.6

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } \Re z &= \frac{1}{2} (z + \bar{z}) & (z \in \mathbb{C}) \\
 \Im z &= \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) & (z \in \mathbb{C}) \quad (= 0 \text{ für } z \in \mathbb{R}) \\
 \bar{\bar{z}} &= z & (z \in \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

(ii) Der Übergang zur konjugiert komplexen Zahl ist verträglich mit den Grundrechenarten im Körper \mathbb{C} , d.h. für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \overline{z \pm w} &= \bar{z} \pm \bar{w} \\
 \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\
 \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)
 \end{aligned}$$

Betrag einer komplexen Zahl

In \mathbb{R} läßt sich $|x|$ als Abstand der reellen Zahl x vom Nullpunkt O auf der reellen Zahlengeraden interpretieren.

In \mathbb{C} führt man eine Betragsfunktion ein, die genau dasselbe leistet, die also den Abstand des Punktes $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ vom Ursprung $O = \langle 0, 0 \rangle$ darstellt, s. Abb. 1.7:

$$\begin{array}{ccc}
 |\cdot| : & \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & z & \longmapsto |z| := \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2},
 \end{array}$$

also gerade der Euklidische Abstand im \mathbb{R}^2 .

Beispiel 1.9

Für den Betrag eines Scheinwiderstandes aus Ohm'schem Widerstand und Induktivität gilt

$$|R + i\omega L| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (R, L, \omega \in \mathbb{R}).$$

Ist z reell, d.h. von der Gestalt

$$z = x + i \cdot 0,$$

dann stimmt der komplexe Betrag mit dem reellen Betrag überein, denn es gilt:

$$|x + i \cdot 0|_{\text{komplex}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|_{\text{reell}}.$$

Daher braucht zwischen dem reellen Betrag $|\cdot|_{\text{reell}}$ und dem komplexen Betrag $|\cdot|_{\text{komplex}}$ nicht unterschieden zu werden, es wird einheitlich das Zeichen $|\cdot|$ verwandt.

Viele der für den Betrag reeller Zahlen aufgestellten Gleichungen und Ungleichungen lassen sich auf den Betrag komplexer Zahlen übertragen:

Satz 1.7

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (i) $|z| \geq 0$
- (ii) $|z| = 0 \iff z = 0$
- (iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung
- (iv) $|z| - |w| \leq |z + w|$, $|w| - |z| \leq |z + w|$
 $\implies ||z| - |w|| \leq |z + w|$
- (v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- (vi) $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ ($z \neq 0$)
- (vii) $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- (viii) $|z| \cdot |z| = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Definition 1.12

$$U_\varepsilon(z_0) := \{z : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

heißt ε -Umgebung von z_0 und ist eine offene Kreisscheibe vom Radius ε um z_0 .

Beispiel 1.10

Man bestimme die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ z : z \in \mathbb{C}, z \neq -2, \left| \frac{z-4}{z+2} \right| \leq 2 \right\}.$$

Lösung

Sei $z \in \mathcal{M}$ und $z =: x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |z - 4| \leq 2|z + 2| \\ \iff & \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \leq 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \\ \iff & (x-4)^2 + y^2 \leq 4[(x+2)^2 + y^2] \\ \iff & x^2 - 8x + 16 + y^2 \leq 4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 \\ \iff & 0 \leq x^2 + y^2 + 8x \\ \iff & (x+4)^2 + y^2 \geq 16 \end{aligned}$$

Somit lautet das Ergebnis:

$$\mathcal{M} = \{z : z \in \mathbb{C}, z = x + iy, (x + 4)^2 + y^2 \geq 16\}.$$

Es handelt sich dabei um das Äußere des Kreises mit dem Radius $r_0 = 4$ um den Punkt $z_0 = \langle -4, 0 \rangle$ in der komplexen Zahlenebene, s. Abb. 1.6.

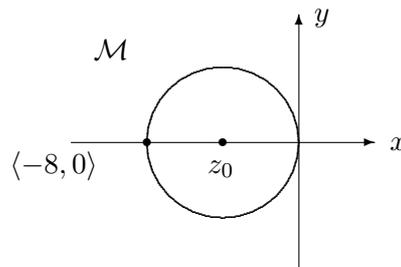


Abbildung 1.6: Kreis mit Radius $r = 4$ um den Punkt $z_0 = \langle -4, 0 \rangle$

Bemerkung

Verlorengegangen beim Übergang von \mathbb{R} zu \mathbb{C} ist die Totalordnung, man kann nicht alle komplexe Zahlen der Größe nach ordnen. Beispielsweise gilt für die komplexe Zahl i keine der drei Beziehungen

$$i < 0 \quad \vee \quad i = 0 \quad \vee \quad i > 0$$

im Sinne der Ordnungsrelation der reellen Zahlen, denn die Gültigkeit einer jeden dieser drei Bedingungen führt zu einem Widerspruch:

$$i < 0 \quad \longrightarrow \quad i \cdot i > i \cdot 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad i^2 = -1 > 0 \quad \text{Widerspruch !}$$

$$i = 0 \quad \longrightarrow \quad i^2 = -1 = 0 \quad \text{Widerspruch !}$$

$$i > 0 \quad \longrightarrow \quad i \cdot i > i \cdot 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad i^2 = -1 > 0 \quad \text{Widerspruch !}$$

1.2.2 Trigonometrische Form und Exponentialform komplexer Zahlen

Die Darstellung komplexer Zahlen in der *trigonometrischen Form* oder *Exponentialform* erfordert die Kenntnis *ebener Polarkoordinaten*, welche zuerst bereitgestellt werden sollen. Die komplexe Zahl $z = x + iy$ wird, statt durch die beiden reellen Zahlen x und y , durch zwei andere Größen dargestellt, den Polarkoordinaten r und ϕ .

Dabei gelten die folgenden Umrechnungsformeln:

- Polarkoordinaten \longrightarrow Kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot \cos \phi$$

$$y = r \cdot \sin \phi$$

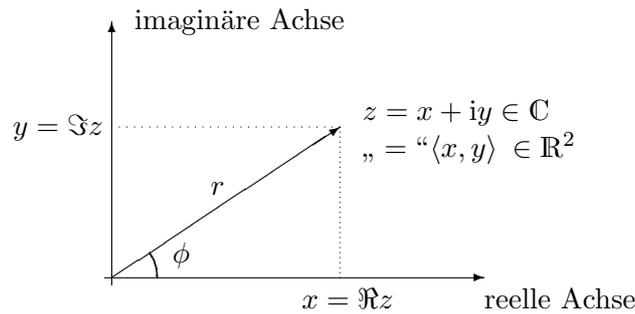


Abbildung 1.7: Polarkoordinaten

- Kartesische Koordinaten \rightarrow Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \phi = y/x \quad (\text{falls } x \neq 0)$$

Im Falle $r = 0$ (Koordinatenursprung) ist der Winkel ϕ unbestimmt. Es heißen:

r	:	<i>Radius</i>	:	Abstand vom Ursprung
ϕ	:	<i>Polarwinkel</i>	:	Winkel im mathematisch positiven Sinne mit der positiven Abszisse

Winkel werden dabei zweckmäßigerweise im sog. *Bogenmaß* gemessen:

Definition 1.13 Bogenmaß

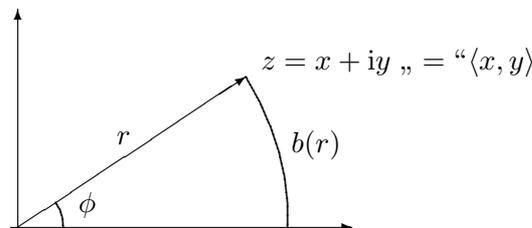


Abbildung 1.8: Bogenmaß

Das *Bogenmaß* eines Winkels ist der vom Radius r unabhängige Quotient (Ähnlichkeitssatz) aus Bogenlänge $b(r)$ und Radius r eines Kreissektors mit dem betreffenden Mittelpunktswinkel ϕ , s. Abb. 1.8. Es ist daher die Länge desjenigen Bogens, der im Einheitskreis ($r = 1$) dem Winkel ϕ gegenüberliegt:

$$\text{arc } \phi := \frac{b(1)}{1} = \frac{\phi}{360^\circ} \cdot 2\pi.$$

Das Bogenmaß ist eine einheitenlose („dimensionslose“) Zahl, manchmal mit der künstlichen Einheit „rad“ (Radian) versehen. Für das zugehörige Gradmaß ϕ gilt:

$$\frac{\phi}{360^\circ} = \frac{b(1)}{2\pi} \quad \longrightarrow \quad \phi = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot b(1).$$

Hat der Kreis den Radius r , so ergibt sich die Länge des Bogens, der dem Winkel ϕ gegenüberliegt, zu

$$b(r) := \frac{\phi}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = b(1) \cdot r.$$

Bisher ist das Bogenmaß eines Winkels ϕ , welches von nun an mit demselben Symbol ϕ bezeichnet wird wie vorher das Gradmaß, nur auf Vielfache von 2π bestimmt: mit ϕ ist stets auch

$$\phi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ein möglicher Polarwinkel. Um ϕ eindeutig festzulegen, muß man es auf ein Intervall der Länge 2π beschränken, üblicherweise auf $(-\pi, \pi]$ oder auf $[0, 2\pi)$. Den in diesem Intervall gelegenen Winkel bezeichnet man als den *Hauptwert*, s. Abb. 1.9 und 1.10.

Hier wird als Intervall für den Hauptwert das Intervall $[0, 2\pi)$ gewählt. Bezüglich diesem ist dann

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & , \quad x > 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0 \quad \wedge \quad y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & , \quad x < 0 \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & , \quad x = 0 \quad \wedge \quad y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & , \quad x > 0 \quad \wedge \quad y < 0 \end{cases}$$

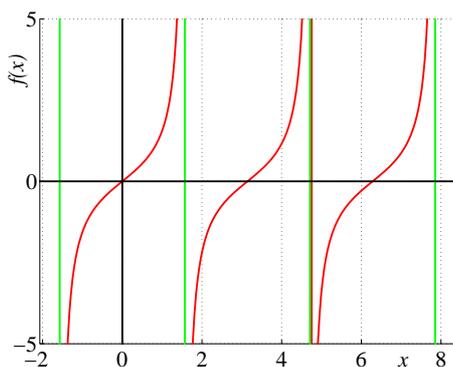


Abbildung 1.9: $f(x) = \tan x$

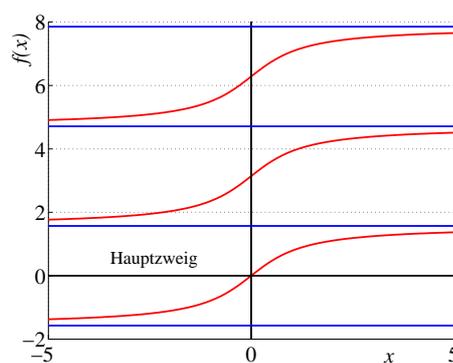
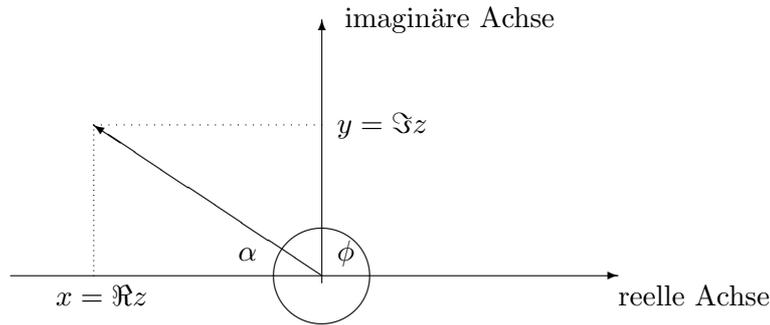


Abbildung 1.10: $f(x) = \arctan x$

Die Funktion $\tan(\cdot)$ mit $\tan \phi = \frac{y}{x}$ ist nur im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definiert; auf die anderen Intervalle wird sie periodisch fortgesetzt. Die obige Festlegung des Winkels geschieht deshalb, damit man als Bilder alle Winkel im Intervall $[0, 2\pi)$ erhält, also auch solche außerhalb von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exemplarisch sei die Formel für den 2. und 3. Quadranten hergeleitet. Man betrachte dazu einen Winkel im 2. Quadranten (Abb. 1.11).

Abbildung 1.11: Winkel im Intervall $[0, 2\pi)$

$$\tan \alpha = \frac{y}{|x|} = \frac{y}{-x}$$

$$\longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{-x}\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Für den im Intervall $[0, 2\pi)$ gelegenen Hauptwert folgt dann

$$\phi = \pi - \alpha = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Definition 1.14

r heißt auch *Betrag* der komplexen Zahl z , ϕ ihr *Argument*, *Winkel* oder *Phase*, geschrieben:²

$$r = |z|$$

$$\phi = \arg z$$

Definition 1.15

- (i) Die bisher in Normalform vorliegende komplexe Zahl $z = x + iy$ lässt sich unter Verwendung von Polarkoordinaten in der *trigonometrischen Form* schreiben:

$$z = x + iy = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi), \quad (1.1)$$

wobei für $r \neq 0$ gilt:

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \cos \phi = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin \phi = \frac{y}{r} .$$

²Die Abkürzung „arg“ für das Argument (Winkel) ist nicht zu verwechseln mit dem Ausdruck „arc“ für das Bogenmaß.

- (ii) Die *Exponentialform* komplexer Zahlen wird durch die *Euler'sche Formel* vermittelt:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad (\phi \in [0, 2\pi)). \quad (1.2)$$

Die Formel (1.2) verknüpft eine komplexe Linearkombination trigonometrischer Funktionen mit einem reellen Argument mit einer komplexen Exponentialfunktion mit einem imaginärem Argument. Da hier noch nicht bekannt ist, was eine komplexe Exponentialfunktion ist, wird die Euler'sche Formel momentan nur als Abkürzung der rechten Seite angesehen:

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi;$$

insbesondere weiß man noch nicht, ob man mit ihr so rechnen kann, wie man das von der reellen Exponentialfunktion her gewohnt ist. Gilt beispielsweise

$$e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} ?$$

Die Antwort ist ja, und der entsprechende Sachverhalt wird weiter unten bewiesen, im Moment aber noch nicht vorausgesetzt und daher auch nicht benutzt. Die trigonometrische Form und die Exponentialform zusammen heißen auch *Polarform*.

Mit Hilfe der Euler'schen Formel läßt sich die trigonometrische Form komplexer Zahlen in die Exponentialform umwandeln:

$$z = r e^{i\phi} = |z| e^{i \arg z}.$$

Bei der Multiplikation, Division und beim Radizieren wird sich diese Schreibweise als nützlich herausstellen. Setzt man für ϕ spezielle Winkel ein, so ergibt sich etwa (Abb. 1.12)

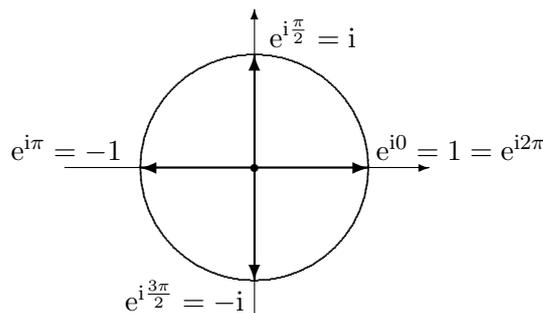


Abbildung 1.12: Komplexe Zahlen $e^{i\phi}$ für $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, -\pi, \frac{3\pi}{2}\}$

$$\begin{aligned} e^{i0} &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i \\ e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1 \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i \end{aligned}$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist im Komplexen periodisch mit der Periode 2π

$$e^{i(\phi+k2\pi)} = e^{i\phi} \quad (\phi \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}),$$

da sie über die Euler'sche Formel (1.2) mit den reellen Winkelfunktionen verknüpft ist und diese ebenfalls periodisch mit der Periode 2π sind:

$$\sin(\phi + k2\pi) = \sin \phi \quad , \quad \cos(\phi + k2\pi) = \cos \phi \quad (\phi \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}).$$

Bemerkung

In der Elektrotechnik hat sich auch die Schreibweise für den Winkel ϕ im Gradmaß etabliert. Dabei wird für $e^{i\phi}$, den *Winkelfaktor*, eine verkürzte Schreibweise benutzt:

$$e^{i\phi} =: \underline{/\phi} \quad \text{und} \quad e^{-i\phi} =: \underline{/-\phi}.$$

$\underline{/\phi}$ wird gelesen: *Versor* ϕ . Damit kann auch die gesamte komplexe Zahl in dieser Form angegeben werden:

$$z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi} = r \underline{/\phi}.$$

Da in der Mathematik häufig komplexe Zahlen als Argumente und Werte von Funktionen auftreten, welche mit anderen (im Bogenmaß) angegebenen Werten verknüpft werden, soll die Versor-Schreibweise hier nicht verwendet werden.

Multiplikation und Division komplexer Zahlen in der trigonometrischen Form oder in der Exponentialform

Seien z_1, z_2 zwei komplexe Zahlen, definiert durch ihre Polarkoordinaten r_1, ϕ_1, r_2, ϕ_2 :

$$z_1 := r_1 e^{i\phi_1} = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$$

$$z_2 := r_2 e^{i\phi_2} = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

Beh. 1 $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

Bew.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \end{aligned}$$

Beh. 2 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$

Bew. Analog; Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner.

Zwei komplexe Zahlen in trigonometrischer Form oder Exponentialform werden multipliziert (dividiert), indem ihre Beträge multipliziert (dividiert) und ihre Argumente (Winkel) addiert (subtrahiert) werden.

Geometrische Deutung

(i) Multiplikation mit einer reellen Zahl $r > 0$:

- $r > 1$: \longrightarrow Streckung
- $r < 1$: \longrightarrow Stauchung

(ii) Multiplikation mit $e^{i\phi}$: \longrightarrow Drehung um ϕ

(iii) Allgemeiner Fall : \longrightarrow Drehstreckung

Beispiele 1.11

(i) Streckung, s. Abb. 1.13:

$$z_1 = 3, z_2 = 1 + i \longrightarrow z_1 \cdot z_2 = 3(1 + i)$$

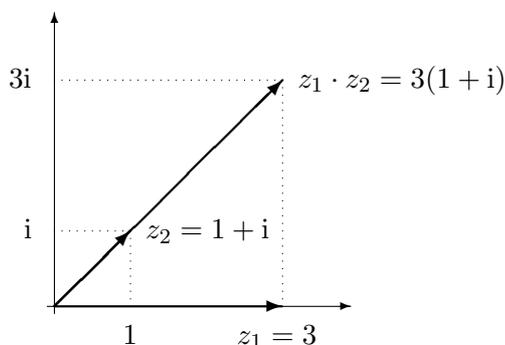


Abbildung 1.13: Streckung

(ii) Drehung, s. Abb. 1.14:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = \sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

(iii) Drehstreckung, s. Abb. 1.15:

$$z_1 = 1 + i, z_2 = 1 + i \longrightarrow z_1 \cdot z_2 = 0 + 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Potenzieren komplexer Zahlen

Das Potenzieren komplexer Zahlen findet in der Regel in der trigonometrischen Form oder in der Exponentialform statt. Ein dazu wichtiges Hilfsmittel ist der *Satz von Moivre*:

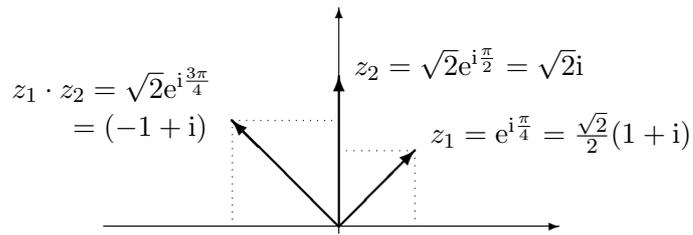


Abbildung 1.14: Drehung

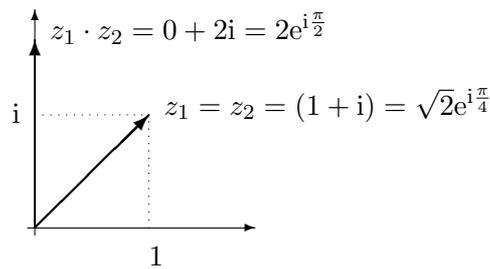


Abbildung 1.15: Drehstreckung

Satz 1.8 (Satz von Moivre)

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{Z}} \bigwedge_{\phi \in [0, 2\pi)} [\cos \phi + i \sin \phi]^k = \cos k\phi + i \sin k\phi \quad (1.3)$$

Beweis

- (i) Zuerst wird $k \in \mathbb{N}_0$ vorausgesetzt, dazu wird der Satz mit vollständiger Induktion bewiesen.

Für $k = 0, 1$ ist die Behauptung unmittelbar klar. Sie gelte nun für eine ganze Zahl $k \geq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} [\cos \phi + i \sin \phi]^{k+1} &= [\cos \phi + i \sin \phi]^k \cdot [\cos \phi + i \sin \phi] \\ &= [\cos k\phi + i \sin k\phi] \cdot [\cos \phi + i \sin \phi] \\ &= [\cos k\phi \cos \phi - \sin k\phi \sin \phi] \\ &\quad + i [\sin k\phi \cos \phi + \cos k\phi \sin \phi] \\ &= \cos [(k+1)\phi] + i \sin [(k+1)\phi] \end{aligned}$$

(ii) Sei nun $k \in \mathbb{Z}, k < 0$. Dann ist $n := -k \in \mathbb{N}$, und es folgt nach (i):

$$\begin{aligned}
 [\cos \phi + i \sin \phi]^{-n} &= \frac{1}{[\cos \phi + i \sin \phi]^n} \\
 &= \frac{1}{[\cos n\phi + i \sin n\phi]} \cdot \frac{\cos n\phi - i \sin n\phi}{\cos n\phi - i \sin n\phi} \\
 &= \frac{\cos n\phi - i \sin n\phi}{\cos^2 n\phi + \sin^2 n\phi} \\
 &= \cos n\phi - i \sin n\phi \\
 &= \cos(-n\phi) + i \sin(-n\phi)
 \end{aligned}$$

Folgerung

$$\boxed{\bigwedge_{k \in \mathbb{Z}} \bigwedge_{\phi \in [0, 2\pi)} [e^{i\phi}]^k = e^{ik\phi}} \quad (1.4)$$

Beweis

Diese Folgerung ist nur die exponentielle Schreibweise des Satzes von Moivre. Sie besagt, daß sich zumindest im Bereich der ganzen Zahlen die Exponentialfunktion mit einem rein imaginären Argument so verhält wie die reelle Exponentialfunktion.

Damit gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle komplexen Zahlen $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}
 z^k &= [r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)]^k \\
 &= r^k [\cos \phi + i \sin \phi]^k \\
 &= r^k [\cos k\phi + i \sin k\phi] \\
 &= r^k \cdot e^{ik\phi}
 \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl (in der Exponentialform) wird in die k -te Potenz erhoben, indem ihr Betrag mit k potenziert und ihr Argument (der Winkel) mit k multipliziert wird.

Beispiel 1.12

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{\sqrt{3} + i}\right)^{32} &= \frac{2^{32}}{\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right]^{32}} = \frac{2^{32}}{2^{32}} \cdot \frac{e^{i0}}{e^{32i\frac{\pi}{6}}} \\
 &= \frac{1}{e^{-i(6-\frac{2}{3})\pi}} = e^{-i6\pi} \cdot e^{\frac{2}{3}i\pi} \\
 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

Radizieren komplexer Zahlen

Definition 1.16

Sei $a \in \mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl z heißt eine n -te Wurzel aus a , wenn sie der Gleichung

$$z^n = a \quad (n \in \mathbb{N} \text{ geeignet})$$

genügt.

Beispiel 1.13

$a := 16$, $n := 4$, also lautet die zu lösende Gleichung $z^4 = 16$. Dann ist $z_0 := 2$ eine Lösung der Gleichung, da gilt:

$$z_0^4 = 2^4 = 16.$$

Es gibt jedoch noch andere Lösungen dieser Gleichung. Alle Lösungen sind gegeben durch (Abb. 1.16)

$$z_0 = 2 \quad , \quad z_1 = 2i \quad , \quad z_2 = -2 \quad , \quad z_3 = -2i.$$

In Exponentialform geschrieben, lauten alle diese Lösungen

$$z_k = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}k} = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\frac{0+k2\pi}{4}} \quad (k \in \{0, 1, 2, 3\}),$$

und das liefert einen Hinweis darauf, wie die allgemeine Gleichung zu lösen ist.

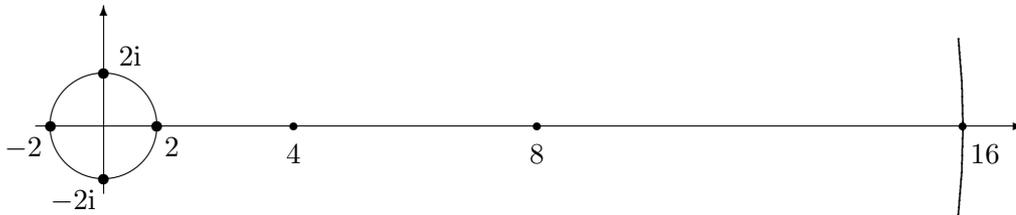


Abbildung 1.16: Komplexe Wurzeln der Gleichung $z^4 = 16$

Zur Lösung der allgemeinen Gleichung wird die Exponentialform verwendet, und man macht den folgenden

Lösungsansatz

$$\begin{aligned} z &= r \cdot e^{i\phi} \\ \longrightarrow z^n &= r^n \cdot e^{in\phi} = a = a_0 \cdot e^{i\alpha} \\ \longrightarrow r^n &= a_0 \quad \wedge \quad n \cdot \phi_k = \alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}) \\ \longrightarrow r &= \sqrt[n]{a_0} \quad \wedge \quad \phi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}) \end{aligned}$$

Ergebnis

- Alle Lösungen haben denselben Betrag $r = \sqrt[n]{a_0}$.
- Ihre Argumente (Winkel) sind $\phi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$ geeignet).

Allerdings erhält man – im Einklang mit dem Fundamentalsatz der Algebra – insgesamt nur n verschiedene Werte, welche beispielsweise für die ganzen Zahlen $k \in \{0, \dots, n-1\}$ angenommen werden. Alle anderen Werte unterscheiden sich davon um Vielfache von 2π .

- Damit lauten die n Lösungen

$$z_k = r \cdot e^{i\phi_k} = \sqrt[n]{a_0} \cdot e^{i\frac{\alpha+k \cdot 2\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\}).$$

Beispiel 1.14

Zu lösen ist die Gleichung $z^3 - 1 = 0$. In Exponentialform geschrieben, lautet sie

$$z^3 = 1 = 1 \cdot e^{i0} = r^3 \cdot e^{i(0+k2\pi)}.$$

Diese Gleichung hat die drei Lösungen $z_k = r \cdot e^{i\phi_k}$, wobei (Abb. 1.17)

$$r = \sqrt[3]{1} = 1,$$

$$\phi_k = \frac{0 + k2\pi}{3} = k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \{0, 1, 2\}), \text{ also } \phi_k \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{0\pi}{3}} = \cos \frac{0\pi}{3} + i \sin \frac{0\pi}{3} = 1 \\ z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ z_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

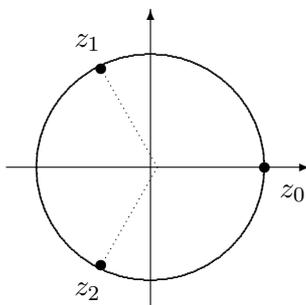


Abbildung 1.17: Komplexe Wurzeln der Gleichung $z^3 - 1 = 0$

Beispiel 1.15

Zu lösen ist die Gleichung $z^4 - (3 + 3i) = 0$. In Exponentialform geschrieben, lautet sie

$$z^4 = 3 + 3i = \sqrt{18} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = r^4 \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi)}.$$

Diese Gleichung hat die vier Lösungen $z_k = r \cdot e^{i\phi_k}$, wobei (Abbildung 1.18)

$$r = \sqrt[4]{\sqrt{18}} = \sqrt[8]{18} = 1,4352,$$

$$\phi_k = \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{4} = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \{0, 1, 2, 3\}), \text{ also } \phi_k \in \left\{ \frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16} \right\}.$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[8]{18} \cdot e^{i\frac{\pi}{16}} = \sqrt[8]{18} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) = 1,4076 + i \cdot 0,2800 \\ z_1 &= \sqrt[8]{18} \cdot e^{i\frac{9\pi}{16}} = \sqrt[8]{18} \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right) = -0,2800 + i \cdot 1,4076 \\ z_2 &= \sqrt[8]{18} \cdot e^{i\frac{17\pi}{16}} = \sqrt[8]{18} \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right) = -1,4076 - i \cdot 0,2800 \\ z_3 &= \sqrt[8]{18} \cdot e^{i\frac{25\pi}{16}} = \sqrt[8]{18} \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right) = 0,2800 - i \cdot 1,4076 \end{aligned}$$

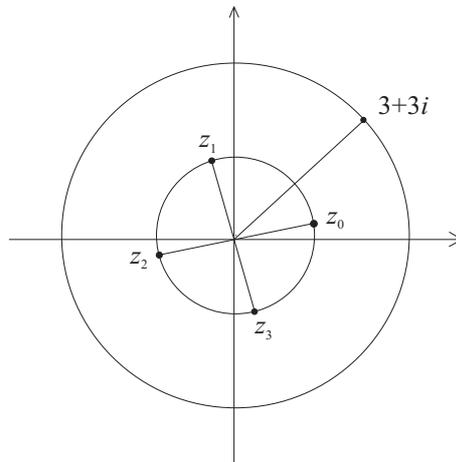


Abbildung 1.18: Vierte Wurzeln der komplexen Zahl $z = 3 + 3i$

Bemerkung

- (i) Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Bildpunkte der n Lösungen der Gleichung $z^n = a$ bilden ein regelmäßiges n -Eck in der Gauß'schen Zahlenebene. Sie liegen auf einem Kreis vom Radius $R = \sqrt[n]{|a|}$ um den Ursprung, ein Eckpunkt z_0 auf ihm erfüllt die Bedingung $\arg z_0 = \frac{\arg a}{n}$.
- (ii) Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ werden als n -te Einheitswurzeln bezeichnet, die Gleichung selbst als *Kreisteilungsgleichung*. Die Lösungen der Kreisteilungsgleichung bilden somit die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Eckes auf dem Einheitskreis, welches den Punkt $\langle 1, 0 \rangle$ enthält.

- (iii) Ist a reell und z_1 eine komplexe Lösung der Gleichung $z^n = a$, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl \bar{z}_1 eine Lösung dieser Gleichung:

$$z_1 = a \quad \implies \quad (\bar{z}_1)^n = \overline{z_1^n} = \bar{a} = a.$$

Komplexe Lösungen solcher reellen Gleichungen treten somit immer paarweise konjugiert komplex auf; dieser Sachverhalt gilt übrigens auch für *jede* algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten.

1.2.3 Abbildungen der Ebene

Die im letzten Abschnitt eingeführten Rechenoperationen mit komplexen Zahlen lassen sich alle geometrisch deuten, und zwar jede als Abbildung der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} auf sich.

1. Übergang zum konjugiert Komplexen \longleftrightarrow Spiegelung an der reellen Achse

Der Übergang $z \longrightarrow \bar{z}$ einer komplexen Zahl zu ihrer konjugiert komplexen Zahl ist eine Spiegelung an der reellen Achse, s. Abb. 1.19.

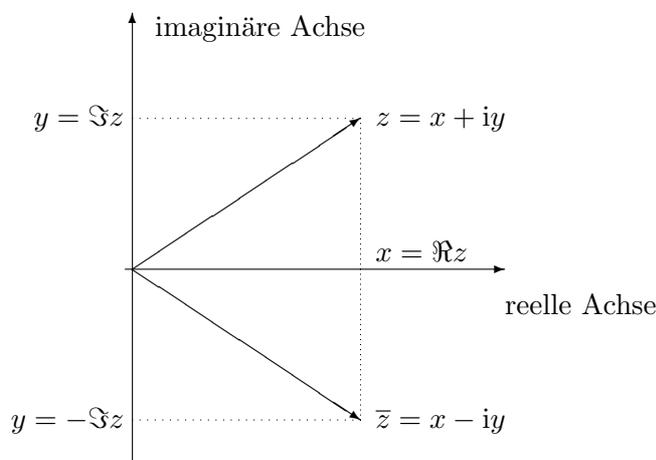


Abbildung 1.19: Konjugiert komplexe Zahl

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Diese Abbildung läßt die reelle Achse invariant.

2. Addition \longleftrightarrow **Translation**

s. Abb. 1.20.

$$f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto z + a \quad (a \in \mathbb{C} \text{ geeignet})$$

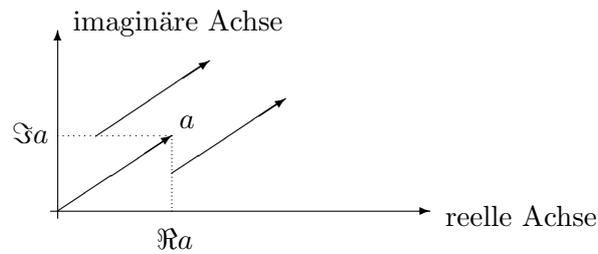


Abbildung 1.20: Translation

3. Multiplikation mit -1 \longleftrightarrow **Spiegelung am Nullpunkt**

s. Abb. 1.21.

$$f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto -z$$

bedeutet eine Spiegelung am Nullpunkt. Wegen $e^{i\pi} = -1$ gilt

$$f_3(z) = -z = e^{i\pi} \cdot z,$$

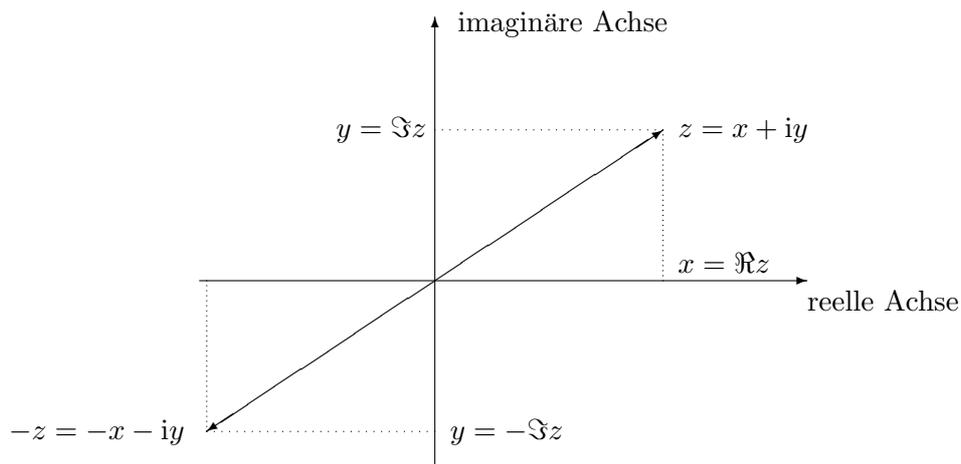
und die Spiegelung am Nullpunkt lässt sich auch als Multiplikation mit $e^{i\pi} = -1$ realisieren und damit als Drehung um den Winkel π deuten, s. auch 5.

Abbildung 1.21: Spiegelung am Nullpunkt

4. Multiplikation mit $r > 0$ \longleftrightarrow **Streckung (Stauchung) um r** Die Multiplikation mit einer reellen Zahl $r > 0$ entspricht einer

- $r > 1$: \longrightarrow Streckung
- $r < 1$: \longrightarrow Stauchung

$$f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto r \cdot z$$

5. Multiplikation mit $e^{i\phi}$ \longleftrightarrow Drehung um den Winkel ϕ

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Betrag 1 entspricht einer Drehung um das Argument dieser Zahl, Abb. 1.22; s. auch 3.

$$f_5 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto e^{i\phi} \cdot z \quad (\phi \in [0, 2\pi) \text{ geeignet})$$

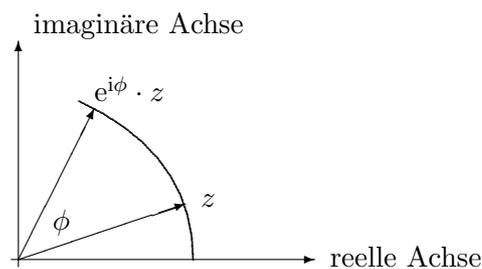


Abbildung 1.22: Drehung

6. Multiplikation mit $a_0 \cdot e^{i\alpha}$ \longleftrightarrow Drehstreckung

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $a = a_0 \cdot e^{i\alpha}$ entspricht einer Streckung (Stauchung) um den Betrag a_0 bei gleichzeitiger Drehung um das Argument α :

$$f_6 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto a_0 \cdot e^{i\alpha} \cdot z$$

$$f_6 = f_4 \circ f_5 = f_5 \circ f_4$$

7. Inversion \longleftrightarrow Spiegelung am Einheitskreis

$$f_7 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

Stellt man diese Abbildung in kartesischen Koordinaten dar, so ist sie recht unübersichtlich:

$$f_7(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

In Polarkoordinaten ($z = re^{i\phi}$) erhält man jedoch die Bedingungen

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) = -\arg z = -\phi.$$

Diese Abbildung (Abbildung 1.23) läßt sich wie folgt als Spiegelung am Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene interpretieren. Man kann sie punktweise ausführen, d.h. $f_7(z) = \frac{1}{z}$ geometrisch konstruieren:

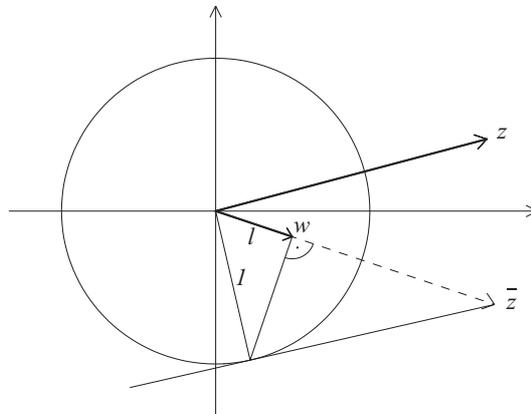


Abbildung 1.23: Inversion am Einheitskreis

- (i) Man konstruiere \bar{z}
- (ii) Man konstruiere die Tangente von \bar{z} an den Einheitskreis
- (iii) Man fälle das Lot vom Berührungspunkt auf die Strecke $\overline{O\bar{z}}$; dieser Punkt heiße w .

Beh. $w = \frac{1}{z}.$

Beweis

w liegt auf der Geraden durch 0 und \bar{z} , daher ist

$$\arg w = \arg(\bar{z}) = -\arg z = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\phi.$$

Nach dem Kathetensatz des Euklid fur rechtwinklige Dreiecke gilt fur die Länge l die Beziehung

$$l \cdot |\bar{z}| = 1^2 = 1, \quad \text{also}$$

$$|w| = l = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} = \left| \frac{1}{z} \right|,$$

insgesamt also

$$\arg w = \arg \left(\frac{1}{z} \right) \quad \wedge \quad |w| = \left| \frac{1}{z} \right|.$$

Damit ist w der gesuchte Punkt $\frac{1}{\bar{z}}$. Man erhält

$$\begin{aligned} |z| > 1 &\iff |w| < 1 \\ |z| < 1 &\iff |w| > 1 \end{aligned}$$

Bei dieser Abbildung wird das Außengebiet des Einheitskreises der komplexen Ebene auf das Innengebiet abgebildet und umgekehrt, der Rand wird auf sich abgebildet.

1.2.4 Anwendungen komplexer Zahlen in der Elektrotechnik

Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen haben in der Elektrotechnik eine große Bedeutung. Das liegt u.a. darin begründet, daß mit ihrer Hilfe bei Vorliegen zusätzlicher Voraussetzungen Ableitungen in Multiplikationen mit einer Variablen überführt werden, mithin Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen. Das ist der Grund, weshalb die im zweiten Semester zu besprechende Laplace-Transformation bei der Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen eine solch große Rolle spielt.

1.2.4.1 Symbolische Methode

Einen ersten Eindruck soll man schon hier bekommen bei der Anwendung der sog. *symbolischen Methode in der Wechselstromtechnik* zur Behandlung von Wechselstromschaltkreisen. Naturgemäß werden zum jetzigen Zeitpunkt nicht alle Studenten alles verstehen, da wir erst am Anfang der Mathematik-Ausbildung stehen. Diese Personen mögen den Abschnitt momentan als eine Motivation für die wirklich spannende Anwendung von Mathematik in der Elektrotechnik ansehen und sich später noch einmal damit beschäftigen.

1. Für *Gleichstromkreise* und Ohm'sche Widerstände sind bekannt:

- Ohm'sches Gesetz
- Kirchhoff'sche Regeln, d.h. *Knotenregel* und *Maschenregel*
- Addition von Widerständen bzw. Leitwerten bei Serien- bzw. Parallelschaltung

2. Für *Wechselstromkreise* hat man:

- Zeitlich veränderliche Größen (Spannung, Strom)
- Frequenzabhängige Widerstände (Kapazität, Induktivität)

3. Ziel:

Arbeiten mit einer zeitunabhängigen Darstellung der Größen von Wechselstromkreisen sowie Entwicklung von Gesetzen für diese zeitunabhängigen Größen, die den Regeln für Gleichstromkreise analog sind.

Enthält eine Schaltung neben Ohm'schen Widerständen auch Kapazitäten und Induktivitäten, so lassen sich die an den einzelnen Bauteilen abfallenden Spannungen bzw. die durch sie fließende Ströme nach den folgenden Gleichungen berechnen ($t \geq 0$):

$$\begin{array}{ll}
 u_R(t) = R \cdot i_R(t) & \text{Ohm'sches Gesetz} \quad i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t) \\
 u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}(t) & \text{Induktivität} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \left(i_L(0) + \int_0^t u_L(\tau) d\tau \right) \\
 u_C(t) = \frac{1}{C} \left(u_C(0) + \int_0^t i_C(\tau) d\tau \right) & \text{Kapazität} \quad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}(t)
 \end{array}
 \tag{1.5}$$

Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ gelten diese Gesetze auch in einem Wechselstromkreis. Möchte man nun die in einer Schaltung an zwei Polen auftretende Spannung oder den durch einen Leiter fließenden Strom berechnen, so läßt sich das mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln durchführen:

Kirchhoff'sche Regeln

- Knotenregel:
In einem Leitungsknoten ist die Summe aller zu- oder abfließenden Ströme Null.
- Maschenregel:
In einer Leitermasche ist die Summe aller Spannungen Null.

Aufgrund der unter (1.5) auftretenden Differentiations- bzw. Integrationsbeziehungen treten hierbei sog *Differentialgleichungen* auf.

Beispiel 1.16 Serienschaltung

Der Kondensator in Abb. 1.24 sei geladen, und zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter geschlossen. Dann liegt eine Masche vor, in der nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz die Summe aller Spannungen Null ist. Gesucht ist der Maschenstrom $i(t)$ zur Zeit $t \geq 0$. Die Differentialgleichung des Reihenschwingkreises für den gesuchten Leiterstrom i folgt aus der Maschenregel mit Hilfe von (1.5) und nochmaligem anschließenden Differenzieren ($i_C = i_R = i_L =: i$):

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

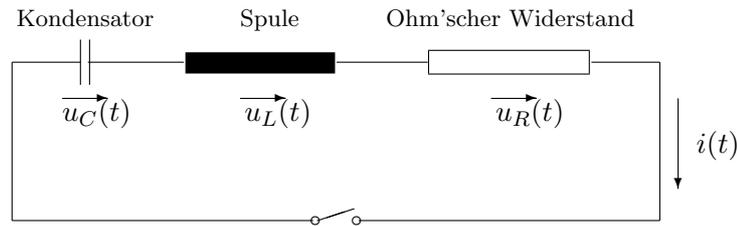


Abbildung 1.24: Elektrischer Reihenschwingkreis

$$\Leftrightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2}(t) + R \frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

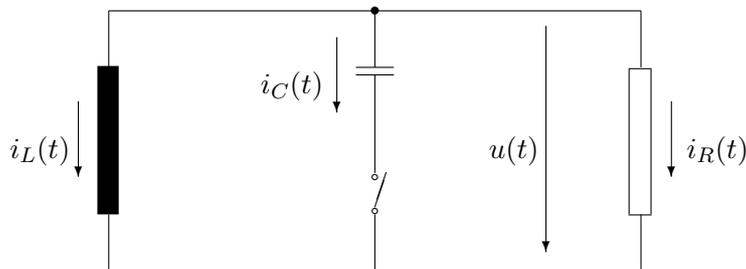
Beispiel 1.17 Parallelschaltung

Abbildung 1.25: Elektrischer Parallelschwingkreis

Der Kondensator in Abb. 1.25 sei geladen, und zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter geschlossen. Nach dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz ist am Knoten in der Mitte der waagerechten oberen Leitung die Summe aller Ströme Null. Die Differentialgleichung des Parallelschwingkreises für die gesuchte Maschen-spannung u folgt aus der Knotenregel mit Hilfe von (1.5) und nochmaligem anschließenden Differenzieren ($u_C = u_R = u_L =: u$):

$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow C \frac{d^2 u}{dt^2}(t) + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}(t) + \frac{1}{L} u(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

Beschreibt man die Bauteile unter Zuhilfenahme komplexer Zahlen aber nun durch komplexe Widerstände, so erhält man stattdessen komplexe algebraische Gleichungen, und die für Gleichstromkreise aufgestellten Gesetze lassen sich auch auf Wechselstromkreise anwenden. Insbesondere lassen sich auch die Ersatzwiderstände für Serien- und Parallelschaltung nach den bekannten Rechenregeln bestimmen:

- Bei der Serienschaltung werden alle Schaltungselemente vom gleichen Strom durchflossen, und der komplexe Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der komplexen Einzelwiderstände.
- Bei der Parallelschaltung liegt an allen Schaltungselementen die gleiche Spannung an, und der komplexe Gesamtleitwert ist gleich der Summe der komplexen Einzelleitwerte.

Damit diese Vorgehensweise zum Ziel führt, müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein:

- Es liegen *harmonische* Spannungen und Ströme derselben Frequenz vor, d.h. Linearkombinationen von Sinus- und Kosinusfunktionen derselben Frequenz ω . Es ist also nicht zulässig, Linearkombinationen harmonischer Funktionen verschiedener Frequenzen gleichzeitig zu betrachten bzw. Produkte harmonischer Funktionen.
- Es muß somit ein eingeschwungener (stationärer) Zustand vorausgesetzt werden, da sonst die Bedingung des harmonischen Verlaufs von Spannung und Strom nicht gegeben ist. Bei Schaltvorgängen kann diese Methode daher nicht zur Anwendung kommen.
- Bei den mit den zeitunabhängigen komplexen Größen durchgeführten Rechnungen dürfen Real- und Imaginärteil nicht „gemischt“ werden, wie das etwa bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen der Fall ist. Erlaubt sind nur Additionen und Subtraktionen sowie Multiplikationen mit reellen Zahlen. Die Berechnung der elektrischen Leistung im Reellen als Produkt von Spannung und Strom zur Zeit t beispielsweise,

$$P(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (t \geq 0),$$

kann im Komplexen daher nicht so durchgeführt werden, daß man die entsprechende komplexe Spannung mit dem komplexen Strom multipliziert. Daß es dennoch funktioniert, liegt daran, daß man zwei andere Größen miteinander multipliziert; der Sachverhalt wird in Abschnitt 1.2.4.5 erläutert.

1.2.4.2 Procedere (am Beispiel der Spannung)

- Gegeben sei eine sinusförmige Wechselspannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0).$$

- $u(t)$ wird aufgefaßt als Imaginärteil der im folgenden definierten komplexwertigen Funktion:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &:= \hat{u} \cdot [\cos(\omega t + \phi) + i \cdot \sin(\omega t + \phi)] \\ &= \hat{u} \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \\ &= \hat{u} \cdot e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} \\ &=: \underline{\hat{u}} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (t \geq 0)$$

- (iii) Das eigentliche Rechnen findet nun nur noch mit der *zeitunabhängigen* Größe \hat{u} (*komplexer Scheitelwert*) statt bzw. mit dem *komplexen Effektivwert* \underline{U} , definiert durch

$$\underline{U} := \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}.$$

- (iv) *Nach der Rechnung* erfolgt dann wieder der Übergang zum Imaginärteil des Ergebnisses und Wiederhinzufügen des Zeitanteils.
- (v) Liegt die zu untersuchende Größe als Kosinusfunktion vor, so faßt man sie mutatis mutandis als Realteil der entsprechenden komplexwertigen Funktion \underline{u} auf, führt die eigentliche komplexe Rechnung genauso durch und geht hinterher zum Realteil des Ergebnisses über. Alternativ kann man auch eine Kosinusfunktion in eine Sinusfunktion mit einem um $\pi/2$ vergrößerten Argument umwandeln:

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) = A \cdot \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (t \geq 0).$$

Abbildung (1.26) zeigt den Übergang vom Zeitbereich in die komplexe Ebene und wieder zurück. Einem Wechselstrom entspricht ein sinus- oder kosinusförmiger Spannungs- und Stromverlauf. Die Frequenz ist konstant, und die Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ kürzt sich bei der komplexen Rechnung heraus. Die Phasen und damit die Phasenverschiebung der einzelnen Größen zueinander bleiben jedoch erhalten. Die Symbole \underline{A} und \underline{B} stehen jeweils wahlweise für Spannung oder Strom. Die Übertragungsfunktion $H(i\omega)$ steht entsprechend für eine *Impedanz* \underline{Z} oder eine *Admittanz* $\underline{Y} := 1/\underline{Z}$ eines Netzwerkes.

$$\begin{array}{ccc} \text{Zeitbereich} & a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \phi_A) & \longrightarrow & b(t) = \hat{B} \cos(\omega t + \phi_B) \\ & \downarrow & & \uparrow \\ \text{Komplexe Ebene} & \underline{A} = A e^{i\phi_A} & \xrightarrow{H(i\omega)} & \underline{B} = B e^{i\phi_B} \end{array}$$

Abbildung 1.26: Übergang zwischen Zeitbereich und komplexer Ebene

Zu beachten ist noch die Unterscheidung zwischen Amplituden- und Effektivwerten. Im Zeitbereich wird der Scheitelwert (Amplitudenwert) \hat{A} der (Co-) Sinusfunktion angegeben, in der komplexen Ebene meistens der Effektivwert A mit $A = |\underline{A}|$. Dabei gilt für harmonische Strom- und Spannungsverläufe der Zusammenhang $\hat{A} = \sqrt{2} A$.

1.2.4.3 Reelles und komplexes Zeigerdiagramm

Die im letzten Abschnitt besprochene Vorgehensweise läßt sich graphisch mit einem sog. *Zeigerdiagramm* deuten. Dazu wird eine sinusförmige Schwingung

betrachtet:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0) \quad (1.6)$$

mit den folgenden Größen:

- $y(t)$: Auslenkung oder *Elongation*
- A : *Schwingungsamplitude* oder *Scheitelwert*
- ω : *Kreisfrequenz* ($\omega > 0$)
- ϕ : *Phasenkonstante, Anfangsphase* oder *Nullphasenwinkel*

Zwischen der *Perioden-* oder *Schwingungsdauer* T , der *Frequenz* f und der *Kreisfrequenz* ω bestehen die Beziehungen

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Das erklärt den Namen *Kreisfrequenz*: $\omega = 2\pi f$ ist die *Frequenz* f , gemessen in Einheiten von 2π .

Die durch die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ ($t \geq 0$) beschriebene harmonische Schwingung läßt sich in einem *reellen Zeigerdiagramm* durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω im mathematisch positiven Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn) um den Nullpunkt des \mathbb{R}^2 rotierenden Zeiger der Länge A anschaulich darstellen (cf. Abbildung 1.27).

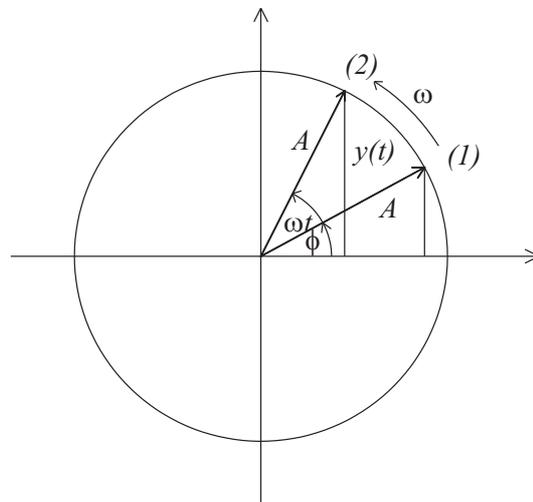


Abbildung 1.27: Reelles Zeigerdiagramm

Die Ebene \mathbb{R}^2 , in welcher die Rotation des Zeigers erfolgt, wird nun als komplexe Zahlenebene \mathbb{C} beschrieben, in welcher die momentane Lage des Zeigers durch die komplexe Zahl (= Wert einer komplexen Funktion zur Zeit $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &:= A \cdot [\cos(\omega t + \phi) + i \cdot \sin(\omega t + \phi)] \\ &= A \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \\ &= A \cdot e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} \\ &=: \underline{A} \cdot e^{i\omega t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

beschrieben wird (sog. *komplexes Zeigerdiagramm*). Der komplexe Zeiger enthält den zeitunabhängigen Faktor $\underline{A} = A \cdot e^{i\phi}$ und den zeitabhängigen Faktor $e^{i\omega t}$ ($t \geq 0$). Dabei heißen

$$\begin{aligned} \underline{A} = A \cdot e^{i\phi} & : \text{komplexe Amplitude} \\ e^{i\omega t} & : \text{Zeitfunktion } (t \geq 0) \end{aligned}$$

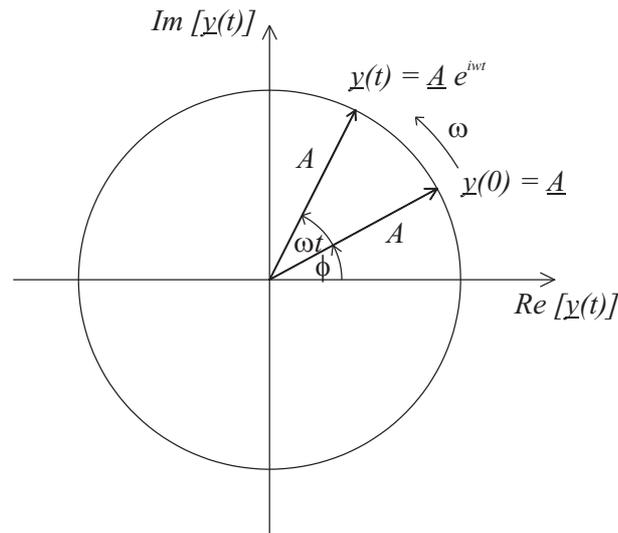


Abbildung 1.28: Komplexes Zeigerdiagramm

Die komplexe Amplitude \underline{A} besitzt den Betrag $|\underline{A}| = A$ und den Richtungswinkel (Phasenwinkel) ϕ und legt die Anfangslage des rotierenden Zeigers fest. Die Zeitfunktion $t \mapsto e^{i\omega t}$ ($t \geq 0$) beschreibt die Rotation des Zeigers mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene. Der Momentanwert der Sinusschwingung (2.24) entspricht dann dem Imaginärteil des rotierenden komplexen Zeigers \underline{y} :

$$y(t) = \Im[\underline{y}(t)] = \Im[\underline{A} \cdot e^{i\omega t}] = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0).$$

1.2.4.4 Behandlung eines Wechselstromkreises mit der symbolischen Methode

Ohm'sches Gesetz der Wechselstromtechnik

In einem Wechselstromkreis erzeuge die in der komplexen Form dargestellte harmonische Wechselspannung \underline{u} den harmonischen Wechselstrom \underline{i} derselben Frequenz ω für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) : &= \hat{u} \cdot e^{i(\omega t + \phi_u)} = \hat{u} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} \cdot e^{i\omega t} \\ \underline{i}(t) : &= \hat{i} \cdot e^{i(\omega t + \phi_i)} = \hat{i} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} \underline{I} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Hierbei werden die folgenden Größen benutzt:

$$\begin{aligned} \hat{u}, \hat{i} &: \text{komplexe Scheitelwerte,} \\ \underline{U}, \underline{I} &: \text{komplexe Effektivwerte,} \\ &\text{dabei gilt: } \hat{u} = \sqrt{2} \underline{U} \quad , \quad \hat{i} = \sqrt{2} \underline{I} . \end{aligned}$$

Definition 1.17

Der Quotient

$$\underline{Z}(t) := \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} \quad (t \geq 0)$$

heißt *komplexer Widerstand*, *Widerstandsoperator*, *Impedanz* oder *Scheinwiderstand* zur Zeit $t \geq 0$.

Bemerkung

- (i) Der Widerstandsoperator $\underline{Z}(t)$ ist von der Zeit gar nicht abhängig, man läßt die Variable t daher weg und nennt die entstehende neue (konstante) Funktion ebenfalls \underline{Z} :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &:= \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2} \underline{U} e^{i\omega t}}{\sqrt{2} \underline{I} e^{i\omega t}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \\ &= \frac{U \cdot e^{i\phi_u}}{I \cdot e^{i\phi_i}} = \left(\frac{U}{I} \right) \cdot e^{i(\phi_u - \phi_i)} \end{aligned}$$

- (ii) Die exponentielle Form von \underline{Z} lautet $\underline{Z} = Z \cdot e^{i\phi}$, wobei gilt:

$$\begin{aligned} Z &:= |\underline{Z}| = \frac{U}{I} = \frac{\text{Effektivwert der Spannung}}{\text{Effektivwert des Stromes}} = \text{Betrag von } \underline{Z} \\ \phi &:= \phi_u - \phi_i = \text{Spannungsphase} - \text{Stromphase} = \text{Phasenwinkel von } \underline{Z} \end{aligned}$$

- (iii) Die kartesische Form von \underline{Z} lautet $\underline{Z} = R + iX$, wobei gilt:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &: \text{Scheinwiderstand} \\ R &: \text{Wirkwiderstand} \\ X &: \text{Blindwiderstand} \end{aligned}$$

Auch bei anderen komplexen Größen wird diese Nomenklatur beibehalten. Mit der Vorsilbe „Wirk“ wird immer der Realteil, mit „Blind“ der Imaginärteil und mit „Schein“ die komplexe Größe selbst bezeichnet. Das Inverse der Impedanz $\underline{Y} := \frac{1}{\underline{Z}}$ nennt man den *komplexen Leitwert*.

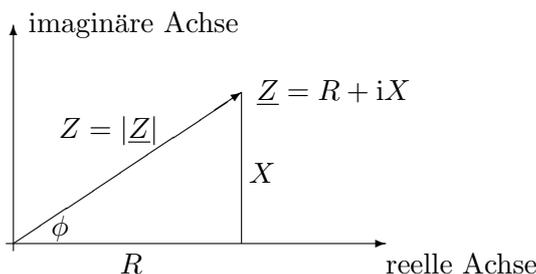


Abbildung 1.29: Scheinwiderstand, Wirkwiderstand, Blindwiderstand

(iv) *Ohm'sches Gesetz der Wechselstromtechnik*

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Diese Beziehung erinnert an das Ohm'sche Gesetz der Gleichstromtechnik und heißt daher *Ohm'sches Gesetz der Wechselstromtechnik*.

Widerstands- und Leitwertoperatoren

Im folgenden werden die Gleichungen für die drei elektrischen Ersatzschaltbildelemente angegeben, aus denen passive Netzwerke im wesentlichen bestehen. Im Anschluß werden dann Leitwerte behandelt. Als Referenzwinkel werde hier $\phi_i = 0$ gewählt, d.h. der Stromzeiger $\underline{I} = I$ liege in der positiven reellen Achse. Aufgrund des Ohm'schen Gesetzes (Definition 1.17 (iv)) besitzen Spannungszeiger \underline{U} und Widerstandszeiger \underline{Z} dann den gleichen Phasenwinkel ϕ , s. Abb. 1.30.

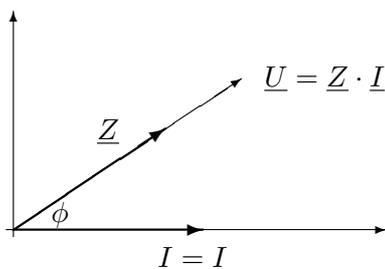


Abbildung 1.30: Spannungs- und Widerstandszeiger in Phase

1. Ohm'scher Widerstand R

u sei eine harmonische Funktion, also eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenz ω , also ($u_1, u_2 > 0$ geeignet):

$$u(t) = u_1 \cdot \sin \omega t + u_2 \cdot \cos \omega t = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) \quad (t \geq 0).$$

Aufgrund des Ohm'schen Gesetzes ist dann auch i eine harmonische Funktion dieser Frequenz ω :

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi_i) \quad (\hat{i} := \frac{\hat{u}}{R}, \phi_i := \phi_u, t \geq 0).$$

Beh.

Die Gültigkeit der (reellen) Beziehung $u(t) = R \cdot i(t)$ ($t \geq 0$) ist äquivalent zur Gültigkeit der (komplexen) Beziehung $\underline{u}(t) = R \cdot \underline{i}(t)$ ($t \geq 0$), welche man auch als *Komplexifizierung* der reellen Beziehung bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 \text{Bew. } \quad u(t) = R \cdot i(t) \quad (t \geq 0) \\
 & \iff \\
 \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) &= R \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi_i) \quad \wedge \\
 \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \phi_u) &= R \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \phi_i) \quad (t \geq 0) \\
 & \iff \\
 \underline{u}(t) &= \hat{u} \cdot e^{i(\omega t + \phi_u)} \\
 &= \hat{u} \cdot [\cos(\omega t + \phi_u) + i \cdot \sin(\omega t + \phi_u)] \\
 &= R \cdot \hat{i} \cdot [\cos(\omega t + \phi_i) + i \cdot \sin(\omega t + \phi_i)] \\
 &= R \cdot \hat{i} \cdot e^{i(\omega t + \phi_i)} \\
 &= R \cdot \underline{i}(t) \quad (t \geq 0)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Vorbereitungen läßt sich ausrechnen, durch welchen (komplexen) Widerstandsoperator \underline{Z} ein Ohm'scher Widerstand R ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(t) &= R \cdot \underline{i}(t) \quad (t \geq 0) \\
 & \wedge \\
 \underline{u}(t) &= \hat{u} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} e^{i\omega t} \\
 \underline{i}(t) &= \hat{i} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} \underline{I} e^{i\omega t} \\
 \longrightarrow \quad \underline{U} &= \underline{Z}_R \cdot \underline{I} = R \cdot \underline{I}
 \end{aligned}$$

Ein Ohm'scher Widerstand wird im Komplexen durch den reellen Widerstandsoperator $\underline{Z}_R = R$ ausgedrückt, Spannung und Strom sind dabei in Phase: $\phi_u = \phi_i$, also $\phi = \phi_u - \phi_i = 0$.

2. Kapazität C

Wieder sei u eine harmonische Funktion, also eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenz ω , also ($u_1, u_2 > 0$ geeignet):

$$u(t) = u_1 \cdot \sin \omega t + u_2 \cdot \cos \omega t = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) \quad (t \geq 0).$$

Beh.

Die reelle Beziehung $\int_0^t i_C(\tau) d\tau = q(t) = C \cdot u(t)$ ($t \geq 0$), und daraus durch Differenzieren abgeleitet: $i_C(t) = \left(\frac{d}{dt} q\right)(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$ ($t \geq 0$), gilt

auch im Komplexen (Komplexifizierung): $\underline{i}_C(t) = \left(\frac{d}{dt} \underline{q}\right)(t) = C \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} (t \geq 0)$.

Bew. $q(t) = C \cdot u(t) \quad (t \geq 0)$

$$\begin{aligned} & \iff \\ \hat{q} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) &= C \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) \quad \wedge \\ \hat{q} \cdot \cos(\omega t + \phi_u) &= C \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \phi_u) \quad (t \geq 0) \\ & \iff \\ \underline{q}(t) &= \hat{q}(t) \cdot e^{i(\omega t + \phi_u)} \\ &= \hat{q} \cdot [\cos(\omega t + \phi_u) + i \cdot \sin(\omega t + \phi_u)] \\ &= C \cdot \hat{u} \cdot [\cos(\omega t + \phi_u) + i \cdot \sin(\omega t + \phi_u)] \\ &= C \cdot \hat{u} \cdot e^{i(\omega t + \phi_u)} \\ &= C \cdot \underline{u}(t) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Für den komplexen Strom \underline{i} folgt daraus:

$$\underline{i}(t) = \left(\frac{d}{dt} \underline{q}\right)(t) = \frac{d}{dt} (C \cdot \underline{u})(t) \quad (t \geq 0).$$

Damit läßt sich wieder ausrechnen, durch welchen (komplexen) Widerstandsoperator \underline{Z} ein kapazitiver Widerstand R_C ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \hat{u} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} U e^{i\omega t} \\ \underline{i}(t) &= \hat{i} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} I e^{i\omega t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \underline{i}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \underline{q}\right)(t) = \frac{d}{dt} (C \cdot \underline{u})(t) = C\sqrt{2}U \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2}I e^{i\omega t} \\ \longrightarrow \quad \underline{U} &= \underline{Z}_C \cdot \underline{I} = \frac{1}{i\omega C} \cdot \underline{I} = -i \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}. \end{aligned}$$

Ein kapazitiver Widerstand wird im Komplexen durch den Widerstandsoperator

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -i \frac{1}{\omega C}$$

ausgedrückt. Er fällt in die negative imaginäre Achse, sein Betrag ist der *kapazitive Blindwiderstand*

$$X_C := \frac{1}{\omega C}.$$

Bemerkung

Der Faktor $-i$ in der Darstellung des Widerstandsoperators \underline{Z}_C führt zu einer Phasenverschiebung um den Wert $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Das hätte man mit Hilfe einer Integration natürlich auch im Reellen ausrechnen können:

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_C(t) &= \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u) \\
 &= \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{C} \cdot \int_0^t \hat{i} \sin(\omega \tau + \phi_i) d\tau \\
 &= -\frac{\hat{i}}{\omega C} \cdot \cos(\omega t + \phi_i) \\
 &= \frac{\hat{i}}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t + \phi_i - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Der Spannungszeiger \underline{U} läuft dem Stromzeiger \underline{I} um $\frac{\pi}{2}$ hinterher ($\phi = -\frac{\pi}{2}$).

3. Induktivität L

Analog zeigt man, daß sich die für eine Induktivität gültige Beziehung $u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$ ($t \geq 0$) auf die gleiche Weise zur Beziehung $\underline{u}_L(t) = L \frac{d\underline{i}}{dt}(t)$ ($t \geq 0$) komplexifizieren läßt. Benutzt man wieder die komplexen Darstellungen für Spannung und Strom,

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(t) &= \hat{u} \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} e^{i\omega t} \\
 \underline{i}(t) &= \hat{i} \cdot e^{i\omega t} := \sqrt{2} \underline{I} e^{i\omega t} \quad (t \geq 0),
 \end{aligned}$$

so folgt daraus

$$\underline{U} = i\omega L \cdot \underline{I}.$$

Eine Induktivität wird durch den Widerstandsoperator

$$\underline{Z}_L = i\omega L$$

ausgedrückt. Er fällt in die positive imaginäre Achse, sein Betrag ist der *induktive Blindwiderstand*

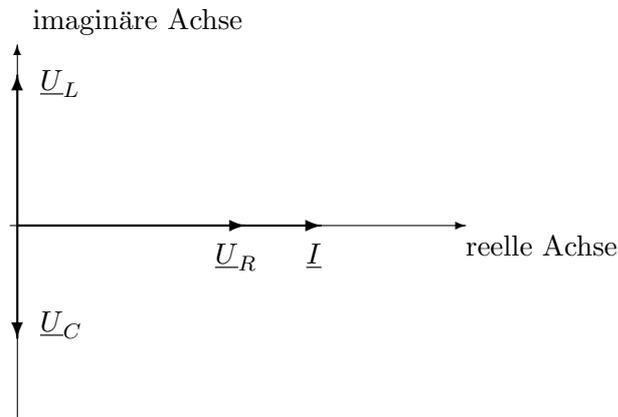
$$X_L := \omega L.$$

Der Spannungszeiger \underline{U} läuft dem Stromzeiger \underline{I} um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase voraus ($\phi = +\frac{\pi}{2}$).

Aufgabe

Man führe die Rechnungen für die Induktivität explizit aus.

Abbildung (1.31) zeigt das Zeigerdiagramm für die entsprechenden drei Bauteile mit $\phi_i = 0$.

Abbildung 1.31: Zeigerdiagramm für \underline{U}_L , \underline{U}_R und \underline{U}_C mit $\phi_i = 0$

4. Leitwert \underline{Y}

Bei Gleichströmen wird der Kehrwert eines Ohm'schen Widerstandes als *Leitwert* bezeichnet:

$$G := \frac{1}{R}.$$

Entsprechend wird der *Leitwertoperator* \underline{Y} als Kehrwert des Widerstandsoperators \underline{Z} erklärt:

$$\underline{Y} := \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{i\phi}} = \left(\frac{1}{Z}\right) \cdot e^{-i\phi}.$$

Geometrisch erhält man \underline{Y} durch

- Spiegelung von \underline{Z} an der reellen Achse sowie
- anschließender Streckung um $\frac{1}{Z}$

(cf. Inversion am Einheitskreis: Abb. 1.23, p. 38)

Die kartesische Form des Leitwertoperators \underline{Y} lautet $\underline{Y} = G + iB$, wobei gilt:

\underline{Y} : *Scheinleitwert*

G : *Wirkleitwert*

B : *Blindleitwert*

Tabelle 1.2 listet die Grundschaltelemente eines Wechselstromkreises noch einmal übersichtsartig auf.

Beispiel 1.18 Wechselstromkreis in Reihenschaltung

Abbildung 5.15 zeigt den schon bekannten Serienschwingkreis.

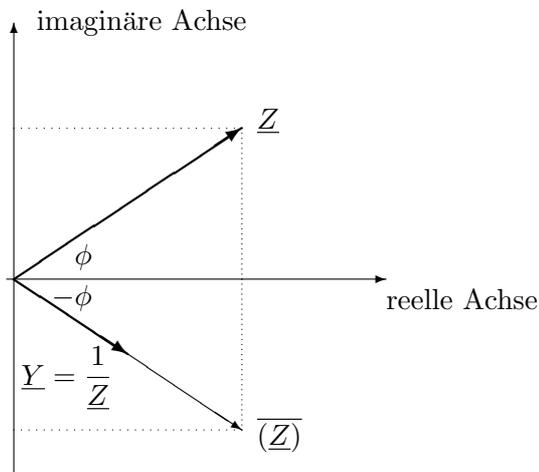


Abbildung 1.32: Inversion am Einheitskreis

Schaltelement	Widerstandsoperator	Leitwertoperator
Ohm'scher Widerstand R	R	$\frac{1}{R}$
Kapazität C	$\frac{1}{i\omega C} = -i\frac{1}{\omega C}$	$i\omega C$
Induktivität L	$i\omega L$	$\frac{1}{i\omega L} = -i\frac{1}{\omega L}$

Tabelle 1.2: Grundschaltelemente eines Wechselstromkreises

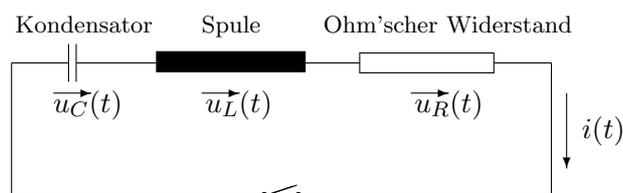


Abbildung 1.33: Elektrischer Reihenschwingkreis

Für seinen Gesamtwiderstand berechnet man

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \cdot e^{i\phi}.$$

Abbildung 1.34 zeigt die Lage der Widerstandsoperatoren im Zeigerdiagramm.

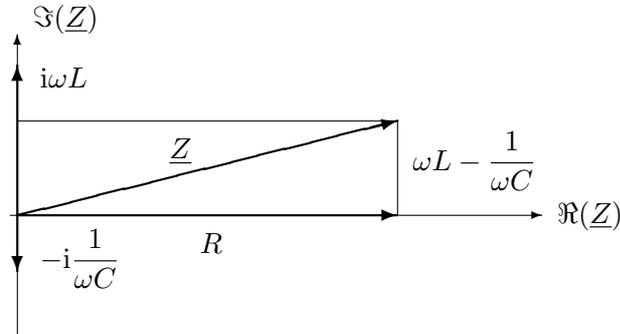


Abbildung 1.34: Zeigerdiagramm eines Wechselstromkreises in Serienschaltung

Es ergeben sich die folgenden Größen:

$$\text{Wirkwiderstand} : \Re(\underline{Z}) = R$$

$$\text{Blindwiderstand} : \Im(\underline{Z}) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{Betrag des Scheinwiderstandes} : Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\text{Phasenverschiebung} : \phi = \phi_u - \phi_i, \quad \tan \phi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

$$\text{Effektivwert des Stromes} : I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

1.2.4.5 Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis

In Wechselstromkreisen wie in Gleichstromkreisen läßt sich die Momentanleistung als Produkt von Spannung und Strom zur Zeit $t \geq 0$ berechnen:

$$\begin{aligned} P_{\text{mom}}(t) &= u(t) \cdot i(t) \\ &= \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u) \cdot \hat{i} \sin(\omega t + \phi_i) \\ &= \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cdot [\cos(\phi_u - \phi_i) - \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

(1.8)

$P_{\text{mom}}(t)$ zeigt je nach Richtung der Wechselspannung und des Wechselstromes positive oder negative Energieflüsse. Meistens interessiert man sich für die *effektive Leistung* P_{eff} : diese erhält man, wenn man die Momentanleistung über eine Periode ($\omega T = 2\pi$) mittelt (= integriert):

$$P_{\text{eff}} := \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{mom}}(t) dt = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cdot \cos(\phi_u - \phi_i) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cdot \cos(\phi)$$

mit der Abkürzung $\phi := \phi_u - \phi_i$ für die Differenz der Nullphasenwinkel von Spannung und Strom.

Würde man die symbolische Methode (Ersetzung reeller Größen durch ihr jeweiliges komplexes Pendant) direkt anwenden, so hätte man es hier mit einem Produkt komplexer Zahlen zu tun. Eine wesentliche Voraussetzung der Gültigkeit der Anwendbarkeit der symbolischen Methode besteht jedoch gerade darin, daß Realteil und Imaginärteil der auftretenden komplexen Zahlen nicht „gemischt“ werden (s. p. 43). Daher liefert der Realteil des Produktes (wegen der \cos -Glieder) aus der komplexen Spannung und dem komplexen Strom *nicht* die Momentanleistung (s. (1.8)):

$$\begin{aligned} \Re[\underline{u}(t) \underline{i}(t)] &= \Re[\hat{u} e^{i(\omega t + \phi_u)} \cdot \hat{i} e^{i(\omega t + \phi_i)}] \\ &= \Re[\hat{u} \hat{i} e^{i(2\omega t + \phi_u + \phi_i)}] \\ &= \Re[\hat{u} \hat{i} [\cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) + i \sin(2\omega t + \phi_u + \phi_i)]] \\ &= \hat{u} \hat{i} \cdot \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \\ &\neq P_{\text{mom}}(t) \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Es ist allerdings dennoch möglich, die Leistung aus den komplexen Größen zu berechnen, allerdings muß man dabei etwas anders vorgehen. Wenn man die komplexe Spannung \underline{u} mit dem *konjugiert komplexen* Strom $\bar{\underline{i}}$ multipliziert, so fällt der Zeitanteil $e^{i\omega t}$ heraus, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \bar{\underline{i}} &:= \underline{u}(t) \cdot \bar{\underline{i}}(t) = \hat{u} e^{i(\omega t + \phi_u)} \cdot \hat{i} e^{-i(\omega t + \phi_i)} \\ &= \hat{u} \hat{i} \cdot e^{i(\phi_u - \phi_i)} \\ &= \hat{u} \hat{i} \cdot [\cos(\phi_u - \phi_i) + i \sin(\phi_u - \phi_i)] \end{aligned}$$

Vergleicht man hiervon den Realteil mit P_{eff} , so stellt man eine Übereinstimmung bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ fest. Daher gilt für die effektive Leistung

$$P_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \Re[\underline{u} \cdot \bar{\underline{i}}].$$

Bemerkung

Zerlegt man die komplexe Leistung $\underline{S} := \frac{1}{2} \Re [\underline{u} \cdot \bar{\underline{i}}]$ in Real- und Imaginärteil, so erhält man $\underline{S} =: P + iQ$. Dabei entspricht die *Wirkleistung* P der oben berechneten effektiven Leistung P_{eff} . Den Imaginärteil Q der komplexen Leistung bezeichnet man als *Blindleistung*.

1.3 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Rechenoperationen in \mathbb{R} , Potenzen, Bruchrechnen
- Ordnungsaxiome von \mathbb{R} , Umgehen mit Ungleichungen
- Intervalle
- Betragsfunktion und Rechnungen mit ihr (Satz 1.4)
- Normalform, Trigonometrische Form und Exponentialform komplexer Zahlen
- Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene \mathbb{C}
- Umrechnungen verschiedener Formen komplexer Zahlen ineinander
- Grundrechenarten mit komplexen Zahlen, Potenzieren, Radizieren

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Signumsfunktion
- Interpretation der Rechnungen mit komplexen Zahlen als Abbildungen der Ebene
- Grundlagen der Anwendungen komplexer Zahlen in der Elektrotechnik

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Vollständigkeit von \mathbb{R} im Gegensatz zu \mathbb{Q} und Konsequenzen daraus
- Erweiterung von \mathbb{R} zu \mathbb{C} , Einbettung von \mathbb{R} in \mathbb{C}
- Vorteile und Grenzen der Anwendungen komplexer Zahlen in der Elektrotechnik
- Arbeiten mit komplexen Zahlen in der Elektrotechnik

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Allgemeine Eigenschaften

Sind \mathcal{M} und \mathcal{N} zwei Mengen, so wird ihr kartesisches Produkt mit $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ bezeichnet und bedeutet die Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente jeweils aus einem Element des ersten Faktors besteht und dessen zweite Komponente ein Element des zweiten Faktors ist:

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{p : \bigvee_{x \in \mathcal{M}} \bigvee_{y \in \mathcal{N}} p = \langle x, y \rangle\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ heißt eine *Relation*. Eine Relation f heißt eine *Abbildung* oder eine *Funktion*, wenn gilt

$$\bigwedge_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ y, z \in \mathcal{N}}} [\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \implies y = z].$$

Eine Abbildung ist also eine ausgezeichnete Relation in dem Sinne, daß je zwei Paare $\langle x_1, y_1 \rangle$ und $\langle x_2, y_2 \rangle$ des kartesischen Produktes stets gleiche zweite Komponenten haben, wenn schon die ersten beiden Komponenten gleich sind. Diese Bedingung ist nichts Anderes als die Eindeutigkeit der Zuordnung

$$\text{Urbild} \longmapsto \text{Bild}.$$

Schreibweise: $\langle x, y \rangle \in f \iff : x \longmapsto y = f(x)$

Eine Abbildung oder Funktion

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

stellt also die Elemente x von \mathcal{M} mit gewissen Elementen $y := f(x)$ von \mathcal{N} zu Paaren $\langle x, y \rangle$ zusammen und zwar gerade so, daß keine zwei Paare mit gleichen ersten - und verschiedenen zweiten Komponenten auftreten.

Im folgenden werden stichwortartig einige Definitionen und Bezeichnungen wiederholt:

Definition 2.1(i) **Definitionsbereich**

$$D(f) := \{x : x \in \mathcal{M}, \bigvee_{y \in \mathcal{N}} y = f(x)\}$$

(ii) **Wertebereich**

$$W(f) := \{y : y \in \mathcal{N}, \bigvee_{x \in \mathcal{M}} y = f(x)\}$$

(iii) **Reell, reellwertig**

Ist $W(f) \subseteq \mathbb{R}$, so heißt f *reellwertig*. Gilt darüberhinaus $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, so heißt f *reell schlechthin*.

Analoge, später auftretende Begriffe: komplexwertig, vektorwertig, ...

(iv) **Term**

Ein *Term* $t(x)$ ist ein Ausdruck, der zu einer Zahl wird, wenn x durch eine geeignete Zahl ersetzt wird.

Beispiele für Terme:

$$x^2 + 2, \quad \sqrt{x^2 - 4}, \quad \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$$

(v) **Explizite - oder implizite Darstellung**

Ist $t(x)$ ein Term und ist

$$f := \{\langle x, y \rangle : x \in D(f), y \in W(f), y = t(x)\},$$

so sagt man, f sei *explizit* dargestellt.

Schreibweisen:

- $f : \begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ x & \longmapsto & t(x) \end{array}$
- $f : y = t(x) \quad (x \in D(f))$
- $f(x) := t(x) \quad (x \in D(f))$

Ist eine Funktion nicht explizit dargestellt, so heißt sie *impliziert* definiert.

Beispiele:

$$\begin{aligned} f_1 &:= \{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \\ f_2 &:= \{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{R}, y(x - 1) = x + 1, x \neq 1\} \end{aligned}$$

(vi) Gleichheit von zwei Funktionen

Seien \mathcal{M}_i und \mathcal{N}_i zwei Mengen und $f_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{N}_i$ zwei Funktionen ($i \in \{1, 2\}$). Die beiden Funktionen heißen *gleich*, wenn sie als Teilmengen von $\mathcal{M}_i \times \mathcal{N}_i$ gleich sind. Das heißt im einzelnen:

$$D(f_1) = D(f_2) \quad \wedge \quad f_1(x) = f_2(x) \quad (x \in D(f_1)).$$

Man schreibt dafür auch

$$f_1 = f_2 \quad \vee \quad f_1(x) \equiv f_2(x).$$

Manchmal wird in der Literatur zusätzlich $W(f_1) = W(f_2)$ gefordert. Das ist jedoch unnötig, da es sich von selbst ergibt.

Man beachte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \sqrt{1-x^2} && (x \in [0, 1]) \\ f_2(x) &:= \sqrt{1-x^2} && (x \in (0, 1]) \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene Funktionen!

Funktionen sind also nicht durch Terme allein festgelegt, sondern erst durch Term *und* Angabe ihres Definitionsbereiches.

Es gibt eine (manchmal formulierte) Konvention, einem Term eine „natürliche“ Funktion zuzuordnen, indem als Definitionsbereich dieser Funktion stillschweigend die Menge aller derjenigen $x \in \mathbb{R}$ genommen wird, für welche $t(x)$ definiert werden kann, sozusagen der maximal mögliche Definitionsbereich.¹

Folgte man dieser Konvention, so wäre der Term $\sqrt{1-x^2}$ des letzten Beispiels als Funktion

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \quad (x \in [-1, 1])$$

anzusehen. Hier wird in der Regel nur in Spezialfällen von dieser Konvention Gebrauch gemacht; etwa bei Polynomen, deren maximal möglicher Definitionsbereich \mathbb{R} ist.

Aufgabe

Man bestimme die durch den Term $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x}} - 1$ definierte „natürliche“ Funktion.

(vii) Restriktion, Fortsetzung von Funktionen

Seien f eine Funktion, $\mathcal{M} \subset D(f)$, $\mathcal{M} \neq D(f)$ und die Funktion g definiert durch:

$$D(g) := \mathcal{M} \quad \wedge \quad g(x) := f(x) \quad (x \in \mathcal{M}).$$

¹Heuser: Analysis I, 14.13; Wüst: Höhere Mathematik für Physiker I, 4.1

Dann heißt g die *Restriktion* (Einschränkung) von f auf \mathcal{M} . Man schreibt dafür

$$g := f \upharpoonright \mathcal{M}$$

und spricht: „ f restringiert (eingeschränkt) auf \mathcal{M} “. Im unter (vi) beschriebenen Beispiel ist

$$f_2 = f_1 \upharpoonright (0, 1].$$

In diesem Fall heißt f_1 eine *Fortsetzung* von f_2 auf $[0, 1]$.

(viii) Darstellung von Funktionen

Die Darstellung einer Funktion erfolgt in einer Wertetabelle oder in einem Schaubild. Die von

$$\Gamma(f) := \{p : \bigvee_{x \in D(f)} p = \langle x, f(x) \rangle\}$$

als Bild in \mathbb{R}^2 erzeugte Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ (hier: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$) heißt der *Funktionsgraph* von f .

(ix) Umkehrfunktion oder Umkehrabbildung

Haben verschiedene Urbilder einer Funktion f stets verschiedene Bilder, so nennt man f

- *injektiv*
- *eindeutig* (englisch: *one-to-one*)
- *umkehrbar eindeutig*
- oder kurz: *umkehrbar*.

In diesem Fall gibt es zu jedem Element $y \in W(f)$ genau ein Element $x \in D(f)$ mit $y = f(x)$. Dann läßt sich durch die umgekehrte Zuordnung

$$g : y = f(x) \mapsto x$$

eine Funktion g von $W(f)$ nach $D(f)$ definieren. Diese Funktion heißt

- *Umkehrfunktion*
- *Umkehrabbildung*
- oder : *zu f inverse Funktion*.

Bezeichnung: f^{-1} , oder ausführlich

$$\begin{aligned} f^{-1} : W(f) &\longrightarrow D(f) \\ f(x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Dabei gelten die Bezeichnungen:

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad (x \in D(f)),$$

$$f[f^{-1}(y)] = y \quad (y \in W(f)).$$

In der Praxis möchte man nicht nur wissen, ob es zu einer gegebenen Funktion eine Umkehrfunktion gibt, sondern auch, wie diese gegebenenfalls aussieht. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Man löst die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf (sofern möglich).
2. Zur Darstellung von $x = f^{-1}(y)$ im selben Schaubild wie f muß man dann noch die Rollen von x und y vertauschen.

Beispiel 2.1

$$D(f) := W(f) := [0, \infty), \quad y := f(x) := x^2 \quad (x \in [0, \infty))$$

1. Die Gleichung nach x auflösen:

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (y \geq 0)$$

2. Die Rollen von x und y vertauschen:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

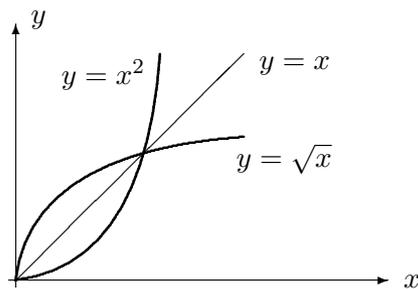


Abbildung 2.1: Darstellung einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion im selben Schaubild

Das Vertauschen der Rollen von x und y führt dazu, daß eine Funktion und ihre Umkehrfunktion bzgl. der Diagonale $y = x$ im \mathbb{R}^2 spiegelbildlich verlaufen, s. Abb. 2.1.

(x) Konstante Funktion

Ist $W(f) =: \{c\}$ einelementig, so heißt f eine *konstante Funktion*, kurz: *konstant* oder *Konstante*.

(xi) Stückweise definierte Funktion

Beispiele für *stückweise* oder *abschnittsweise* definierte Funktionen sind die Betrags- oder Signumsfunktion:

$$f(x) := |x| := \begin{cases} x & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) := \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ -1 & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel 2.2

Sei $U(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) der (Gleich-) Spannungsverlauf in einer Lampe, die man ein- und ausschalten kann. Die Lampe werde zur Zeit $t = a$ ein- und zur Zeit $t = b$ ausgeschaltet. Dann ist

$$\begin{aligned} U(t) &= 0 && \text{für } t < a \text{ oder } t > b && \text{und} \\ U(t) &= U_0 && \text{für } a < t < b. \end{aligned}$$

Ohne die (komplizierten!) Ein- und Ausschaltvorgänge zu berücksichtigen, wird willkürlich gesetzt:

$$U(a) = 0 \quad \text{und} \quad U(b) = U_0.$$

Dann lautet die vollständige Definition der Funktion U so:

$$U(t) := \begin{cases} 0 & , \text{ für } t \leq a \\ U_0 & , \text{ für } a < t \leq b \\ 0 & , \text{ für } b < t \end{cases}$$

Es ist $D(U) = \mathbb{R}$, und als Zielmenge könnte man $\mathcal{N} := \mathbb{R}$ oder auch den Wertebereich $W(U) = \{0, U_0\}$ wählen; im letzten Fall ist die Abbildung surjektiv.

(xii) Parameterdarstellung von Funktionen

Definiert man die Abszisse und Ordinate einer Funktion f selbst als Funktionen einer dritten Variable – eines sog. *Parameters* – so erhält man die *Parameterdarstellung* einer Funktion. Beispiel:

$$x(t) := t^2 \quad (t \in [0, 1])$$

$$y(t) := t^3 \quad (t \in [0, 1])$$

$$\iff$$

$$y(t) = [\sqrt{x(t)}]^3 \quad (t \in [0, 1])$$

$$\iff$$

$$y = (\sqrt{x})^3 \quad (x \in [0, 1])$$

(xiii) Beschränkte Funktion

Eine Funktion f heißt *beschränkt*, wenn ihr Wertebereich eine beschränkte Menge ist, wenn also gilt:

$$\bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D(f)} |f(x)| \leq c$$

(xiv) **Gerade und ungerade Funktionen**

Eine Funktion f mit $D(f) = \mathbb{R}$ heißt *gerade (ungerade)*, wenn gilt:

$$\text{gerade Funktion: } f(-x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\text{ungerade Funktion: } f(-x) = -f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(xv) **Monotone Funktionen**

Eine Funktion f heißt

$$\text{monoton wachsend: } \iff \bigwedge_{x_1, x_2 \in D(f)} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$$

$$\text{streng monoton wachsend: } \iff \bigwedge_{x_1, x_2 \in D(f)} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$$

$$\text{monoton fallend: } \iff \bigwedge_{x_1, x_2 \in D(f)} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$$

$$\text{streng monoton fallend: } \iff \bigwedge_{x_1, x_2 \in D(f)} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$$

(xvi) **Periodische Funktionen**

Eine Funktion f heißt *periodisch mit der Periode $p \neq 0$* (kurz: *p-periodisch*), wenn gilt:

$$f(x + p) = f(x) \quad (x \in D(f)).$$

Beispielsweise sind die sin- oder cos-Funktionen 2π -periodische Funktionen auf \mathbb{R} .

(xvii) **Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Funktionen**

Sind f und g zwei Funktionen, so wird definiert:

$$\text{Summe: } (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in D(f) \cap D(g))$$

$$\text{Differenz: } (f - g)(x) := f(x) - g(x) \quad (x \in D(f) \cap D(g))$$

$$\text{Produkt: } (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in D(f) \cap D(g))$$

$$\text{Quotient: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in D(f) \cap D(g), g(x) \neq 0)$$

Es gilt also:

$$D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \cap \{x : g(x) \neq 0\}$$

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned} f(x) &:= \ln(-x) && (x \in (-\infty, 0)) \\ g(x) &:= \sqrt{x} && (x \in [0, \infty)) \end{aligned}$$

$$\implies D(f) \cap D(g) = \emptyset, \quad (f + g) \text{ ist nicht definiert!}$$

(xviii) Komposition zweier Funktionen

Seien $f : L \rightarrow M$, $g : M \rightarrow N$ zwei Funktionen und gelte $W(f) \subseteq D(g)$. Dann läßt sich eine Funktion $h : L \rightarrow N$ erklären durch $D(h) := D(f)$ und

$$h : x \mapsto h(x) := g[f(x)] \quad (x \in D(f)).$$

Die Funktion h heißt *Komposition* (*Verknüpfung*, *Hintereinanderschaltung*, *Verkettung*) der Funktionen f und g und wird mit

$$h := g \circ f$$

bezeichnet, s. Abb. 2.2:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)).$$

Es gilt also:

$$D(g \circ f) = D(f) \cap \{x : f(x) \in D(g)\}.$$

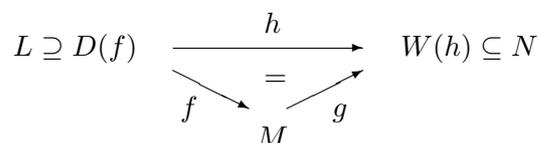


Abbildung 2.2: Komposition von Funktionen

Beispiel 2.4

Bei einer Röhre sei der Anodenstrom i eine Funktion der Gitterspannung u : $i = f(u)$. Die Gitterspannung sei zeitlich variabel, d.h. mit einer Funktion g gelte:

$$u = g(t) \quad (t \geq 0).$$

Dann ist der zeitlich veränderliche Anodenstrom gegeben durch die Komposition

$$j(t) := f[g(t)] = (f \circ g)(t) \quad (t \geq 0).$$

Ingenieure verwenden hier häufig die mathematisch inkorrekte Schreibweise

$$i = i(u) \quad \text{und} \quad u = u(t)$$

und „erhalten“ dann den Anodenstrom als

$$i = i[u(t)].$$

Hierbei werden die abhängigen Variablen – u und i – identifiziert mit den Funktionssymbolen u und i .

Für die Komposition von Abbildungen gilt das Assoziativgesetz:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

d.h.

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f[(g \circ h)(x)] = f(g[h(x)])$$

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)[h(x)] = f(g[h(x)])$$

Das Kommutativgesetz gilt jedoch i.a. nicht:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Beispiel 2.5

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$g(x) := 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x + 1) = (2x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

2.2 Algebraische Funktionen

Definition 2.2

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

heißt eine *ganzzrationale Funktion n -ten Grades* oder ein *Polynom*. Die Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \{0, \dots, n\}$) heißen die *Koeffizienten* -, die Zahl n der *Grad* des Polynoms.

Mit Hilfe des Begriffes „Polynom“ läßt sich nun formulieren, was man unter einer sog. *algebraischen Gleichung* versteht.

Definition 2.3

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und a_0, \dots, a_n Polynome. Eine Gleichung der Form

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

heißt eine *algebraische Gleichung n -ten Grades*. Die Funktionen $a_k(\cdot)$ ($k \in \{0, \dots, n\}$) heißen die *Koeffizientenfunktionen*, die Zahl n der *Grad* der algebraischen Gleichung, falls $a_n \neq 0$.

Die in diesem Abschnitt zu besprechenden algebraischen Funktionen sind spezielle Lösungen der algebraischen Gleichung.

$$(i) \quad a_2(x) \equiv \dots \equiv a_n(x) \equiv 0, \quad a_1(x) \equiv 1 :$$

$$\longrightarrow \quad f(x) := y = -a_0(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Die Lösung dieser algebraischen Gleichung 1. Grades (Auflösung nach y) ist eine ganze rationale Funktion oder ein Polynom.

$$(ii) \quad a_2(x) \equiv \dots \equiv a_n(x) \equiv 0, \quad a_1(x) \neq 1 :$$

$$\longrightarrow \quad f(x) := y = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad (x \in \mathbb{R}, a_1(x) \neq 0)$$

Die Lösung dieser algebraischen Gleichung 1. Grades ist eine sog. *gebrochen rationale Funktion* (= Quotient zweier Polynome).

$$(iii) \quad a_1(x) \equiv a_3(x) \equiv \dots \equiv a_n(x) \equiv 0, \quad a_2(x) \equiv 1 :$$

$$\longrightarrow \quad y^2 = -a_0(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Die Lösung dieser algebraischen Gleichung 2. Grades (Auflösung nach y) ist eine *irrationale algebraische Funktion* (Wurzelfunktion).

Die soeben aufgelisteten drei Beispiele sind typische Funktionen, mit denen sich die nächsten drei Unterabschnitte beschäftigen.

2.2.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$. Dann heißt eine Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

eine *ganzrationale Funktion* oder ein *Polynom n -ten Grades in der Variablen z* mit den Koeffizienten a_0, \dots, a_n , s. Definition 2.2.

Die Koeffizienten können reell oder komplex, z kann eine reelle oder komplexe Variable sein. Sind die Koeffizienten reell, so schreibt man meistens x statt z , obwohl x weiterhin komplexe Werte annehmen kann.

Beispiel 2.6

$$p(z) := 4 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (\text{Polynom vom Grad 0; konstante Funktion})$$

$$p(z) := 2z - 3 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (\text{Polynom vom Grad 1; lineare Funktion})$$

$$p(x) := 2x^2 - 3x + 5 \quad (x \in \mathbb{C}) \quad (\text{Polynom vom Grad 2; quadratische Funktion})$$

$$p(x) := 3x^7 - 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\text{Polynom vom Grad 7})$$

Besonders einfache Polynome sind die *Potenzfunktionen*

$$p(z) := z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

mit einem Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$. Diese Polynome nennt man auch *Monome*.

Definition 2.4

Seien p ein Polynom und $w \in \mathbb{C}$. Eine Lösung der Gleichung

$$p(z) = w$$

heißt eine w -Stelle von p . Ist insbesondere $w = 0$, so spricht man von einer *Nullstelle*.

Beispiel 2.7

$$p(z) := (1 - i)z^3 - (4 - 2i)z^2 + (5 - i)z - (4 + 2i) \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (2.1)$$

- $p(z_1 := 2 - i) = -8 \neq 0$: Zum Beweis setzt man nacheinander

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 - i \\ z_1^2 &= 3 - 4i \\ z_1^3 &= 2 - 11i \end{aligned}$$

und erhält: $p(2 - i) = -8$; $z_1 = 2 - i$ ist *keine* Nullstelle von p .

- $p(z_2 := 2 + i) = 0$: Zum Beweis setzt man nacheinander

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 + i \\ z_2^2 &= 3 + 4i \\ z_2^3 &= 2 + 11i \end{aligned}$$

und erhält: $p(2 + i) = 0$; $z_2 = 2 + i$ ist also *eine* Nullstelle von p .

Aufgabe

z_1 und z_2 sind zueinander konjugiert komplex, dennoch ist nur eine dieser Zahlen eine Nullstelle von p . Warum nicht beide?

2.2.1.1 Horner-Schema

Das Polynom des letzten Beispiels läßt sich anders klammern:

$$p(z) = \left(\left((1 - i)z - (4 - 2i) \right) z + (5 - i) \right) z - (4 + 2i) \quad (z \in \mathbb{C})$$

Berechnet man die Werte $p(z_1)$ und $p(z_2)$ mit dieser Darstellung von $p(\cdot)$, so hat man nur drei Multiplikationen durchzuführen, anstatt fünf wie in (2.1). Bei der Darstellung anspruchsvoller Graphiken auf dem Bildschirm, noch dazu in bewegter Form, sind unzählige Berechnungen dieser Art durchzuführen.

Dann ist der Zeitvorteil immens, da eine Multiplikation reeller Zahlen auf einem Computer viel länger dauert als eine Addition.

Aufgabe

Wieviele Multiplikationen müssen zur Berechnung des Funktionswertes eines Polynoms vom Grad n durchgeführt werden

- bei einer Darstellung des Polynoms *ohne* das Horner-Schema;
- bei einer Darstellung des Polynoms *mit* dem Horner-Schema?

Das Verfahren soll nun allgemein dargestellt werden. Seien dazu $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$p(z) = (\dots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \dots + a_1)z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Die Klammerinhalte werden von innen nach außen berechnet. Dazu bedient man sich des folgenden Schemas (*Horner-Schema*):

Zu:		a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
addiere:	z_0		$b_{n-1} \cdot z_0$	\dots	$b_1 \cdot z_0$	$b_0 \cdot z_0$
und erhalte:		$b_{n-1} = a_n$	b_{n-2}	\dots	b_0	$r_0 = p(z_0)$

Abbildung 2.3: Horner-Schema

Man beachte: Koeffizienten a_k mit $a_k = 0$ müssen ebenfalls aufgeführt werden!

Im rechten unteren Kasten steht der Funktionswert $r_0 = p(z_0)$. Vorher ist

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1} \cdot z_0 \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + b_{n-2} \cdot z_0 \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + b_1 \cdot z_0 \\ r_0 &= a_0 + b_0 \cdot z_0 = p(z_0) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - b_{n-1} \cdot z_0 \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - b_{n-2} \cdot z_0 \\ &\vdots \\ a_1 &= b_0 - b_1 \cdot z_0 \\ a_0 &= r_0 - b_0 \cdot z_0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten b_{n-1}, \dots, b_0 sind Koeffizienten eines Polynoms p_1 vom Grad $(n-1)$, welches mit dem Ausgangspolynom p folgendermaßen zusammenhängt:

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \\ &= [b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0](z - z_0) + r_0 \quad (2.2) \\ &= p_1(z) \cdot (z - z_0) + r_0 \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Man erkennt dies, indem man die Koeffizienten der beiden Polynome in (2.2) vergleicht und (2.2) verwendet.

Für Kenner und Genießer der Linearen Algebra

Ein Koeffizientenvergleich benutzt die lineare Unabhängigkeit der Monome.

p_1 entsteht aus p durch *Polynomdivision*: bei dieser Polynomdivision bleibt genau dann kein Rest r_0 , wenn z_0 eine Nullstelle von p ist. Das läßt sich wie folgt ausdrücken:

- Ist z_0 eine Nullstelle des Polynoms $p(\cdot)$ vom Grade n , so läßt sich der Linearfaktor $(z - z_0)$ „abspalten“:

$$p(z) = p_1(z) \cdot (z - z_0) + 0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

- p_1 ist ein Polynom vom Grade $(n-1)$, dessen Koeffizienten b_{n-1}, \dots, b_0 sich im Horner-Schema ergeben.

Beispiel 2.8

Mit dem Horner-Schema erhält man für die Zerlegung von p gemäß

$$p(x) = p_1(x) \cdot (x - x_1) + r_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

für das Polynom

$$p(x) := 2x^4 - x^3 - 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

die Zerlegung

- (i) im Fall $x_1 = -1$ (cf. Abb. 2.4):

$$\begin{aligned} p(x) &= [2x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \cdot [x - (-1)] + 6 \\ &= [b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0] \cdot [x - x_1] + r_0 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- (ii) im Fall $x_2 = +1$ (cf. Abb. 2.5):

$$\begin{aligned} p(x) &= [2x^3 + x^2 + x - 1] \cdot [x - 1] \\ &= [b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0] \cdot [x - x_2] \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

		2	-1	0	-2	1	
$x_1 = -1$							
			-2	3	-3	5	
			↙	↙	↙	↙	
		2	-3	3	-5	$p(-1) = 6$	
		⏟ b_3	⏟ b_2	⏟ b_1	⏟ b_0		

Abbildung 2.4: Horner-Schema für den Funktionswert $x_1 = -1$:

		2	-1	0	-2	1	
$x_2 = +1$							
			2	1	1	-1	
			↙	↙	↙	↙	
		2	1	1	-1	$p(+1) = 0$	
		⏟ b_3	⏟ b_2	⏟ b_1	⏟ b_0		

Abbildung 2.5: Horner-Schema für den Funktionswert $x_2 = +1$:

Beispiel 2.9

Mit dem Horner-Schema erhält man für die Zerlegung von p gemäß

$$p(z) = p_1(z) \cdot (z - z_0) + r_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

für das Polynom

$$p(z) := (1 - i)z^3 - (4 - 2i)z^2 + (5 - i)z - (4 + 2i) \quad (z \in \mathbb{C})$$

(i) im Fall $z_1 = 2 - i$ (cf. Abb. 2.6):

$$\begin{aligned} p(z) &= [(1 - i)z^2 + (-3 - i)z - 2] \cdot [z - (2 - i)] - 8 \\ &= [b_2z^2 + b_1z + b_0] \cdot [z - z_1] + r_0 \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

(ii) im Fall $z_2 = 2 + i$ (cf. Abb. 2.7):

$$\begin{aligned} p(z) &= [(1 - i)z^2 + (-1 + i)z + 2] \cdot [z - (2 + i)] \\ &= [b_2z^2 + b_1z + b_0] \cdot [z - z_2] \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

		1 - i	-4 + 2i	5 - i	-4 - 2i
$z_1 = 2 - i$			1 - 3i	-7 + i	-4 + 2i
		$\underbrace{1 - i}_{b_2}$	$\underbrace{-3 - i}_{b_1}$	$\underbrace{-2}_{b_0}$	$p(2 - i) = -8$

Abbildung 2.6: Horner-Schema für den Funktionswert $z_1 = 2 - i$:

		1 - i	-4 + 2i	5 - i	-4 - 2i
$z_2 = 2 + i$			3 - i	-3 + i	4 + 2i
		$\underbrace{1 - i}_{b_2}$	$\underbrace{-1 + i}_{b_1}$	$\underbrace{2}_{b_0}$	$p(2 + i) = 0$

Abbildung 2.7: Horner-Schema für den Funktionswert $z_2 = 2 + i$:

Bemerkung

Das Horner-Schema leistet die Berechnung von Funktionswerten eines Polynoms, nicht die von seinen Nullstellen! Wenn man bei dieser Berechnung zufällig an eine Nullstelle gerät, dann gut, aber das läßt sich nicht erzwingen.

2.2.1.2 Übergang zu einem neuen Entwicklungspunkt

Bisher sind die Polynome nach Potenzen von z dargestellt worden, genauer: nach Potenzen von $(z - z_0) = (z - 0)$. Der Punkt $z_0 = 0$ heißt der *Entwicklungspunkt* des Polynoms. Durch mehrmalige Anwendung des Horner-Schemas

kann man das Polynom p nun auch bzgl. eines anderen Entwicklungspunktes z_0 darstellen. Man erhält sukzessive

$$\begin{aligned} p(z) &= p_1(z)(z - z_0) + r_0, & \text{Grad } p_1 &= n - 1 \\ p_1(z) &= p_2(z)(z - z_0) + r_1, & \text{Grad } p_2 &= n - 2 \\ &\vdots & &\vdots \\ p_n(z) &= 0 + r_n, & \text{Grad } p_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Setzt man die rechten Seiten von (2.3) für die Polynome p_i rückwärts ein, so erhält man für p eine Entwicklung nach Potenzen von $(z - z_0)$:

$$p(z) = r_n(z - z_0)^n + r_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + \dots + r_1(z - z_0) + r_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Hierbei ist $r_n = a_n$.

Bemerkung

In technischen Anwendungen nennt man den Entwicklungspunkt auch *Arbeitspunkt*. Der Arbeitspunkt gibt an, in welchem Bereich seiner Kennlinie ein elektronisches Bauelement betrieben wird. Er ist entscheidend für Verzerrungen und den Verstärkungsfaktor.

Der hier beschriebene Übergang zu einem neuen Entwicklungspunkt eines Polynoms läßt sich somit auffassen als Übergang zur Darstellung ein und derselben Kennlinie bzgl. eines neuen Arbeitspunktes.

Beispiel 2.10

Das Polynom

$$p(x) := 2x^4 - 24x^3 + 108x^2 - 216x + 162 \quad (x \in \mathbb{R})$$

soll nach Potenzen von $(x - x_0) = (x - 3)$ entwickelt werden, s. Abb. 2.8.

Das reelle Polynom p besitzt damit (u.a.) die zwei Darstellungen

$$\begin{aligned} p(x) &= a_4(x - 0)^4 + a_3(x - 0)^3 + a_2(x - 0)^2 + a_1(x - 0) + a_0 \\ &= 2x^4 + (-24)x^3 + 108x^2 + (-216)x + 162 \\ &= r_4(x - 3)^4 + r_3(x - 3)^3 + r_2(x - 3)^2 + r_1(x - 3) + r_0 \\ &= 2(x - 3)^4 + 0(x - 3)^3 + 0(x - 3)^2 + 0(x - 3) + 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Man beachte, daß hier nur eine Potenz von $(x - 3)$ auftritt, während in der Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$ alle Glieder auftreten.

Beispiel 2.11

Unser komplexes Beispielpolynom (2.1) soll nach Potenzen von

$$(z - z_1) = [z - (2 - i)]$$

	2	-24	108	-216	162	
$x_0 = 3$		6	-54	162	-162	
	$\underbrace{2}_{b_3}$	$\underbrace{-18}_{b_2}$	$\underbrace{54}_{b_1}$	$\underbrace{-54}_{b_0}$		<u>$0 = r_0$</u>
	↓	↓	↓	↓		
	2	-18	54	-54		
$x_0 = 3$		6	-36	54		
	$\underbrace{2}_{c_2}$	$\underbrace{-12}_{c_1}$	$\underbrace{18}_{c_0}$			<u>$0 = r_1$</u>
	↓	↓	↓			
	2	-12	18			
$x_0 = 3$		6	-18			
	$\underbrace{2}_{d_1}$	$\underbrace{-6}_{d_0}$				<u>$0 = r_2$</u>
	↓	↓				
	2	-6				
$x_0 = 3$		6				
	$\underbrace{2}_{e_0 = r_4}$					<u>$0 = r_3$</u>

Abbildung 2.8: Übergang zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1-i & -4+2i & 5-i & -4-2i \\
 \hline
 z_1 = 2-i & & 1-3i & -7+i & \\
 \hline
 & \underbrace{1-i}_{b_2} & \underbrace{-3-i}_{b_1} & \underbrace{-2}_{b_0} & \underline{-8 = r_0} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & 1-i & -3-i & -2 & \\
 \hline
 z_1 = 2-i & & 1-3i & -8-6i & \\
 \hline
 & \underbrace{1-i}_{c_1} & \underbrace{-2-4i}_{c_0} & & \underline{-10-6i = r_1} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \\
 & 1-i & -2-4i & & \\
 \hline
 z_1 = 2-i & & 1-3i & & \\
 \hline
 & \underbrace{1-i}_{d_0 = r_3} & & & \underline{-1-7i = r_2}
 \end{array} \\
 \end{array}$$

Abbildung 2.9: Übergang zum Entwicklungspunkt $z_0 = (2 - i)$

entwickelt werden, s. Abb. 2.9.

Das Polynom p besitzt damit (u.a.) die zwei Darstellungen

$$\begin{aligned}
 p(z) &= a_3(z-0)^3 + a_2(z-0)^2 + a_1(z-0) + a_0 \\
 &= (1-i)z^3 + (-4+2i)z^2 + (5-i)z + (-4-2i) \\
 &= r_3[z-(2-i)]^3 + r_2[z-(2-i)]^2 + r_1[z-(2-i)] + r_0 \\
 &= (1-i)[z-(2-i)]^3 + (-1-7i)[z-(2-i)]^2 + (-10-6i)[z-(2-i)] - 8 \\
 &\quad (z \in \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

2.2.1.3 Divisionsalgorithmus

In vielen Bereichen verhalten sich Polynome (= ganzrationale Funktionen) wie ganze Zahlen:

Satz 2.1

p und q seien (reelle oder komplexe) Polynome, $q \neq 0$. Dann gibt es zwei Polynome s und r mit $\text{Grad } r < \text{Grad } q$ und

$$p = s \cdot q + r.$$

Die letzte Beziehung lautet ausgeschrieben:

$$p(z) = s(z) \cdot q(z) + r(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Zwei Polynome lassen sich also auf ähnliche Weise dividieren, wie man das von der Division ganzer Zahlen mit Rest gewohnt ist:

$$\frac{34}{5} = 6 + \frac{4}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad 34 = 6 \cdot 5 + 4.$$

Das Verfahren selbst wird am besten anhand eines Beispiels demonstriert:

Beispiel 2.12

$$\begin{aligned} p(x) &:= x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1 && (x \in \mathbb{R}) \\ s(x) &:= x^3 + 3x^2 - 2x - 8 && (x \in \mathbb{R}) \\ q(x) &:= x^2 + 2 && (x \in \mathbb{R}) \\ r(x) &:= 7x + 15 && (x \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad (x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0)$$

$$\longrightarrow p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\begin{array}{r} (x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 2) = x^3 + 3x^2 - 2x - 8 \\ - \quad \underline{x^5 + 2x^3} \\ \quad \quad 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\ - \quad \underline{3x^4 + 6x^2} \\ \quad \quad \quad -2x^3 - 8x^2 + 3x - 1 \\ - \quad \underline{-2x^3 - 4x} \\ \quad \quad \quad \quad -8x^2 + 7x - 1 \\ - \quad \underline{-8x^2 - 16} \\ \quad \quad \quad \quad \quad 7x + 15 \quad (\text{Rest}) \end{array} \tag{2.5}$$

Bemerkung

Will man eine Division durch ein Polynom ersten Grades ausführen, so läßt sich das auch mit dem Horner-Schema bewerkstelligen, indem der entsprechende Funktionswert berechnet wird. Für eine Division durch ein Polynom höheren Grades – so wie im letzten Beispiel – existiert ein verallgemeinertes Horner-Schema. Dieses läßt sich zwar elegant programmieren, für das „tägliche Rechnen“ ist es allerdings etwas gewöhnungsbedürftig.

2.2.1.4 Linearfaktorzerlegung von Polynomen

Sind p ein Polynom, dessen Grad gleich $n \geq 1$ sei und z_1 eine Nullstelle von p , so läßt sich – mit dem Divisionsalgorithmus oder mit dem Horner-Schema – der Linearfaktor $(z - z_1)$ „abspalten“, d.h. es gilt

$$p(z) = p_1(z) \cdot (z - z_1) + 0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

mit einem Polynom p_1 vom Grade $(n - 1)$. Ist nun z_2 eine weitere Nullstelle von p , dann wegen der letzten Gleichung auch von p_1 , und es gilt

$$p(z) = p_1(z) \cdot (z - z_1) = p_2(z) \cdot (z - z_1)(z - z_2) \quad (z \in \mathbb{C})$$

mit einem Polynom p_2 vom Grade $(n - 2)$. So fortfahrend, erhält man den folgenden Satz

Satz 2.2

Seien $n \in \mathbb{N}$ und p ein Polynom vom Grade n .

- (i) p besitzt höchstens n Nullstellen.
- (ii) $p(\cdot)$ besitzt höchstens m verschiedene reelle Nullstellen ($m \leq n$ geeignet) x_1, \dots, x_m und läßt sich in der Form

$$p(z) = (z - x_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (z - x_m)^{\nu_m} \cdot q(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

darstellen, wobei für das Polynom q gilt:

- (a) Grad $q = [n - (\nu_1 + \dots + \nu_m)]$;
- (b) q besitzt keine reellen Nullstellen mehr.

Die Zahl ν_k heißt die *Vielfachheit* der Nullstelle x_k .

Beispiel 2.13

$$\begin{aligned} p(z) &= 3z^9 + 3z^8 - 9z^7 + 3z^6 - 3z^5 - 15z^4 + 33z^3 - 27z^2 + 24z - 12 \\ &= (z - 1)^3 \cdot (z + 2)^2 \cdot (3(z^2 + 1)^2) \end{aligned}$$

Aus Satz 2.2 folgt sofort der fundamentale

Satz 2.3 (Identitätssatz für Polynome)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Stimmen die Werte zweier Polynome vom Grad n

$$p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{und} \quad q(z) := \sum_{k=0}^n b_k z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

an nur $(n + 1)$ verschiedenen Stellen überein, so sind die Polynome vollkommen identisch, d.h. es ist $a_k = b_k$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ und somit $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq m \leq n$ der größte Index, für den a_k und b_k verschieden sind; es gelte also

- (i) $a_m \neq b_m$
- (ii) $a_k = b_k \quad (k \in \{m + 1, \dots, n\})$

Man betrachte nun die Differenz beider Polynome

$$d(z) := (p - q)(z) = \sum_{k=0}^m (a_k - b_k)z^k \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Das Polynom d hat einerseits den Grad m , andererseits $(n + 1) > m$ Nullstellen. Das jedoch

- (a) widerspricht im Fall $m \geq 1$ dem letzten Satz;
- (b) ist im Fall $m = 0$ (konstante Funktion $\neq 0$) erst recht unmöglich.

Das Ergebnis, daß ein Polynom n -ten Grades auch mindestens n Nullstellen, damit also genau n Nullstellen besitzt, ist weit weniger trivial; im Bereich der reellen Zahlen ist es auch nicht gültig.

Satz 2.4 (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Polynom p vom Grade n besitzt im Bereich der komplexen Zahlen genau n Nullstellen, ihrer Vielfachheit nach gezählt, und gestattet eine Zerlegung in ein Produkt seiner Linearfaktoren gemäß

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \cdot \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{\nu_k}, \quad \sum_{k=1}^m \nu_k = n, \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Beispiel 2.14 (Fortsetzung von Beispiel 2.13)

$$\begin{aligned} p(z) &= 3z^9 + 3z^8 - 9z^7 + 3z^6 - 3z^5 - 15z^4 + 33z^3 - 27z^2 + 24z - 12 \\ &= (z - 1)^3 \cdot (z + 2)^2 \cdot (3(z^2 + 1)^2) \\ &= 3 \cdot (z - 1)^3 \cdot (z + 2)^2 \cdot (z - i)^2 \cdot (z + i)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung

- (i) Ein nichtkonstantes Polynom besitzt also ebenso viele (komplexe) Nullstellen wie sein Grad angibt.
- (ii) Sind *alle* Koeffizienten des Polynoms $p(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ($z \in \mathbb{C}$) reell und ist ζ eine Nullstelle, so ist auch $\bar{\zeta}$ eine Nullstelle:

$$p(\bar{\zeta}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\zeta}^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{\zeta^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \zeta^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \zeta^k} = \overline{p(\zeta)} = \overline{0} = 0.$$

An Beispiel 2.9 erkennt man, daß dieses Ergebnis für Polynome mit nichtreellen Koeffizienten nicht gültig ist.

2.2.1.5 Interpolation

Oft sind zwei Gruppen von Daten gegeben, und ein funktioneller Zusammenhang zwischen ihnen ist nicht bekannt, beispielsweise eine Zeitreihe. Wenn man vermutet, daß einer besteht, so möchte man diesen soweit konstruieren, daß er zumindest mit den vorliegenden Daten kompatibel ist. Man möchte also aus den vorliegenden Daten eine Funktion konstruieren, die sich mathematisch weiter untersuchen läßt. Naturgemäß hängt ein derartiges Unterfangen stark von den vorliegenden Zahlenwerten ab und ist alles andere als eindeutig.

In diesem Abschnitt sollen unbekannte Zahlenpaare $\langle x_k, y_k \rangle$ aus dem \mathbb{R}^2 als Argumente und Werte einer unbekanntes Funktion angesehen werden, und man möchte versuchen, diese Zahlenpaare mit einem Polynom zu *interpolieren*. Darunter versteht man die Angabe eines Polynoms, welches an den *Stützstellen* x_k durch die *Stützwerte* y_k verläuft.

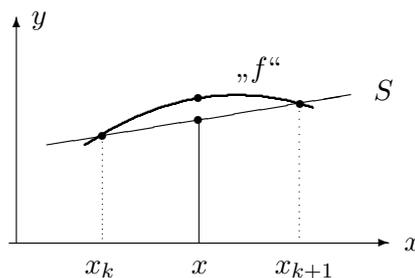


Abbildung 2.10: Interpolation zweier Stützpunkte durch eine lineare Funktion

Im einfachsten Fall erfolgt die Interpolation durch eine lineare Funktion, welche durch je zwei benachbarte *Stützpunkte* $\langle x_k, y_k \rangle$ und $\langle x_{k+1}, y_{k+1} \rangle$ verläuft, s. Abb. 2.10.

$$S(x_k) = y_k \quad , \quad S(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$$S(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Zwischen den beiden Stützpunkten erhält man auf diese Weise „neue“ Funktionswerte $S(x)$. Ist eine höhere Genauigkeit erwünscht, so wird man weitere Stützpunkte zwischen $\langle x_k, y_k \rangle$ und $\langle x_{k+1}, y_{k+1} \rangle$ heranziehen und/oder ein Polynom höheren Grades durch die Stützpunkte legen müssen.

Interpolationsaufgabe

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(n+1)$ verschiedene Stützstellen x_0, \dots, x_n sowie dazu $(n+1)$ (nicht notwendig verschiedene) Stützwerte y_0, \dots, y_n . Dann bestimme man ein Polynom p vom Grad $\leq n$ mit der Eigenschaft

$$p(x_k) = y_k \quad (k \in \{0, \dots, n\}).$$

Lösung der Interpolationsaufgabe

Um die folgenden Ausführungen formal nicht zu sehr zu belasten, beschränke ich mich im wesentlichen auf den Fall $n = 2$.

Man bilde das sog. *k-te Lagrange'sche Polynom*

$$L_k(x) := \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2)} \quad (k \in \{0, 1, 2\}),$$

wobei das *k-te* Glied jedoch fehlt, also etwa

$$L_1(x) := \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad (k \in \{0, 1, 2\})$$

Man forme damit das *Lagrange'sche Interpolationspolynom*

$$L(x) := y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dieses löst die gestellte Interpolationsaufgabe, denn:

- (i) L ist ein Polynom vom Grad ≤ 2 ;
- (ii) $L(x_k) = y_k \quad (k \in \{0, 1, 2\})$;
- (iii) L ist das einzige Polynom dieser Art.

Die eindeutige Bestimmtheit von L folgt aus der Tatsache, daß man durch drei verschiedene Punkte $\langle x_k, y_k \rangle \in \mathbb{R}^2$ genau ein Polynom vom Grad ≤ 2 legen kann (Identitätssatz für Polynome: Satz 2.3).

Häufig ist es zweckmäßiger, das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom in der Form von *Newton* anzusetzen:

$$N(x) := a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Man beachte: Formal tritt x_2 hier nicht auf.

Die unbekanntenen Koeffizienten a_k werden dann aus der Forderung

$$y_k = N(x_k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

berechnet:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \\ y_1 &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ y_2 &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Vorteil:

- Bei Hinzufügen eines neuen Stützpunktes - und damit Erhöhung des Grades des Interpolationspolynomes - brauchen die „alten“ Koeffizienten nicht neu berechnet zu werden.
- Durch Einführung der sog. *dividierten Differenzen* ist es numerisch weniger aufwendig als das Lagrange'sche Interpolationspolynom:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_1 &= \frac{y_1 - a_0}{x_1 - a_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\ &=: [x_0, x_1] \\ a_2 &= \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} - \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2} \quad (2.6) \\ &= \frac{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2} \quad (*) \\ &=: [x_0, x_1, x_2], \end{aligned}$$

wobei (*) durch eine etwas aufwendigere Rechnung zustande kommt. Hierdurch werden die *dividierten Differenzen 1. und 2. Ordnung* definiert.

- Die dividierten Differenzen (auch höherer Ordnung) - und damit die Koeffizienten a_0, \dots, a_n - lassen sich nach dem folgenden Schema berechnen:

k	x_k	y_k	I	II	III	...
0	x_0	y_0				
		a_0 ↓				
		↘	a_1 ↓			
1	x_1	y_1	$[x_0, x_1]$			
		↘	↘	a_2 ↓		
		↘	$[x_1, x_2]$	$[x_0, x_1, x_2]$		
2	x_2	y_2				
		↘	↘	↘	a_3 ↓	
		↘	$[x_2, x_3]$	$[x_1, x_2, x_3]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
3	x_3	y_3			
		↘			
⋮	⋮	⋮				
n	x_n	y_n				

Die in dem Rechenschema gebildeten Größen $[x_0, x_1], [x_0, x_1, x_2], \dots$ werden dabei aus zwei aufeinanderfolgenden Stützpunkten durch Bildung von *Differenzenquotienten* gebildet:

1. Dividierte Differenzen 1. Ordnung:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

⋮

2. Dividierte Differenzen 2. Ordnung:

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

⋮

3. Dividierte Differenzen 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} \\ [x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

4. Dividierte Differenzen höherer Ordnung werden entsprechend gebildet.

Nachteil:

Ein Nachteil *aller* Polynomansätze ist die „Welligkeit“ der Näherungsfunktionen:

ein Polynom n -ten Grades besitzt bis zu $(n - 1)$ Extremwerte.

Beispiel 2.15

Das Ergebnis einer Meßreihe liege in Form der folgenden Wertetabelle vor:

k	0	1	2	3
x_k	0	2	5	7
y_k	-12	16	28	-54

Abbildung 2.11: Wertetabelle für vier Meßpunkte

Bei vier Stützpunkten hat das Interpolationspolynom höchstens den Grad 3:

$$\begin{aligned} N(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt nach dem Schema der dividierten Differenzen:

k	x_k	y_k	I	II	III
0	0	a_0 ↓ -12	a_1 ↓ 14	a_2 ↓ -2	a_3 ↓ -1
1	2	16	4	-9	
2	5	28	-41		
3	7	-54			

$$\longrightarrow \quad a_0 = -12, \quad a_1 = 14, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -1 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} N(x) &= -12 + 14(x - 0) - 2(x - 0)(x - 2) - 1(x - 0)(x - 2)(x - 5) \\ &= -x^3 + 5x^2 + 8x - 12 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

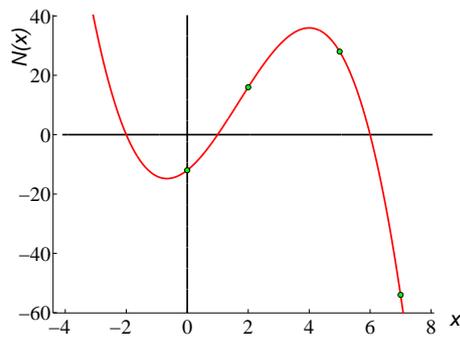


Abbildung 2.12: Interpolation von vier Stützpunkten

2.2.2 Gebrochenrationale Funktionen

Gegeben seien die beiden Polynome

$$p(x) := \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad \text{und} \quad q(x) := \sum_{k=0}^n b_k x^k \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann heißt die Funktion

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0} \quad (x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0)$$

eine *gebrochen rationale Funktion* oder eine *rationale Funktion* schlechthin. Eine rationale Funktion ist ein Quotient zweier ganzrationaler Funktionen, also zweier Polynome. Sie ist definiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms. Man trifft die folgende Unterscheidung:

- (a) $n > m$: r heißt *echt gebrochen rationale Funktion*;
- (b) $n \leq m$: r heißt *unecht gebrochen rationale Funktion*.

Beispiele 2.16

- (i) Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

$$r(x) := x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ geeignet}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

sind echt gebrochen rationale Funktionen.

- (ii)

$$r(x) := \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x - 10} \quad (x \in \mathbb{R}, x^3 + x - 10 \neq 0)$$

ist eine echt gebrochen rationale Funktion. Wegen

$$x^3 + x - 10 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 5) = (x - 2) \cdot [(x + 1)^2 + 4]$$

ist $D(r) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- (iii)

$$r(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$s(x) := \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

sind unecht gebrochen rationale Funktionen.

Jede unecht gebrochen rationale Funktion läßt sich mit Hilfe des Divisionsalgorithmus' für Polynome zerlegen in eine Summe, bestehend aus

- einem Polynom (ganzrationale Funktion) und
- einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Beispielsweise gilt für das letzte Beispiel von Beispiel 2.16:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = x - \frac{x + 1}{x^2 + 1} \iff x^3 - 1 = x \cdot (x^2 + 1) + (-x - 1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Auch hier wird die Analogie zu ganzen Zahlen und Brüchen deutlich: jeder unechte Bruch läßt sich zerlegen in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch:

$$\frac{34}{5} = 6 + \frac{4}{5} \iff 34 = 6 \cdot 5 + 4.$$

Aus diesem Grund werden im folgenden zunächst einmal echt gebrochen rationale Funktionen untersucht, also Funktionen der Form

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \quad (x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0)$$

mit Grad $p < \text{Grad } q$.

2.2.2.1 Definitionslücken

Für die weitere Betrachtung ist die Kenntnis der Nullstellen des Zähler- und des Nennerpolynoms wichtig. Dabei können drei Fälle auftreten, die anhand von Beispielen untersucht werden sollen:

$$\text{Fall 1.} \quad r(x) := \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \quad : \quad p(1) = 0, q(1) \neq 0, \quad (x \in \mathbb{R}, x^3 + 1 \neq 0)$$

$$\text{Fall 2.} \quad r(x) := \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} \quad : \quad p(1) \neq 0, q(1) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}, x^3 - 1 \neq 0)$$

$$\text{Fall 3.} \quad r(x) := \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \quad : \quad p(1) = 0, q(1) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}, x^3 - 1 \neq 0)$$

Fall 1:

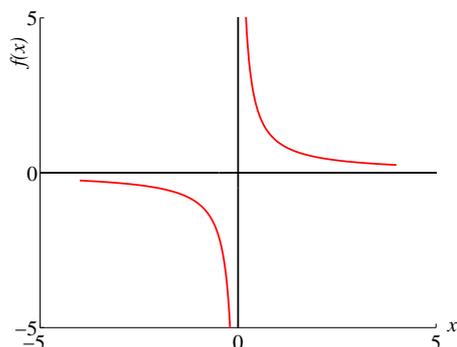
Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, $p(x_0) = 0$ und gleichzeitig $q(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion r in x_0 definiert und hat dort eine Nullstelle. Je nachdem, ob x_0 eine einfache - oder eine mehrfache Nullstelle von p ist, so heißt x_0 auch eine einfache - oder eine mehrfache Nullstelle von r .

Fall 2:

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $p(x_0) \neq 0$ und $q(x_0) = 0$. In den Nullstellen des Nennerpolynoms ist eine gebrochen rationale Funktion nicht definiert. Stellen dieser Art heißen daher auch *Definitionslücken* der Funktion r .

Beispiel 2.17

$$r(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$$

Abbildung 2.13: Graph der Funktion $r(x) = \frac{1}{x}$

Die Funktion r ist für $x = 0$ nicht definiert.

In der Nähe dieser Definitionslücke zeigt die Funktion r ein charakteristisches Verhalten, cf. Abb. 2.13:

$$\begin{aligned} \text{für } x \rightarrow 0, x < 0 \text{ gilt : } & r(x) \longrightarrow -\infty \\ \text{für } x \rightarrow 0, x > 0 \text{ gilt : } & r(x) \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Für alle von links (rechts) gegen $x_0 = 0$ strebenden Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen gilt:

$$r(x_n) \longrightarrow -\infty \quad (r(x_n) \longrightarrow \infty).$$

Definition 2.5

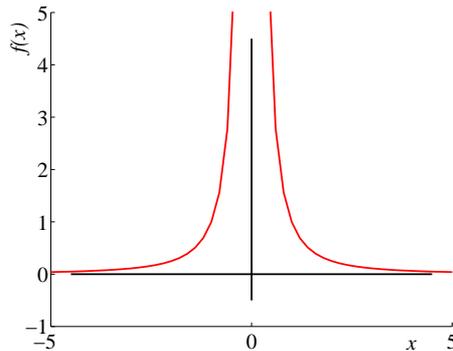
- (i) Stellen x_0 , für die in jeder Umgebung die Funktionswerte einer rationalen Funktion über alle Grenzen hinaus wachsen oder fallen, heißen *Unendlichkeitsstellen* oder *Pole* der Funktion.
- (ii) Der Funktionsgraph schmiegt sich dabei *asymptotisch* an die in der Polstelle errichtete Parallele zur Ordinatenachse an (sog. *vertikale Asymptote* oder *Polgerade*).
- (iii) Die Vielfachheit der Nullstelle des Nennerpolynoms bei einem auftretenden Pol einer rationalen Funktion heißt die *Ordnung des Pols* oder *Polordnung*.
- (iv) Verhält sich die rationale Funktion bei der Annäherung an einen Pol von beiden Seiten her gleichartig, so liegt ein *Pol ohne Vorzeichenwechsel* vor, sonst ein *Pol mit Vorzeichenwechsel*.

Bemerkung

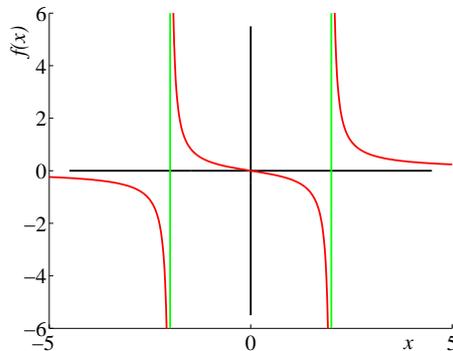
Ist in der Linearfaktorzerlegung des Nennerpolynoms die Vielfachheit eines Faktors – nach Kürzen mit einem evtl. gleichen Term aus dem Zähler – eine ungerade Zahl, so liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor; ist sie eine gerade Zahl, dann liegt ein Pol ohne Vorzeichenwechsel vor.

Beispiele 2.18

- (i) Die Funktion $r(x) := \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) besitzt in $x_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1 mit Vorzeichenwechsel (Abb. 2.13); die Funktion $r(x) := \frac{1}{x^2}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) besitzt in $x_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 2 ohne Vorzeichenwechsel (Abb. 2.14).

Abbildung 2.14: Graph der Funktion $r(x) = \frac{1}{x^2}$

- (ii) Die Funktion $r(x) := \frac{x}{x^2-4}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$) besitzt in $x_1 = 0$ eine Nullstelle und in $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$ jeweils einen Pol der Ordnung 1 mit Vorzeichenwechsel (Abb. 2.15).

Abbildung 2.15: Graph der Funktion $r(x) = \frac{x}{x^2-4}$ **Fall 3:**

Es bleibt der Fall zu untersuchen, in dem x_0 eine Nullstelle sowohl des Zählerpolynoms p als auch des Nennerpolynoms q ist. Nullstellen von Polynomen lassen sich abspalten, man erhält dann mit geeigneten Faktorpolynomen p_1 und q_1 eine Zerlegung

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x) \cdot (x - x_0)^k}{q_1(x) \cdot (x - x_0)^l} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot (x - x_0)^{k-l},$$

so daß gilt: $p_1(x_0) \neq 0$, $q_1(x_0) \neq 0$.

Dazu werden die folgenden zwei Unterfälle untersucht:

(i) Fall $k \geq l$:

r ist in x_0 zwar nicht definiert, die Definitionslücke läßt sich jedoch beheben (*behebbar* Definitionslücke), und man betrachtet stattdessen die Funktion

$$r_1(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot (x - x_0)^{k-l} \quad (x = x_0 \text{ zugelassen}).$$

Beispiel 2.19

$$r(x) := \frac{x^3 - x}{x^4 - 1} = \frac{x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (x \in D(r) := \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

$$r_1(x) := \frac{x}{x^2 + 1} \quad (x \in D(r_1) := \mathbb{R})$$

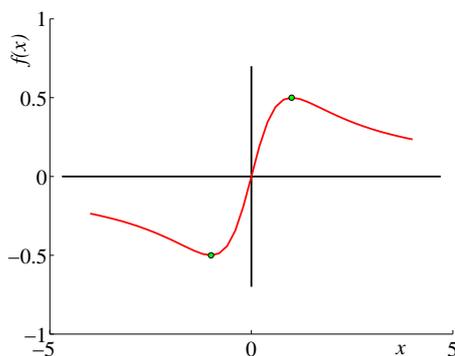


Abbildung 2.16: Graph der Funktion $r(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Die gebrochen rationalen Funktionen r und r_1 sind verschieden, da ihre Definitionsbereiche verschieden sind. Es ist $D(r) \subseteq D(r_1)$ und $r = r_1 \upharpoonright D(r)$, d.h. r_1 ist eine Fortsetzung von r auf einen größeren Definitionsbereich.

(ii) Fall $k < l$:

Hier läßt sich der Faktor $(x - x_0)^k$ aus dem Bruch kürzen, das resultierende Nennerpolynom q_1 hat bei $x = x_0$ eine Nullstelle der Vielfachheit $l - k$. In diesem Fall hat die Funktion r bei $x = x_0$ einen Pol der Ordnung $l - k$. Dieser Fall entspricht im Großen und Ganzen dem schon behandelten Fall 2.

Beispiel 2.20

$$\begin{aligned}
r(x) &:= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x-2)(x+1)} \\
&= \frac{1}{(x-1)(x+1)} \quad (x \in D(r) := \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}).
\end{aligned}$$

Die Zerlegung des Nennerpolynoms in Linearfaktoren geschieht etwa durch Erkennen von Nullstellen und anschließender Polynomdivision.

$$r_1(x) := \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2-1} \quad (x \in D(r_1) := \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}).$$

An der Stelle $x = 2$ liegt eine behebbare Definitionslücke vor, bei $x \in \{-1, 1\}$ je ein Pol, s. Abb. 2.17. r_1 ist die Fortsetzung von r auf den größtmöglichen Definitionsbereich.

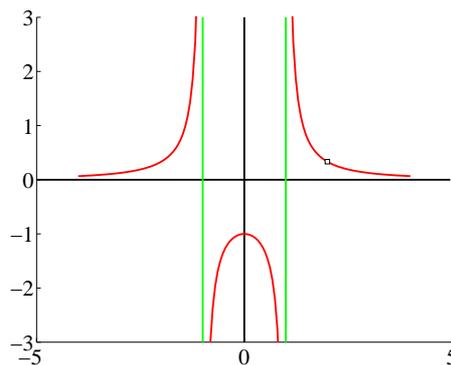


Abbildung 2.17: Graph der Funktion $r(x) = \frac{1}{x^2-1}$

2.2.2.2 Asymptotisches Verhalten im Unendlichen

Zum Studium des Verhaltens einer gebrochen rationalen Funktion für große Werte von $|x|$ (im „Unendlichen“) wird untersucht, welcher ganzrationalen Funktion die gebrochen rationale Funktion für $|x| \rightarrow \infty$ immer „ähnlicher“ wird:

Definition 2.6

Seien r eine gebrochen rationale Funktion und f ein Polynom. f heißt *Asymptote im Unendlichen* von r , falls gilt:

$$[r(x) - f(x)] \xrightarrow{(x \rightarrow \pm\infty)} 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [r(x) - f(x)] = 0.$$

Für das Studium des Verhaltens im Unendlichen einer gebrochenrationalen Funktion sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: r ist echt gebrochen rational.

In einem solchen Fall gilt: $r(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Man schreibt dafür

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} r(x) = 0,$$

da das Nennerpolynom infolge der höheren Potenz schneller wächst als das Zählerpolynom. Die sog. *Asymptote im Unendlichen* ist daher

$$f = 0 \quad (x\text{-Achse}).$$

Fall 2: r ist unecht gebrochen rational.

Durch Polynomdivision oder ggfs. Horner-Schema wird die unecht gebrochen rationale Funktion zunächst zerlegt in

- eine ganzrationale Funktion (Polynom) und
- eine echt gebrochen rationale Funktion:

$$r(x) = P(x) + R(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole von } r\})$$

Für $x \rightarrow \pm\infty$ geht der echt gebrochene Anteil R dieser Zerlegung gegen 0 (Fall 1), und die gegebene Funktion r zeigt daher für große Werte von $|x|$ ein ähnliches Verhalten wie das verbleibende Polynom p ; dieses ist somit Asymptote im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [r(x) - P(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [R(x)] = 0.$$

Beispiel 2.21 (s. Abb. 2.18)

$$\begin{aligned} r(x) &:= \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{x^2 + x - 2} \\ &= \frac{(x-1)^3(x+2) + x}{(x-1)(x+2)} \\ &= (x-1)^2 + \frac{x}{(x-1)(x+2)} \quad (x \in D(r) := \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}). \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Asymptote im Unendlichen – $f(x) = P(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) – schneidet die vorgelegte rationale Funktion r ,

$$r(x) = P(x) + R(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole von } r\})$$

überall dort, wo die Restfunktion R eine Nullstelle hat:

$$P(x) \stackrel{!}{=} r(x) = P(x) + R(x) \quad \iff \quad R(x) = 0.$$

Diese Schnittpunkte können somit aus der Gleichung $R(x) = 0$ berechnet werden.

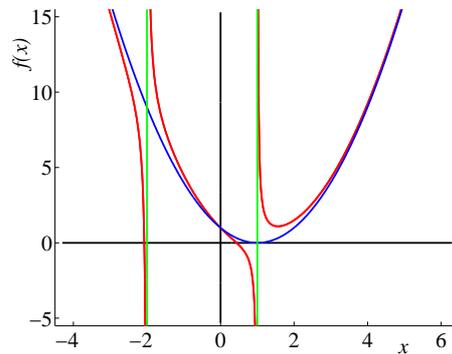


Abbildung 2.18: Graph der Funktion $r(x) = (x - 1)^2 + \frac{x}{(x-1)(x+2)}$

2.2.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

2.2.3.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Die einfachsten Potenzfunktionen sind vom Typ

$$f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 \text{ geeignet})$$

und gehören zu den ganzrationalen Funktionen. Diese Potenzfunktionen sind abwechselnd gerade und ungerade, und damit achsensymmetrisch zur Ordinate bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(x) = x^n = \begin{cases} f(-x) & , n \text{ gerade} \\ -f(-x) & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für negative ganzzahlige Exponenten erhält man gebrochen rationale Funktionen durch die Definition

$$f(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \text{ geeignet}).$$

Sie sind für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und besitzen bei $x = 0$ einen Pol, und zwar einen

$$\begin{aligned} \text{Pol mit Vorzeichenwechsel} & \iff n \text{ ungerade,} \\ \text{Pol ohne Vorzeichenwechsel} & \iff n \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Die Symmetrie dieser Funktionen ist analog zu der für natürliche Exponenten:

$$f(x) = x^{-n} = \begin{cases} f(-x) & , n \text{ gerade} \\ -f(-x) & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wurzelfunktionen werden definiert als Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen für $x \geq 0$ und Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Dazu muß allerdings zuerst einmal sichergestellt werden, daß diese Potenzfunktionen auch umkehrbar, also injektiv sind.

Satz 2.5

Seien $x_1, x_2 > 0$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$x_1 < x_2 \iff x_1^p < x_2^p.$$

Beweis

„ \implies “ mit vollständiger Induktion:

Induktionsverankerung : klar für $p = 1$.
 Induktionsvoraussetzung : die Annahme sei gültig für $k \leq p$.
 Induktionsschluß : von k auf $k + 1$:

$$x_1 < x_2 \wedge x_1^k < x_2^k \implies \begin{cases} x_1 \cdot x_1^k < x_1 \cdot x_2^k \\ x_2^k \cdot x_1 < x_2^k \cdot x_2 \end{cases}$$

$$\implies x_1^{k+1} = x_1 \cdot x_1^k < x_1 \cdot x_2^k = x_2^k \cdot x_1 < x_2^k \cdot x_2 = x_2^{k+1}$$

„ \impliedby “ Widerspruchsbeweis:

Im Gegensatz zur Behauptung gelte $\neg(x_1 < x_2)$.

1. Lösungsmöglichkeit:

$$\neg(x_1 < x_2) \equiv x_1 \geq x_2$$

Für $x_1 \geq x_2$ kann man, analog der Vorgehensweise im ersten Teil des Beweises, dann auch auf $x_1^p \geq x_2^p$ schließen, also auf einen Widerspruch.

2. Lösungsmöglichkeit:

$$\neg(x_1 < x_2) \equiv (x_1 = x_2) \vee (x_2 < x_1)$$

$$\begin{array}{llll} (a) & x_1 = x_2 & \implies & x_1^p = x_2^p & \text{Widerspruch!} \\ (b) & x_2 < x_1 & \implies & x_2^p < x_1^p & \text{nach Teil 1. Widerspruch!} \end{array}$$

Definition 2.7

In der Beziehung $y = x^p$ heißt

x : Grundzahl oder Basis
 p : Hochzahl oder Exponent

2.2.3.2 Wurzelfunktionen

Nach dem letzten Satz ist die Potenzfunktion mit einem natürlichen Exponenten im Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, daher also injektiv (Beweis?), somit auf $W(f) = [0, \infty)$ umkehrbar.

Satz und Definition 2.6

Seien $a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Gleichung

$$x^p = a$$

genau eine nichtnegative Lösung. Diese wird mit

$$\sqrt[p]{a} \quad \text{oder} \quad a^{\frac{1}{p}}$$

bezeichnet und die p -te Wurzel aus a genannt; p heißt Wurzelexponent.

Definition 2.8

Die Umkehrfunktionen der auf das Intervall $[0, \infty)$ eingeschränkten Potenzfunktionen vom Typ

$$f(x) := x^n \quad (x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N} \text{ geeignet})$$

heißen *Wurzelfunktionen* und sind in der Form

$$g(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{oder} \quad x^{\frac{1}{n}} \quad (x \geq 0, n \in \mathbb{N} \text{ geeignet})$$

darstellbar; s. die Beispiele in den Abb 2.19 und 2.20.

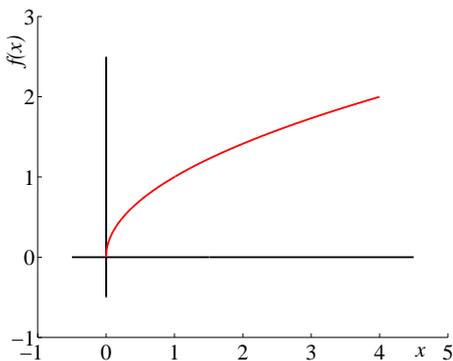


Abbildung 2.19: $f(x) = \sqrt{x}$

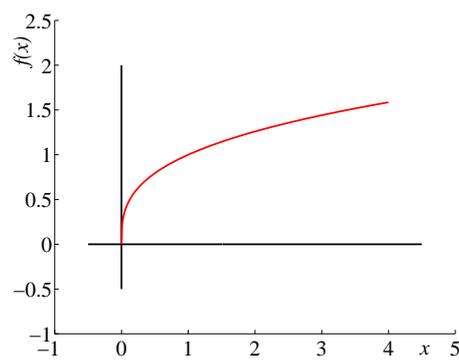


Abbildung 2.20: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Bemerkung

- (i) $\sqrt[p]{a}$ ist nur für $a \geq 0$ definiert, und es ist stets $\sqrt[p]{a} \geq 0$; insbesondere ist $\sqrt{a} \geq 0$. Speziell: es ist $\sqrt{4} = 2$, nicht jedoch $= -2$. Ganz unsinnig ist eine „Gleichung“ der Form $\sqrt{4} = \pm 2$.

- (ii) Die Aufgabe, $\sqrt[p]{a}$ zu berechnen, ist streng zu unterscheiden von dem Problem, sämtliche Lösungen der Gleichung $x^p = a$ zu finden. Ist $a > 0$, so liefert $\sqrt[p]{a}$ eine, und zwar eine positive Lösung dieser Gleichung. Ist p gerade, etwa $p = 2k$ mit einer geeigneten Zahl $k \in \mathbb{N}$, so hat man in $-\sqrt[p]{a}$ eine zweite (diesmal negative) Lösung, denn es gilt:

$$(-\sqrt[p]{a})^p = (-1)^{2k} \cdot (\sqrt[p]{a})^p = a;$$

z. B. sind $x_1 := \sqrt{4} = 2$ und $x_2 := -\sqrt{4} = -2$ zwei reelle Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = 4$. Diese Lösungen gibt man gern in der Kurzschreibweise

$$x_{1,2} = \pm 2$$

an, was dann häufig zu dem Mißverständnis führt, die Quadratwurzel habe zweierlei Vorzeichen, und es sei eben $\sqrt{4} = \pm 2$.

- (iii) Ist $a < 0$, so ist $\sqrt[p]{a}$ nicht definiert, die Gleichung $x^p = a$ kann aber dennoch reelle Lösungen haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn p ungerade ist, also $p = 2k + 1$ für eine geeignete Zahl $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen $-a > 0$ existiert nämlich $\eta := \sqrt[p]{-a}$, und es ist

$$(-\sqrt[p]{-a})^p = (-1)^{2k+1} \cdot (\sqrt[p]{-a})^p = -(-a) = a,$$

mit anderen Worten, $-\eta = -\sqrt[p]{-a}$ löst die Gleichung $x^p = a$.

- (iv) Für ungerade Wurzelexponenten p erweitert man deshalb gelegentlich die Definition von $\sqrt[p]{a}$ auch auf negative a durch die Festsetzung

$$\sqrt[p]{a} := -\sqrt[p]{-a} \quad (a < 0).$$

Das soll hier jedoch nicht erfolgen.

Im Falle eines geraden Wurzelexponenten besitzt $x^p = a$ für $a < 0$ keine reellen Lösungen, weil durchweg

$$x^p = x^{2k} = (x^k)^2 \geq 0$$

ist. Komplexe Lösungen sind jedoch vorhanden.

- (v) Es ist zwar stets $(\sqrt[p]{a})^p = a$ (weil ja $a \geq 0$ sein muß, damit der Wurzel Ausdruck überhaupt einen Sinn ergibt), jedoch ist nicht immer $\sqrt[p]{a^p} = a$; z. B. ist $\sqrt{(-1)^2} \neq -1$. Es gilt aber:

$$(\sqrt[p]{a^p}) = a \quad \iff \quad a \geq 0.$$

Beispiele 2.22

- (i) Die Umkehrfunktion der auf das Intervall $[0, \infty)$ eingeschränkten Normalparabel $y = f(x) := x^2$ ist die für $x \geq 0$ definierte Wurzelfunktion, s. Abb. 2.19.

$$y = f^{-1}(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty)).$$

- (ii) Die kubische Parabel $y = f(x) := x^3$ (Abb. 2.21) verläuft in ganz $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ streng monoton wachsend, ist dort also umkehrbar. Wie lautet ihre Umkehrfunktion?

- (a) Die Wurzelfunktion

$$y = g(x) := \sqrt[3]{x} \quad (x \geq 0)$$

ist definitionsgemäß die Umkehrfunktion der auf den ersten Quadranten beschränkten kubischen Parabel.

- (b) Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion für $x < 0$ lautet

$$y = h(x) := -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|} \quad (x < 0),$$

denn es ist

$$(f \circ h)(x) = (-\sqrt[3]{-x})^3 = -(-x) = x = -\sqrt[3]{(-x)^3} \quad (x < 0).$$

- (c) Insgesamt erhält man damit in $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ die folgende Darstellung der Umkehrfunktion (Abb. 2.22)

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , \quad x < 0 \end{cases} .$$

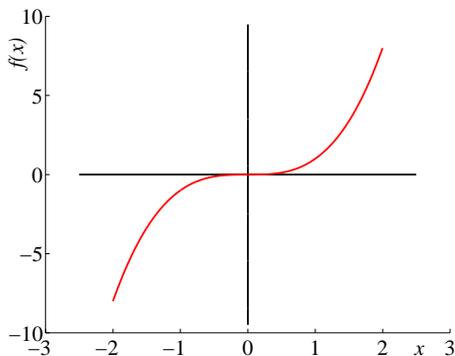


Abbildung 2.21: $f(x) = x^3$

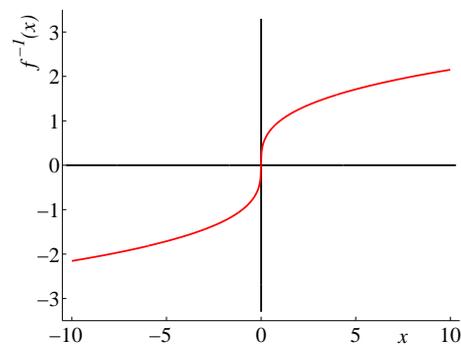


Abbildung 2.22: $f^{-1}(x)$

2.2.3.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Unter einer *Potenzfunktion mit rationalem Exponenten* $r := \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{N}_0$ geeignet, $q \in \mathbb{N}$ geeignet) versteht man die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p} & (x > 0) \\ g(x) &:= x^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}} & (x > 0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Satz 2.7

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten die folgenden Potenzregeln:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \quad (a \neq 0) \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} = (a^s)^r \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \quad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Potenzfunktionen sind zunächst nur für $x > 0$ erklärt. Für positive Exponenten läßt sich jedoch der Definitionsbereich auf alle $x \geq 0$ erweitern.

Die Wurzelfunktionen

$$y = f(x) = \sqrt[p]{x} \quad (x \geq 0, p \in \mathbb{N} \text{ geeignet})$$

sind daher auch in Form einer Potenzfunktion darstellbar:

$$y = f(x) = \sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}} \quad (x \geq 0, p \in \mathbb{N} \text{ geeignet}),$$

und aus den Potenzgesetzen folgt auch

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p \quad (x \geq 0, p \in \mathbb{N} \text{ geeignet}).$$

In den nächsten beiden Sätzen wird untersucht, wie sich a^r ändert, wenn man die Basis a bzw. den (rationalen!) Exponenten r verändert.

Satz 2.8 („Potenzfunktion“)

Seien $a, b > 0$. Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$:

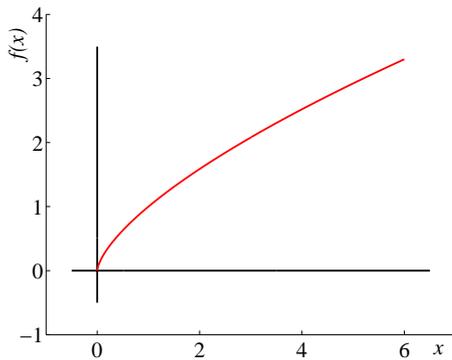
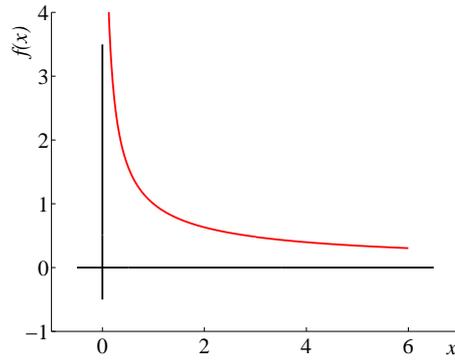
$$a < b \quad \iff \quad \begin{cases} a^r < b^r & , \quad r > 0 & \text{(streng monoton wachsend)} \\ a^r > b^r & , \quad r < 0 & \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

Beispiele 2.23

(i) $f(x) := x^{\frac{2}{3}} \quad (x \geq 0)$ ist streng monoton wachsend.

(ii) $g(x) := x^{-\frac{2}{3}} \quad (x > 0)$ ist streng monoton fallend.

(Abb. 2.23 und 2.24)

Abbildung 2.23: $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ Abbildung 2.24: $g(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **Beweis**

Sei $r := \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus Satz 2.5 sofort

$$\begin{aligned} a < b &\iff a^{\frac{1}{q}} < b^{\frac{1}{q}} \\ a^{\frac{1}{q}} < b^{\frac{1}{q}} &\iff a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Beispiel 2.24

In einem elektrischen Feld der Stärke E erfährt ein Elektron die Kraft $F = e_0 \cdot E$ ($e_0 := 1,602 \cdot 10^{-19} \text{As}$: Elementarladung). Die vom Feld verrichtete Arbeit $W := e_0 \cdot U$ ist nach dem Energiesatz gleich der gewonnenen kinetischen Energie des Elektrons nach Durchlaufen der Potentialdifferenz U :

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m_0 v^2 = e_0 \cdot U = W, \\ \longrightarrow \quad v &= \sqrt{\frac{2e_0}{m_0} U} = \sqrt{\frac{2}{m_0} W}. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Elektrons steigt nur wie die Wurzel der geleisteten Arbeit. Das stellt ein Problem bei Teilchenbeschleunigern dar. Zusätzlich nimmt die Ruhemasse m_0 noch zu aufgrund relativistischer Effekte.

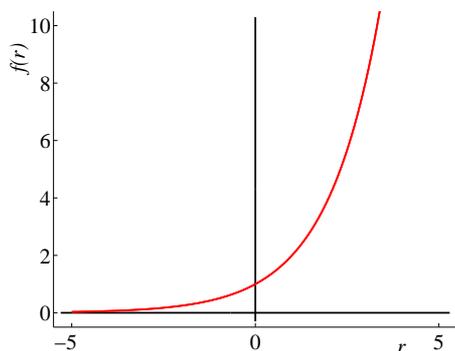
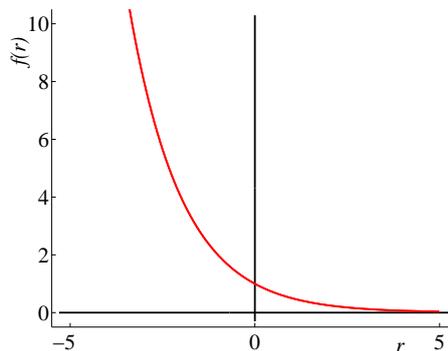
Satz 2.9 („Exponentialfunktion“)

Seien $a > 0$, $a \neq 1$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^r < a^s &\iff a > 1 \\ a^r > a^s &\iff a < 1 \end{aligned}$$

Beispiele 2.25

- (i) $f(r) := 2^r$ ($r \in \mathbb{Q}$) ist streng monoton wachsend.

Abbildung 2.25: $f(r) = 2^r$ ($r \in \mathbb{Q}$!)Abbildung 2.26: $g(r) = (\frac{1}{2})^r$ ($r \in \mathbb{Q}$!)

(ii) $g(r) := (\frac{1}{2})^r$ ($r \in \mathbb{Q}$) ist streng monoton fallend.

(Abb. 2.25 und 2.26)

Beweis

Wegen $s - r > 0$ und $1^{s-r} = 1$ erhält man aus der ersten Aussage des letzten Satzes

$$a > 1 \iff a^{s-r} > 1^{s-r} = 1 \quad \text{und}$$

$$a < 1 \iff a^{s-r} < 1^{s-r} = 1,$$

also

$$a > 1 \iff \frac{a^s}{a^r} > 1 \iff a^s > a^r \quad \text{und}$$

$$a < 1 \iff \frac{a^s}{a^r} < 1 \iff a^s < a^r.$$

2.2.4 Kegelschnitte

Einführung und allgemeine Kegelschnittsgleichung

Zur Erinnerung:

Algebraische Funktionen werden beschrieben durch Polynome in der Variablen y , deren Koeffizienten Polynome in x sind ($n \in \mathbb{N}_0$ geeignet).

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

heißt eine *algebraische Gleichung n-ten Grades*, s. Definition 2.3. Die Funktionen $a_i(\cdot)$ ($i \in \{0, \dots, n\}$) heißen die *Koeffizientenfunktionen*, die Zahl n der *Grad* der algebraischen Gleichung, falls $a_n \neq 0$.

Bisher wurden von den algebraischen Funktionen die folgenden behandelt:

- Ganze rationale Funktionen (Polynome),

- Gebrochenrationale Funktionen,
- Potenz- und Wurzelfunktionen.

Als letztes Beispiel für algebraische Funktionen sollen jetzt quadratische Funktionen in x und y behandelt werden, die sog. *Kegelschnitte*.

Definition 2.9

Ein *Kegelschnitt* ist die Schnittkurve einer Ebene mit einem Doppelkegel, s. Abb. 2.27.

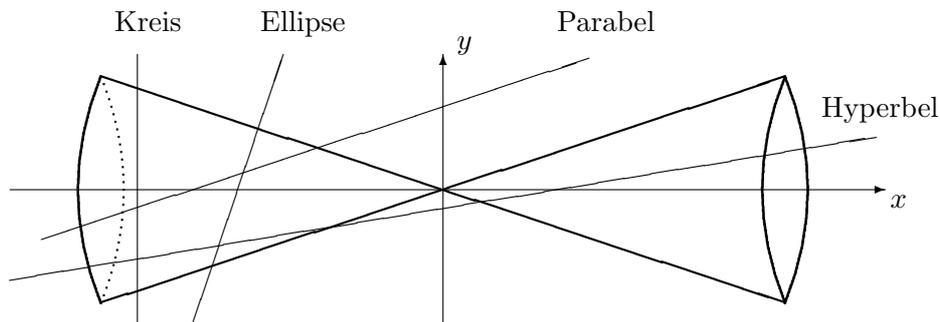


Abbildung 2.27: Kegelschnitte

Die algebraische Definitionsgleichung lautet

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

mit geeigneten Konstanten A, B, C, D, E, F .

Meistens werden die Koeffizienten etwas suggestiver in der folgenden Form geschrieben:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d = 0. \quad (2.10)$$

Diese Schreibweise hat ihren Ursprung in der Definition einer *quadratischen Form* q mit Hilfe einer symmetrischen Matrix A :

Definition 2.10

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})$ eine n -reihige symmetrische Matrix und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{V}^n$. Dann heißt $((\cdot, \cdot) : \text{Standard-Skalarprodukt im } \mathbb{V}^n)$

$$q(\vec{x}) := (A\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

eine *quadratische Form*, A heißt die *Koeffizientenmatrix* von q .

Mit Hilfe der quadratischen Form q ($n = 2$) und ihrer Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

läßt sich die Gleichung (2.10) in der folgenden Form schreiben:

$$g(x, y) := \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

wobei wegen der Symmetrie von A gilt: $a_{12} = a_{21}$.

In den folgenden Beispielen wird die letzte Beziehung für die wichtigsten Spezialfälle betrachtet.

Beispiel 2.26 Kreis

$a_{11} := a_{22} := 1$, $a_{12} := 0$, $b := c := 0$, $d := -4$.

Damit wird die Gleichung (2.10) zu

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{(x-0)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1.$$

Das ist die Gleichung der Peripherie eines Kreises mit dem Ursprung $\langle 0, 0 \rangle$ als Mittelpunkt und dem Radius $r = \sqrt{4} = 2$.

Die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle$ und dem Radius r lautet

$$\frac{(x-x_0)^2}{r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} = 1,$$

genauer:

$$\mathcal{K} := \left\{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, \frac{(x-x_0)^2}{r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} = 1 \right\}$$

ist als Punktmenge im \mathbb{R}^2 die Peripherie eines Kreises mit dem Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle$; s. Abb. 2.28.

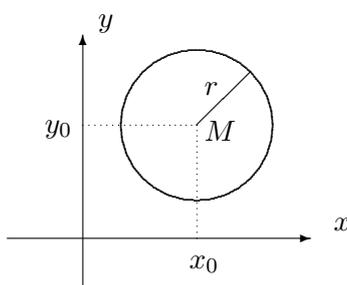


Abbildung 2.28: Kreis um den Punkt $M = \langle x_0, y_0 \rangle$ mit dem Radius r

Beispiel 2.27 Ellipse

$a_{11} := 4$, $a_{22} := 9$, $a_{12} := 0$, $b := c := 0$, $d := -36$.

Damit wird die Gleichung (2.10) zu

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1.$$

Das ist die Gleichung der Peripherie einer achsenparallelen *Ellipse* mit dem Ursprung $\langle 0, 0 \rangle$ als Mittelpunkt und den beiden Halbachsen $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{4} = 2$.

Die Gleichung einer zu den Koordinatenachsen parallelen Ellipse mit dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle$ und den beiden Halbachsen a und b lautet

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Wieder ist natürlich gemeint:

$$\mathcal{E} := \left\{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

ist als Punktmenge im \mathbb{R}^2 die Peripherie einer Ellipse mit den beiden Halbachsen a und b und dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle$; s. Abb. 2.29 und 2.30.

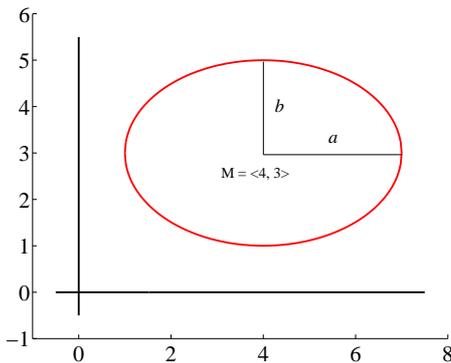


Abbildung 2.29: Achsparallele Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2$ und dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle = \langle 4, 3 \rangle$

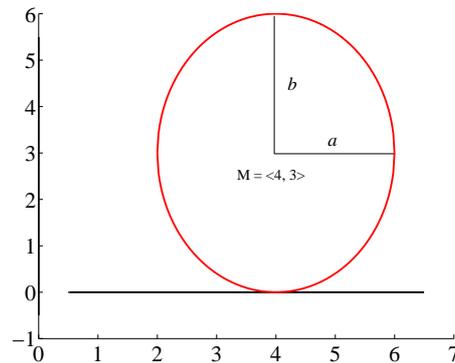


Abbildung 2.30: Achsparallele Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$, $b = 3$ und dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle = \langle 4, 3 \rangle$

Beispiel 2.28 Parabel

$$a_{11} := 1, \quad a_{22} := a_{12} := b := d := 0, \quad c := -1.$$

Damit wird die Gleichung (2.10) zu

$$x^2 - y = 0.$$

Das ist die Gleichung einer nach oben geöffneten *Parabel*, s. Abb. 2.31:

$$\mathcal{P}_o := \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, x^2 - y = 0 \};$$

analog hat man durch die Wahl $a_{22} := 1$, $a_{11} := a_{12} := c := d := 0$, $b := -1$ in

$$y^2 - x = 0$$

die Gleichung einer nach rechts geöffneten Parabel (Abb. 2.32):

$$\mathcal{P}_r := \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, y^2 - x = 0 \}.$$

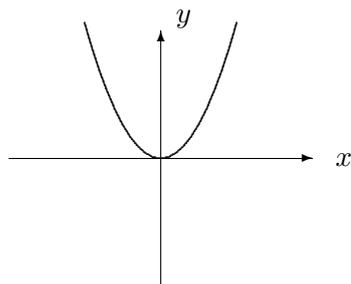


Abbildung 2.31: Parabel $y - x^2 = 0$

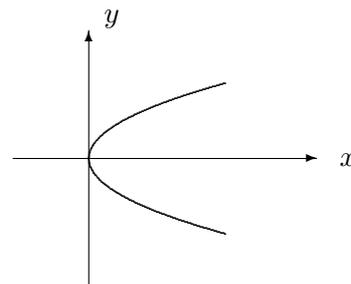


Abbildung 2.32: Parabel $y^2 - x = 0$

Beispiel 2.29 Hyperbel

$$a_{11} := 4, a_{22} := -9, a_{12} := 0, b := c := 0, d := -36.$$

Damit wird die Gleichung (2.10) zu

$$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{(x-0)^2}{3^2} - \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1.$$

Das ist die Gleichung der Peripherie einer *Hyperbel* mit dem Ursprung $\langle 0, 0 \rangle$ als Mittelpunkt und den beiden Halbachsen a und b .

Die Gleichung einer zu den Koordinatenachsen parallelen Hyperbel mit dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle$ lautet

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Wieder ist natürlich gemeint:

$$\mathcal{H} := \left\{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

ist als Punktmenge im \mathbb{R}^2 die Peripherie einer Hyperbel mit den beiden Halbachsen a und b und dem Mittelpunkt $\langle x_0, y_0 \rangle$; s. Abb. 2.33 und 2.34 mit $a = b = 1$, $x_0 = y_0 = 0$.

Bemerkung

In den Beispielen dieses Abschnittes wurden nur solche Kegelschnitte angegeben, deren Funktionsgraph symmetrisch zu den Koordinatenachsen verläuft. Will man gegen die Achsen gedrehte Kegelschnitte darstellen, so muß das Glied

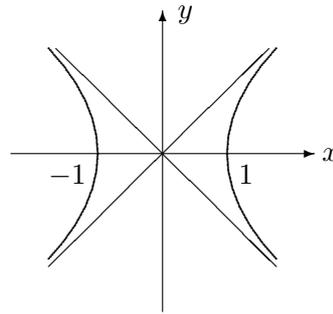
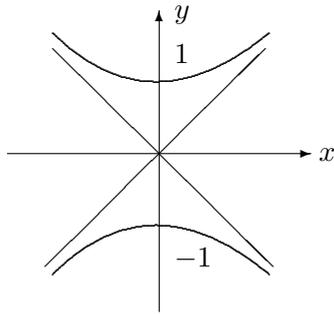


Abbildung 2.33: Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ Abbildung 2.34: Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$

a_{12} in Gleichung (2.10) $\neq 0$ sein. Beispielsweise ist die Hyperbel mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) gegenüber derjenigen in Abb. 2.34 um 45° im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) gedreht.

Aufgabe

Wie müssen die Konstanten in der Bestimmungsgleichung (2.10) gewählt werden, um die Hyperbel $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) als Kegelschnitt darzustellen?

2.3 Transzendente Funktionen

2.3.1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

2.3.1.1 Exponentialfunktionen

Charakterisierung durch eine Funktionalgleichung

In Satz 2.9 wurde die Potenzfunktion bei Änderung ihrer (rationalen) Argumente betrachtet. Solch eine Funktion wird im folgenden *Exponentialfunktion* genannt.

Definition 2.11

Sei $a > 0, a \neq 1$. Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto f(r) := a^r \quad (r \in \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

heißt *Exponentialfunktion zur Basis a*.

Für den Moment ist diese Definition durch (2.9) nur für rationale Exponenten erklärt; später wird sie auf beliebige reelle Exponenten erweitert. Die „Exponentialfunktion zur Basis 1“ ist wegen

$$1^r = 1 \quad (r \in \mathbb{Q})$$

die konstante Funktion $f = 1$; diese Funktion wird nicht zu den Exponentialfunktionen gerechnet.

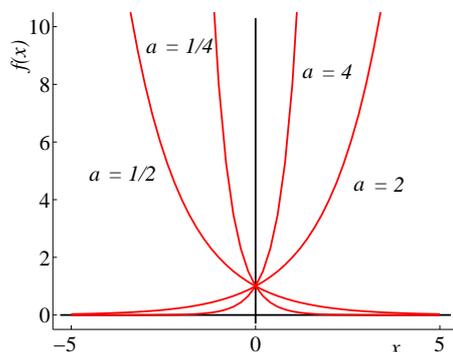


Abbildung 2.35: Graphen verschiedener Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$

Seien $a > 0, a \neq 1$, f die Exponentialfunktion zur Basis a . Dann erfüllt f die folgende Beziehung, eine sog. *Funktionalgleichung*

$$f(r + s) = f(r) \cdot f(s) \quad (r, s \in \mathbb{Q}). \quad (2.11)$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Anwendung der Potenzgesetze.

Diese Beziehung, und das soll nun gezeigt werden, ist aber auch charakteristisch für Exponentialfunktionen, d.h. jede Funktion, welche sie erfüllt, ist eine Exponentialfunktion zu einer geeigneten Basis a . Um das Wesen einer Exponentialfunktion zu studieren, kann man daher auch diese Funktionalgleichung verwenden.

Satz 2.10

Sei f eine Funktion mit $D(f) = \mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$f \text{ erfüllt (2.11)} \quad \Longleftrightarrow \quad \bigvee_{a \geq 0} \bigwedge_{r \in \mathbb{Q}} f(r) = a^r$$

Beweis

„ \Leftarrow “ : Übung.

„ \Rightarrow “ :

Sei $a := f(1)$. Der Beweis wird in einer Serie von Schritten geführt, zuerst für natürliche Exponenten, dann für negative natürliche Exponenten, dann für positive rationale Exponenten und schließlich für beliebige rationale Exponenten. Zu Anfang werden zudem noch eine allgemeine Eigenschaft bewiesen und die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ getrennt behandelt.

(i) Stets ist $f(r) \geq 0$ ($r \in \mathbb{Q}$):

$$f(r) = f\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) \stackrel{(2.11)}{=} \left[f\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2 \geq 0 \quad (r \in \mathbb{Q}).$$

(ii) Ist $a = f(1) = 0$, so gilt:

$$f(r) = f((r-1)+1) \stackrel{(2.11)}{=} f(r-1) \cdot f(1) = 0 \quad (r \in \mathbb{Q});$$

damit ist f als Nullfunktion die triviale Exponentialfunktion:

$$f(r) = 0^r = 0 \quad (r \in \mathbb{Q}).$$

(iii) Ist $a = f(1) \neq 0$, so gilt:

$$0 \neq f(1) = f(r+(1-r)) \stackrel{(2.11)}{=} f(r) \cdot f(1-r) \quad (r \in \mathbb{Q}),$$

also ist $f(r) \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Zusammen liefern die letzten beiden Schritte also:

$$\begin{array}{ll} \text{entweder gilt} & f(r) = 0 \quad (r \in \mathbb{Q}), \\ \text{oder es gilt} & f(r) \neq 0 \quad (r \in \mathbb{Q}). \end{array}$$

Im weiteren wird daher vorausgesetzt, daß f nicht die Nullfunktion ist.

(iv) Für $r \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$f(r) = f(0+r) \stackrel{(2.11)}{=} f(0) \cdot f(r).$$

Somit folgt:

$$f(0) = 1 \quad (f \text{ ist nach Voraussetzung nicht die Nullfunktion}).$$

(v) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ Summanden}}) \stackrel{(2.11)}{=} f(1)^n = a^n.$$

Somit folgt:

$$f(n) = a^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(vi) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 = f(0) = f(n+(-n)) \stackrel{(2.11)}{=} f(n) \cdot f(-n) \stackrel{(ii)}{=} a^n \cdot f(-n).$$

Damit sind $f(n)$ und $f(-n)$ beide $\neq 0$, und es folgt:

$$f(-n) = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(vii) Für $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a = f(1) = f\left(\frac{p}{p}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}_{p \text{ Summanden}}\right) \stackrel{(2.11)}{=} \left[f\left(\frac{1}{p}\right)\right]^p.$$

Somit folgt:

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = a^{\frac{1}{p}} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

(viii) Für $r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, also $r > 0$, gilt:

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p \text{ Summanden}}\right) \stackrel{(2.11)}{=} \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p \stackrel{(vii)}{=} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}.$$

Somit folgt:

$$f(r) = a^r \quad \left(r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right).$$

(ix) Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Dann ist $(-r) < 0$, und eine Argumentation wie unter (vi) liefert:

$$1 = f(0) = f(r + (-r)) \stackrel{(2.11)}{=} f(r) \cdot f(-r) \stackrel{(viii)}{=} a^r \cdot f(-r).$$

Somit folgt:

$$f(-r) = \frac{1}{a^r} = a^{-r} \quad (r \in \mathbb{Q}).$$

Damit folgt abschließend:

$$f(r) = a^r \quad \left(r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{N} \text{ geeignet}, q \in \mathbb{N} \text{ geeignet}\right).$$

Bemerkung

Dieser Satz ist im Moment nur für rationale Exponenten formuliert, da noch nicht bekannt ist, wie eine Potenz mit einem nichtrationalen Exponenten denn definiert ist. Tatsächlich gilt er auch für beliebige reelle Exponenten; die im folgenden aufgeführten Beispiele berücksichtigen dies stillschweigend.

Beispiele 2.30

(i) Der Zerfall einer radioaktiven Substanz erfolgt nach der Exponentialfunktion (Abb. 2.36):

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0),$$

wobei

- n_0 : Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atomkerne,
- $n(t)$: Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Atomkerne,
- λ : Zerfallskonstante; $\lambda > 0$.

Woher weiß man eigentlich, daß solch ein Vorgang einer Exponentialfunktion genügt? Annahmen über die Geschwindigkeit, mit der ein radioaktiver Zerfall abläuft, führen auf eine bestimmte *Differentialgleichung*, deren

Lösung gerade eine Exponentialfunktion ist; das u.a. ist Stoff des zweiten Semesters.

Schon hier läßt sich auch der letzte Satz benutzen, um das einzusehen. Empirisch ist bekannt, daß in gleichen Zeiträumen stets der gleiche Anteil an radioaktiver Substanz zerfällt, beispielsweise im Zeitraum Δt stets 2% der gerade vorhandenen Atome. Dann gilt für alle $t \geq 0$, $\Delta t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n(t + \Delta t) &= n(t) \cdot 0.98 \\ n(t + 2\Delta t) &= n(t + \Delta t) \cdot 0.98 = n(t) \cdot 0.98^2 \\ &\vdots \\ n(t + k\Delta t) &= \dots = n(t) \cdot 0.98^k \end{aligned}$$

Setzt man $n(0) := n_0 := 1$, so erhält man für $t = 0$

$$n(\Delta t) = n(0 + \Delta t) = n(0) \cdot 0.98 = 0.98$$

und damit für alle $t \geq 0$ und $\Delta t \geq 0$ die Gültigkeit der Beziehung

$$n(t + \Delta t) = n(t) \cdot n(\Delta t).$$

Die Funktion n erfüllt die Funktionalgleichung (2.11) und ist daher nach dem letzten Satz eine Exponentialfunktion.

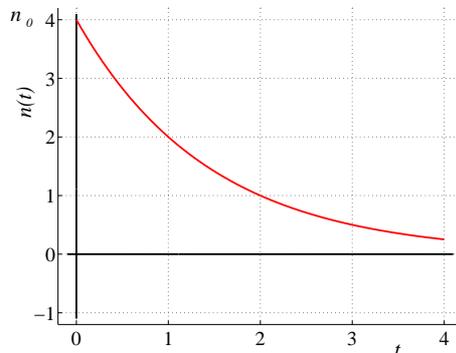


Abbildung 2.36: Funktion des radioaktiven Zerfalls

- (ii) Die Aufladung eines Kondensators über einen Ohm'schen Widerstand erfolgt nach der Gleichung (Abb. 2.37 und 2.38):

$$u(t) = u_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0),$$

wobei

- u_0 : Endwert der Kondensatorspannung,
- R : Wert des Ohm'schen Widerstandes,
- C : Kapazität des Kondensators.

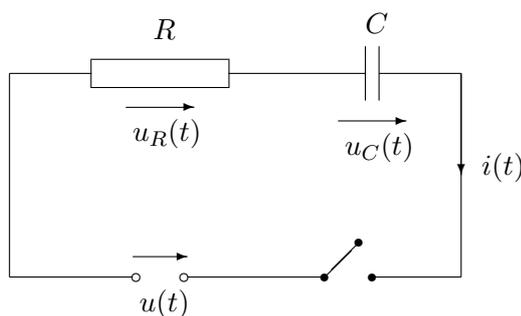


Abbildung 2.37: Elektrische Reihenschaltung mit einem RC-Glied

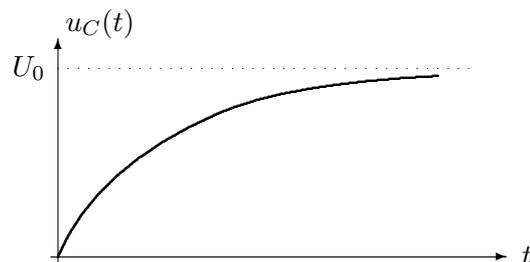


Abbildung 2.38: Kondensatoraufladung über einen Ohm'schen Widerstand

(iii) Nach diesem Schema verlaufen in der Natur die verschiedensten Vorgänge, welche jedoch mathematisch alle denselben Hintergrund aufweisen, als da sind:

- Radioaktiver Zerfall
- Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Ohm'schen Widerstand
- Abkühlung oder Erwärmung eines Körpers in einem kälteren oder wärmeren Medium
- Absorption von Strahlung in homogenen- oder inhomogenen Medien
- Wachstum einer Population in der Biologie
- Logistische Prozesse (kompliziertere Annahmen über Wachstum einer Population in der Biologie)
- Enzymatische Vorgänge, wie etwa Alkoholabbau in einem Organismus
- Diffusionsvorgänge in einem Organismus allgemein
- Autokatalytische Prozesse in der Chemie; autokatalytische Reaktionen sind solche, in denen die bereits umgewandelte Substanz katalytisch wirkt, also den Reaktionsablauf beschleunigt, ohne dabei selbst verändert zu werden.
- Gewebesättigung und -entsättigung mit Stickstoff beim Tauchen mit Druckluft

Die Euler'sche Zahl e

Unter den Exponentialfunktionen ist diejenige Funktion mit der Basis $e \approx 2,718281828\dots$ von besonderer Bedeutung.

Beispiel 2.31

Angenommen, eine Bank bezahlt für ein bestehendes Guthaben 100 % Zinsen im Jahr, also

$$1 \text{ Euro} \longrightarrow 2 \text{ Euro} \quad \text{in einem Jahr.}$$

Würde die Bank zweimal im Jahr 50% Zinsen bezahlen, so würde 1 Euro in einem Jahr wie folgt wachsen:

$$1 \text{ Euro} \longrightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ Euro} = 2,25 \text{ Euro.}$$

Allgemein:

Bei n -maliger Verzinsung im Jahr zu einem Zinssatz von $\frac{100\%}{n}$ wächst ein Betrag nach einem Jahr auf das $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -fache an. Für $n \rightarrow \infty$ spricht man von einer *stetigen Verzinsung*. Es ist dann von Interesse, wie sich der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \rightarrow \infty$ verhält.

Es läßt sich zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828 \dots =: e.$$

Die Exponentialfunktion zur Basis e heißt *natürliche Exponentialfunktion*. Bei einer angenommenen stetigen Verzinsung wächst ein Guthaben von 1 Euro in einem Jahr auf

$$1 \text{ Euro} \longrightarrow e \text{ Euro} \approx 2,72 \text{ Euro.}$$

Einschub über Zahlenfolgen

In Definition 2.11 wurde eine Exponentialfunktion für rationale Exponenten erklärt. Im folgenden soll diese Definition auf beliebige reelle Exponenten erweitert werden. Beispielsweise soll also erklärt werden, was man unter $2^{\sqrt{2}}$ oder unter 3^π versteht.

Dazu wird ein Einschub über *Zahlenfolgen* benötigt, weil die Behandlung der Exponentialfunktion als einer wichtigen speziellen Funktion vor der Behandlung von Zahlenfolgen oder Zahlenreihen erfolgt.

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Folge* reeller Zahlen, also etwa

$$(i) \quad 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$(ii) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$(iii) \quad -1, 1, -1, 1, \dots$$

Sei $a \in \mathbb{R}$. Man sagt, daß die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *gegen a konvergiere* oder *gegen a konvergent* sei, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon). \quad (2.12)$$

Schreibweise: $a_n \longrightarrow a (n \rightarrow \infty)$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Die Zahl a heißt *Grenzwert* der Folge. Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

Beispiele 2.32

- (i) $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent, also divergent.
- (ii) $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert 0.
- (iii) $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent, aber beschränkt.

Bemerkung

- (i) Im Falle der Konvergenz gegen den Grenzwert a – dieser ist dann eindeutig bestimmt – liegen in jeder noch so kleinen ε -Umgebung von a schließlich alle(!) Glieder der Folge; außerhalb einer jeden ε -Umgebung von a befinden sich nur endlich viele von ihnen. Für Konvergenzuntersuchungen kommt es auf diese endlich vielen Anfangsglieder nicht an.
- (ii) Man kann auch komplexe Zahlenfolgen definieren, $|a_n - a|$ bedeutet dann den Betrag in \mathbb{C} , und eine ε -Umgebung von a ist eine offene Kreisscheibe vom Radius ε um den Mittelpunkt a .

Definition der Potenz und Exponentialfunktion für reelle Argumente

Der folgende Satz liefert nun die Grundlage, Potenzen für reelle Exponenten zu definieren.

Satz 2.11

Seien $r \in \mathbb{Q}$ und $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus \mathbb{Q} , welche gegen r konvergiert, also $r_n \rightarrow r$ ($n \rightarrow \infty$). Dann gilt:

$$\bigwedge_{a>0} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^r.$$

Beweis

- (i) Wegen $a^{r_n} = a^{r_n - r} \cdot a^r$ ($r \in \mathbb{Q}$) reicht es, die Aussage

$$(s_n \rightarrow 0) \quad \implies \quad (a^{s_n} \rightarrow 1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

zu beweisen, also nur für eine gegen Null konvergierende Folge, eine sog. *Nullfolge*.

- (ii) Aufgrund von Satz 2.9 braucht man den Satz dann nur für die spezielle Nullfolge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu beweisen.
- (iii) Diese Aussage bedeutet jedoch für $a > 0$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \longrightarrow \quad 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

und das wird später im Kapitel über Folgen bewiesen (Beispiel 3.8).

Dieser Satz legt es nahe, Potenzen a^ρ für $a > 0$ und $\rho \in \mathbb{R}$ folgendermaßen zu definieren:

- (i) Man wähle eine Folge $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{Q} mit $r_n \rightarrow \rho$ ($n \rightarrow \infty$).
- (ii) Dann zeige man, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ existiert und von der speziellen Wahl der Folge $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig ist.
- (iii) Danach setze man: $a^\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$.
- (iv) Man setzt noch: $0^\rho := 0$ ($\rho > 0$).

Beispiel 2.33

Die irrationale Zahl 2^e etwa kann als Grenzwert einer rationalen Zahlenfolge wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 2^{2,7} &= 2^{\frac{27}{10}} = \sqrt[10]{2^{27}} \\ 2^{2,71} &= 2^{\frac{271}{100}} = \sqrt[100]{2^{271}} \\ 2^{2,718} &= 2^{\frac{2718}{1000}} = \sqrt[1000]{2^{2718}} \\ &\vdots = \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Resultate lassen sich die Monotonieeigenschaften der Potenzfunktion mit rationalen Exponenten auf reelle Exponenten übertragen, und man erhält zwei zu den Sätzen 2.8 und 2.9 analoge Ergebnisse:

Satz 2.12

- (i) Sei $\rho \in \mathbb{R}$. Die *Potenzfunktion* $x \mapsto x^\rho$ ist auf $(0, \infty)$ positiv und

streng monoton wachsend	\iff	$\rho > 0$,
streng monoton fallend	\iff	$\rho < 0$.
- (ii) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Die *Exponentialfunktion* $x \mapsto a^x$ ist auf \mathbb{R} positiv und

streng monoton wachsend	\iff	$a > 1$,
streng monoton fallend	\iff	$0 < a < 1$.

Bemerkung

Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann man jetzt „im Prinzip“ e^x berechnen. Wie macht man das nun praktisch? Meistens benutzt man die Darstellung über eine absolut konvergente unendliche Reihe (s. Kapitel 3)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}.$$

Man benutzt von dieser Reihe nur so viele Glieder, wie es zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit erforderlich ist, d.h. man rechnet mit einer (endlichen) Summe. So beispielsweise berechnet der Taschenrechner – oder allgemein ein Computer – den Ausdruck e^x .

2.3.1.2 Logarithmusfunktionen

Logarithmus einer positiven reellen Zahl

Nach Satz 2.12 (ii) ist die Exponentialfunktion f auf dem Intervall $(0, \infty)$ streng monoton und damit auf $W(f) = \mathbb{R}$ umkehrbar.

Satz und Definition 2.13

Seien $a > 0$, $a \neq 1$ und $g > 0$. Dann besitzt die Gleichung

$$a^x = g$$

genau eine Lösung. Sie wird mit $\log_a g$ bezeichnet und der *Logarithmus von g zur Basis a* genannt.

Der Logarithmus von g zur Basis a ist demnach derjenige Exponent x , mit dem die Basis a zu potenzieren ist, um die Zahl g zu erhalten. Dabei gilt:

$$\begin{array}{l} a^x = g \quad \iff \quad x = \log_a g \\ a^{\log_a g} = g \quad \text{und} \quad x = \log_a (a^x) \end{array}$$

Bemerkung

- (i) Liegt die Basis a innerhalb eines Kontextes fest, so schreibt man für gewöhnlich $\log g$ anstelle von $\log_a g$.
- (ii) Für spezielle Basen haben sich folgende Schreibweisen etabliert:

$$\begin{array}{ll} \ln g := \log_e g & (\text{Logarithmus naturalis}) \\ \lg g := \log_{10} g & (\text{Dekadischer Logarithmus}) \\ \text{lb } g := \log_2 g & (\text{Binärer Logarithmus}) \end{array}$$

- (iii) Logarithmen lassen sich von einer Basis a in eine andere Basis b wie folgt umrechnen:

$$g = b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{x \cdot \log_a b} = g$$

Die erste Gleichung liefert $\log_b g = x$, die letzte liefert $\log_a g = x \cdot \log_a b$. Man kann daher sowohl Potenzen als auch Logarithmen von einer Basis in die andere umrechnen:

$$\begin{array}{l} b^x = a^{x \cdot \log_a b} \\ \log_b g = \frac{\log_a g}{\log_a b} \end{array}$$

Insbesondere lassen sich Potenzen und Logarithmen stets bzgl. der Basis e ausdrücken, also als natürliche Logarithmen:

$$b^x = e^{x \cdot \ln b}$$

$$\log_b g = \frac{\ln g}{\ln b}$$

- (iv) Was an dem Logarithmus zur Basis e , \ln , „natürlich“ ist, wird hier noch nicht klar. Der Name rührt daher, daß sich die zur Basis e definierte Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ beim Ableiten ohne zusätzlichen Faktor reproduziert.

Beispiele 2.34

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & 1000 = 10^3 & \longrightarrow & \lg 1000 = \log_{10} 1000 = 3 \\ \text{(ii)} & 32 = 2^5 & \longrightarrow & \text{lb } 32 = \log_2 32 = 5 \\ \text{(iii)} & 0,01 = 10^{-2} & \longrightarrow & \lg 0,01 = \log_{10} 0,01 = -2 \\ \text{(iv)} & \frac{1}{81} = 3^{-4} & \longrightarrow & \log_3 \frac{1}{81} = -4 \\ \text{(v)} & \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{lb } \sqrt{2} = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Beispiele 2.35

- **pH-Wert** Der *pH-Wert*² in der Chemie ist der negative dekadische Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration in einer wäßrigen Lösung. Ein pH-Wert von 7 beispielsweise bedeutet eine H^+ -Ionen Konzentration von 10^{-7} mol/l oder eine Anzahl von 10^{-7} mol H^+ -Ionen³.
- **Lautstärke (Dezibel, dB)** Die Messung der Lautstärke, elektronische Dämpfung, etc. erfolgt mit Hilfe einer logarithmischen Skala.
- **Richterskala** Die zur Beschreibung der Stärke von Erdbeben benutzte *Richterskala* basiert auf einer deka-logarithmischen Einteilung. Die Erdbebenstärke steigt daher von Stufe zu Stufe exponentiell.
- **Empfindlichkeit der Sinnesorgane** Die Empfindlichkeit der Sinnesorgane folgt dem logarithmischen *Weber-Fechner-Gesetz*⁴ der Psychophysik. Demnach verhält sich die *subjektiv* empfundene Stärke $E(R)$ des Reizes

²*potentia hydrogenii*

³Ein *Mol* (mol) ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht wie Atome in 12 Gramm des Nuklids Kohlenstoff-12 (^{12}C) enthalten sind; sein Symbol ist „mol“. Die Teilchenzahl pro ein Mol Stoffmenge (Avogadro-Konstante) beträgt $6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

⁴Ernst Heinrich Weber (1795-1878; Gustav Theodor Fechner (1801-1887)

eines Sinneseindrucks proportional zum Logarithmus der *objektiven* Intensität R des physikalischen Reizes:

$$E(R) = \alpha \ln \frac{R}{R_0} \quad (R \geq R_0, R_0 : \text{Reizschwelle}).$$

Eine kleine Zunahme von Lärm bei einem schon bestehenden hohen Geräuschpegel wird kaum noch registriert, während dieselbe Lärmzunahme nachts als recht störend empfunden wird.

- **Sternhelligkeiten** Die Helligkeit von Sternen wird in astronomischen Größenklassen angegeben, die ein logarithmisches Maß der tatsächlichen Strahlungsstärke darstellt.

Rechenregeln für Logarithmen

Seien $u, v > 0$. Dann gelten

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \log(u \cdot v) &= \log u + \log v \\ \log_2(8 \cdot 4) &= \log_2 8 + \log_2 4 &= 3 + 2 = 5 \\ \text{(ii)} \quad \log\left(\frac{u}{v}\right) &= \log u - \log v \\ \log_3\left(\frac{81}{27}\right) &= \log_3 81 - \log_3 27 &= 4 - 3 = 1 \\ \text{(iii)} \quad \log(u^p) &= p \cdot \log u \quad (p \in \mathbb{R}) \\ \log_5(125^4) &= 4 \cdot \log_5 125 &= 4 \cdot 3 = 12 \\ \log_3(81^{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \cdot \log_3 81 &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \\ \text{(iv)} \quad \log \sqrt[p]{u} &= \frac{1}{p} \cdot \log u \quad (p \in \mathbb{N}) \\ \log_4 \sqrt[6]{16} &= \frac{1}{6} \cdot \log_4 16 &= \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Der Beweis dieser Regeln folgt unmittelbar aus den Rechengesetzen für die entsprechende Potenz, etwa für (i):

$$a^{\log_a(u \cdot v)} = u \cdot v = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = a^{\log_a u + \log_a v} \quad (a > 0).$$

Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion

Definition 2.12

Sei a (die „Basis“) > 0 , $a \neq 1$. Unter der *Logarithmusfunktion*

$$x \longmapsto \log_a x \quad (x > 0)$$

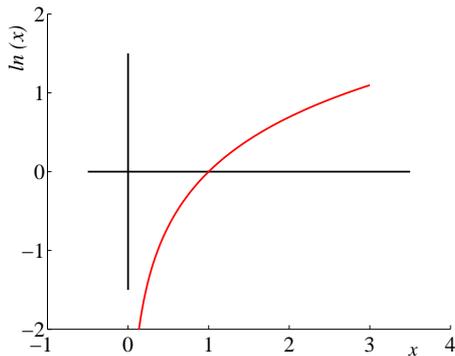
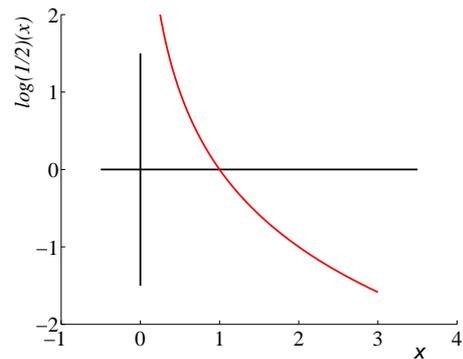
versteht man die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Satz 2.14

Die Logarithmusfunktion ist auf $(0, \infty)$

- streng monoton wachsend im Falle $a > 1$
- streng monoton fallend im Falle $0 < a < 1$

und besitzt bei $x = 1$ eine Nullstelle. Die Achse $x = 0$ ist eine Asymptote (im Endlichen!). Sie ist jedoch kein Pol, da \log schwächer fällt als jede Potenz, s. Abb. 2.39.

Abbildung 2.39: $f(x) = \ln x$ Abbildung 2.40: $f(x) = \log_{1/2} x$

Bemerkung

Logarithmen zu Basen $a \in (0, 1)$ werden im folgenden nicht betrachtet, denn sie können vermöge der folgenden Formeln auf Logarithmen zur entsprechenden reziproken Basis $\frac{1}{a} \in (1, \infty)$ umgerechnet werden:

$$a^y = x \iff y = \log_a x,$$

$$x = a^y \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{a^y} = \left(\frac{1}{a}\right)^y \iff y = \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{x}\right)$$

Beispiel 2.36

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \log_e \left(\frac{1}{x}\right) = \ln \frac{1}{x}$$

Beispiel 2.37

Die Halbwertszeit τ einer radioaktiven Substanz ist derjenige Zeitraum, in dem genau die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne n_0 zerfallen ist:

$$\text{Zerfallsgesetz: } n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$$

$$n(\tau) = \frac{1}{2}n_0 \longrightarrow \frac{1}{2}n_0 = n_0 \cdot e^{-\lambda\tau}, \quad e^{\lambda\tau} = 2,$$

$$\tau \cdot \lambda = \ln 2 = 0,6931$$

Das Produkt aus Halbwertszeit τ und Zerfallskonstante λ ist also stets konstant gleich $\ln 2$.

Logarithmus einer komplexen Zahl

Logarithmen sind bisher nur für positive reelle Zahlen definiert worden. Negative Zahlen lassen sich auch logarithmieren, wenn man Logarithmen komplexer Zahlen durch die folgende Definition zuläßt:

$$\log(-2) = \log(2 \cdot e^{i\pi}) = \log(e^{\ln 2} \cdot e^{i\pi}) = \log(e^{\ln 2 + i\pi}) := \ln 2 + i\pi$$

Analog zu diesem Beispiel lassen sich alle komplexen Zahlen logarithmieren, einschließlich der negativen reellen:

Eine komplexe Zahl (in der Exponentialform) wird logarithmiert, indem ihr Betrag logarithmiert und das Argument der e-Funktion als Imaginärteil addiert wird:

$$z = r \cdot e^{i\phi} \quad \Longrightarrow \quad \log z := \ln r + i\phi = \ln |z| + i \arg z$$

Problem

Die e-Funktion ist im Komplexen periodisch mit der Periode $2\pi i$:

$$z = r \cdot e^{i\phi} = r \cdot e^{i(\phi + k \cdot 2\pi)} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

und daher nicht umkehrbar. So sind auch

$$\ln r + i(\phi + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

mögliche Werte von $\log z$.

Erklärung

Die Euler'sche Formel gilt auch im Komplexen, und man erhält

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Die Abbildung

$$z := f(w) := e^w \quad (w \in \mathbb{C})$$

vermittelt eine Abbildung der komplexen w -Ebene auf die komplexe z -Ebene. Wegen der Periodizität der komplexen e-Funktion ist sie allerdings nicht injektiv. Diese Nicht-Injektivität läßt sich anschaulich darstellen, wenn man der Abbildung f eine Transformation auf Polarkoordinaten vorschaltet, s. Abb. 2.41.

Dabei wird das Rechteck $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ der $\langle r, \phi \rangle$ -Ebene auf die gesamte w -Ebene \mathbb{C} abgebildet. Andere, „darüber“ und „darunter“ liegende Rechtecke werden auf andere Exemplare von \mathbb{C} abgebildet, welche als sog. *Riemann'sche*

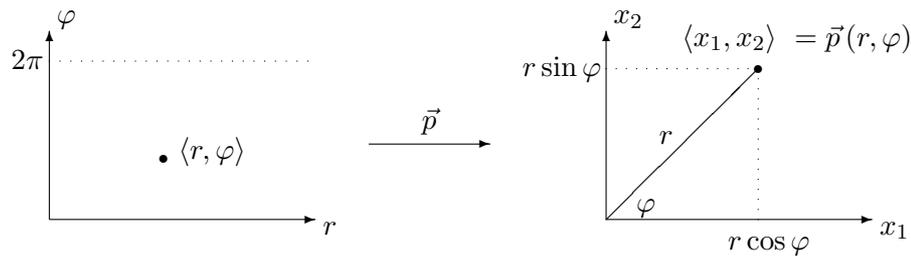


Abbildung 2.41: Ebene Polarkoordinaten

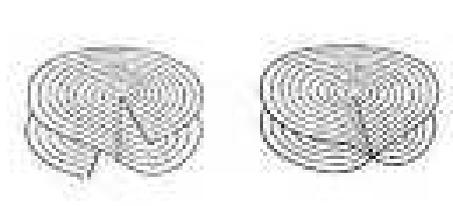


Abbildung 2.42: Riemann'sche Fläche einer Funktion

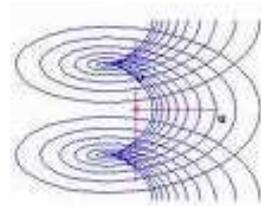


Abbildung 2.43: Riemann'sche Fläche (als Definitionsbereich) der Logarithmusfunktion

Fläche mehrere Blätter bilden und „übereinanderliegen“; in diese übereinanderliegenden Riemann'schen Flächen läßt sich der Definitionsbereich der komplexen Exponentialfunktion quasi aufsplitten. Diese „verschiedenen“ Definitionsbereiche bzw. die sie repräsentierenden verschiedenen Rechtecke in der $\langle r, \phi \rangle$ -Ebene tauchen dann rückwärts wieder auf als Bildbereiche der Logarithmusfunktion.

Das hat zur Folge, daß die Logarithmusfunktion im Komplexen unendlich viele Werte (im Definitionsbereich „ w -Ebene \mathbb{C} “ der komplexen e -Funktion, aufgefaßt als mehrere Rechtecke in der $\langle r, \phi \rangle$ -Ebene) besitzt, je nachdem, auf welchem „Blatt“ der Riemann'schen Fläche ihr Argument z liegt, (Abb. 2.44).

$$z = e^w \quad \Longleftrightarrow \quad w = \log z = \ln |z| + i(\arg z + k \cdot 2\pi) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad k = 0 & : \quad \log z = \ln r + i\phi \\ k = \pm 1 & : \quad \log z = \ln r + i(\phi \pm 2\pi) \\ k = \pm 2 & : \quad \log z = \ln r + i(\phi \pm 4\pi) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl ist mehrwertig, also keine Funktion mehr! Er wird zu einer Funktion, wenn man sich auf ein Intervall der Länge 2π für das Argument der komplexen Zahl beschränkt. Man spricht für

$$\begin{aligned} k = 0 & : \quad \text{vom Hauptwert des Logarithmus',} \\ k \neq 0 & : \quad \text{von den Nebenwerten des Logarithmus'.} \end{aligned}$$

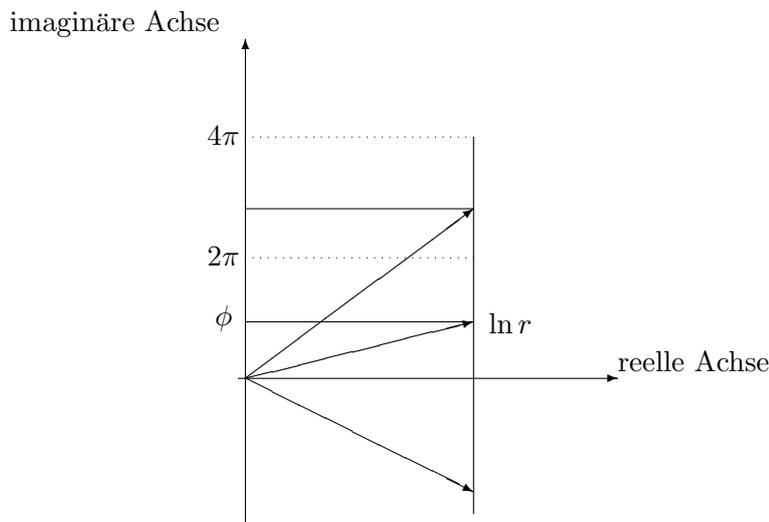


Abbildung 2.44: Logarithmus einer komplexen Zahl

Jeder Wert des Logarithmus ist *Zweig* einer mehrdeutigen komplexwertigen Funktion, obwohl dieser Begriff schon in sich widersprüchlich ist. Bei Beschränkung auf einen Wert – etwa den Hauptwert – erhält man eine „eindeutige“ Funktion.

Bei Beschränkung des Argumentes der komplexen Zahl z – etwa auf das Intervall $0 \leq \arg z < 2\pi$ – erhält man eine (eindeutige) Funktion, die in den Punkten der positiven reellen Achse aber nicht mehr stetig ist: beim Überschreiten der positiven reellen Achse treten Sprünge der Höhe $\pm 2\pi i$ auf. In der komplexen Analysis (Funktionentheorie) redet man von mehreren Blättern der *Riemann'schen Fläche* der Funktion, s. Abb. 2.42 und 2.43.

Beispiele 2.38

(i) Hauptwert des Logarithmus' von $z = 3 \cdot (\sqrt{3} + i)$:

$$\begin{aligned} \log z &= \log \left[6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \right] = \log \left[6 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \log [6 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}] = \ln 6 + i \frac{\pi}{6} \end{aligned} \quad (2.14)$$

(ii) $i^i = [e^{i\frac{\pi}{2}}]^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Auf den ersten Blick scheint diese Rechnung einleuchtend zu sein, tatsächlich stecken aber komplexe Logarithmen dahinter – und damit die o.a. Mehrdeutigkeit. Beispielsweise gilt ja auch

$$i^i = [e^{i\frac{\pi}{2}}]^i = [e^{i(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi)}]^i = e^{-(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-k \cdot 2\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wie kommt es zu dieser Mehrdeutigkeit? Wegen der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion und damit der „Mehrwertigkeit“ der komplexen Logarithmusfunktion. Es ist nämlich

$$i^i = e^{(\log i) \cdot i} = e^w = z \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} w = \log z &= i \cdot \log i = i \cdot \log \left[1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)} \right] \\ &= i \cdot \left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) \right] \\ &= -\frac{\pi}{2} - k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2.3.1.3 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Aussageformen, bei denen die Lösungsvariable in den Argumenten von Exponentialfunktionen vorkommen, heißen *Exponentialgleichungen* oder *Exponentialungleichungen*; die Lösungsmengen solcher Aussageformen lassen sich meistens durch Logarithmieren ermitteln. Analog heißen Aussageformen, bei denen die Variable im Argument oder in der Basis eines Logarithmus' auftritt, *Logarithmusgleichungen* oder *-ungleichungen*; diese lassen sich oft durch Anwendung einer Exponentialfunktion lösen. Zwei Beispiele mögen den Sachverhalt verdeutlichen.

Beispiel 2.39 Exponentialgleichungen

$$(i) \quad 4^{3-x} = 2 \cdot 6^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Etwas anders geschrieben, lautet diese Gleichung

$$(e^{\ln 4})^{3-x} = e^{(\ln 4) \cdot (3-x)} = 2 \cdot e^{(\ln 6) \cdot x} = e^{\ln 2 + x \cdot \ln 6} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

sie ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (3-x) \cdot \ln 4 &= \ln 2 + x \cdot \ln 6 && \Longleftrightarrow \\ 3 \cdot \ln 4 - x \cdot \ln 4 &= \ln 2 + x \cdot \ln 6 && (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} x \cdot (\ln 6 + \ln 4) &= x \cdot \ln(6 \cdot 4) = x \cdot \ln 24 \\ &= 3 \cdot \ln 4 - \ln 2 = \ln(4^3) - \ln 2 = \ln \frac{4^3}{2} = \ln 32, \\ \longrightarrow x &= \frac{\ln 32}{\ln 24} = \frac{3,465736}{3,178054} = 1.090521 \end{aligned}$$

Diese Aufgabe läßt sich auch weniger umständlich lösen. Wie?

$$(ii) \quad 2^{2(x+1)} - 2^{x+3} = 2^{x+5} - 2^{2x+4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Etwas anders geschrieben, lautet diese Gleichung

$$4 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot 2^x = 32 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

sie ist äquivalent zu

$$20 \cdot 2^{2x} = 40 \cdot 2^x \quad \iff \quad 2^{2x} = 2 \cdot 2^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{2^{2x}}{2^x} = 2^{2x-x} = 2^x = 2 \quad \iff \quad x = \log_2 2 = 1$$

Beispiel 2.40 Logarithmusgleichungen

(i) Die Variable ist Basis einer Logarithmusfunktion:

$$2 \cdot \log_x 36 - 3 \cdot \log_x 3 = 2 \quad (x > 0, x \neq 1) \iff$$

$$\log_x 36^2 - \log_x 3^3 = 2 \quad (x > 0, x \neq 1) \iff$$

$$\log_x \frac{36^2}{3^3} = \log_x \frac{2^4 \cdot 3^4}{3^3} = \log_x 48 = 2 \quad (x > 0, x \neq 1) \iff$$

$$48 = x^{\log_x 48} = x^2 \quad (x > 0, x \neq 1) \iff$$

$$\longrightarrow x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(ii) Die Variable ist im Argument einer Logarithmusfunktion:

$$2 \cdot \ln(x+2) - \ln(x-2) = \ln(x+5) \quad (x \in \mathbb{R}, x > 2)$$

Diese Gleichung lautet umgeformt:

$$\ln \frac{(x+2)^2}{x-2} = \ln(x+5) \quad (x \in \mathbb{R}, x > 2) \iff$$

$$\frac{(x+2)^2}{x-2} = (x+5) \quad (x \in \mathbb{R}, x > 2) \iff$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = (x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10 \quad (x \in \mathbb{R}, x > 2)$$

$$\longrightarrow x = -14$$

Diese „Lösung“ verträgt sich aber nicht mit der Voraussetzung $x > 2$, also ist diese Gleichung unlösbar bzw. ihre Lösungsmenge leer.

2.3.2 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen (oder: Winkelfunktionen) sind für die Darstellung periodischer Vorgänge unentbehrlich, also z. B. für die Beschreibung von Schwingungen. Vor dem nächsten Abschnitt sei noch einmal auf die Definition des Bogenmaßes eines Winkels verwiesen (Definition 2.13).

2.3.2.1 Definition, Periodizität, Graph

Sei $P \in \mathbb{R}^2$. P habe die kartesischen Koordinaten $\langle u, v \rangle$ und die Polarkoordinaten $\langle r, \phi \rangle$, s. Abb. 2.45.

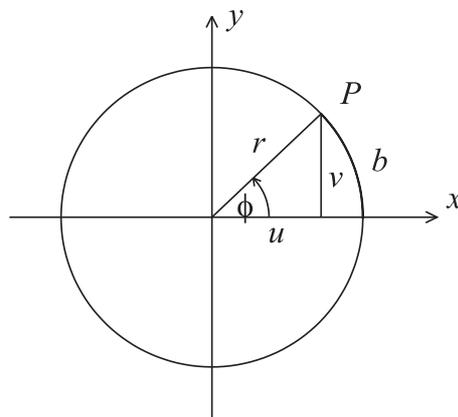


Abbildung 2.45: Koordinaten eines Punktes P

In der folgenden Definition sollen die für Winkel definierten trigonometrischen Größen

$$\sin \phi, \cos \phi, \tan \phi, \cot \phi \quad (\phi \in [0, 2\pi))$$

als Funktionen für beliebige reelle Argumente definiert werden. Die Idee ist dabei die folgende:

1. Jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ läßt sich eindeutig darstellen in der Form

$$t = \hat{t} + k \cdot 2\pi$$

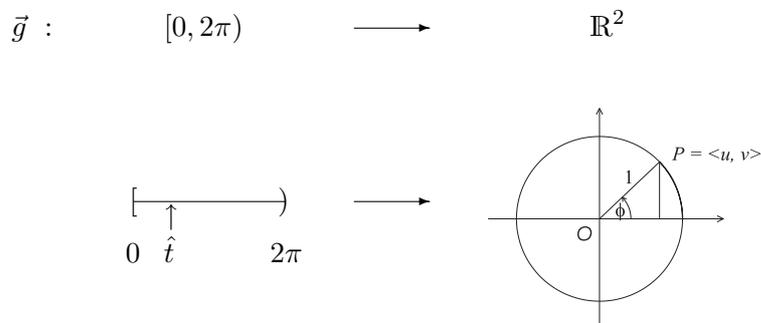
mit einer geeigneten Zahl $\hat{t} \in [0, 2\pi)$ und einer geeigneten Zahl $k \in \mathbb{Z}$.

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 2\pi) \\ & t & \longmapsto & \hat{t} \end{array}$$

ist surjektiv, aber natürlich nicht injektiv.

2. Das Intervall $[0, 2\pi)$ wird, beginnend im Punkt $\langle 1, 0 \rangle$, im mathematisch positiven Sinne auf den Einheitskreis „aufgewickelt“, s. Abb. 2.46.
3. Insgesamt hat man in $\vec{g} \circ f$ eine Komposition von Abbildungen, welche die gesamte reelle Achse auf den Einheitskreis abbildet, s. Abb. 2.47.

Abbildung 2.46: „Aufwickeln“ des Intervalles $[0, 2\pi)$ auf den Einheitskreis**Aufgabe**

Wie sieht die Abbildung \vec{g} genau aus, d.h. wie muß die folgende Funktionsvorschrift auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ definiert sein?

$$\vec{g} : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{g}(t) = \langle g_1(t), g_2(t) \rangle := \langle x(t), y(t) \rangle = \begin{cases} ? & , t \in [0, \pi) \\ ? & , t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

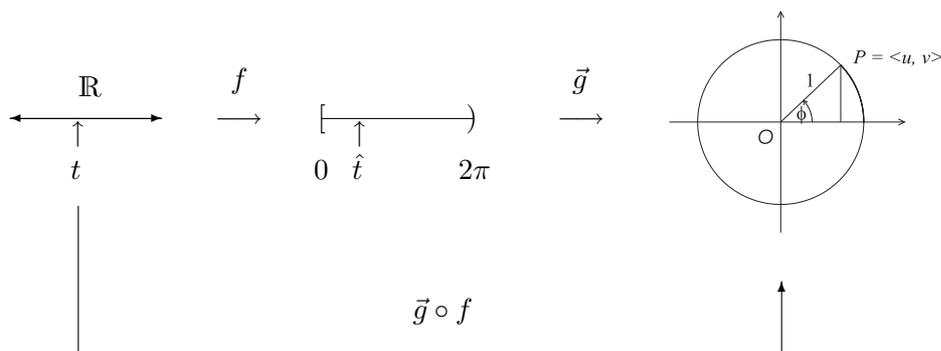


Abbildung 2.47: Abbildung der reellen Achse auf den Einheitskreis

Die Werte der trigonometrischen Funktionen an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ werden nun definiert als die Werte der entsprechenden Winkelfunktionen in dem rechtwinkligen Dreieck, das vom Ursprung O , von $\langle u, v \rangle$ und von $\langle u, 0 \rangle$ aufgespannt wird.

Definition 2.13

Für $x \in \mathbb{R}$ seien $\hat{x} \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ (eindeutig!) so gewählt, daß gilt:

$$x = \hat{x} + k \cdot 2\pi.$$

Sei ϕ definiert durch $\phi := \frac{360}{2\pi} \cdot \hat{x}$, und sei $P := \langle u, v \rangle$ der Schnittpunkt des vom Ursprung unter dem Winkel ϕ ausgehenden Strahls mit dem Einheitskreis, s. Abb. 2.47.

Dann wird definiert (Abbildungen 2.48 - 2.51):

$$\begin{aligned} \sin x &:= v = (g_2 \circ f)(x) = \sin \phi & (x \in \mathbb{R}) \\ \cos x &:= u = (g_1 \circ f)(x) = \cos \phi & (x \in \mathbb{R}) \\ \tan x &:= \frac{v}{u} = & = \tan \phi & (x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}) \\ \cot x &:= \frac{u}{v} = & = \cot \phi & (x \in \mathbb{R}, x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Bemerkung

- (i) Unmittelbar aus der Definition der trigonometrischen Funktionen folgt deren Periodizität (Definition 2.1 (xvi), p. 63):

$$\begin{aligned} \sin(x + k \cdot 2\pi) &= \sin x & (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}) \\ \cos(x + k \cdot 2\pi) &= \cos x & (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}) \\ \tan(x + k \cdot \pi) &= \tan x & (x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}) \\ \cot(x + k \cdot \pi) &= \cot x & (x \in \mathbb{R}, x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Bei der Untersuchung dieser Funktionen kann man sich daher auf ein Intervall der Länge 2π beschränken, üblicherweise auf $[0, 2\pi)$ oder auf $(-\pi, \pi]$.

- (ii) Da $\cot x$ nur den Kehrwert von $\tan x$ angibt, bleibt diese Funktion oft unberücksichtigt.
- (iii) Für ausgezeichnete Werte der trigonometrischen Funktionen gibt es eine „Eselsbrücke“; s. Tabelle 2.1.

(iv) Aufgabe

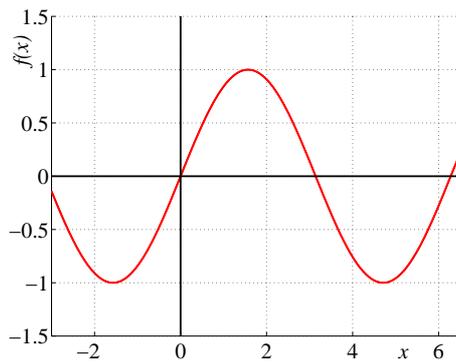
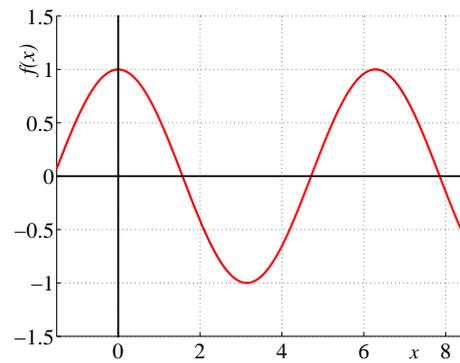
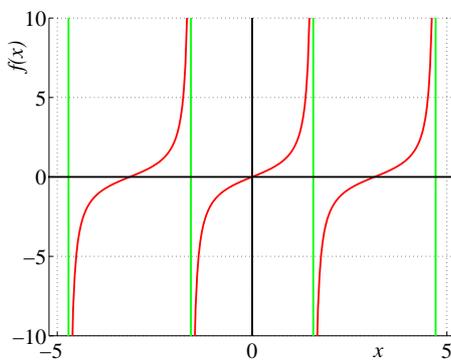
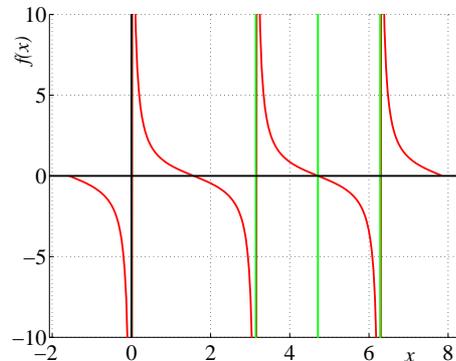
Ist p die betragsmäßig kleinste Periode einer periodischen Funktion f , so gilt:

$$f(x + k \cdot p) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}).$$

Beweis Mit vollständiger Induktion.

Gradmaß	0	30	45	60	90
Bogenmaß	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}^2$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}^3$	—
cot	—	$\frac{1}{3}\sqrt{3}^3$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}^2$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Tabelle 2.1: Ausgezeichnete Werte trigonometrischer Funktionen

Abbildung 2.48: $f(x) = \sin x$ Abbildung 2.49: $f(x) = \cos x$ Abbildung 2.50: $f(x) = \tan x$ Abbildung 2.51: $f(x) = \cot x$

Bemerkung

Vom mathematischen Standpunkt ist die oben gegebene Einführung der trigonometrischen Funktionen etwas unbefriedigend, da sie sich auf den überhaupt nicht elementaren Begriff der Länge eines Bogens (einer Kurve) stützt. Der formal korrekte Weg wäre die Definition mit Hilfe einer sog. *Potenzreihe*.

Dennoch wird gerade dadurch deutlich, daß es erforderlich ist, die Argumente von trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß anzugeben, nicht im Gradmaß.

2.3.2.2 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

Die folgenden Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen gelten jeweils für alle Werte von x , für die die angegebenen Größen auch definiert sind.

(i) Symmetrie:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & : & \quad \text{ungerade Funktion} \\ \cos(-x) &= \cos x & : & \quad \text{gerade Funktion} \\ \tan(-x) &= -\tan x & : & \quad \text{ungerade Funktion} \\ \cot(-x) &= -\cot x & : & \quad \text{ungerade Funktion} \end{aligned}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad , \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(Nenner jeweils $\neq 0$)

(ii) Trigonometrischer Lehrsatz des Pythagoras:

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1} \quad (2.15)$$

Daraus folgen u.a.

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad , \quad |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Durch Quadrieren und Auflösen erhält man daraus

$$\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad , \quad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

(iii) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

Beweis

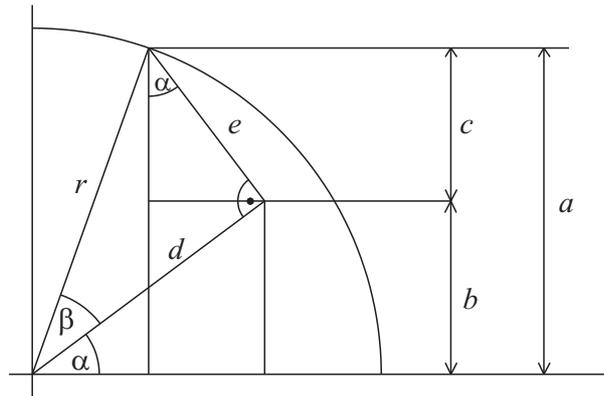


Abbildung 2.52: Additionstheorem für die Sinusfunktion

Aus Abbildung 2.52 liest man ab:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{a}{r} = \frac{b+c}{r} = \frac{b}{r} + \frac{c}{r} = \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{r} + \frac{c}{e} \cdot \frac{e}{r} \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Damit ist das Additionstheorem für die Sinusfunktion für die Fälle $(\alpha + \beta) \leq \pi/2$ bewiesen. Es gilt aber auch für Winkel $(\alpha + \beta) > \pi/2$; auf den ähnlichen Beweis wird hier verzichtet.

Dann folgt aus dieser Formel zusammen mit (i):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \sin \alpha \cdot \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin \alpha \cdot \sin(\beta + \pi) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin \alpha \cdot \sin(\beta) \cdot (-1) + \cos \alpha \cdot \cos \beta \\
&= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) \\
&= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} \\
&= \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} \quad [\text{Kürzen mit } \cos \alpha \cos \beta] \\
&= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}
\end{aligned}$$

(iv) Funktionen des doppelten Winkels:

Setzt man $x = y$, so folgen aus den Additionstheoremen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch wiederholtes Einsetzen Beziehungen, welche in der Integralrechnung nützlich sind:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \\
\sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) \\
\cos^4 x &= \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)
\end{aligned}$$

(v) Produkte trigonometrischer Funktionen:

$$\begin{aligned}
 \sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \\
 \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)] \\
 \sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Diese Formeln erlangen ebenfalls in der Integralrechnung Bedeutung. Beweisen lassen sie sich, indem die jeweils rechten Seiten mit Hilfe der Additionstheoreme umgeformt werden.

2.3.2.3 Arcusfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen ordnen einer reellen Zahl – bzw. dem entsprechenden Bogen auf dem Einheitskreis und dem zugehörigen Winkel – eine reelle Zahl zu, s. Abb. 2.47. In der Praxis hat man oft das umgekehrte Problem:

Der Funktionswert einer trigonometrischen Funktion ist bekannt, zu bestimmen sind die zugehörigen Argumente (Winkel).

Beispiel Umrechnung auf Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \quad , \quad \phi = ?$$

Zu lösen ist also das Problem der Umkehrung (Invertierung) der trigonometrischen Funktionen. Dieses Problem ist jedoch nicht eindeutig lösbar: die Gleichung $\tan x = 1$ beispielsweise besitzt für $x \in \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen, da es unendlich viele Winkel gibt, deren Tangens gleich 1 ist. Auf graphischem Wege können die Lösungen dieser Gleichung als Schnittpunkte der zwei Funktionen

$$f(x) := \tan x \quad \text{und} \quad g(x) := 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

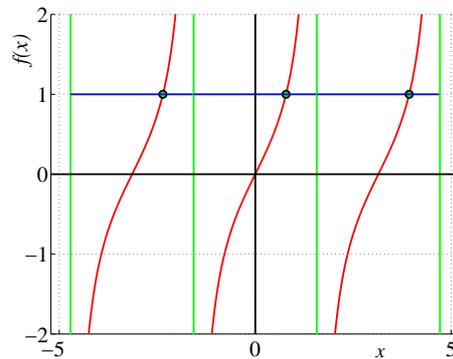
ermittelt werden. Sie lauten (Abb. 2.53)

$$x_k := \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Die Umkehrung der Tangensfunktion ist demnach nicht eindeutig, da diese nicht injektiv ist: offensichtlich eine Folge der fehlenden strengen Monotonie dieser Funktion. Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei den übrigen trigonometrischen Funktionen.

Beschränkt man sich bei der Lösung der Gleichung $\tan x = 1$ dagegen auf einen Bereich, in dem \tan streng monoton verläuft – z. B. auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ –, so erhält man genau eine Lösung:

$$\tan x = 1 \quad \wedge \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad \iff \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Abbildung 2.53: Schnittpunkte von $f(x) := \tan x$ mit $g(x) := 1$ ($x \in \mathbb{R}$)

In Intervallen, in denen die vier trigonometrischen Funktionen streng monoton verlaufen, sind sie umkehrbar. Die Umkehrfunktionen heißen *Arcusfunktionen* oder *Zyklometrische Funktionen*.

Prinzipiell lässt sich für die Umkehrung einer trigonometrischen Funktion natürlich jedes Intervall verwenden, in dem die Funktion die erforderliche Monotonieeigenschaft hat. Üblicherweise wählt man die folgenden Intervalle aus:

$$f(x) = \sin x \quad , \quad \mathcal{I} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad f^{-1}(x) = \arcsin x$$

(„arcus sinus x“)

$$f(x) = \cos x \quad , \quad \mathcal{I} = [0, \pi] \quad , \quad f^{-1}(x) = \arccos x$$

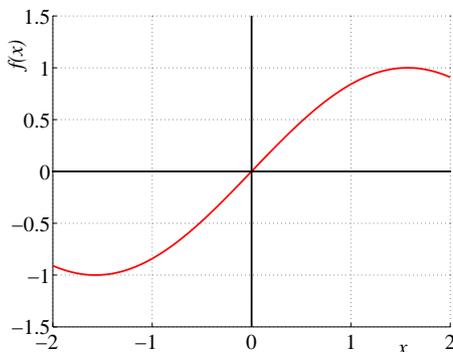
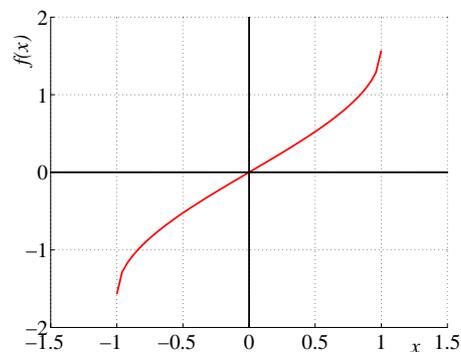
(„arcus cosinus x“)

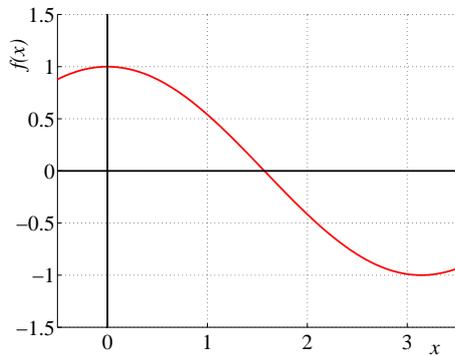
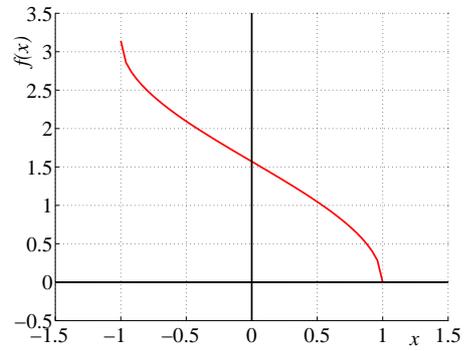
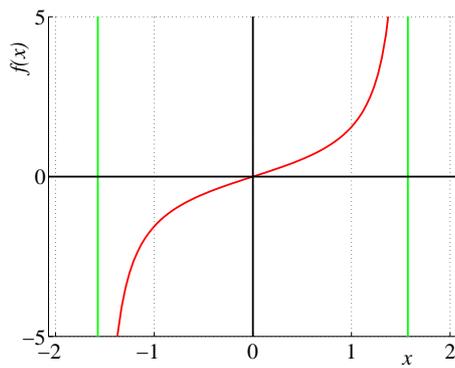
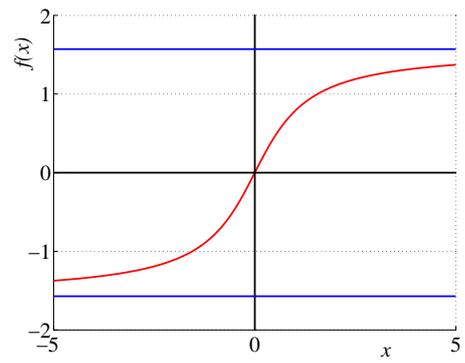
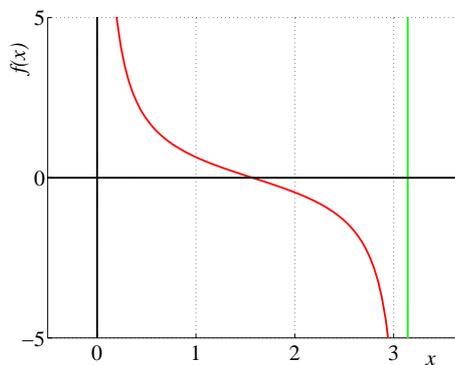
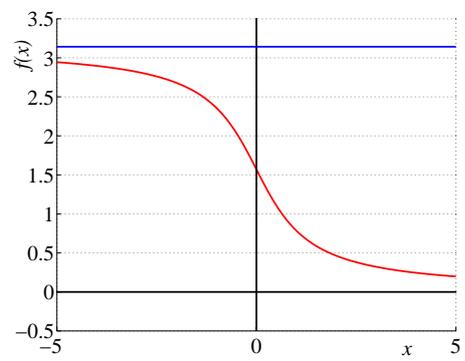
$$f(x) = \tan x \quad , \quad \mathcal{I} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f^{-1}(x) = \arctan x$$

(„arcus tangens x“)

$$f(x) = \cot x \quad , \quad \mathcal{I} = (0, \pi) \quad , \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$$

(„arcus cotangens x“)

Abbildung 2.54: $f(x) = \sin x$ Abbildung 2.55: $f^{-1}(x) = \arcsin x$

Abbildung 2.56: $f(x) = \cos x$ Abbildung 2.57: $f^{-1}(x) = \arccos x$ Abbildung 2.58: $f(x) = \tan x$ Abbildung 2.59: $f^{-1}(x) = \arctan x$ Abbildung 2.60: $f(x) = \cot x$ Abbildung 2.61: $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$

Bemerkung

Die Umkehrfunktion von $f(x) = \sin x$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), ist $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Hierfür sollte man aber nicht $\sin^{-1}(x)$ schreiben, denn diese Schreibweise meint bei trigonometrischen Funktionen etwas Anderes, nämlich $\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Dennoch wird dieses Symbol – in Verbindung mit der Shift-Taste – auf manchen Taschenrechnern zur Darstellung von $\arcsin x$ benutzt. Man lasse also Aufmerksamkeit und Umsicht walten!

Beispiele und Beziehungen zwischen den Arcusfunktionen

- (i) Aus den kartesischen Koordinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ gewinnt man die Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \phi = y/x$,

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & , \quad x > 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0 \quad \wedge \quad y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & , \quad x < 0 \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & , \quad x = 0 \quad \wedge \quad y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & , \quad x > 0 \quad \wedge \quad y < 0 \end{cases}$$

Die Funktionen

$$\phi_1 \left(\frac{y}{x} \right) := \arctan \frac{y}{x}$$

$$\phi_2 \left(\frac{y}{x} \right) := \arctan \frac{y}{x} + \pi$$

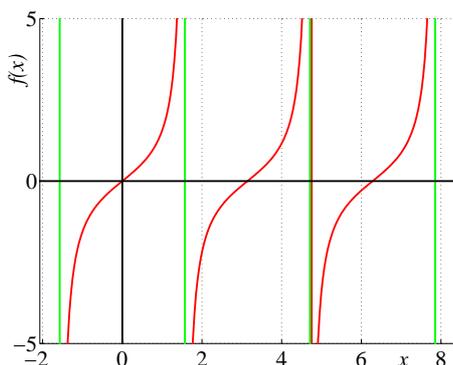
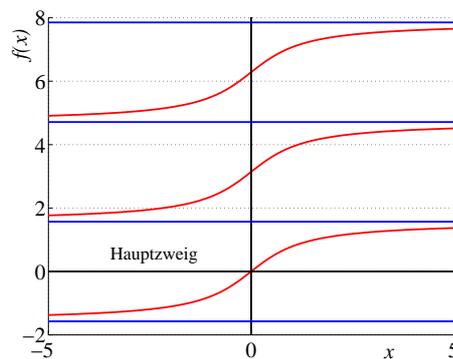
$$\phi_3 \left(\frac{y}{x} \right) := \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$$

entstehen dabei als Umkehrfunktionen von $\tan \phi = y/x$ auf den Intervallen (Abb. 2.62 und 2.63)

$$\mathcal{I}_1 := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\mathcal{I}_2 := \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\mathcal{I}_3 := \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right)$$

Abbildung 2.62: $f(x) = \tan x$ Abbildung 2.63: $f(x) = \arctan x$

- (ii) Da sich eine Funktion und ihre Umkehrfunktion in ihrer gemeinsamen Wirkung aufheben, gilt:

$$\arcsin(\sin y) = y, \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\arccos(\cos y) = y, \quad \cos(\arccos x) = x$$

Entsprechend ist dann z. B. für $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$:

$$|\sin(\arccos x)| = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$|\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

- (iii) Aus der Komplementärformel

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \sin y$$

ergibt sich mit $y = \arcsin x$:

$$x = \sin(\arcsin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right),$$

und die Anwendung von \arccos auf diese Gleichung liefert nach Umformung:

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}. \quad (2.18)$$

- (iv) Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen lassen sich in solche zwischen den Arcusfunktionen umrechnen:

$$\tan(y_1 \pm y_2) = \frac{\tan y_1 \pm \tan y_2}{1 \mp \tan y_1 \cdot \tan y_2},$$

$$x_i = \tan y_i \iff y_i = \arctan x_i \quad (i \in \{1, 2\}),$$

$$\arctan x_1 \pm \arctan x_2 = \arctan \frac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 \cdot x_2}$$

$$(|\arctan x_1 \pm \arctan x_2| < \pi/2)$$

Bemerkung

\arcsin ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten Sinusfunktion. Welches ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ eingeschränkten Sinusfunktion? Es ist

$$\begin{aligned} y &= \sin x && (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \\ &= \sin(u - \pi) && (u = x + \pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]) \\ &\iff \\ u - \pi &= x = \arcsin y \\ &\iff \\ u &= \arcsin y + \pi \end{aligned}$$

Analog für die anderen Intervalle, in welchen die Sinusfunktion streng monoton verläuft.

2.3.2.4 Trigonometrische Gleichungen

Unter einer *trigonometrischen Gleichung* versteht man eine Gleichung, bei der die Unbekannte x in den Argumenten trigonometrischer Funktionen auftritt. Ein allgemeines Lösungsverfahren für Gleichungen dieser Art läßt sich *nicht* angeben.

Beispiel 2.41

Die Gleichung

$$\tan x = 1$$

zu Beginn des letzten Abschnittes ist eine einfache trigonometrische Gleichung.

Beispiel 2.42

Man finde alle reellen Zahlen x , welche der folgenden Gleichung genügen:

$$8 \sin x + 4 \cos^2 x = 7.$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & 8 \sin x + 4(1 - \sin^2 x) = 7 \\ \longrightarrow & \sin^2 x - 2 \sin x + \frac{3}{4} = 0 \\ \longrightarrow & (\sin x)_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgrund der Nebenbedingung $|\sin x| \leq 1$ kommt das obere Vorzeichen nicht in Frage; aus $\sin x = \frac{1}{2}$ folgt

$$L_1 := \left\{ x : x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet} \right\}$$

$$L_2 := \left\{ x : x \in \mathbb{R}, x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet} \right\}$$

→ $L := L_1 \cup L_2$ ist die Lösungsmenge.

Beispiel 2.43

Man finde alle reellen Zahlen x , welche der folgenden Gleichung genügen:

$$\sin(2x) = \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

$$\longrightarrow \sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos x$$

$$\longrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$$

Achtung:

Hier darf nicht dividiert werden, da dazu $\cos x \neq 0$ vorausgesetzt werden muß und man gegebenenfalls Lösungen verliert.

$$(a) \cos x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet})$$

$$(b) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet})$$

$$\longrightarrow \quad L := \left\{ x : x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet} \right\}$$

ist die Lösungsmenge.

Beispiel 2.44

Man finde alle reellen Zahlen x , welche der folgenden Gleichung genügen:

$$\sin x + \cos x = 1.$$

An diesem Beispiel führen mehrere Lösungsmethoden zum Ziel. Zwei davon sollen hier demonstriert werden, eine dritte folgt im Abschnitt über Harmonische Schwingungen.

Methode 1:

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \quad \sin x \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 \\ \longrightarrow & \quad \sin x - 1 = \mp \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ \longrightarrow & \quad (\sin x - 1)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x \\ \longrightarrow & \quad \sin^2 x - \sin x = \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Wie im letzten Beispiel darf auch hier nicht durch $\sin x$ dividiert werden, will man keine Lösungen verlieren.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sin x = 0 & \longrightarrow x = k \cdot \pi, \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}) \\ \text{(b)} \quad \sin x = 1 & \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}) \end{aligned}$$

Durch das Quadrieren oben wurde eine sog. *Nicht-Äquivalenz-Umformung* vorgenommen, nach dem Schema

$$(-1) \neq (+1) \quad \overset{\wedge}{\nLeftarrow} \quad (-1)^2 = (+1)^2.$$

Daher bleibt zu prüfen, ob jede der erhaltenen Lösungen auch die Ausgangsgleichung löst:

(a) An den Stellen $x = k \cdot \pi$ ist $\sin x = 0$ und $\cos x = +1$ oder $\cos x = -1$. Es dürfen nur solche Werte zugelassen werden, an denen $\cos x = +1$ ist, also

$$x = k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}).$$

(b) An den Stellen $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ist $\sin x = 1$ und $\cos x = 0$.

Insgesamt also folgt als Lösungsmenge

$$L := \left\{ x : x \in \mathbb{R}, x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet} \right\}.$$

Methode 2:

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 \\ \longrightarrow & \quad \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \\ \longrightarrow & \quad 2 \sin x \cos x = \sin 2x = 0 \\ \longrightarrow & \quad 2x = k \cdot \pi, \quad \text{also} \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

Auch hier müssen wegen des Quadrierens Werte ausgeschlossen werden; in Frage kommen nur ganze Zahlen k , welche bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 ergeben: $x \equiv 0 \pmod{4} \vee x \equiv 1 \pmod{4}$ („kongruent modulo“).

Methode 3:

Man kann diese Gleichung auch noch auf eine dritte Art und Weise lösen, wenn man die Formel für die Addition harmonischer Schwingungen heranzieht, s. Beispiel 2.48, p.153.

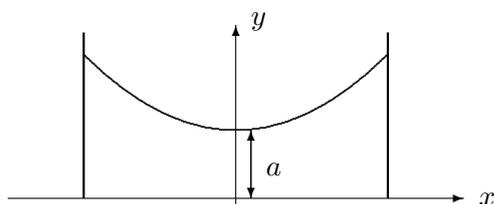
2.3.3 Hyperbelfunktionen und Areafunktionen

2.3.3.1 Hyperbelfunktionen

Hängt man ein homogenes Seil ohne Biegesteifigkeit (Hochspannungsleitung, Kette) an zwei symmetrisch zur Ordinate liegenden Punkten auf, so nimmt es die Gestalt der sog. *Kettenlinie* an:

$$f(x) := a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Hierbei ist a eine positive Konstante, welche geometrisch den tiefsten Punkt des Seiles angibt, s. Abb. 2.64.



Kettenlinie

$$f(x) := a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

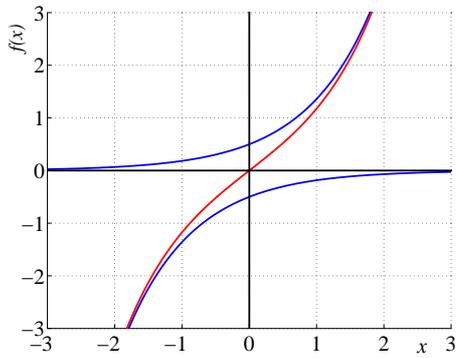
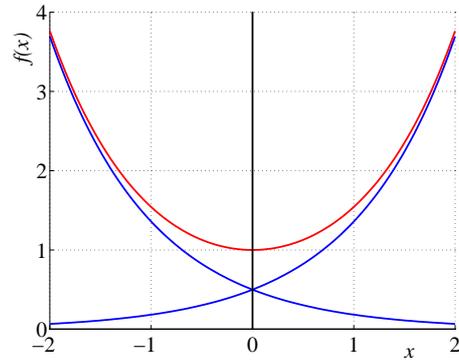
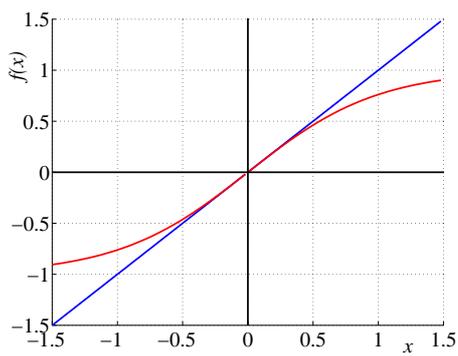
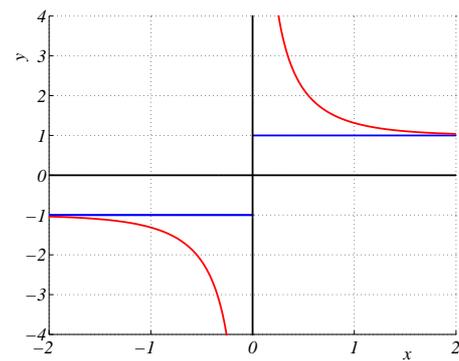
Abbildung 2.64: Kettenlinie

Physikalische Bedeutung der Konstanten a :

$$a = \frac{H}{q} = \frac{\text{Spannkraft des Seiles in } x\text{-Richtung}}{\text{Gewicht einer Längeneinheit des Seiles}}$$

Definition 2.14 Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x \in \mathbb{R}) & \quad \text{Sinus hyperbolicus } x \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (x \in \mathbb{R}) & \quad \text{Cosinus hyperbolicus } x \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} & (x \in \mathbb{R}) & \quad \text{Tangens hyperbolicus } x \\ \coth x &:= \frac{1}{\tanh x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) & \quad \text{Cotangens hyperbolicus } x \end{aligned}$$

Abbildung 2.65: $f(x) = \sinh x$ Abbildung 2.66: $f(x) = \cosh x$ Abbildung 2.67: $f(x) = \tanh x$ Abbildung 2.68: $f(x) = \coth x$

Bemerkung

An den Definitionen oder den Funktionsgraphen (Abbildungen 2.65 - 2.68) läßt sich unmittelbar ablesen:

(i) Die hyperbolischen Sinus- und Kosinusfunktionen sind Linearkombinationen der beiden Funktionen $u_1(x) := e^x$ und $u_2(x) := e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$, insofern also nichts Neues.

(ii) Definitions- und Wertebereiche:

$$\begin{aligned} D(\sinh) &= \mathbb{R} & , & & W(\sinh) &= \mathbb{R} \\ D(\cosh) &= \mathbb{R} & , & & W(\cosh) &= [1, \infty) \\ D(\tanh) &= \mathbb{R} & , & & W(\tanh) &= (-1, 1) \\ D(\coth) &= \mathbb{R} \setminus \{0\} & , & & W(\coth) &= (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

(iii) Symmetrie:

\sinh, \tanh, \coth sind ungerade Funktionen, \cosh ist eine gerade Funktion:

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x & : & & \text{ungerade Funktion} \\ \cosh(-x) &= \cosh x & : & & \text{gerade Funktion} \\ \tanh(-x) &= -\tanh x & : & & \text{ungerade Funktion} \\ \coth(-x) &= -\coth x & : & & \text{ungerade Funktion} \end{aligned}$$

(iv) Monotonie:

\sinh ist eine streng monoton wachsende Funktion;
 \cosh ist auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend,
auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend;
 \tanh ist streng monoton wachsend;
 \coth ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend.

Zum Namen „Hyperbelfunktionen:“

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h(t) := \langle x(t), y(t) \rangle := \langle a \cdot \cosh t, b \cdot \sinh t \rangle \quad (t \in \mathbb{R});$$

man spricht von h als von einer *Parameterdarstellung* für eine Kurve im \mathbb{R}^2 .
Welcher Kurve? Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(t)}{a}\right)^2 - \left(\frac{y(t)}{b}\right)^2 &= \cosh^2 t - \sinh^2 t \\ &= \frac{1}{4} [e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}] \\ &\quad - \frac{1}{4} [e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}] \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Es ergibt sich somit eine Parameterdarstellung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und zwar (Abb. 2.69):

$$a > 0 \longrightarrow x(t) = a \cdot \cosh t > 0 \longrightarrow \text{rechter Ast}$$

$$a < 0 \longrightarrow x(t) = a \cdot \cosh t < 0 \longrightarrow \text{linker Ast}$$

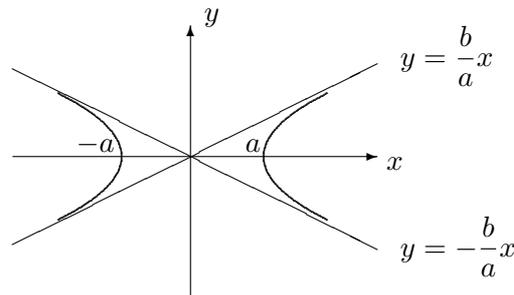


Abbildung 2.69: Hyperbel

Aufgabe

Welche Hyperbel ergibt sich für die Parameterdarstellung

$$k(t) := \langle x(t), y(t) \rangle := \langle a \cdot \sinh t, b \cdot \cosh t \rangle \quad (t \in \mathbb{R})?$$

Die trigonometrischen Funktionen verhalten sich zum Kreis wie die Hyperbelfunktionen zur Hyperbel; s. Abbildungen 2.70 und 2.71.

2.3.3.2 Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

Die folgenden Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen gelten jeweils für alle Werte von x , für welche die angegebenen Größen auch definiert sind.

(i) Hyperbolischer Lehrsatz des Pythagoras:

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \quad (2.20)$$

Daraus folgen u.a.

$$|\sinh x| = \sqrt{\cosh^2 x - 1} \quad , \quad |\cosh x| = \cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \pm \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$$

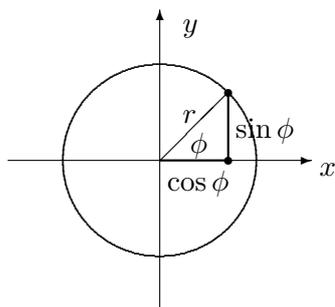


Abbildung 2.70: Kreisfunktionen

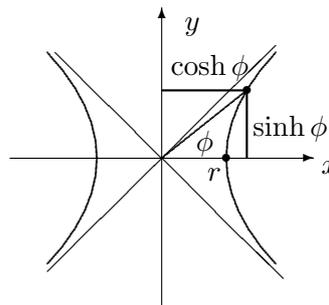


Abbildung 2.71: Hyperbelfunktionen

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi \stackrel{(2.19)}{=} 1$$

Durch Quadrieren und Auflösen erhält man daraus

$$\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 + \tanh^2 x}}, \quad \cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2 x}}$$

(ii) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y}$$

Beweis

Der Beweis dieser Beziehungen verläuft einfach durch Rückgriff auf die Definition der Hyperbelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktionen.

(iii) Funktionen des doppelten Argumentes:

Setzt man $x = y$, so folgen aus den Additionstheoremen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch wiederholtes Einsetzen Beziehungen, welche in der Integralrechnung nützlich sind:

$$\begin{aligned}\sinh^2 x &= \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1) \\ \cosh^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cosh 2x) \\ \sinh^4 x &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cosh 2x + \cosh 4x) \\ \cosh^4 x &= \frac{1}{8} (3 + 4 \cosh 2x + \cosh 4x)\end{aligned}$$

(iv) Produkte hyperbolischer Funktionen:

$$\begin{aligned}\sinh x \cdot \sinh y &= \frac{1}{2} [\cosh(x+y) - \cosh(x-y)] \\ \cosh x \cdot \cosh y &= \frac{1}{2} [\cosh(x+y) + \cosh(x-y)] \\ \sinh x \cdot \cosh y &= \frac{1}{2} [\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]\end{aligned} \tag{2.22}$$

Diese Formeln erlangen ebenfalls in der Integralrechnung Bedeutung. Beweisen lassen sie sich, indem die jeweils rechten Seiten mit Hilfe der Additionstheoreme umgeformt werden.

Bemerkung

Ein tieferes Verständnis für die Hyperbelfunktionen und die Tatsache, daß sie den trigonometrischen Funktionen verblüffend ähnliche Eigenschaften aufweisen, erlangt man durch die Betrachtung komplexwertiger Funktionen eines komplexen Argumentes. Formal werden diese durch in ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihen definiert; hier muß im Moment die Bemerkung ausreichen, daß die Euler'sche Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad (\phi \in [0, 2\pi))$$

auch für beliebige komplexe Zahlen $z = x + iy$ gültig ist:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Zusammen mit der Gleichung

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (z \in \mathbb{C})$$

erhält man nach Auflösen folgende Darstellungen der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \sinh iz\end{aligned}\quad (z \in \mathbb{C}).$$

Wählt man in der letzten Formel jeweils $z := -iw$ ($w \in \mathbb{C}$), so ergeben sich insgesamt die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \\ \sinh iz &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z \\ \cos iw &= \frac{e^{-w} + e^w}{2} = \cosh w \\ \sin iw &= \frac{e^{-w} - e^w}{2i} = i \sinh w\end{aligned}\quad \begin{array}{l} (z \in \mathbb{C}), \\ \\ (w \in \mathbb{C}). \end{array}\quad (2.23)$$

Diese Beziehungen liefern eine Gleichheit zwischen den trigonometrischen Funktionen \sin bzw. \cos für das Argument z einerseits und den Hyperbelfunktionen \sinh bzw. \cosh für das Argument $w = iz$ andererseits und umgekehrt, bis auf den Faktor i vor den Sinusfunktionen. Jede Beziehung zwischen den trigonometrischen Funktionen mit dem Argument z ist gleich derselben Beziehung zwischen den entsprechenden hyperbolischen Funktionen mit dem Argument $w = iz$ ($z \in \mathbb{C}$).

Die dazwischengeschaltete Abbildung $z \mapsto w = iz$ ist ein Isomorphismus von \mathbb{C} auf sich. Daher läßt sich daraus die folgende Regel ableiten:

Jede Formel, welche Hyperbelfunktionen mit dem Argument x miteinander verknüpft, läßt sich aus der entsprechenden Formel, welche die trigonometrischen Funktionen mit dem Argument α verknüpft dadurch gewinnen, daß man

$\sin \alpha$ durch $i \cdot \sinh x$ und $\cos \alpha$ durch $\cosh x$ ersetzt.

Beispiele: 2.45

(i) Elementare trigonometrische Funktionen ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\sin ix &= i \sinh x \\ \cos ix &= \cosh x \\ \tan ix &= i \tanh x \\ \cot ix &= -i \coth x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh ix &= i \sin x \\ \cosh ix &= \cos x \\ \tanh ix &= i \tan x \\ \coth ix &= -i \cot x\end{aligned}$$

(ii) Trigonometrische Gleichungen ($\alpha, x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \rightarrow \cosh^2 x + (i \sinh x)^2 &= 1 \\ \rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \rightarrow i \sinh 2x &= 2i \sinh x \cosh x \\ \rightarrow \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x\end{aligned}$$

So ergeben sich etwa die folgenden Formeln ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \sinh(x + iy) &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \\ \cos(x + iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \cosh(x + iy) &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y\end{aligned}$$

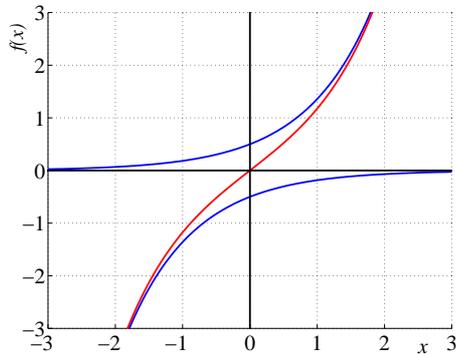
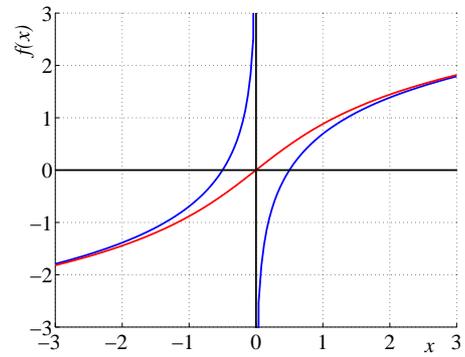
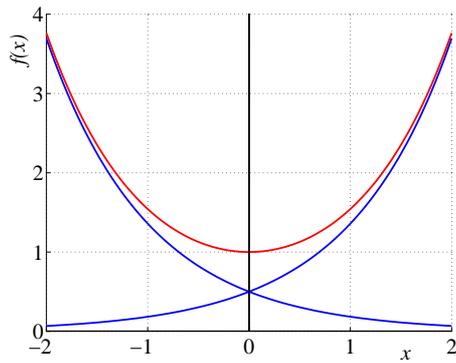
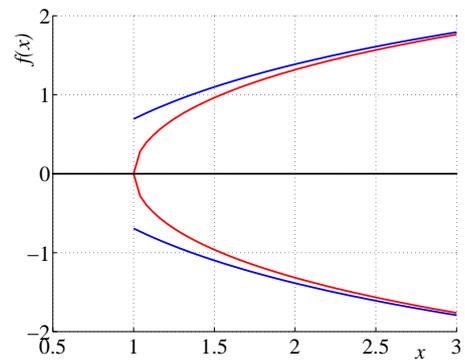
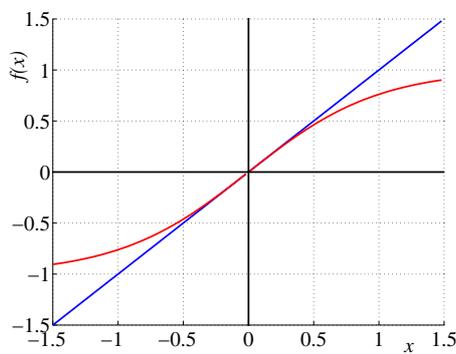
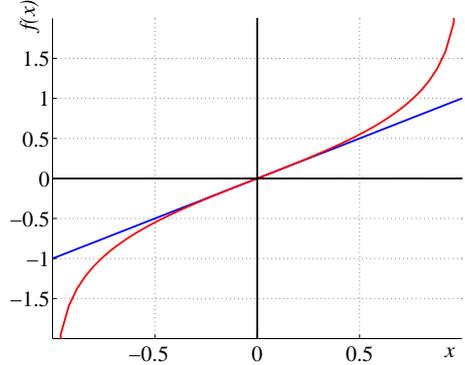
(iii) Satz von Moivre ($\alpha, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$):

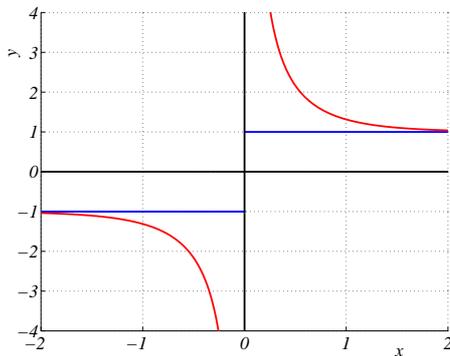
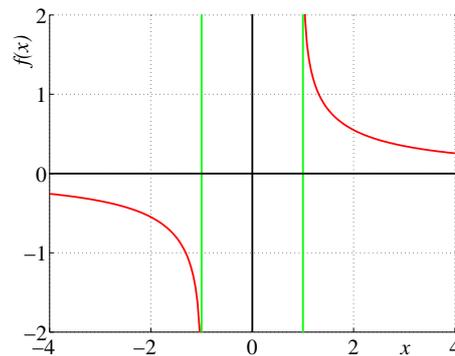
$$\begin{aligned}[\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha]^n &= \cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha) \\ [\cos \alpha - i \cdot \sin \alpha]^n &= \cos(n\alpha) - i \cdot \sin(n\alpha) \\ \rightarrow [\cosh x - i \cdot (i \sinh x)]^n &= \cosh(nx) - i \cdot (i \sinh(nx)) \\ \rightarrow [\cosh x + \sinh x]^n &= \cosh(nx) + \sinh(nx)\end{aligned}$$

2.3.3.3 Areafunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen *Areafunktionen*:

$$\begin{aligned}f(x) = \sinh x \quad , \quad \mathcal{I} = \mathbb{R} \quad , \quad & f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x \\ & (\text{„area sinus hyperbolicus } x\text{“}) \\ \\ f(x) = \cosh x \quad , \quad \mathcal{I} = [0, \infty) \quad , \quad & f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh} x \\ & (\text{„area cosinus hyperbolicus } x\text{“}) \\ \\ f(x) = \tanh x \quad , \quad \mathcal{I} = \mathbb{R} \quad , \quad & f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x \\ & (\text{„area tangens hyperbolicus } x\text{“}) \\ \\ f(x) = \coth x \quad , \quad \mathcal{I} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad & f^{-1}(x) = \operatorname{arcoth} x \\ & (\text{„area cotangens hyperbolicus } x\text{“})\end{aligned}$$

Abbildung 2.72: $f(x) = \sinh x$ Abbildung 2.73: $f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x$ Abbildung 2.74: $f(x) = \cosh x$ Abbildung 2.75: $f^{-1}(x) = \pm \operatorname{arcosh} x$ Abbildung 2.76: $f(x) = \tanh x$ Abbildung 2.77: $f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x$

Abbildung 2.78: $f(x) = \coth x$ Abbildung 2.79: $f^{-1}(x) = \operatorname{arcoth} x$

Natürlich sind die Umkehrfunktionen nur dort definiert, wo die ursprünglichen Funktionen streng monoton verlaufen:

$$D(\operatorname{arsinh}) = \mathbb{R}$$

$$W(\operatorname{arsinh}) = \mathbb{R}$$

$$D(\operatorname{arcosh}) = [1, \infty)$$

$$W(\operatorname{arcosh}) = (-\infty, 0] \text{ oder } [0, \infty)$$

$$D(\operatorname{artanh}) = (-1, 1)$$

$$W(\operatorname{artanh}) = \mathbb{R}$$

$$D(\operatorname{arcoth}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$W(\operatorname{arcoth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zum Namen „Areafunktionen“:

Man betrachte die sog. *Einheitshyperbel* ($a = b = 1$) mit der Gleichung

$$x(t) = \cosh t \quad , \quad y(t) = \sinh t$$

$$\iff \frac{x(t)^2}{1} - \frac{y(t)^2}{1} = 1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wie mit Hilfe der Integralrechnung im zweiten Semester gezeigt werden wird, beträgt die Fläche des schraffierten Sektors der Einheitshyperbel (Abb. 2.81)

$$A = 2 \cdot \frac{t_0}{2} = t_0 = \operatorname{arcosh} x_0 = \operatorname{arsinh} y_0.$$

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen beschreiben die Fläche eines Hyperbelsektors, daher der Name „Areafunktionen“.

Auch hierzu gibt es ein Analogon für trigonometrische Funktionen am Kreis. Die Fläche des schraffierten Sektors des Einheitskreises (Abb. 2.80) beträgt

$$A = 2 \cdot \frac{t_0}{2\pi \cdot 1} \cdot \pi \cdot 1^2 = t_0 = \operatorname{arccos} x_0 = \operatorname{arcsin} y_0.$$

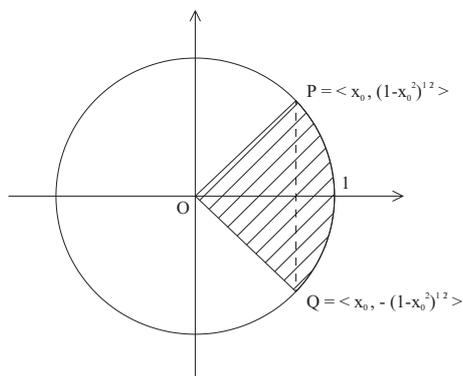


Abbildung 2.80: Sektor eines Einheitskreises

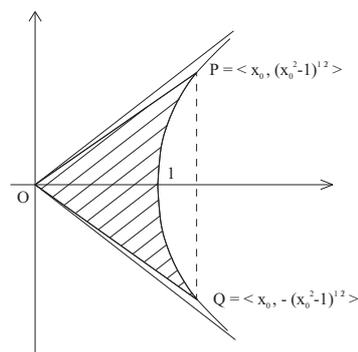


Abbildung 2.81: Sektor einer Einheitshyperbel

Darstellung der Areefunktionen durch Logarithmen

Die Logarithmusfunktionen sind Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen. Die Hyperbelfunktionen sind Linearkombinationen (\sinh und \cosh) bzw. Quotienten von Linearkombinationen (\tanh und \coth) von Exponentialfunktionen. Daher ist es nicht verwunderlich, daß sich die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen – die Areefunktionen – durch Logarithmusfunktionen darstellen lassen.

Satz 2.15

$$f(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (|x| \geq 1)$$

$$f(x) = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$f(x) = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1)$$

Beweis

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arsinh} x &\longrightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &\longrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \\ &\longrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Hier ist nur die positive Lösung zu gebrauchen, da sonst die Potenz e^y negativ wäre. Ein Logarithmieren der letzten Beziehung liefert dann die Behauptung für die Funktion arsinh . Der Nachweis der anderen drei Behauptungen erfolgt analog.

Beispiel 2.46

Beim freien Fall mit Berücksichtigung des quadratisch anwachsenden Luftwiderstandes ergibt sich für die Geschwindigkeit die Gleichung

$$v(t) = v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} t\right) \quad (t \geq 0),$$

$g := 9,81 \frac{m}{s^2}$	Fallbeschleunigung
$v_E :$	stationäre Endgeschwindigkeit
$t :$	Fallzeit

Nach längerer Fallzeit sind Luftwiderstand und Schwerkraft im Gleichgewicht, weil der Widerstand (mit dem Quadrat der Geschwindigkeit) zunimmt. Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tanh\left(\frac{g}{v_E} t\right) = 1, \quad \text{also} \quad v(t) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} v_E.$$

Aufgabe

Nach welcher Zeit sind 99 % der Endgeschwindigkeit erreicht, wenn gilt:

$$v_E = 230 \frac{m}{s} ?$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{v(t_0)}{v_E} &= 0,99 = \tanh\left(\frac{g}{v_E} t_0\right) \\ \longrightarrow t_0 &= \frac{v_E}{g} \cdot \operatorname{artanh}(0,99) \\ &= 23,4 s \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,99}{1-0,99} \\ &= 11,7 s \cdot \ln 199 = 11,7 s \cdot 5,29 \\ &= 62 s \end{aligned}$$

2.3.4 Harmonische Schwingungen

Unter einer *Schwingung* versteht man eine periodische Bewegung. Unter allen Schwingungen sollen nun die *harmonischen Schwingungen* ausgezeichnet werden.

Als Beispiel wird die Bewegung eines materiellen Punktes entlang einer Geraden betrachtet. Unter den möglichen periodischen Bewegungen ist offenbar jene am einfachsten, bei welcher sich der Punkt auf der Geraden so bewegt, daß sein

von einem Punkt O der Geraden – der Ruhelage – gerechnete Abstand y eine Sinus- oder Kosinusfunktion der Zeit t ist:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

oder

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Solch eine Bewegung heißt eine *harmonische Schwingung*. Alternativ kann man sie sich vorstellen als Bahn, die ein gleichförmig auf einer Kreisbahn umlaufender Punkt beschreibt, welche in der Ebene des Kreises auf eine Gerade projiziert wird, s. Abb. (2.82).

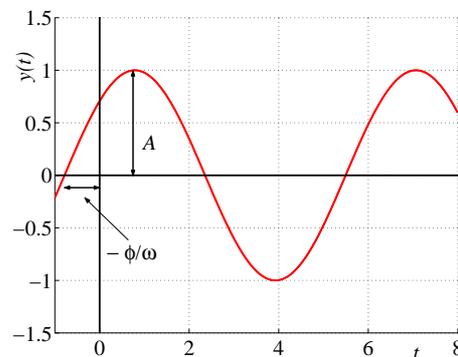


Abbildung 2.82: Harmonische Schwingung

Solch eine Darstellung kommt beispielsweise zustande, wenn man unter dem sich auf der senkrechten Achse bewegenden materiellen Punkt das Papier geradlinig gleichförmig nach links oder nach rechts wegzieht.

Anwendungen: Seismograph, EKG, EEG

Definition 2.15

Eine mechanische Schwingung heißt *harmonisch*, wenn sie einer der folgenden Bedingungen genügt; man kann zeigen, daß alle Bedingungen zueinander äquivalent sind.

- (i) Die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung (*Hooke'sches Gesetz*):

$$F = m \ddot{x} = -k x \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (ii) Die Schwingung ist eine Sinus- oder eine Kosinusschwingung:

$$x(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (iii) Die Rückstellkraft besitzt ein quadratisches Potential:

$$V(x) = a \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Nachweis der Äquivalenz

$$(i) \iff (ii) : \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$(i) \iff (iii) : \quad m \ddot{x} + k x = 0$$

$$\iff \quad m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0$$

$$\iff \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \text{const.}$$

$$\iff \quad T + V = E$$

Im folgenden wird eine sinusförmige Schwingung

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0) \quad (2.24)$$

betrachtet.

Bezeichnungen:

(i) Auftretende Größen: (cf. 2.24)

$y(t)$:	<i>Auslenkung</i> oder <i>Elongation</i>
A	:	<i>Schwingungsamplitude</i> oder <i>Scheitelwert</i>
$\omega t + \phi$:	<i>Phase</i> oder <i>Phasenwinkel</i>
ω	:	<i>Kreisfrequenz</i> ($\omega > 0$)
ϕ	:	<i>Phasenkonstante, Anfangsphase</i> oder <i>Nullphasenwinkel</i>

(ii) Die Perioden der sin- bzw. cos-Funktionen sind 2π , daher sind die Auslenkungen $y(t)$ für die Werte

$$t := t_1 \quad (t_1 \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

$$t := t_1 + \frac{2\pi}{\omega} =: t_1 + T =: t_2$$

wieder dieselben:

$$\sin(\omega t_2 + \phi) = \sin\left(\omega \left[t_1 + \frac{2\pi}{\omega}\right] + \phi\right) = \sin(\omega t_1 + 2\pi + \phi) = \sin(\omega t_1 + \phi).$$

T heißt *Schwingungsdauer*, *Periode* oder auch *Schwingungszeit*.

Zwischen der Perioden- oder Schwingungsdauer T , der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω bestehen die Beziehungen

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.$$

Das erklärt den Namen *Kreisfrequenz*: $\omega = 2\pi f$ ist die Frequenz f , gemessen in Einheiten von 2π .

- (iii) Der Nullphasenwinkel ϕ hängt vom Beginn der Zeitmessung ab. Wenn dieser so verschoben wird, daß an die Stelle von t die Größe

$$t + \frac{\pi}{2\omega} = t + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = t + \frac{1}{4}T$$

tritt, so ändert sich ϕ um $\frac{\pi}{2}$. Dadurch geht die sin-Funktion in die cos-Funktion über:

$$\sin\left(\omega\left[t + \frac{\pi}{2\omega}\right] + \phi\right) = \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Beide Funktionen sind also zur Beschreibung der Schwingung gleichermaßen verwendbar.

Beispiele ($t \in \mathbb{R}$)

$$y_1(t) := \sin t$$

$$y_2(t) := \cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_3(t) := -\sin t = \sin(t + \pi) = \sin(t - \pi)$$

$$y_4(t) := -\cos t = \sin\left(t + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.3.4.1 Superposition von Schwingungen

Ein schwingendes System – etwa ein materieller Punkt entlang einer Geraden – kann gleichzeitig zwei oder mehrere harmonische Schwingungen ausführen. Wenn die verschiedenen Schwingungen dabei keinen Einfluß aufeinander ausüben, so spricht man von einer ungestörten Überlagerung oder einer *Superposition* der Schwingungen.

Es genügt dabei, die Superposition von Schwingungen

- gleicher Richtung und
- zueinander senkrechter Richtungen

zu betrachten, da sich andere Fälle auf diese zurückführen lassen (Linearkombination). Jeder dieser beiden Fälle wird dabei noch danach unterteilt, ob die Frequenzen der beiden zu überlagernden Schwingungen gleich oder verschieden sind; es sind also insgesamt vier Fälle zu untersuchen.

Gleiche Richtung und gleiche Frequenz

I Graphische Darstellung (Abbildung 2.83)

II Analytische Darstellung

$$\begin{aligned} y(t) &:= y_1(t) + y_2(t) \\ &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= A_1 (\sin \omega t \cdot \cos \phi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \phi_1) \\ &\quad + A_2 (\sin \omega t \cdot \cos \phi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \phi_2) \\ &= (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \cdot \sin \omega t + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

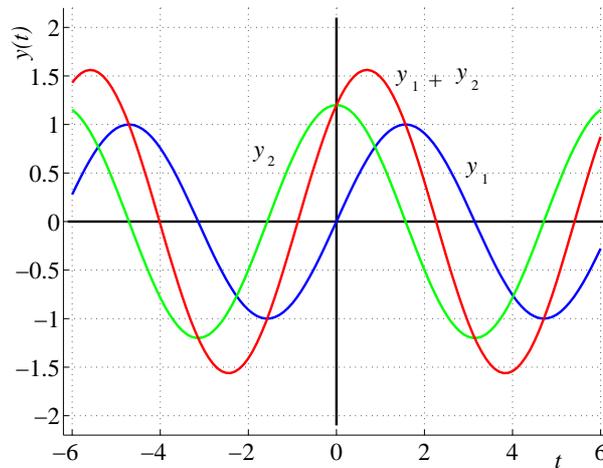


Abbildung 2.83: Superposition zweier harmonischer Schwingungen

Bestimmt werden nun, bei gleichzeitigem Existenzbeweis, zwei Konstanten A und ϕ , so daß gilt:

$$U := A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 = \sum_{k=1}^2 A_k \cos \phi_k = A \cdot \cos \phi$$

$$V := A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 = \sum_{k=1}^2 A_k \sin \phi_k = A \cdot \sin \phi$$

Quadrieren beider Gleichungen und Addieren liefert

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2),$$

Division beider Gleichungen liefert, falls $A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \neq 0$ ist, $\tan \phi$, insgesamt also

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad (2.25)$$

Bemerkung

- (i) Die hergeleitete Superpositionsformel (2.25) ist unabhängig davon, ob man von den Funktionen

$$y_k(t) = A_k \cdot \sin(\omega t + \phi_k) \quad (k \in \{1, 2\}, t \in \mathbb{R})$$

oder von den Funktionen

$$y_k(t) = A_k \cdot \cos(\omega t + \phi_k) \quad (k \in \{1, 2\}, t \in \mathbb{R})$$

ausgeht. Die Superposition

$$y(t) := y_1(t) + y_2(t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t)$$

ist dann natürlich auch von der entsprechenden Gestalt, also

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad \text{oder} \quad y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi).$$

- (ii) Ist $A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 = 0$, so muß man anders vorgehen. Falls $A \neq 0$ ist, so muß man ϕ aus der folgenden Gleichung bestimmen:

$$\sin \phi = \frac{1}{A} (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2);$$

ist $A = 0$, so ist ϕ unbestimmt.

- (iii) Werden n ($n \in \mathbb{N}$ geeignet) harmonische Schwingungen superponiert, so setzt man an:

$$U := \sum_{k=1}^n A_k \cos \phi_k = A \cdot \cos \phi$$

$$V := \sum_{k=1}^n A_k \sin \phi_k = A \cdot \sin \phi$$

und berechnet A und ϕ aus den Gleichungen (falls $U \neq 0$, s. (ii))

$$A = \sqrt{U^2 + V^2} \quad \text{und} \quad \tan \phi = \frac{V}{U}.$$

- (iv) Mit den berechneten Größen A und ϕ läßt sich die Superposition von n harmonischen Schwingungen schreiben als

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi),$$

und man erhält die Aussage:

Die Superposition von n harmonischen Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz ist wieder eine harmonische Schwingung derselben Richtung und derselben Frequenz.

Im folgenden wird die Superpositionsformel (2.25) für den Fall $n = 2$ diskutiert. Die Amplitude A der resultierenden Schwingung hängt von den Amplituden A_1 und A_2 der Einzelschwingungen sowie von der Phasendifferenz $\delta := \phi_1 - \phi_2$ ab:

- (a) $\delta \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\} \implies$

A nimmt den größten Wert an, nämlich $A = |A_1 + A_2| = A_1 + A_2$.

(b) $\delta \in \{\pm\pi, \pm 3\pi, \dots\} \implies$

A nimmt den kleinsten Wert an, nämlich $A = |A_1 - A_2|$.

Wenn im Fall (b) die Amplituden der beiden Einzelschwingungen gleich sind: $A_1 = A_2$, so ist die Amplitude A der resultierenden Schwingung Null, die beiden Schwingungen löschen sich gegenseitig aus. Diese Beziehungen spielen bei *Interferenzerscheinungen* eine wichtige Rolle, sowohl im elektromagnetischen Bereich (Licht, Radiowellen) als auch in der Akustik (Schallwellen).

Beispiel 2.47

In einem dreiphasigen symmetrischen Drehstromsystem fließen bei symmetrischer Belastung in jedem Leiter gleichgroße, jeweils um $\frac{2}{3}\pi$ gegeneinander phasenverschobene Ströme. Für ihre Summe

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin \omega t + \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \quad (t \geq 0)$$

ergibt sich nach den obigen Beziehungen:

$$\begin{aligned} U &= \hat{i}(\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3}) = \hat{i}(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ V &= \hat{i}(\sin 0 + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3}) = \hat{i}(0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 0 \\ \longrightarrow \quad A &= \sqrt{U^2 + V^2} = 0. \end{aligned}$$

Beispiel 2.48

Ich möchte noch einmal zu der trigonometrischen Gleichung aus Beispiel 2.44 auf p.136 zurückkehren:

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Diese Gleichung läßt sich als Superposition zweier gleichfrequenter Schwingungen der Frequenz $\omega = 1$ auffassen (hier: $t = x$):

$$1 = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \sin(x + \phi),$$

wobei

$$\begin{aligned}
 A &:= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \\
 \tan \phi &:= \frac{1 \cdot \sin 0 + 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{1 \cdot \cos 0 + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \\
 \longrightarrow \quad \phi &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \left[\text{oder } \phi = \frac{5\pi}{4} \right], \\
 \longrightarrow \quad 1 \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
 \longrightarrow \quad \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &\in \left\{ \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right\}, \\
 \longrightarrow \quad \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &\in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}, \\
 \longrightarrow \quad x &\in \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Zu den Argumenten müssen noch ganzzahlige Vielfache von 2π addiert werden, um alle reelle Lösungen zu erhalten.

III Komplexe Darstellung, Zeigerdiagramm

Betrachtet wird wieder die Überlagerung von $n = 2$ harmonischen Schwingungen. Die *beiden reellen Gleichungen*

$$\begin{aligned}
 A \cos \phi &= A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \\
 A \sin \phi &= A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2
 \end{aligned}$$

lassen sich zu *einer komplexen Gleichung* zusammenfassen, wenn die zweite Gleichung mit i multipliziert und zur ersten addiert wird:

$$\begin{aligned}
 A(\cos \phi + i \sin \phi) &= A_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) + A_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\
 &\iff \\
 A e^{i\phi} &= A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}
 \end{aligned}$$

Definiert man jetzt die komplexen Amplituden

$$\underline{A} := A e^{i\phi} \quad , \quad \underline{A}_k := A_k e^{i\phi_k} \quad (k \in \{1, 2\}),$$

so ist die Superposition zweier harmonischer Schwingungen zurückgeführt auf die Addition zweier komplexer Zahlen:

$$\underline{A} := \underline{A}_1 + \underline{A}_2,$$

wobei gilt:

$$A = |\underline{A}| \quad : \quad \text{Amplitude der Superposition}$$

$$\phi = \arg(\underline{A}) \quad : \quad \text{Phasenkonstante der Superposition}$$

Die Addition zweier komplexer Zahlen läßt sich graphisch sehr einfach mit Hilfe eines Kräfteparallelogrammes darstellen, s. Abb. 2.84.

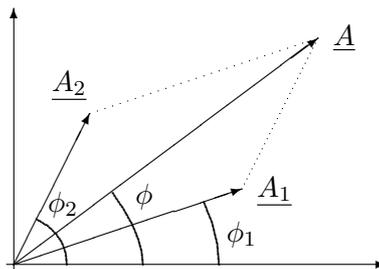


Abbildung 2.84: Addition komplexer Amplituden

Beispiel 2.49

Gegeben sei der in Abb. 2.85 beschriebene Wechselstromkreis.

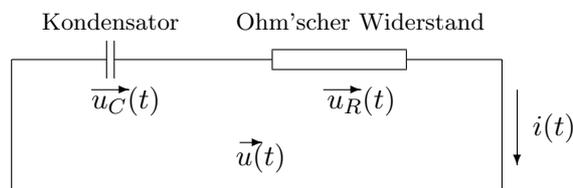


Abbildung 2.85: Wechselstromkreis aus Kondensator und Ohm'schem Widerstand

$$u_R(t) + u_C(t) = u(t) \quad (t \geq 0)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot \hat{i} \cdot \sin \omega t$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = -\frac{\hat{i}}{\omega C} \cos \omega t = \frac{\hat{i}}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Die Spannung am Kondensator läuft derjenigen am Ohm'schen Widerstand um $\frac{\pi}{2}$ nach. Gesucht ist die Gesamtspannung $u(t)$ ($t \geq 0$).

Zur Lösung dieses Problems können zwei Wege eingeschlagen werden:

(I) Addition der komplexen Amplituden, Arbeiten im komplexen Zeigerdiagramm

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= R \cdot \hat{i} \cdot e^{i0} = R \cdot \hat{i} \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i} \\ \longrightarrow \quad A &= |\underline{A}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \hat{i} \\ \tan \phi &= \frac{-\frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i}}{R \cdot \hat{i}} = -\frac{1}{\omega RC} \\ \phi &= \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) + 2\pi \end{aligned}$$

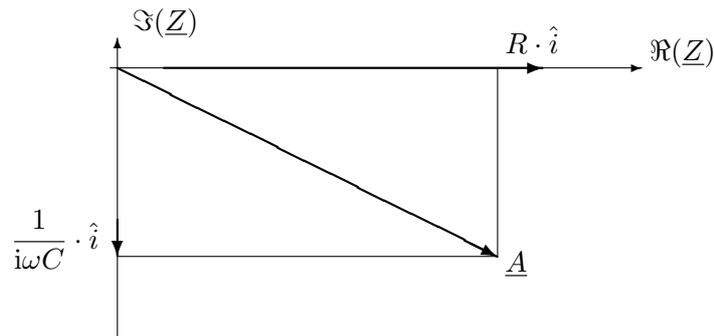


Abbildung 2.86: Komplexes Zeigerdiagramm einer Serienschaltung

(II) Addition der reellen Schwingungen mit Hilfe der Superpositionsformel (2.25)

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ \hat{u} &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 - 2R \frac{1}{\omega C} 0 \cdot \hat{i}} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \hat{i} \\ \tan \phi &= \frac{R \cdot 0 - \frac{1}{\omega C} \cdot 1}{R \cdot 1 - \frac{1}{\omega C} \cdot 0} = -\frac{1}{\omega RC} \\ \phi &= \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) + 2\pi \end{aligned}$$

Die Graphiken in Abbildung 2.87 zeigen einige Beispiele für die Superposition

zweier harmonischer Schwingungen ($t \in \mathbb{R}$):

Abb.1: $f_1(t) := \sin t + 2 \sin t$

Abb.2: $f_2(t) := \sin t + \sin(t + \frac{\pi}{2})$

Abb.3: $f_3(t) := \sin t + 2 \sin(t + \frac{\pi}{2})$

Abb.4: $f_4(t) := \sin t + 1.1 \sin(t + \pi)$

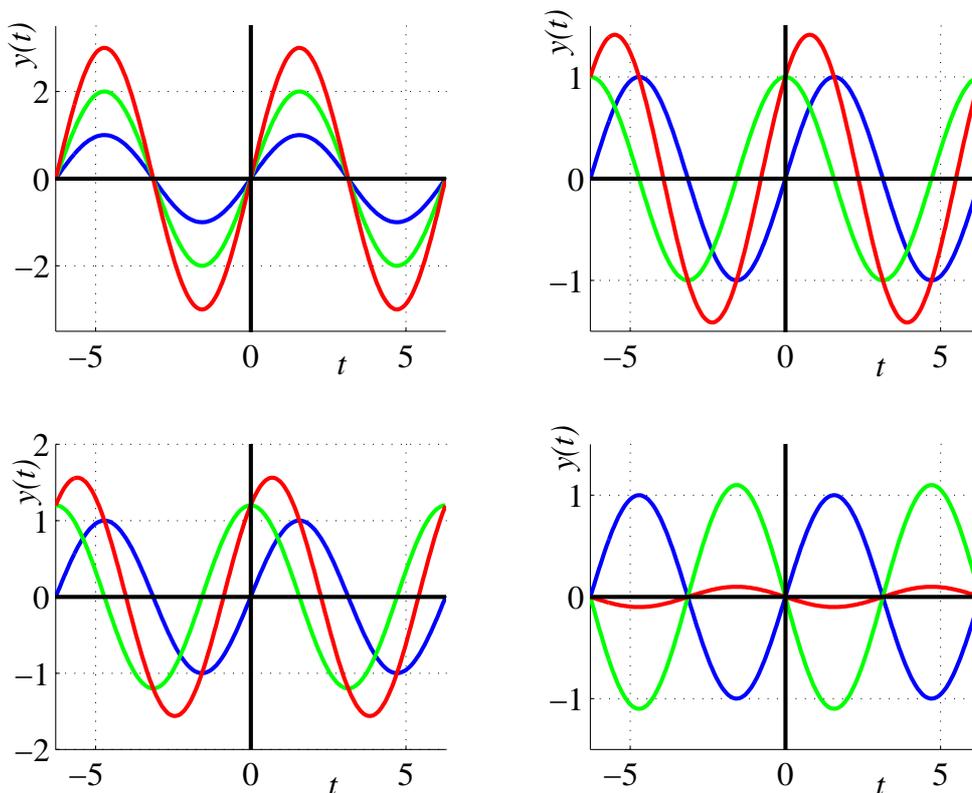


Abbildung 2.87: Superposition zweier harmonischer Schwingungen

Gleiche Richtung und verschiedene Frequenzen: Schwebung

Seien $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und man betrachte die beiden harmonischen Schwingungen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \cdot \cos \omega_1 t \\ y_2(t) &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Zur Darstellung der beiden Schwingungen werden hier die gebräuchlicheren cos-Funktionen verwendet. Dabei ist die erste Phasenkonstante zu Null gesetzt worden, so daß der Nullphasenwinkel ϕ der zweiten Schwingung zugleich die Phasendifferenz bedeutet.

Die Schwingungsfrequenzen beider Einzelschwingungen sind nicht gleich, die Superposition kann *nicht* in die Form

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (t \in \mathbb{R})$$

gebracht werden, sie bedeutet also einen komplizierteren Vorgang. Es gilt jedoch:

Satz 2.16

- (i) Ist das Frequenzverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, so ist die Resultante ein periodischer Vorgang, d.h. sie ist eine Schwingung der Kreisfrequenz ω mit $\omega := \text{g.g.T.}(\omega_1, \omega_2)$ (g.g.T. : größter gemeinsamer Teiler). Denn es gibt eine Zahl $\omega > 0$ und natürliche Zahlen m, n , so daß gilt:

$$\omega_1 = m \cdot \omega \quad , \quad \omega_2 = n \cdot \omega \quad (m, n \text{ teilerfremd}),$$

und der Wert der Funktion

$$y(t) := A_1 \cdot \cos(m\omega t) + A_2 \cdot \cos(n\omega t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

wiederholt sich nach der Periode $T := \frac{2\pi}{\omega}$.

- (ii) Ist das Frequenzverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, so ist der resultierende Vorgang nicht mehr periodisch; ω_1 und ω_2 heißen dann *inkommensurabel*.

Zur näheren Untersuchung der Resultante werden die folgenden Additionstheoreme für die halben Winkel verwendet:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Addition bzw. Subtraktion liefert:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos y &= \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Nun wird die Resultierende

$$y(t) := A_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

für $x := \omega_1 t$, $y := \omega_2 t + \phi$ ausgewertet, und man erhält mit den obigen Formeln

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (A_2 + A_1) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\phi}{2}\right) \\
 &+ (A_2 - A_1) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\phi}{2}\right) \quad (2.26) \\
 &\quad (t \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Die Formel (2.26) wird im folgenden für einige Spezialfälle untersucht:

Spezialfall 1:

$$\begin{aligned}
 A_1 = A_2 =: A &\quad \implies \\
 y(t) &= 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\phi}{2}\right) \quad (t \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Spezialfall 2:

$A_1 = A_2 =: A$ und die beiden Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 sind annähernd gleich, d.h.

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2.$$

In diesem Fall ändert sich der zweite cos-Faktor auf der rechten Seite von Formel (2.27) relativ zum ersten nur langsam. Man kann daher, den zweiten Faktor in die Amplitude $2A$ einschließend, den Vorgang als eine Schwingung ansehen, deren Kreisfrequenz $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ ist und deren Amplitude periodisch zwischen den absoluten Beträgen 0 und $2A$ schwankt, s. Abbildung 2.88:

Definition 2.16

- (i) Ein solcher Vorgang heißt eine *reine Schwebung*.
- (ii) Die *Schwebungsperiode* T_s beträgt

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_2 - \frac{\phi}{2}\right) - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_1 - \frac{\phi}{2}\right) &= 2\pi \\
 \implies T_s = t_2 - t_1 &= \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.
 \end{aligned}$$

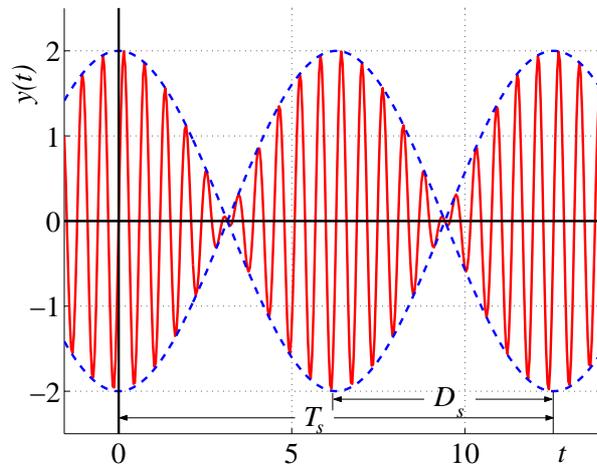


Abbildung 2.88: Reine Schwebung

- (iii) Unter der *Schwebungsdauer* D_s versteht man die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplitudenmaxima. Diese Zeit ist die Hälfte der vollen Periode des zweiten cos-Faktors von (2.27), i.e.

$$D_s = \frac{1}{2} T_s = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

- (iv) Die *Schwebungskreisfrequenz* ω_s ist gegeben durch

$$\omega_s = \frac{2\pi}{D_s} = |\omega_1 - \omega_2|,$$

die *Schwebungsfrequenz* f_s selbst ist die Differenz der Frequenzen der Einzelschwingungen:

$$f_s = |f_1 - f_2| \quad (\omega = 2\pi f).$$

Sind die Amplituden der zwei Einzelschwingungen nicht gleich, dann ist die resultierende (nicht reine) Schwebung weniger ausgeprägt: ihre Amplitude sinkt nicht auf Null ab, s. Abb. 2.89.

Anwendungen

- (i) Akustik:

Werden zwei Stimmgabeln mit den (fast gleichen) Schwingungsfrequenzen $f_1 = 440$ Hz und $f_2 = 442$ Hz gleichzeitig angeschlagen, so hört man in jeder Sekunde $442 - 440 = 2$ Schwebungen, d.h. zweimal pro Sekunde das An- und Abschwollen eines Tones.

- (ii) Rundfunk- und Fernsehübertragung:

Informationsübertragung findet als niederfrequente Modulation eines hochfrequenten Trägersignales statt, also ein allgemeinerer Vorgang

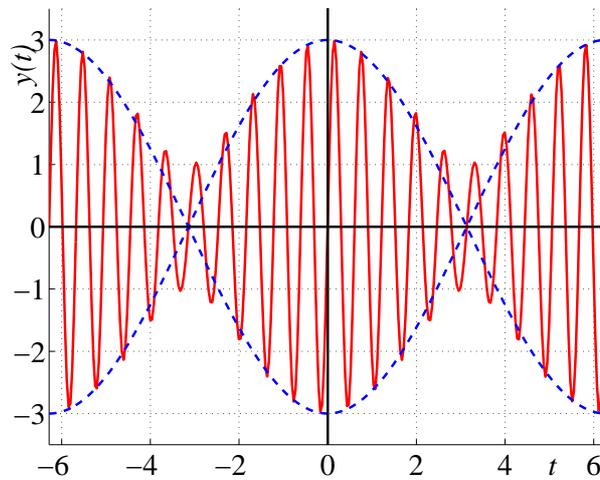


Abbildung 2.89: Nicht reine Schwebung

als einfache Schwebungen. Am Anfang der Geschichte der Rundfunktechnik stand die *Amplitudenmodulation* (AM): einer hochfrequenten *Trägerschwingung* wird eine niederfrequente *Signalschwingung* überlagert, s. Abb. 2.90.

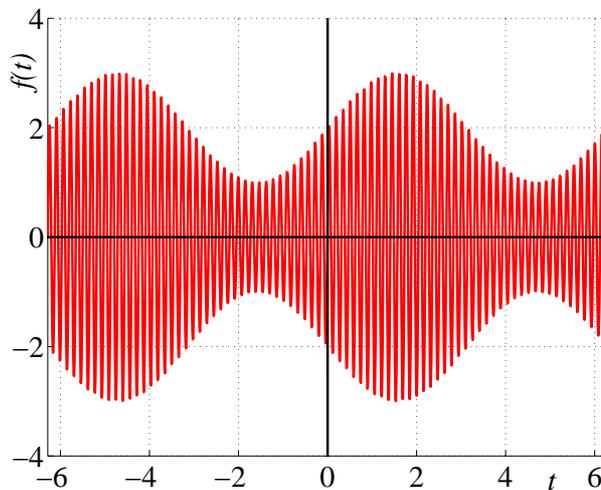


Abbildung 2.90: Hochfrequentes Signal, niederfrequent amplitudenmoduliert

Dabei gilt mit den Größen

- A_{HF} : Amplitude der (unmodulierten) hochfrequenten Schwingung,
- A_{NF} : Amplitude der (modulierten) niederfrequenten Schwingung,
- ω_{HF} : Hochfrequenz,
- ω_{NF} : Niederfrequenz :

$$\begin{aligned}
f(t) &= [1 + m \cos(\omega_{\text{NF}}t)] \cdot A_{\text{HF}} \cos(\omega_{\text{HF}}t) \\
&= A_{\text{HF}} [\cos(\omega_{\text{HF}}t) + m \cos(\omega_{\text{NF}}t) \cdot \cos(\omega_{\text{HF}}t)] \\
&= A_{\text{HF}} \left(\cos(\omega_{\text{HF}}t) + \right. & (2.27) \\
&\quad \left. \frac{m}{2} [\cos(\omega_{\text{HF}} - \omega_{\text{NF}})t + \cos(\omega_{\text{HF}} + \omega_{\text{NF}})t] \right).
\end{aligned}$$

- Die Konstante m heißt *Modulationsgrad* und wird als Quotient von niederfrequenter - zu hochfrequenter Amplitude definiert:

$$m := \frac{A_{\text{NF}}}{A_{\text{HF}}}.$$

- Die Größe $[1 + m \cos(\omega_{\text{NF}}t)] \cdot A_{\text{HF}}$ kann nun sinnvoll interpretiert werden als „zeitabhängige Amplitude“, welche sich im Rhythmus des NF-Signals ändert. Hier wird das Quellensignal – die niederfrequente Schwingung – mit einem konstanten Offset – hier: 1 – überlagert, damit es ganz im positiven Bereich verläuft. Danach wird das Signal mit einem (ko-)sinusförmigen Träger multipliziert.

Ist diese so erhaltene zeitabhängige niederfrequente Amplitude stets positiv – das ist dann der Fall, wenn der Klammerausdruck $[1 + m \cos(\omega_{\text{NF}}t)]$ stets positiv ist –, so verläuft deren *Einhüllende* stets im positiven bzw. invertiert im negativen Bereich. In Abb. 2.90 beispielsweise gilt:

$$\omega_{\text{HF}} := 40 \text{ Hz}$$

$$\omega_{\text{NF}} := 1 \text{ Hz}$$

$$A_{\text{HF}} := 2$$

$$A_{\text{NF}} := 1 \quad (\rightarrow [1 + m \cos(\omega_{\text{NF}}t)] \geq 1 - \frac{1}{40} > 0 \quad (t \in \mathbb{R}))$$

- Im Empfänger muß das empfangene (hochfrequente) Signal *demoduliert* werden. Das geschieht durch eine Diode und einen Tiefpaß: durch die Diode wird das Signal zuerst gleichgerichtet, der anschließende Tiefpaß der Schaltung ist so „träge“, daß er die schnellen Änderungen der Trägerschwingung gar nicht nachvollziehen kann. Am Ausgang erscheint bei richtiger Dimensionierung der entsprechenden *RC*-Schaltung so etwas wie ein *gleitender Mittelwert* des gleichgerichteten Signals. Das ist aber nichts Anderes als das zu übertragende Quellensignal.
- Aus der letzten Gleichung von (2.27) erkennt man, daß die harmonisch modulierte Schwingung auch als Superposition harmonischer Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{HF} , $\omega_{\text{HF}} - \omega_{\text{NF}}$ und $\omega_{\text{HF}} + \omega_{\text{NF}}$ aufgefaßt werden kann. Die beiden Frequenzgebiete zwischen ω_{HF} und $\omega_{\text{HF}} \pm \omega_{\text{NF}}$ werden *Seitenbänder* genannt. Die zu übertragenden Frequenzen überstreichen das *Frequenzband* (Intervall)

$$\mathcal{FB} := [\omega_{\text{HF}} - \omega_{\text{NF}}, \omega_{\text{HF}} + \omega_{\text{NF}}].$$

Damit sich Nachbarsender nicht stören, müssen ihre Trägerfrequenzen also mindestens um die Summe ihrer halben Bandbreiten (= arithmetisches Mittel ihrer gesamten Bandbreiten) auseinanderliegen.

Je höher die Trägerfrequenz, um so dichter (prozentual in Abhängigkeit von der Trägerfrequenz) können Sender beieinanderliegen. Umgekehrt könnte kein Empfänger auf eine bestimmte Station abgestimmt werden, wenn ein Sender keine Hochfrequenz als Trägerfrequenz verwenden sondern nur Wellen des Niederfrequenzbereiches abstrahlen würde; in einem solchen Fall wäre nur ein Sender möglich.

Bemerkung (Entstehung von Riesenwellen)

Ein interessantes Phänomen tritt auf, wenn man mehrere Schwingungen wenig voneinander verschiedener Frequenzen addiert. Im folgenden Beispiel werden zwanzig Schwingungen der Amplitude 1 und der äquidistanten Frequenzen 1.05 – 2.00 addiert:

$$f(t) := \sum_{k=1}^{20} \sin([1 + 0.05 \cdot k]t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Das Ergebnis ist in Abb. 2.91 zu sehen. Ob solche Riesenwellen – im Film "Der Sturm" eindrucksvoll zu beobachten – tatsächlich eine solche Entstehungsgeschichte haben, ist eine offene Frage. Am Institut für Schiffs- und Meerestechnik der TU Berlin gelang jedenfalls die Simulation einer solchen Welle anhand der Überlagerung schneller und langsamer Wellen.

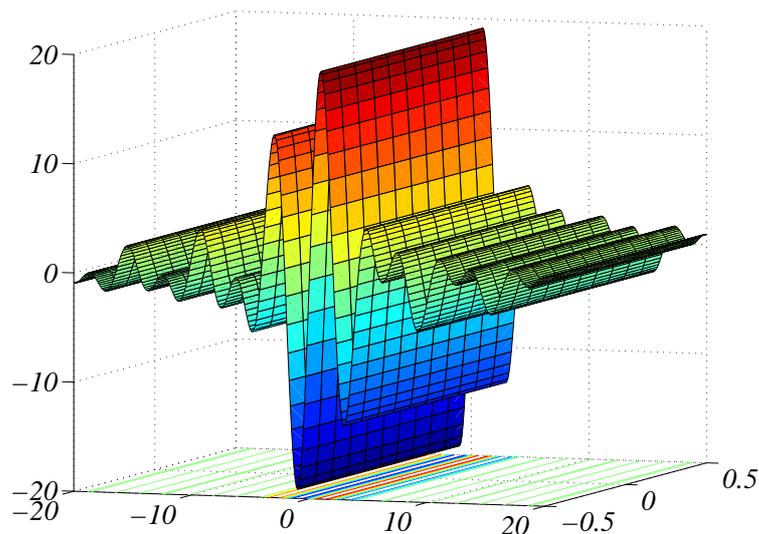


Abbildung 2.91: Addition von zwanzig Schwingungen der Amplitude 1 und wenig voneinander verschiedener Frequenzen

Verschiedene Richtungen und gleiche Frequenz: Polarisation

Wenn die Superposition zweier Schwingungen verschiedener Richtungen untersucht wird, braucht man nur zwei zueinander senkrechte Richtungen zu betrachten, da sich zwei Schwingungen in einer Ebene gemäß diesen beiden Standardrichtungen zerlegen lassen. Realisiert werden solche zweidimensionalen Schwingungen z. B. durch Anlegen von sinusförmigen Wechselspannungen an die beiden Kondensatorplattenpaare eines Kathodenstrahloszillographen. Man erhält horizontal und vertikal periodische Bewegungen, deren Überlagerung die im folgenden dargestellten Figuren ergeben.

Die beiden Gleichungen, welche die beiden zueinander senkrechten Schwingungen beschreiben, seien gegeben durch

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cdot \cos \omega t \\y(t) &= b \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R}).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Dieses sind die Gleichungen einer Kurve im \mathbb{R}^2 in Parameterform. Welcher Kurve? Dazu wird aus beiden Gleichungen der Parameter t eliminiert und die Kurve in einer parameterfreien Darstellung gegeben:

$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{b} &= \cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cdot \cos \phi - \sin \omega t \cdot \sin \phi \\&= \frac{x(t)}{a} \cos \phi \mp \sqrt{1 - \frac{x(t)^2}{a^2}} \sin \phi \\ \longrightarrow & \left(\frac{y(t)}{b} - \frac{x(t)}{a} \cos \phi \right)^2 = \left(1 - \frac{x(t)^2}{a^2} \right) \sin^2 \phi \\ \longrightarrow & \frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} - \frac{2x(t)y(t)}{ab} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (t \in \mathbb{R}).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Dieses ist die Gleichung eines Kegelschnittes, und zwar einer Ellipse – falls $a \neq b$ – mit dem Ursprung als Mittelpunkt, welche um den Winkel $\phi = \arctan \frac{b}{a}$ gedreht ist, s. Abb. 2.92.

Da die Koordinaten x und y nur Werte aus den beschränkten Mengen $[-a, a]$ bzw. $[-b, b]$ annehmen können, fallen Parabel und Hyperbel aus. Im Spezialfall

$$a = b \quad \wedge \quad \phi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

wird die Ellipse zu einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius a .

Ergebnis

Die Resultante zweier zueinander senkrechter harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz ist eine *elliptische* (oder: *elliptisch polarisierte*) Schwingung.

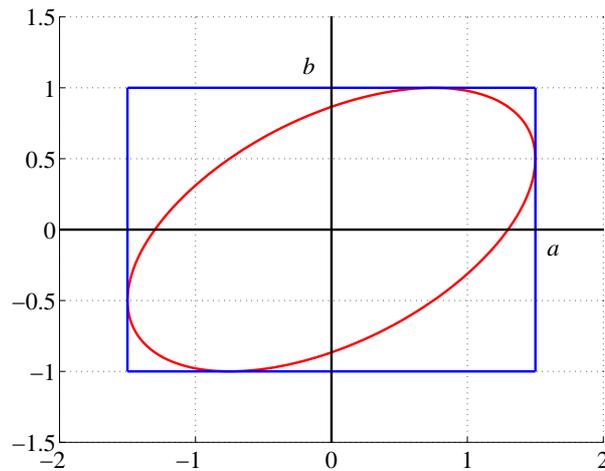


Abbildung 2.92: Elliptisch polarisierte Schwingung

Spezialfälle(i) $\phi \in \{0, \pi\}$:

Hier nimmt (2.29) die Gestalt

$$\left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

an, d.h. die Ellipse geht über in

$$\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Gerade } y = \frac{b}{a} x$$

$$\phi = \pi \quad \Longrightarrow \quad \text{Gerade } y = -\frac{b}{a} x.$$

Man erhält eine *lineare* oder *linear polarisierte* Schwingung mit der Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, s. Abb. 2.93.

(ii) $\phi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$:

Hier nimmt (2.29) die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

an, d.h. die Hauptachsen der Ellipse sind parallel zu den Koordinatenachsen, und die halben Längen der Hauptachsen sind die Amplituden der Einzelschwingungen, s. Abb. 2.94.

(iii) $\phi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \wedge a = b$:

Hier nimmt (2.29) die Gestalt

$$x^2 + y^2 = a^2$$

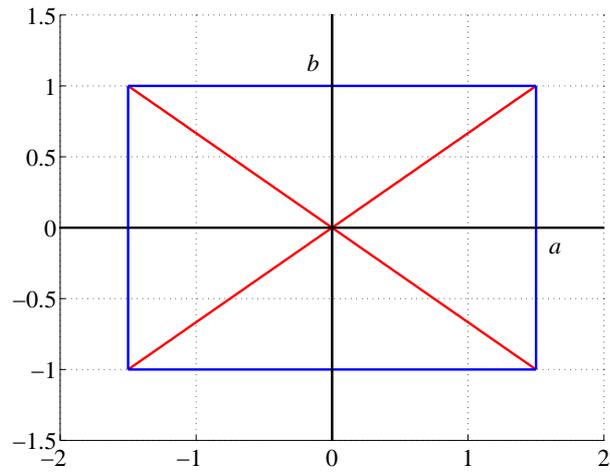


Abbildung 2.93: Linear polarisierte Schwingung

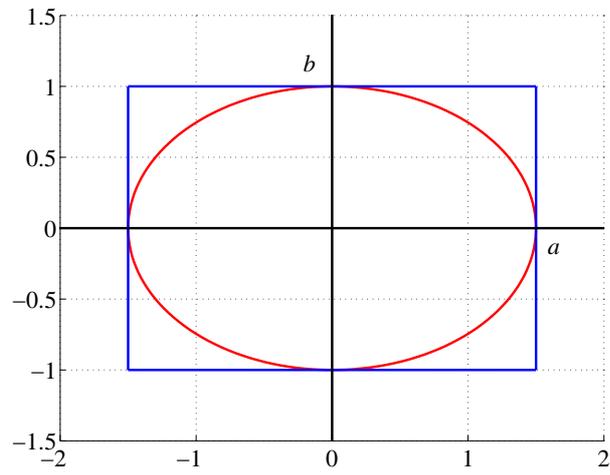


Abbildung 2.94: Elliptisch polarisierte Schwingung

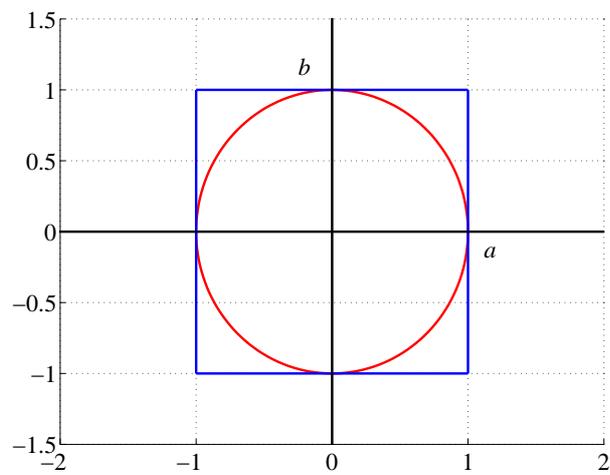


Abbildung 2.95: Zirkular polarisierte Schwingung

an, die Ellipse ist ein Kreis, s. Abb. 2.95. Man hat eine sog. *zirkulare* oder *zirkular polarisierte* Schwingung.

Bemerkung

Alle oben aufgeführten Fälle können durch die komplexe Form der Schwingungsdarstellung leicht charakterisiert werden, indem man den folgenden komplexen Quotienten untersucht:

$$\underline{x}(t) := a \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad \underline{y}(t) := b \cdot e^{i\omega t + \phi} ,$$

$$z := \frac{\underline{x}(t)}{\underline{y}(t)} = \frac{b}{a} \cdot e^{i\phi} .$$

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} & \implies \text{lineare Polarisation, i.e. } \phi \in \{0, \pi\} \\ z \notin \mathbb{R} & \implies \text{elliptische Polarisation} \\ z \in \{-i, i\} \wedge a = b & \implies \text{zirkulare Polarisation} \end{aligned}$$

Verschiedene Richtungen und verschiedene Frequenzen: Lissajous-Figuren

Die Schwingungen werden dargestellt durch die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos \omega_1 t \\ y(t) &= b \cdot \cos(\omega_2 t + \phi) = b \cdot \cos(\omega_1 t + \varepsilon t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit ε als Differenz der beiden Kreisfrequenzen: $\varepsilon = \omega_2 - \omega_1$. Hier wird nur der Spezialfall betrachtet, daß sich die Frequenzen ω_1 und ω_2 wenig voneinander unterscheiden: $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$.

Schwingungen dieser Art lassen sich auffassen als Schwingungen gleicher Frequenz, deren Phasendifferenz $\varepsilon t + \phi$ sich mit der Zeit langsam ändert. Der die Schwingung repräsentierende Punkt beschreibt näherungsweise Ellipsen von zeitlich veränderlicher Lage. Die Bewegung ist allerdings nur dann periodisch und die Bahnkurve geschlossen, wenn $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ gilt. In diesem Falle ist die Schwingungsperiode gegeben durch

$$T := \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad \omega := \text{g.g.T.}(\omega_1, \omega_2) .$$

Die bei der Zusammensetzung zweier aufeinander senkrechten harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen sich ergebenden Kurven heißen *Lissajous-Figuren*.

Aufgaben

- (i) Welcher expliziten Darstellung genügt das Beispiel zu Abb. 2.97?
- (ii) Man betrachte das Beispiel zu Abb. 2.98.

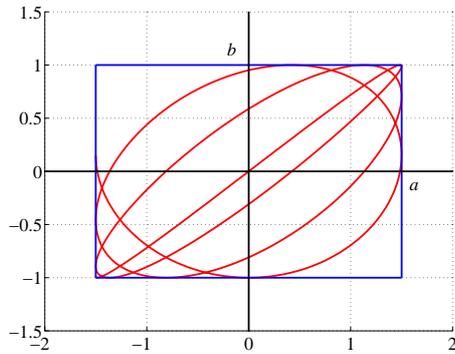


Abbildung 2.96: Lissajous-Figur

$$\begin{aligned}x(t) &= 1.5 \cos t \\y(t) &= 1 \cos (1.1t + \pi/4)\end{aligned}$$

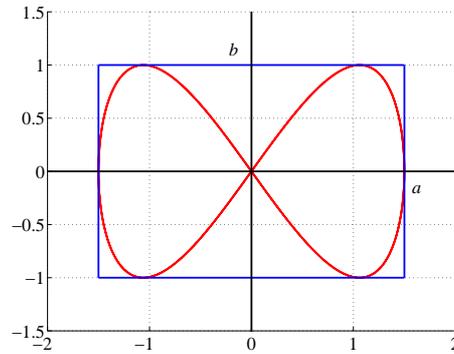


Abbildung 2.97: Lissajous-Figur

$$\begin{aligned}x(t) &= 1.5 \sin t \\y(t) &= 1 \sin 2t\end{aligned}$$

Das Beispiel der nebenstehenden Lissajous-Figur:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1.5 \cos t \\y(t) &= 1 \cos 2t\end{aligned}$$

ist – was die Gleichungen angeht – auf den ersten Blick nicht sehr verschieden von dem Beispiel in Abb. 2.97. Welcher expliziten Darstellung genügt es?

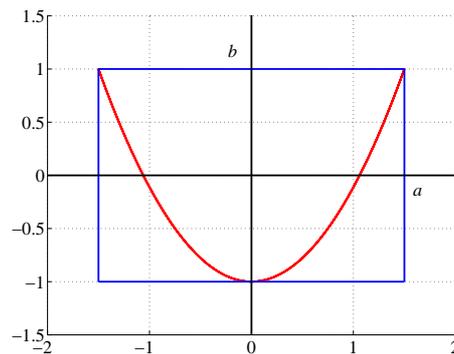


Abbildung 2.98: Lissajous-Figur

2.4 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Allgemeine Eigenschaften von Funktionen
- Umgang mit allen nachfolgend aufgeführten Funktionen
- Ganzrationale Funktionen (Polynome)
- Gebrochenrationale Funktionen
- Potenz- und Wurzelfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Harmonische Schwingungen
- Superposition von Schwingungen, reelle und komplexe Darstellung

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Kegelschnitte
- Hyperbel- und Areafunktionen

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen mit komplexen Argumenten
- Schwebungen
- Lissajous-Figuren

Kapitel 3

Folgen und Reihen

Bei der Definition der allgemeinen Potenz

$$f(x) := x^\rho \quad (x > 0, \rho \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

sowie der allgemeinen Exponentialfunktion

$$g(x) := a^x \quad (x \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ geeignet})$$

sind Zahlenfolgen schon einmal auf einem intuitiven Niveau behandelt worden; s. Satz 3.12. Zahlenfolgen und deren Grenzwerte wurden dabei benutzt, um Potenzen mit Exponenten aus \mathbb{R} zu definieren, welche zuvor nur für solche aus \mathbb{Q} bekannt waren.

Folgen und der mit ihrer Hilfe definierte Grenzwertbegriff sind das Fundament der Infinitesimalrechnung.

3.1 Reelle und komplexe Zahlenfolgen

Definition 3.1

Eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}$$

heißt eine *reelle* bzw. *komplexe Zahlenfolge*, auch: *Zahlenfolge aus \mathbb{R}* bzw. *Zahlenfolge aus \mathbb{C}* .

Schreibweisen:

$$\begin{aligned} a_n &:= a(n) && (n \in \mathbb{N}) \\ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} &:= a = \{\langle n, a_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ geeignet}\} \end{aligned}$$

Bemerkung

- (i) Eine Zahlenfolge ist eine spezielle Funktion f , nämlich eine Funktion f mit $D(f) = \mathbb{N}$.

- (ii) Es gibt auch Folgen von Funktionen, von Vektoren, von Mengen, ... Da im Moment nur Zahlenfolgen betrachtet werden, wird hier kurz von „Folgen“ gesprochen.
- (iii) Manchmal ist es zweckmäßig, die Numerierung der Folgenglieder nicht mit 1, sondern mit einer anderen Zahl $p \in \mathbb{Z}$ zu beginnen; dem entspricht eine Abbildung

$$a : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C},$$

wobei $\mathbb{Z}_p := \{n : n \in \mathbb{Z}, n \geq p\}$ ($p \in \mathbb{Z}$ geeignet).

- (iv) Als Abbildung ist eine Folge zwar eine Menge, nämlich eine Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{N} \times \mathbb{C}$; daher auch die Schreibweise $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Mengenklammern. Allerdings ist eine Folge aus \mathbb{R} keine Teilmenge von \mathbb{R} , denn:

- bei einer Folge ist die Anordnung ihrer Glieder wesentlich und
- dasselbe Glied kann durchaus mehrfach in der Folge auftreten.

Die Folgenglieder a_n selbst dagegen bilden eine Teilmenge von \mathbb{R} – nämlich $W(a)$ – wobei mehrfach auftretende Folgenglieder gemäß der Mengenkonvention nur einmal gezählt werden dürfen.

3.1.1 Konvergenz von Folgen

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.

- (i) Sei $b \in \mathbb{R}$ oder $b \in \mathbb{C}$.

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen b für $n \rightarrow \infty$*

$:\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{p \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n > p \implies |a_n - b| < \varepsilon) \quad (3.1)$$

Schreibweise dafür: $a_n \longrightarrow b \quad (n \longrightarrow \infty)$
 gesprochen: a_n geht gegen b für n gegen ∞ .

- (ii) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent* $:\Leftrightarrow$
 es gibt eine Zahl b , so daß $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen b ist. b heißt dann *Grenzwert* der Folge und wird mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

bezeichnet.

- (iii) Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

Bemerkung

Die Konvergenzbedingung (3.1) ist hier etwas anders formuliert als seinerzeit die Bedingung (2.12); dort heißt es:

Sei $b \in \mathbb{R}$. Man sagt, daß die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiere oder gegen b konvergent sei, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n \geq N \implies |a_n - b| < \varepsilon). \quad (3.2)$$

Aufgabe

Man zeige, daß beide Bedingungen äquivalent sind.

Lemma

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis

Wenn eine Folge zwei verschiedene Grenzwerte hätte, dann müßten in jeder Umgebung des einen Grenzwertes und in jeder Umgebung des anderen Grenzwertes alle bis auf endlich viele Folgenglieder zu finden sein. Macht man die Umgebungen so klein, daß sie disjunkt sind, so erhält man einen Widerspruch. Die folgenden Ausführungen formalisieren diese Idee.

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit den beiden verschiedenen Grenzwerten b_1 und b_2 , sei $\varepsilon := \frac{1}{2}|b_2 - b_1|$. Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - b_1| &< \varepsilon \quad \text{für } n > p_1, \\ |a_n - b_2| &< \varepsilon \quad \text{für } n > p_2. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max(\{p_1, p_2\})$:

$$\begin{aligned} |b_2 - b_1| &= |b_2 - a_n + a_n - b_1| \\ &\leq |b_2 - a_n| + |a_n - b_1| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon = |b_2 - b_1|, \end{aligned}$$

also $|b_2 - b_1| < |b_2 - b_1|$. ζ

Bemerkung

- (i) Wenn eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert b hat, dann liegen in jeder ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(b) := \{x : x \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, |x - b| < \varepsilon\}$$

von b alle bis auf endlich viele Glieder der Folge; man sagt: *fast alle*.

(ii) Für eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \\ \text{und der Grenzwert ist } b. \end{cases}$$

Somit ist $\neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \right)$ äquivalent zu

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent *oder*
der Grenzwert existiert zwar, ist aber ungleich b .

(iii) Der Begriff der Konvergenz einer Folge benutzt den Betrag $|\cdot|$ in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Genausogut könnte man die Konvergenz von Folgen definieren, deren Werte in einer anderen Menge als \mathbb{R} oder \mathbb{C} liegen, wenn man nur ein Analogon zur Addition und zum Betrag hat.

Beispiel Vektorwertige Folgen $a : \mathbb{N} \rightarrow \langle V, \|\cdot\| \rangle$.

Beispiele 3.1

(i) Seien $c \in \mathbb{C}$, $a_n := c$ ($n \in \mathbb{N}$).

Beh. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

Bew.

Für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Definition 3.2

Eine reelle oder komplexe (konvergente) Folge $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = c$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt eine *konstante* oder *stationäre Folge*.

(ii) Seien $c \in \mathbb{C}$, $a_n := \frac{c}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Beh. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Bew.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{c}{n} \right| = \frac{|c|}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{|c|}{\varepsilon}.$$

Sei $p := \frac{|c|}{\varepsilon}$. Dann gilt die Implikation

$$n > p \quad \implies \quad |a_n - 0| = \frac{|c|}{n} < \frac{|c|}{p} = \varepsilon,$$

also $a_n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Definition 3.3

Eine reelle oder komplexe (konvergente) Folge mit dem Grenzwert 0 heißt eine *Nullfolge*.

(iii) Sei $a_n := \frac{3n+2}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Es ist dann

$$a_n := \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

somit ist a_n für große n „in der Nähe“ von $\frac{3}{2}$.

Beh. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

Bew.

Zum Beweis wird versucht, für $|a_n - \frac{3}{2}|$ eine obere Schranke anzugeben, die klein wird, wenn n groß wird; geeignet wäre z. B. die Schranke $\frac{c}{n}$ mit einer Zahl $c > 0$.

$$\begin{aligned} \left| a_n - \frac{3}{2} \right| &= \left| \frac{3n+2}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2(3n+2) - 3(2n+1)}{2(2n+1)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{1}{4n+2} \right| \\ &\leq \frac{1}{4n} = \frac{1/4}{n} \end{aligned}$$

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{R}$ so groß gewählt, daß für $n > p$ gilt: $\frac{1/4}{n} < \varepsilon$; das ist z. B. für $p := \frac{1}{4\varepsilon}$ der Fall. Für solche n gilt dann mit Hilfe der Abschätzung oben

$$\left| a_n - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{1/4}{n} < \varepsilon.$$

(iv) Dieses Beispiel sieht auf den ersten Blick so aus wie das vorhergehende, verlangt an einer Stelle aber eine andere Abschätzung.

Sei $a_n := \frac{3n+2}{2n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Wieder kann man schreiben

$$a_n := \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

und die Konvergenz gegen $\frac{3}{2}$ scheint plausibel.

$$\text{Beh.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$$

Bew.

$$\begin{aligned} \left| a_n - \frac{3}{2} \right| &= \left| \frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6n+4-3(2n-1)}{2(2n-1)} \right| \\ &= \left| \frac{7}{2(2n-1)} \right| = \left| \frac{7}{4n-2} \right| \\ (n \geq 2) \leq \frac{7}{4n-n} &= \frac{7/3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

nach einer zu Beispiel (iii) analogen Argumentation.

(v) Sei $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := n^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beh. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Bew.

Im Widerspruch zur Annahme sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, etwa gegen die Zahl b . Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| = |a_n - b + b| \leq |a_n - b| + |b| \leq 1 + |b|$$

für hinreichend große n . Damit ist die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einerseits beschränkt, andererseits unbeschränkt. ∇

3.1.2 Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen

Der folgende Satz – der Hauptsatz dieses Abschnittes – besagt, daß die Grenzwertbildung bei konvergenten Folgen mit den Grundrechenarten vertauschbar ist.

Satz 3.1

Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n)$ existieren, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ existiert, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

(iii) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

(iv) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Beispiel 3.2

Das Beispiel 3.1 (iv) soll noch einmal aufgegriffen werden. Wiederholte Anwendung des letzten Satzes liefert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung

(i) So suggestiv die Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

des letzten Satzes auch ist, so sehr kann sie in die Irre führen, wenn man sich nicht vergegenwärtigt, daß diese Formeln eigentlich von rechts nach links gelesen werden müssen! Keinesfalls kann aus der Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ geschlossen werden, daß die Summenformel gilt, denn die Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ brauchen einzeln nicht zu konvergieren.

Beispiel

$a_n := (-1)^{n+1}$ und $b_n := (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) definieren divergente Folgen, aber $c_n := a_n + b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) definiert eine konvergente Folge.

(ii) **Für Kenner und Genießer der Linearen Algebra**

Aus Satz 3.1 (i) und (iv) ergibt sich, daß konvergente Zahlenfolgen einen Vektorraum bilden und daß die Abbildung, die jeder konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet, eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe

Seien

$$\mathcal{F} := \{a : a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge}\}$$

$$\mathcal{BF} := \{a : a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine beschränkte Folge}\}$$

$$\mathcal{KF} := \{a : a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine konvergente Folge}\}$$

$$\mathcal{NF} := \{a : a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge}\}$$

Welche Teilmengenbeziehungen und Vektorraumeigenschaften erfüllen die aufgeführten Mengen und warum?

Die folgende Definition ist nichts Neues, wenn man Folgen – was sie ja auch sind – als Abbildungen versteht.

Definition 3.4Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.(i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*

$$:\Leftrightarrow \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq c$$

(ii) Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine *reelle* Folge, so heißt $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (a) *nach oben beschränkt*

$$:\Leftrightarrow \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq c$$

(b) *nach unten beschränkt*

$$:\Leftrightarrow \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq c$$

(c) *monoton wachsend (streng monoton wachsend)*

$$:\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \geq (>) a_n$$

(d) *monoton fallend (streng monoton fallend)*

$$:\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \leq (<) a_n$$

Satz 3.2

- (i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- (ii) Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
- (iii) Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis von (i):

S. den Beweis von Beispiel 3.1 (v).

Der folgende Satz liefert weitere Ergebnisse, mit Hilfe derer man auf die Konvergenz von Folgen schließen kann. Immer dann, wenn nicht von der Anordnung in \mathbb{R} Gebrauch gemacht wird, dürfen auch komplexe Folgen zugelassen werden.

Satz 3.3

Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen.

(i) (reell)

$$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \ (n \rightarrow \infty), \ a_n \leq b_n \text{ für fast alle } n$$

$$\implies a \leq b$$

(ii) (reell)

$$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), \ a_n \leq c_n \leq b_n \text{ für fast alle } n$$

$$\implies c_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$$

(iii) (komplex)

$$b_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty), \ |a_n - a| \leq b_n \text{ für fast alle } n$$

$$\implies a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$$

(iv) (komplex)

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$$

$$\implies |a_n| \rightarrow |a| \ (n \rightarrow \infty)$$

Für $a = 0$ gilt hiervon auch die Umkehrung.

(v) (komplex)

$$a_n \rightarrow a, \ |a_n| \leq \gamma \ (\gamma > 0 \text{ geeignet, fast alle } n)$$

$$\implies |a| \leq \gamma$$

(vi) (komplex)

$$a_n \rightarrow 0, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt,} \\ \implies a_n \cdot b_n \longrightarrow 0,$$

insbesondere ist die Folge $\{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Satz 3.4

Seien $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge (= Folge komplexer Zahlen) und $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n = \Re z \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n = \Im z$$

Insbesondere konvergiert eine komplexe Zahlenfolge also genau dann, wenn Realteil und Imaginärteil der Folgenglieder als Folgen einzeln konvergieren.

Beweisidee

Seien $z = a + ib$ und $z_n = a_n + ib_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es werden die folgenden Ungleichungen in Verbindung mit der Rückrichtung von Satz 3.3 (iv) verwandt:

$$|a_n - a| + |b_n - b| \leq 2 \cdot |z_n - z| \leq 2 \cdot (|a_n - a| + |b_n - b|)$$

Aufgabe

- Man begründe diese Ungleichungen und führe den Beweis formal korrekt durch.
- Wie läßt sich dieses Ergebnis auf eine Folge von Vektoren übertragen ($n \in \mathbb{N}$ geeignet):

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \langle \mathbb{V}^n, \|\cdot\| \rangle?$$

Bemerkung

Die Glieder einer konvergenten Folgen „verdichten“ sich immer mehr in folgendem Sinne:

Konvergiert $a_n \rightarrow a$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, so daß für jeden Index $n \geq N$ stets $|a_n - a| < \varepsilon/2$ bleibt. Sind also die Indices m, n beide $\geq N$, so ist

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (3.3)$$

locker formuliert: späte Glieder einer konvergenten Folge liegen beliebig dicht beieinander, und dieses „beliebig-dicht-beieinander-Liegen“ ist in (3.3) formuliert, ohne daß auf den Grenzwert Bezug genommen wird. Solche Folgen bekommen daher einen Namen:

Definition 3.5

Eine Folge heißt eine *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m, n \in \mathbb{N}} (m, n \geq N \implies |a_m - a_n| < \varepsilon). \quad (3.4)$$

Nach (3.3) ist eine konvergente Folge automatisch eine Cauchy-Folge, es gilt jedoch auch die Umkehrung. Damit gilt insgesamt:

Satz 3.5

Eine Folge ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn sie konvergent ist.

Mit Hilfe zweier monotoner Folgen läßt sich ein Prinzip beweisen, welches man „Intervallschachtelung“ nennt:

Definition 3.6

Ein Paar von Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn gilt:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1, \quad (3.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0. \quad (3.6)$$

Die beiden Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definieren eine Folge $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen, welche aufgrund von (3.5) alle ineinander enthalten sind, s. Abb. 3.1.

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

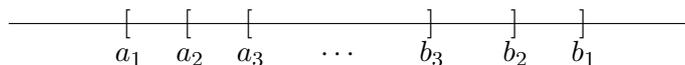


Abbildung 3.1: Intervallschachtelung

Beh.

Es existiert genau eine reelle Zahl, die allen Intervallen gemeinsam ist.

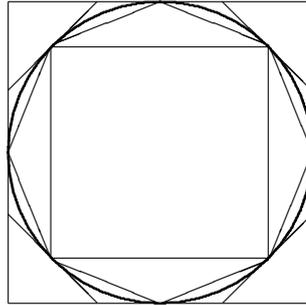
Beweis

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, konvergiert nach Satz 3.2 also gegen einen Grenzwert a . $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt, konvergiert nach demselben Satz also ebenfalls gegen einen Grenzwert b . Aufgrund von (3.6) folgt damit:

$$b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \stackrel{(3.6)}{=} 0.$$

Beispiel 3.3 (Intervallschachtelung zur Definition von π)

Sei \mathcal{K} die Peripherie eines Kreises vom Radius 1. Die Umfänge einer Folge diesem Kreis *ein*beschriebener regelmäßigen n -Ecke seien gegeben durch $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, diejenigen einer Folge dem Kreis *um*beschriebener regelmäßigen n -Ecke durch $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Beide Folgen konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert und definieren damit den Umfang des Kreises – die Zahl 2π , s. Abb. 3.2.

Abbildung 3.2: Äußere und innere einbeschriebene n -Ecke**Aufgabe**

Man berechne die beiden Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die dem Kreis ein- bzw. umbeschrieben sind.

3.1.3 Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß

In diesem Abschnitt werden Teilfolgen und Häufungspunkte von Folgen eingeführt. Man braucht diese Begriffe zur Definition des Konvergenzradius' einer Potenzreihe. Beschäftigt man sich mit Potenzreihen nicht, so kann dieser Abschnitt in einem ersten Durchgang übersprungen werden.

Definition 3.7

Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ (bzw. $h \in \mathbb{C}$) heißt *Häufungspunkt* der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$:\iff \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{p \in \mathbb{N}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (n > p \wedge |a_n - h| < \varepsilon)$$

Ein Häufungspunkt einer Folge ist also dadurch charakterisiert, daß in „seiner Nähe“ beliebig viele Folgenglieder liegen, wenn auch nicht notwendig alle.

Beispiel 3.4

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := 1 + (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

dann hat $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte 0 und 2.

Man beachte

Ein Häufungspunkt einer Folge ist kein Häufungspunkt einer Menge; s. Definition 4.1 (iii).

Der folgende Satz wiederholt schon in Satz 3.2 angeschnittene Ergebnisse und macht Gebrauch von der Ordnungsstruktur von \mathbb{R} , ist also auf komplexe Zahlenfolgen nicht übertragbar.

Satz 3.6

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann gilt:

- (i) Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.
- (ii) Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Beispiele 3.5

- (i) $a_n := 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) $a_n := e^{-n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Eine beschränkte Folge braucht nicht konvergent zu sein, wie Beispiel 3. 4 zeigt. Es gilt jedoch der folgende wichtige Satz für Folgen in \mathbb{C} :

Satz 3.7 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge besitzt (wenigstens) einen Häufungspunkt.

Mit Hilfe des Begriffes „Teilfolge“ läßt sich der Satz von Bolzano-Weierstraß auch anders formulieren. Dazu zuerst die entsprechende Definition.

Definition 3.8

Eine *Teilfolge* einer Folge entsteht dadurch, daß von der ursprünglichen Folge Glieder weggelassen werden, die Reihenfolge der verbleibenden aber nicht geändert wird.

Satz 3.8

Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge und $h \in \mathbb{R}$ oder $h \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

h ist Häufungspunkt von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\iff$$

es existiert eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, welche gegen h konvergiert.

Folgerung

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis

Anwendung der letzten beiden Sätze.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt in \mathbb{C} , der folgende Satz wiederum gilt nur in \mathbb{R} :

Satz und Definition 3.9

Jede beschränkte *reelle* Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, genannt

$$\begin{aligned} \text{limes superior} & : & \limsup a_n & \text{ oder } & \overline{\lim} a_n, \\ \text{limes inferior} & : & \liminf a_n & \text{ oder } & \underline{\lim} a_n. \end{aligned}$$

Bemerkung

Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht nach oben oder nicht nach unten beschränkt, so besteht die Konvention, dies folgendermaßen auszudrücken:

$$\overline{\lim} a_n = \infty \quad \text{oder} \quad \underline{\lim} a_n = -\infty.$$

Diese Konvention wird bei der Definition des Konvergenzradius' einer Potenzreihe benutzt.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen den Häufungspunkten einer Folge und ihrer potentiellen Konvergenz her.

Satz 3.10

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. dann gilt:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \iff \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ hat genau einen Häufungspunkt.}$$

Folgerung

Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte *reelle* Folge, so gilt:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \iff \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \lim a_n.$$

3.1.4 Beispiele

Die drei Beispiele dieses Abschnittes sind etwas aufwendiger.

Beispiel 3.6

Seien $c \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq |c| < 1$ und $r \in \mathbb{N}_0$. Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n := n^r \cdot c^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beh. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Anwendung

$$c := \frac{1}{e} = e^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^r \cdot e^{-n} = 0$$

Aussage

Die „Exponentialfunktion“ e^n geht „schneller“ gegen Null als n^r gegen ∞ .

Beweis

1. Für $c = 0$ ist die Aussage trivial, im folgenden kann daher $c \neq 0$ vorausgesetzt werden.
2. Für $a = 0$ gilt in Satz 3.3 (iv) auch die Umkehrung; es genügt also zu zeigen, daß die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$b_n := |a_n| \quad (n \in \mathbb{N})$$

eine Nullfolge ist.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^r \cdot |c|^{n+1}}{n^r \cdot |c|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \cdot |c|.$$

Nun gilt (wiederholtes Anwenden der Rechenregeln für Produkte konvergenter Folgen):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \text{somit auch} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r = 1.$$

Da $|c| < 1$ ist, existiert eine Zahl $p \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$n > p \quad \Longrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \cdot |c| \leq 1,$$

also

$$b_{n+1} \leq b_n \quad (n \geq p).$$

4. Als positive Folge ist $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, also konvergent. Sei

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Beh. $\alpha = 0$.

Bew. Angenommen, $\alpha \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\alpha}{\alpha} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \cdot |c| = |c| < 1 \quad \zeta \end{aligned}$$

Beispiel 3.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist zu zeigen:

$$\bigvee_{p \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n > p \implies |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon)$$

Es ist $0 < c := \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, also folgt mit dem vorhergehenden Beispiel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^1 \cdot c^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n = 0.$$

Sei nun $p > 0$ so gewählt, daß für $n > p$ gilt: $n \cdot \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n < 1$, dann folgt für $n > p$ aufgrund des strengen monotonen Wachstums der Wurzelfunktion:

$$\begin{aligned} 1 &\leq n < (1+\varepsilon)^n \\ \longrightarrow 1 &\leq \sqrt[n]{n} < (1+\varepsilon) \\ \longrightarrow 0 &\leq \sqrt[n]{n} - 1 = |\sqrt[n]{n} - 1| < 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

Beispiel 3.8

Für jede Zahl $a > 0$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Beweis

Seien $a > 0$ und $p > 0$ so gewählt, daß gilt:

$$\frac{1}{p} < a < p.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > p$ ebenfalls

$$\frac{1}{n} < a < n \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \sqrt[p]{a} < \sqrt[p]{n}.$$

Aus Beispiel 3.7 liest man ab:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 1,$$

dann folgt die Behauptung mit Satz 3.3 (ii).

3.2 Numerische Reihen

3.2.1 Einführung

Für jede Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende *geometrische Summenformel*:

$$\sum_{k=0}^n q^k := \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (3.7)$$

Beweis

Seien $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^n (1-q) \cdot q^k \\ &= \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Aufgabe

Formal korrekt müßte dieser Beweis mit vollständiger Induktion geführt werden. Man führe diesen ausführlich aus.

Beispiel 3.9

Seien $x_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von *Ziffern* – eine Ziffer ist eine Zahl aus $\{0, \dots, 9\}$ –, so ist die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Zahlen

$$s_n := x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (3.8)$$

monoton wachsend und wegen

$$\begin{aligned} s_n &\leq x_0 + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} \\ &= x_0 + \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10^1} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} x_0 + \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= x_0 + \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) < x_0 + 1 \end{aligned}$$

nach oben beschränkt, konvergiert also gegen einen Grenzwert s . Man drückt dies durch die Schreibweise

$$s = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

aus und nennt den Ausdruck $x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$ einen *Dezimalbruch* oder genauer eine *Dezimalbruchdarstellung* von s . Ein Dezimalbruch definiert also in knapper Form eine Zahlenfolge – nämlich die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ in (3.8) – und bedeutet den stets vorhandenen Grenzwert derselben. Er heißt *endlich* oder *abbrechend*, wenn ab einer Stelle alle Ziffern verschwinden, andernfalls *unendlich* oder *nichtabbrechend*. Man beachte, daß Dezimalbruchdarstellungen nicht eindeutig sein müssen. Beispielsweise wird die Zahl $1/2$ durch die beiden Dezimalbrüche $0,5$ oder $0,4999\dots$ dargestellt.

Das praktische Umgehen mit reellen Zahlen – z. B. mit einem Taschenrechner oder einem Computer – benutzt die Tatsache, daß man unter Inkaufnahme eines „kleinen Fehlers“ statt mit einer reellen Zahl oder ihrer Dezimalbruchentwicklung mit einer gestutzten Version der Dezimalbruchentwicklung rechnen kann, man „schneidet“ die (i. a. unendliche) Dezimalzahl also ab. Bei welcher „großen“ Zahl n man abschneidet, d. h. wieviele Stellen man berücksichtigen muß, um eine reelle Zahl „hinreichend gut“ darzustellen, hängt von der gewünschten Rechengenauigkeit ab; Taschenrechner benutzen für gewöhnlich 8 geltende Ziffern, Computer 16.

Aufgabe

Auf einem Taschenrechner mit n geltenden Ziffern bilde man die Summe der beiden Zahlen 1 und 10^{-n} .

Das mathematische Problem im folgenden besteht nun darin, diese etwas vagen Überlegungen zu präzisieren:

- Was ist ein „kleiner“ Fehler?
- Wann ist die Zahl n , bei der man abschneidet, „groß genug“?
- Wann ist die Darstellung „hinreichend gut“?

3.2.2 Definition, Konvergenz

Die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ des einführenden Beispiels,

$$s_n := x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

hat das folgende Bildungsprinzip:

ausgehend von der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{\frac{x_n}{10^n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ bildet man eine neue Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die Vorschrift

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k.$$

Folgen dieser Bauart bekommen einen eigenen Namen:

Definition 3.9

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge.

- Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt eine *unendliche Reihe*.
Andere Bezeichnungen: *numerische Reihe*, *Zahlenreihe*, *Reihe*
- Die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch die Vorschrift

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

heißt *Partialsomme* oder *Partialsommenfolge* der Reihe.

Bemerkung

- Während s_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ als Summe endlich vieler Zahlen wohldefiniert ist, ist der Name „Reihe“ vorläufig nicht mehr als der Name eines Zeichens, nämlich des Zeichens $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Keinesfalls ist $(a_0 + a_1 + \dots)$ als eine „Summe von unendlich vielen Summanden“ aufzufassen.
- Die Indizierung braucht nicht immer bei $k = 0$ zu beginnen: $k = 1$, $k = -5$, $k = p$ sind ebenfalls zulässig ($p \in \mathbb{Z}$ geeignet).
- Wie bei (endlichen) Summen auch kommt es auf die Bezeichnung des Summationsindex' (fast) nicht an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} = \dots$$

In der folgenden Definition wird dem Zeichen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Bedeutung gegeben:

Definition 3.10

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge.

(i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* $:\Leftrightarrow$
Die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen ist konvergent.

(ii) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und ist $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so heißt s die *Summe* oder der *Wert* der Reihe.

In diesem Fall verwendet man das Zeichen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch für den Wert der Reihe, d.h. man vereinbart

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = s.$$

(iii) Nicht konvergente Reihen heißen *divergent*.

Bemerkung

Folgen und Reihen sind dieselbe Sache unter verschiedenen Gesichtspunkten:

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist definiert als Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ihrer Partialsummen.

(b) Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. Durch die Setzung

$$a_0 := x_0 \quad , \quad a_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

läßt sich diese Folge auch als Reihe auffassen:

$$\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \text{ist die Partialsummenfolge } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Der folgende Satz ist, nicht zuletzt aufgrund der letzten Bemerkung, als Anwendung der Rechenregeln für konvergente Folgen unmittelbar klar, s. Satz 3.1:

Satz 3.11 (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente unendliche Reihen.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ ist jeweils eine konvergente unendliche Reihe, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k;$$

Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k)$ eine konvergente unendliche Reihe, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

In Worten:

Konvergente Reihen können gliedweise addiert, subtrahiert oder mit Konstanten multipliziert werden.

Für die Multiplikation und Division unendlicher Reihen gilt unter der Bedingung der bloßen Konvergenz ein analoger Sachverhalt *nicht*; hier benötigt man den Begriff der sog. *absoluten Konvergenz*, s. Definition 3.11.

(ii) Sind $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_k = b_k$ für alle $k \geq n_0$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ ist konvergent.}$$

In Worten:

Das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe hängt nicht von endlich vielen „Anfangsgliedern“ ab. Im Falle der Konvergenz allerdings hängt der Wert der Reihe natürlich schon von allen Gliedern ab!

3.2.3 Beispiele

Beispiel 3.10 (Geometrische Reihe)

Seien $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, und $a_k := q^k$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, und es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis

Aufgrund der geometrischen Summenformel (3.7) gilt für die zugehörige Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Beh. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Bew. Beispiel 3.6 für $r = 0$

Aufgrund der Rechenregeln für konvergente Folgen existiert somit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, und es ist

$$\sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Anwendung

Der griechische Philosoph Zenon (495? - 435? v. Chr.) versuchte, durch mehrere Paradoxa die Unmöglichkeit aller Bewegungen zu „beweisen“. Eines liest sich etwa so:

Wenn der griechische Krieger Achilleus mit einer Schildkröte einen Wettlauf veranstaltet, wird er sie nie einholen, vorausgesetzt, diese erhält zu Beginn einen Vorsprung. Begründung: wenn Achilleus die Stelle erreicht, an welcher die Schildkröte gestartet ist, ist sie schon ein Stück weiter bis zu einer neuen Position gelaufen. Erreicht Achilleus auch diese Stelle, so ist sie schon wieder ein Stück weiter, etc.

Aufgabe

Man widerlege den griechischen Philosophen durch eine Anwendung der geometrischen Reihe. Man nehme der Einfachheit halber an, Achilleus laufe zehnmal so schnell wie die Schildkröte, und diese erhalte einen Vorsprung von einem *Stadion* (altgriechisches Wegmaß: 160 m; später 192 m).

Beispiel 3.11 (Harmonische Reihe)

Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ verdankt ihren Namen der Tatsache, daß das Glied a_m das sog. *harmonische Mittel* seiner beiden Nachbarn ist ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$):

$$\frac{1}{a_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{m-1}} + \frac{1}{a_{m+1}} \right) \iff \frac{1}{1/m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1/(m-1)} + \frac{1}{1/(m+1)} \right)$$

Beh. Die harmonische Reihe divergiert.

Beweis

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $n := 2^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Die Partialsummenfolge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der (aus positiven Gliedern) bestehenden harmonischen Reihe wächst also unbeschränkt, d.h. insbesondere, daß sie nicht konvergiert.

Bemerkung

Wie dieses Beispiel zeigt, ist zur Konvergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *nicht* hinreichend, daß die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Diese Bedingung ist jedoch notwendig.

Anwendung (Bau eines Turms aus CD-Hüllen; s. Abb. 3.3)

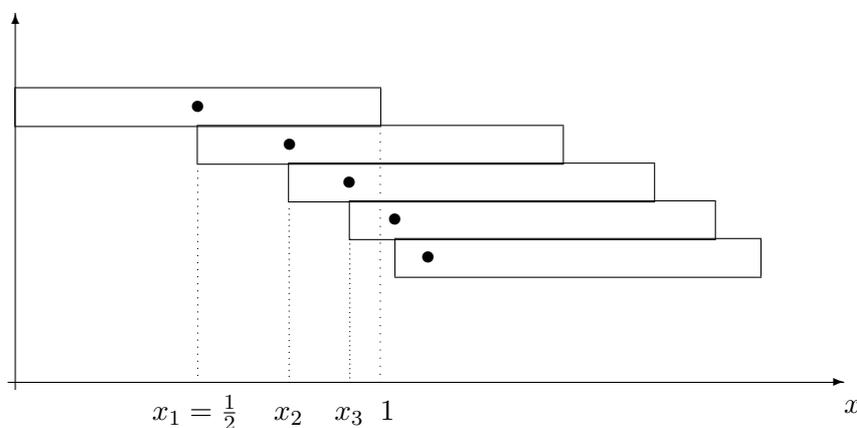


Abbildung 3.3: Zur Divergenz der harmonischen Reihe

Sei x_k der Schwerpunkt des Systems aus k CD-Hüllen, von oben gezählt ($k \in \mathbb{N}$), dann findet man:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \\
 x_2 &= \frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot (x_1 + \frac{1}{2})}{2} &= \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2}) \\
 x_3 &= \frac{2 \cdot x_2 + 1 \cdot (x_2 + \frac{1}{2})}{3} &= \frac{11}{12} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \\
 x_4 &= \frac{3 \cdot x_3 + 1 \cdot (x_3 + \frac{1}{2})}{4} &= \frac{25}{24} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \\
 &\vdots & \vdots \\
 x_n &= \frac{(n-1) \cdot x_{n-1} + 1 \cdot (x_{n-1} + \frac{1}{2})}{n} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}
 \end{aligned}$$

Die Anzahl der CD-Hüllen, die benötigt werden, um eine vorgegebene Entfernung d zu überbrücken, läßt sich mit Hilfe eines *Integralkriteriums* abschätzen.

Damit wird im 2. Semester gezeigt, daß die harmonische Reihe der folgenden Abschätzung genügt:

$$0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \leq 1 \quad (N \in \mathbb{N}). \quad (3.9)$$

Die Abschätzung (3.9) besagt im Wesentlichen, daß man höchstens einen Fehler von der Größe 1 macht, wenn man den Ausdruck $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ durch $\ln N$ ersetzt.

Damit nun der Schwerpunkt x_N von N CD-Hüllen – welcher sich innerhalb der Breite der zuunterst liegenden CD-Hüllen befindet – größer als d ist, muß gelten

$$x_N = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq d.$$

Dafür ist nach (3.9) wegen

$$\ln(N+1) = \ln\left[N \cdot \left(1 + \frac{1}{N}\right)\right] = \ln N + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

die Bedingung

$$2d \leq \ln(N+1) \quad \longleftrightarrow \quad e^{2d} \leq N+1$$

hinreichend, d.h. es werden $N \geq e^{2d}$ CD-Hüllen benötigt.

3.2.4 Umordnung von Reihen, absolute Konvergenz

Wir haben gesehen, daß die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert. Ganz anders verhält es sich, wenn die Glieder abwechselnd positive und negative Vorzeichen haben, man erhält dann die sog. *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Diese Reihe konvergiert nach dem

Satz 3.12 (Leibniz-Kriterium)

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit dem Grenzwert 0; alle Folgenglieder sind also notwendig nichtnegative Zahlen:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dann gilt:

- (i) Die Reihe $s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ konvergiert.

(ii) Es gilt die Fehlerabschätzung $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

Beweis

Die beiden Paare von Folgen ($\langle [s_n, s_{n+1}] \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ für gerades n bzw. $\langle [s_{n+1}, s_n] \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ für ungerades n) bilden eine Intervallschachtelung (Definition 3.6). Im ersten Fall (Abb. 3.4) gilt

$$|s - s_n| \leq s_{n+1} - s_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} = a_{n+1}.$$

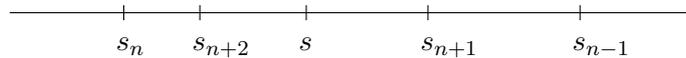


Abbildung 3.4: Konvergenz einer alternierenden Reihe

Aufgabe

Man zeige die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

und schätze ab, wieviele Glieder berücksichtigt werden müssen, damit der absolute Fehler $|s - s_n|$ kleiner als 10^{-2} ist.

Beispiel 3.12

Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$$

konvergiert, weil die Folge $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, und es gilt $|s - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) (als Nebenprodukt einer Anwendung von Taylor-Reihen wird in der Bemerkung auf p. 338 gezeigt, daß diese Reihe den Wert $\ln 2 = 0,6910$ hat).

Eigentümlicherweise ändert sich der Grenzwert dieser Reihe, wenn man sie umordnet:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + - \dots =: s$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + - \dots = \frac{s}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + + - \dots = \frac{3}{2}s$$

Obwohl die letzte Reihe bis auf Umordnung die ursprüngliche Reihe ist, hat sie den Wert $\frac{3}{2}s$.

Definition 3.11

Man betrachte die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

- (i) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow$
 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent.
- (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *unbedingt konvergent* $:\Leftrightarrow$
 Jede Umordnung von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.
- (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *bedingt konvergent* $:\Leftrightarrow$
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, aber nicht notwendig unbedingt.

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert also unabhängig von den Vorzeichen ihrer Glieder; eine unbedingt konvergente Reihe darf man beliebig umordnen, ohne die Konvergenz zu zerstören.

A priori haben beide Begriffe nichts miteinander zu tun. Um so überraschender ist der folgende Satz:

Satz 3.13

- (i) Eine Reihe ist absolut konvergent \Leftrightarrow Diese Reihe ist unbedingt konvergent.
- (ii) Jede Umordnung einer unbedingt konvergenten Reihe konvergiert gegen denselben Grenzwert.
- (iii) (Riemann'scher Umordnungssatz)
 Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann besitzt jede nur bedingt konvergente Reihe eine Umordnung, die gegen a konvergiert.

Bemerkung

- (i) Mit unbedingt konvergenten Reihen – oder, was nach (i) des letzten Satzes dasselbe ist – mit absolut konvergenten Reihen kann man also „wie mit endlichen Summen“ rechnen.
- (ii) Das pathologische Verhalten einer nur bedingt konvergenten Reihe, welches im Riemann'schen Umordnungssatz angesprochen ist, rührt daher, daß die aus den positiven - und negativen Gliedern separat gebildeten Reihen einzeln divergieren.

Der folgende Satz drückt aus, daß absolute Konvergenz eine stärkere Bedingung an eine Reihe darstellt als die gewöhnliche Konvergenz und daß die für konvergente Reihen gültigen Rechenregeln für absolut konvergente Reihen auch separat gelten.

Satz 3.14

Vorgelegt seien die beiden unendlichen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$(i) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent;}$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ sind absolut konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) \text{ sind absolut konvergent, und es gilt:}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k;$$

$$(iii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) \text{ ist absolut konvergent, und es gilt:}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Beispiel 3.13

Das Paradebeispiel einer konvergenten, jedoch nicht absolut konvergenten Reihe ist die oben beschriebene alternierende harmonische Reihe (Beispiel 3.12)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(a) positive Glieder:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots &\geq \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots &= \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots &\longrightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(b) negative Glieder:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

Würde die linke Seite konvergieren, dann nach (iii) des letzten Satzes auch die mit -2 multiplizierte linke Seite (beide Reihen hier sind, wenn konvergent, dann auch absolut konvergent). Die harmonische Reihe ist jedoch divergent (Beispiel 3.11). ζ .

Bemerkung

Man erhält hier eine Idee, wie der Beweis des Riemann'schen Umordnungssatzes (Satz 3.13 (iii)) funktioniert:

O.B.d.A. sei $a > 0$. Dann nimmt man von der Reihe so viele positive Glieder, bis man a das erste Mal überschritten hat, danach so viele negative Glieder, bis man a das erste Mal wieder unterschritten hat, etc.

Folgerung

Sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergiert (absolut)} \\ \iff \\ \sum_{k=0}^{\infty} x_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} y_k \text{ konvergieren (absolut).} \end{aligned}$$

Im Falle der Konvergenz gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

Beweis

„ \implies “:

Daß die Konvergenz der komplexen Reihe hinreichend ist für die Konvergenz der beiden reellen Reihen, folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satz für Folgen (Satz 3.4), angewandt auf die Folgen der Partialsummen. Die Aussage über die absolute Konvergenz erhält man aus den Abschätzungen ($m \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m |x_k| &\leq \sum_{k=0}^m |z_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| < \infty, \\ \sum_{k=0}^m |y_k| &\leq \sum_{k=0}^m |z_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| < \infty, \end{aligned}$$

„ \impliedby “:

Satz 3.14.

Beispiel 3.14

Die beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin kx$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx$ konvergieren für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |\sin kx|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |\cos kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad (x \in \mathbb{R})$$

hat man nämlich in $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Vergleichsreihe gefunden, welche sogar von x unabhängig ist; der entsprechende genaue Sachverhalt wird noch in Satz 3.19 behandelt.

Aufgabe

Man begründe anhand von

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \geq 2)$$

und anschließender Summation, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist.

Man sagt, die beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin kx$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx$ konvergieren *gleichmäßig*. Nach dem letzten Satz konvergiert dann auch die komplexe Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\cos kx + i \cdot \sin kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin kx$$

für alle reellen Zahlen x .

3.2.5 Konvergenzkriterien

Hier werden einige Kriterien aufgelistet, mit Hilfe derer sich eine vorgelegte Reihe auf Konvergenz untersuchen läßt.

Man beachte

Mit Hilfe eines Konvergenzkriteriums kann lediglich festgestellt werden, *ob* eine Reihe konvergiert. Von Ausnahmefällen abgesehen, läßt sich nicht feststellen,

- wie schnell eine Reihe ggfs. konvergiert,
- welchen Grenzwert sie bei Konvergenz hat.

Die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit ist ein Problem der numerischen Mathematik, das Problem der Berechnung des Grenzwertes läßt sich nur in Spezialfällen lösen.

Satz 3.15 (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummenfolge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, m.a.W.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{p \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m < n}} \left(m, n > p \implies \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Beweis Satz 3.5

Das Cauchy-Kriterium wird selten verwendet, um konkrete Reihen auf Konvergenz zu untersuchen. Es wird aber zum Beweis anderer Konvergenz- bzw. Divergenzkriterien benutzt, welche dann in konkreten Fällen bequemer verwendbar sind. Außerdem ist es ein Kriterium, bei welchem die explizite Gestalt des Grenzwertes nicht auftritt.

Satz 3.16 (Notwendiges Kriterium)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Dann gilt:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$

Bei einer konvergenten Reihe bilden sowohl die einzelnen Summanden als auch die Reihenreste eine Nullfolge.

Beweis

- (i) Satz 3.15 mit $m := n - 1$
- (ii) Die Größe ε in Satz 3.15 (ii) hängt von m und n nicht ab, die Aussage gilt also gleichmäßig in m und n .

Dieser Satz liefert nur ein notwendiges, kein für die Konvergenz einer Reihe hinreichendes Kriterium. Die harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel. Aufgrund von

$$A \implies B \quad \equiv \quad \neg B \implies \neg A$$

läßt sich dieses Kriterium aber verwenden, um auf die Divergenz einer Reihe zu schließen:

$$\neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right) \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergiert.}$$

*** Beispiel 3.15**

Hier soll nachgewiesen werden, daß die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \sin kx$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \cos kx$ für keine Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergieren mit der Ausnahme, daß die erste Reihe für ganzzahlige Vielfache von π trivialerweise doch konvergiert. Im weiteren Verlauf dieses Beispiels wird daher $x \in \mathbb{R}$, $x \neq n\pi$, ($n \in \mathbb{Z}$) vorausgesetzt.

Würde eine der beiden Reihen konvergieren, so müßte nach Satz 3.16 die Folge der Reihenglieder $\{\sin kx\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ oder $\{\cos kx\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge sein. Es wird jetzt gezeigt, daß diese beiden Folgen nicht einmal konvergieren.

Im Widerspruch dazu konvergiere etwa die erste, sei $b := \lim_{k \rightarrow \infty} \sin kx$. Wegen

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \quad (y \in \mathbb{R})$$

und Anwendung der Rechengesetze für konvergente Folgen (Satz 3.1) konvergiert dann auch die Folge $\{\cos^2 kx\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, und zwar gegen $1 - b^2$. Also hat die Folge $\{\cos kx\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ selbst einen der Punkte $\pm\sqrt{1 - b^2}$ (u.U. beide) als Häufungspunkt, o.B.d.A. $a := +\sqrt{1 - b^2}$. In jeder Umgebung von a liegen dann unendlich viele Glieder der Folge, und nach Definition 3.8 und dem anschließenden Satz existiert eine Teilfolge $\{\cos k_l x\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ von $\{\cos kx\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, welche gegen a konvergiert:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \cos k_l x = a.$$

Für diese Teilfolge gilt dann wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes auch

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin kx = \lim_{l \rightarrow \infty} \sin k_l x.$$

Nach Satz 3.4 würde dann auch die komplexe Folge

$$e^{ik_l x} = \cos k_l x + i \cdot \sin k_l x$$

für $l \rightarrow \infty$ einen Grenzwert haben, und das ist aufgrund einer Hausaufgabe nicht der Fall.

Bemerkung

In Beispiel 3.14 wurde die gleichmäßige Konvergenz der beiden Funktionenreihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin kx$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx$ für $x \in \mathbb{R}$ nachgewiesen. Im letzten Beispiel ergab sich, daß die beiden Funktionenreihen $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ (außer der Sinusreihe für $x = n\pi$) für kein $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Man kann sich fragen, wo die „Grenze“ zwischen Konvergenz und Nicht-Konvergenz liegt, m.a.W., für welches $\alpha \in [0, 2]$ konvergieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sin kx \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos kx,$$

und für welche α divergieren sie?

Diese Frage ist recht schwierig zu beantworten. Man kann die Konvergenz beider Reihen für $\alpha = 1$ (außer der Kosinusreihe für $x = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$) zeigen, allerdings erfordert das schon einen ziemlichen technischen Aufwand (Fourier-Reihen, Taylor-Reihen, komplexe Analysis). Man erhält

$$-\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq n \cdot 2\pi)$$

Satz 3.17

Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern konvergiert genau dann, wenn die (monoton wachsende) Folge ihrer Teilsummen beschränkt ist.

Die folgenden beiden Kriterien sind Vergleichskriterien. Im Falle der Konvergenz liefern sie gleich die absolute Konvergenz.

Satz 3.18 (*Majorantenkriterium*, hinreichendes Kriterium für absolute Konvergenz)

Seien $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, $N \in \mathbb{N}$. Es gelte

(i) $|a_k| \leq b_k \quad (k \geq N),$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist konvergent.

Beh. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

Satz 3.19 (*Minorantenkriterium*, hinreichendes Kriterium für Divergenz reeller Reihen mit nicht-negativen Summanden)

Seien $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, $N \in \mathbb{N}$. Es gelte

(i) $a_k \geq b_k \geq 0 \quad (k \geq N),$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist divergent.

Beh. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Bemerkung

- (i) Beim Majorantenkriterium kann man auf die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ schließen. Beim Minorantenkriterium darf die Bedingung

$$a_k \geq b_k \quad (k \geq N)$$

nicht ersetzt werden durch die Bedingung

$$|a_k| \geq b_k \quad (k \geq N),$$

wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:

$$b_k := \frac{1}{2k}, \quad a_k := \frac{(-1)^k}{k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

dann ist

$$b_k \leq |a_k| \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent,}$$

jedoch ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{ konvergent.}$$

- (ii) Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums (Satz 3.15) zeigt man, daß eine absolut konvergente Reihe erst recht konvergent ist.

Bemerkung

Um das Majoranten- oder Minorantenkriterium anwenden zu können, wird ein Vorrat an Vergleichsreihen benötigt, deren Konvergenz bzw. Divergenz bekannt ist. Als wichtigste seien hier notiert:

- (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ ist $\begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } 0 \leq \alpha < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } 1 \leq \alpha \end{cases}$
- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ist $\begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } 1 < \alpha \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Beispiele 3.16

- (i) Sei $a_n := \sqrt{n^2 + 1} - n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1} + n} \\ &= \frac{1}{n + 1 + n} \geq \frac{1}{3n} \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

und die harmonische Reihe ist divergent.

(ii) Sei $a_n := \sqrt{n^4 + 1} - n^2$ ($n \in \mathbb{N}_0$), dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |\sqrt{n^4 + 1} - n^2| = \sqrt{n^4 + 1} - n^2 \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{n^4 + 1 - n^4}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2} \leq \frac{1}{2n^2} \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert nach (ii) der letzten Bemerkung oder dem folgenden direkten Argument:

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq 2. \end{aligned}$$

Die Partialsummenfolge dieser positiven Reihe ist also monoton wachsend und beschränkt, somit ist die Reihe konvergent.

Die folgenden beiden Kriterien liefern zwar immer gleich die absolute Konvergenz der vorgelegten Reihe, sie bilden jedoch die wichtigsten technischen Hilfsmittel für Konvergenzuntersuchungen. Sie fußen auf dem Majoranten- bzw. Minorantenkriterium und benutzen als Vergleichsreihe die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

welche für $|q| < 1$ absolut konvergent und für $|q| \geq 1$ nach Satz 3.16 divergent ist.

Satz 3.20 (Wurzelkriterium)

Vorgelegt seien die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und eine Zahl $q \in [0, 1)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
- (ii) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Beweis

$$(i) \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \iff |a_n| \leq q^n \implies \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty.$$

(ii) In diesem Fall ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, da für unendlich viele n auch $|a_n| \geq 1$ ist.

Satz 3.21 (Quotientenkriterium)

Vorgelegt seien die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und eine Zahl $q \in [0, 1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \neq 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

$$(i) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent.}$$

$$(ii) \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } n \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist divergent.}$$

Beweis

(i) Aus der Bedingung $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ folgt mit vollständiger Induktion die Beziehung

$$|a_n| \leq |a_0| \cdot q^n,$$

also ist die geometrische Reihe $|a_0| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ eine (konvergente) Majorante.

(ii) Ist von einer Zahl $N \in \mathbb{N}$ ab $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle $n \geq N$, so gilt für diese Zahlen n

$$|a_n| \geq |a_N|,$$

d.h. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.

Bemerkung

(i) In den Teilen (i) des Wurzel- und des Quotientenkriteriums kann die Bedingung „für alle n “ ersetzt werden durch „für fast alle n “.

(ii) Will man das Wurzel- oder das Quotientenkriterium anwenden, so darf man sich nicht mit dem Nachweis begnügen, daß der Ausdruck $\sqrt[n]{|a_n|}$ oder $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ fast immer < 1 ist; es ist unumgänglich, eine feste positive Zahl $q < 1$ zu benennen, welche ab einem gewissen Index N ab nicht mehr von diesen Ausdrücken übertroffen wird, andernfalls versagen beide Kriterien.

Beispiel 3.17

Seien $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := \frac{1}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$), dann sind die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent};$$

beide Male gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad , \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

$$\sqrt[n]{|b_n|} < 1 \quad , \quad \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1.$$

Beispiel 3.18

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := \frac{x^n}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}_0$), dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq q := \frac{1}{2} < 1$$

für alle hinreichend großen n .

Hinweis: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Beispiel 3.19

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), dann erhält man mit dem Quotientenkriterium für $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} =$$

(i) $|x| > 1$: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für fast alle n , also liegt Divergenz vor;

(ii) $|x| < 1$: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < |x| < 1$ für fast alle n , also liegt Konvergenz vor;

(iii) $x = +1$: Konvergenz nach dem Leibniz-Kriterium (Beispiel 3.12);

(iv) $x = -1$: Divergenz (harmonische Reihe, Beispiel 3.11).

Hinweis: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1).$

In vielen Beispielen existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. In solchen Fällen lassen sich die Konvergenzaussagen etwas übersichtlicher formulieren.

Satz 3.22

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

- (i) Wenn $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existiert, dann existiert auch $\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, und es ist $\alpha = \beta$.
- (ii) $\alpha < 1 \vee \beta < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent,
- $\alpha > 1 \vee \beta > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Bemerkung

- (i) Wieder läßt sich im Fall $\alpha = 1$ keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz treffen.
- (ii) Wenn die Konvergenz einer unendlichen Reihe über das Quotientenkriterium festgestellt werden kann, dann auch über das Wurzelkriterium; letzteres ist also leistungsfähiger, i.a. aber auch schwieriger zu handhaben.

Beispiel 3.20

Dieses Beispiel zeigt, daß das Wurzelkriterium stärker ist als das Quotientenkriterium. Untersucht werden soll die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

- (i) Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2 + (-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n}.$$

Die Folge $\left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat die beiden Häufungspunkte $1/6$ und $3/2$, konvergiert also nicht:

$$\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{6} < \frac{3}{2} = \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums sind demnach keine Aussagen in bezug auf das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich.

(ii) Wurzelkriterium:

Mit dem Wurzelkriterium hingegen läßt sich die Konvergenz der Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nachweisen:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2 + (-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Daraus gewinnt man die Abschätzung ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} \sqrt[n]{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

nach Beispiel 3.8.

Also ist die vorgelegte Reihe konvergent nach Satz 3.3 (ii).

3.3 Potenzreihen

Im Anschluß an das Wurzel- und Quotientenkriterium wurden zwei Beispiele von unendlichen Reihen behandelt, welche in der Mathematik und ihren Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften eine fundamentale Rolle spielen.

Definition 3.12

Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge und $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad (3.10)$$

heißt eine *Potenzreihe* mit dem *Entwicklungspunkt* oder *Mittelpunkt* z_0 und den *Koeffizienten* a_n .

Bemerkung

- (i) So wie unendliche numerische Reihen in einem gewissen Sinne Verallgemeinerungen endlicher Summen sind, so sind Potenzreihen die analoge Verallgemeinerung von Polynomen.
- (ii) Wie bei Polynomen auch kann man mit Hilfe der Substitution $\zeta := z - z_0$ eine Potenzreihe immer auf die Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $\zeta_0 = 0$ bringen. Daher beschränkt man sich manchmal auf die Betrachtung von Potenzreihen mit dem Entwicklungspunkt 0.

Mit der bisher entwickelten Theorie der unendlichen Reihen ist man in der Lage anzugeben, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

konvergiert.

3.3.1 Konvergenz von Potenzreihen

Es scheint plausibel, daß die Potenzreihe (3.10) konvergiert, wenn $|z - z_0|$ „klein“ ist und divergiert, wenn $|z - z_0|$ „groß“ ist, wobei die Begriffe klein und groß natürlich noch von den Koeffizienten a_n abhängen.

Sei $K(z_0)$ der Konvergenzbereich

$$K(z_0) := \left\{ z : z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konvergiert} \right\}.$$

Der Ausdruck $|z - z_0|$ ist „klein“ für alle Zahlen z innerhalb eines Kreises vom Radius r um z_0 und „groß“ für alle Zahlen z außerhalb dieses Kreises.

Vermutung (Abb. (3.6))

$$\bigvee_{r>0} K_r(z_0) := K(z_0) = \{z : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}.$$

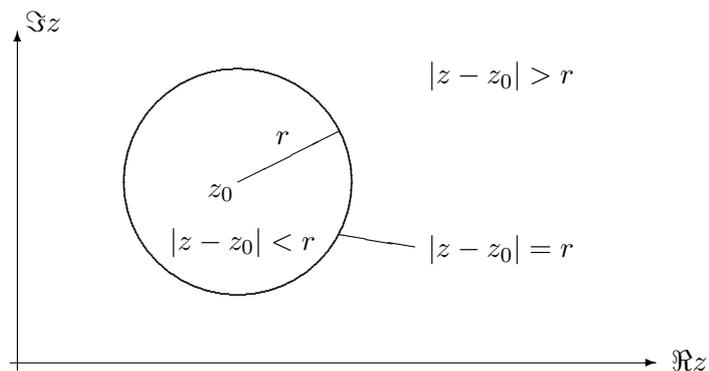


Abbildung 3.5: Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Die Vermutung besagt also, daß es sich bei dem Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

um einen Kreis vom Radius r um den Punkt z_0 in der komplexen Ebene handelt.

Problem Wie berechnet man r ?

Zur Lösung dieses Problems wird zunächst die folgende Annahme gemacht:

Annahme

Die Folge $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiere gegen eine Zahl $\neq 0$. Sei

$$r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (3.11)$$

Nach dem Wurzelkriterium (Satz 3.20) konvergiert die Potenzreihe für solche Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$\bigvee_{q \in [0,1)} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ (alle bis auf endlich viele). Genau für diese Zahlen z gilt nun

$$\bigvee_{q \in [0,1)} |z - z_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z - z_0|}{r} \leq q < 1.$$

Nun gilt die Äquivalenz

$$q := \frac{|z - z_0|}{r} < 1 \quad \iff \quad |z - z_0| < r,$$

d.h. mit Hilfe des Wurzelkriteriums erhält man die Konvergenz der Potenzreihe für alle Zahlen z innerhalb des Konvergenzkreises $K_r(z_0)$.

Definition 3.13

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. Sei r definiert durch eine der folgenden Bedingungen:

- (i) (cf. Satz und Definition 3.9 (p. 183) sowie auch (ii) - (iv) der Bemerkung auf p. 211)

$$r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

- (ii) $r := 0$, falls die Folge $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ unbeschränkt ist.

- (iii) Man benutzt die Konvention $r = \infty$, falls gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

r heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Satz 3.23 (Konvergenzsatz für Potenzreihen)

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und mit den Konventionen von Definition 3.13 sei r definiert durch

$$r := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dann ist die Potenzreihe konvergent für die folgenden $z \in \mathbb{C}$:

- (i) $r = \infty$ (= „ $\frac{1}{0}$ “):
absolut konvergent für jedes $z \in \mathbb{C}$.
- (ii) $0 < r < \infty$:
 - (a) absolut konvergent für $\{z : |z - z_0| < r\}$;
 - (b) divergent für $\{z : |z - z_0| > r\}$;
 - (c) konvergent oder divergent für $\{z : |z - z_0| = r\}$.
- (iii) $r = 0$:
konvergent nur für $z = z_0$.

Beweis

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Wurzelkriterium und wurde oben schon angedeutet:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = |z - z_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z - z_0|}{r}$$

- (i) $r = \infty \quad \implies \quad \frac{|z - z_0|}{r} \leq q := \frac{1}{2} < 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$
- (ii) $0 < r < \infty \quad \implies \quad \frac{|z - z_0|}{r} \begin{cases} < 1 & : \text{ absolute Konvergenz} \\ > 1 & : \text{ Divergenz} \end{cases}$
- (iii) $r = 0 \quad \implies \quad |z - z_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$ nur für $z = z_0$.

Aus der Abbildung 3.6 werden die Namen *Konvergenzkreis* und *Konvergenzradius* verständlich.

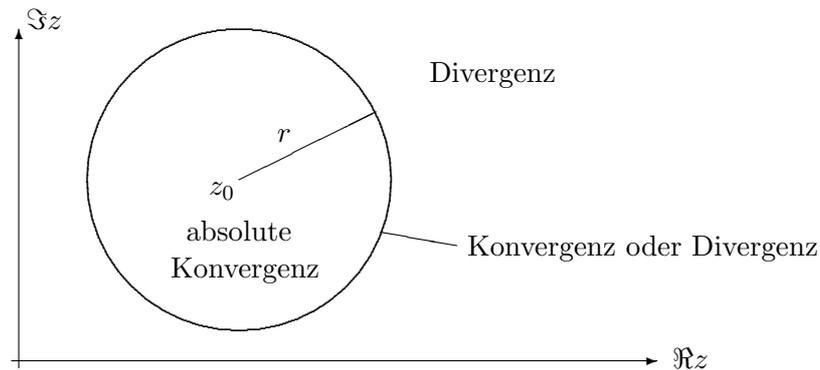


Abbildung 3.6: Konvergenzkreis einer Potenzreihe

Bemerkung

- (i) Im reellen Fall tritt an die Stelle des Konvergenzkreises ein symmetrisches Intervall um den Punkt $z = x_0$ der Länge $2r$ (Abb. 3.7).
- (ii) Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, so ist

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

- (iii) Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: \alpha$ existiert, dann kann man den Konvergenzradius auch durch

$$r = \frac{1}{\alpha}$$

angeben, wobei wieder vereinbart wird:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 & \implies & r = \infty \\ \left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ unbeschränkt} & \implies & r = 0 \end{array}$$

- (iv) In (iii) wird eine Aussage gemacht für den Fall, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existiert. Keinesfalls darf daraus abgeleitet werden, daß sich im Falle der Nichtexistenz dieses Grenzwertes der Konvergenzradius aus

$$\frac{1}{\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

berechnen läßt!

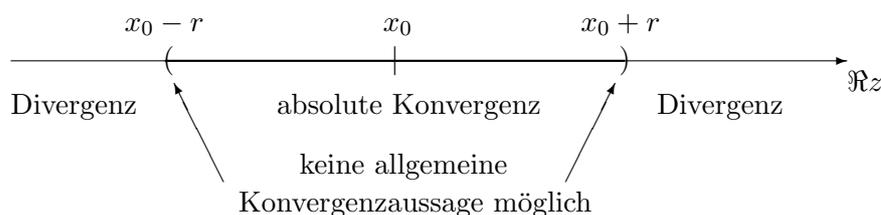


Abbildung 3.7: Konvergenzintervall einer reellen Potenzreihe

Beispiele 3.21

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

Das Quotientenkriterium liefert

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist also

$$r = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Mit dem Wurzelkriterium kommt man hier ebenso einfach zum Ziel:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = 2.$$

Untersuchung der Randpunkte

An jedem Punkt z mit $|z| = 2$ liegt Divergenz vor, denn

$$z = 2 \cdot e^{i\phi} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi},$$

und diese Reihe ist divergent, da ihre Glieder wegen $|e^{in\phi}| = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$ keine Nullfolge bilden.

(ii) Man betrachte die drei reellen Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Der Konvergenzradius aller drei Reihen ist gleich $1 = 1/1$ wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Damit konvergieren alle drei Reihen im Intervall $(0, 1)$ absolut und divergieren in $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Eine Untersuchung der Randpunkte liefert jedoch (warum?):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x^n & \text{ konvergiert} & \iff & x \in (-1, 1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n & \text{ konvergiert} & \iff & x \in [-1, 1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n & \text{ konvergiert} & \iff & x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

(iii) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, denn es gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{n+1!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Eine für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe heißt *beständig konvergent*.

3.3.2 Eigenschaften von Potenzreihen

Potenzreihen dürfen dort, wo sie konvergieren, gliedweise addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden:

Satz 3.24

Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ mögen die Konvergenzradien r_a und r_b haben.

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \min\{r_a, r_b\}$ ist

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(z - z_0)^n \\ \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l (z - z_0)^n \end{aligned}$$

(ii) Ist $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < r_a$ und ist $f(z_0) = a_0 \neq 0$, so läßt sich $1/f$ in einer gewissen ρ -Umgebung von z_0 wieder durch eine Potenzreihe darstellen:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < \rho).$$

Die Koeffizienten d_n sind allerdings einigermaßen mühsam zu bestimmen.

Zur Motivation des folgenden Satzes dient der Identitätssatz für Polynome (Satz 3.3)

Stimmen die Werte zweier Polynome vom Grad n

$$p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{und} \quad q(z) := \sum_{k=0}^n b_k z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

an $(n+1)$ verschiedenen Stellen überein, so sind die Polynome vollkommen identisch, d.h. es ist $a_k = b_k$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ und somit $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Ein dazu analoges Ergebnis gilt auch für Potenzreihen:

Satz 3.25 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Die beiden Potenzreihen

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

mögen einen gemeinsamen Konvergenzkreis um z_0 herum haben, etwa den Kreis

$$K := \{z : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \min\{r_a, r_b\}\}.$$

Beh.
$$\bigwedge_{z \in K} f(z) = g(z) \quad \iff \quad \bigwedge_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = b_k.$$

Bemerkung

Dieser Satz liefert die Grundlage für den Koeffizientenvergleich zweier Potenzreihen. Hinreichend für seine Anwendbarkeit ist übrigens schon, daß die Werte von $f(z)$ und $g(z)$ nur an unendlich vielen Stellen z übereinzustimmen brauchen, die sich bei z_0 häufen, also:

(a) $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge, $z_n \in K$, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$

(b) $f(z_n) = g(z_n) \quad (n \in \mathbb{N})$

Der folgende Satz liefert eine Anwendung des Identitätssatzes durch Koeffizientenvergleich zweier Potenzreihen und klärt (hoffentlich!) abschließend, wo die Begriffe „gerade Funktion“ und „ungerade Funktion“ ihren Ursprung haben:

Satz 3.26

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und dem Konvergenzradius $r > 0$. Sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (x \in (-r, r)).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist eine gerade Funktion} &\iff a_k = 0 \text{ f\u00fcr ungerade Indices } k, \\ f \text{ ist eine ungerade Funktion} &\iff a_k = 0 \text{ f\u00fcr gerade Indices } k. \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} f \text{ ist eine gerade Funktion} &\iff f(x) = f(-x) \quad (|x| < r) \\ &\iff \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k \quad (|x| < r) \end{aligned}$$

Nach dem Identit\u00e4tssatz f\u00fcr Potenzreihen (Satz 3.25) folgt daraus $a_k = (-1)^k a_k$ f\u00fcr alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $a_k = 0$ f\u00fcr ungerade Indices $k \in \mathbb{N}_0$.

Der Beweis f\u00fcr ungerade Funktionen verl\u00e4uft analog.

3.3.3 Beispiele

Beispiel 3.22

Die drei Potenzreihen

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3.12)$$

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.13)$$

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.14)$$

sind best\u00e4ndig konvergent, d.h. sie konvergieren f\u00fcr alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$.

Beweis

F\u00fcr die Reihe (3.12) wurde das im Beispiel auf p. 213 nachgewiesen. F\u00fcr die beiden anderen Reihen ist die Reihe (3.12) eine absolut konvergente Majorante, etwa f\u00fcr die Reihe (3.13):

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} < \infty,$$

analog f\u00fcr die Reihe (3.14). Insbesondere lassen sich diese drei Potenzreihen f\u00fcr alle $z \in \mathbb{C}$ auswerten und gliedweise addieren.

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $z := ix$. Dann erhält man für die Funktionen aus (3.12) - (3.14) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 g(x) + i \cdot h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \cdot (i^2)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.15) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
 &= f(ix)
 \end{aligned}$$

Es sind

$$\begin{aligned}
 e^x &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && (x \in \mathbb{R}), \\
 \cos x &:= \Re e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && (x \in \mathbb{R}), \quad (3.16) \\
 \sin x &:= \Im e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && (x \in \mathbb{R}),
 \end{aligned}$$

und (3.15) ist die Euler'sche Formel für $x \in \mathbb{R}$.

Diese drei Potenzreihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut, so daß man schreibt:

$$\begin{aligned}
 e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} && (z \in \mathbb{C}), \\
 \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} && (z \in \mathbb{C}), \quad (3.17) \\
 \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} && (z \in \mathbb{C}),
 \end{aligned}$$

ja, man hat dadurch die komplexe Exponentialfunktion und die komplexen trigonometrischen Funktionen überhaupt erst einmal *definiert*.

Aufgabe

Man zeige die beständige Konvergenz der Potenzreihe für die komplexe Exponentialfunktion mit dem Wurzelkriterium. Dazu ist zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ oder, was auf dasselbe hinausläuft: $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

3.4 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Folgen:
 - Konvergenz
 - Divergenz
 - Grenzwert
 - Nullfolge
- Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen
- Grundlagen unendlicher Reihen (Konvergenz und Divergenz)

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Beispiele konvergenter und divergenter unendlicher Reihen
- Rechnen mit konvergenten unendlichen Reihen
- Umordnung von Reihen, absolute Konvergenz
- Potenzreihen

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Konvergenz- und Divergenzuntersuchungen bei unendlichen Reihen, Anwendung von Vergleichsreihen
- Berechnung des Konvergenzradius' von Potenzreihen

Kapitel 4

Grenzwerte und Stetigkeit

4.1 Grenzwerte von Funktionen

Bei der Untersuchung des funktionellen Zusammenhanges zweier Größen ist häufig nicht der Ist-Zustand einer gegebenen Größe, also ihr Funktionswert, von Interesse sondern die Frage, welches Änderungsverhalten diese Größe zeigt.

Beispiel

Nicht nur der Blick aus dem Fenster, sondern vor allen Dingen der Blick auf das Barometer kann morgens darüber Aufschluß geben, ob der Luftdruck gesunken ist und man daher einen Regenschirm mitnehmen sollte.

4.1.1 Problemstellung

Beispiel 4.1

Man betrachte eine stromdurchflossene elektrische Doppelleitung aus zwei langen parallelen Leitern, deren Durchmesser gegenüber dem Abstand $d := 2a$ der beiden Leiter voneinander vernachlässigbar klein sein soll, s. Abb. 4.1.

Die Ströme in den beiden Leitungen haben die gleiche Stärke I , fließen jedoch in entgegengesetzte Richtungen. Sie erzeugen, kreisförmig um die jeweiligen Leiter, ein radialsymmetrisches Magnetfeld mit jeweils entgegengesetzter Orientierung.

Problem

- (i) Wie groß ist das Magnetfeld \vec{H} auf der Verbindungslinie der beiden Leiterquerschnitte (Abszisse), d.h. wie ändert es sich in Abhängigkeit von x ($x \in \mathbb{R}$)?
- (ii) Wie hängt das Magnetfeld \vec{H} vom Strom I ab?

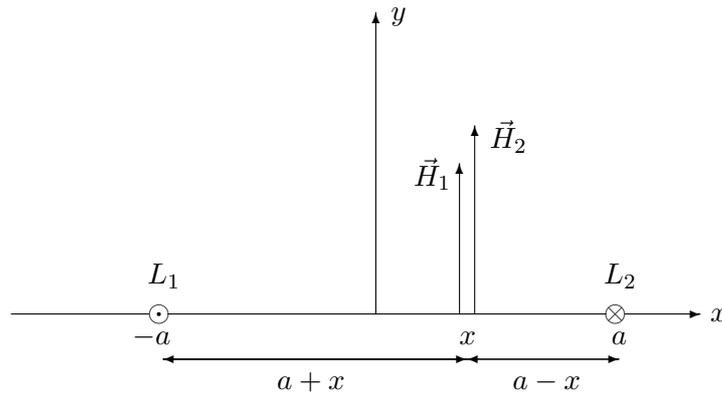


Abbildung 4.1: Magnetfeld eines elektrischen Doppelleiters

Lösung

Nach dem *Biot-Savart'schen Gesetz* ist das vom Leiter L_1 am Aufpunkt $\langle x, 0 \rangle \in \mathbb{R}^2$ erzeugte Magnetfeld gegeben durch die (vektorwertige) Funktion

$$\vec{H}_1(x) := \vec{h}_1(x, 0) := \frac{I}{2\pi|x - (-a)|} \cdot \vec{e}_2 = \frac{I}{2\pi(a+x)} \cdot \vec{e}_2 \quad (x \neq -a);$$

analog lautet das durch den Leiter L_2 an der Stelle $\langle x, 0 \rangle$ hervorgerufene Feld

$$\vec{H}_2(x) := \vec{h}_2(x, 0) := \frac{I}{2\pi|x - a|} \cdot \vec{e}_2 = \frac{I}{2\pi(a-x)} \cdot \vec{e}_2 \quad (x \neq a).$$

Eine Funktion von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m (bzw. von \mathbb{V}^n nach \mathbb{V}^m , s. die Bemerkung im Skript „Lineare Algebra“) für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$ nennt man auch ein *Vektorfeld*.

Das resultierende Magnetfeld beider Leiter ist dann die Superposition der einzelnen Felder:

$$\begin{aligned} \vec{H}(x) &:= \vec{h}(x, 0) := \vec{h}_1(x, 0) + \vec{h}_2(x, 0) \\ &= \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \cdot \vec{e}_2 = \frac{Ia}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot \vec{e}_2 \end{aligned}$$

und ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$, s. Abb. 4.2.

Eigenschaften des Magnetfeldes \vec{H}

- Die Norm $\|\vec{H}\|$ des Feldstärkevektors \vec{H} (korrekt: der Feldstärkefunktion $\vec{H}(\cdot)$) ist eine gebrochenrationale Funktion mit den beiden Polstellen $x = -a$ und $x = a$.
- Zwischen den beiden Leitern nimmt die Feldstärke in Richtung auf die Leiter zu und wird bei Annäherung an diese beliebig groß.

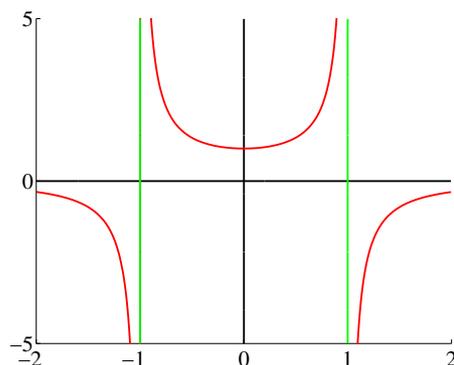


Abbildung 4.2: Vorzeichenbehaftete Stärke des Magnetfeldes einer elektrischen Doppelleitung in Umgebungen von $x = -1$ und $x = 1$

- Nach außen hin (für $x \rightarrow \pm\infty$) fällt die Feldstärke gegen Null ab, wobei sich gleichzeitig die Orientierung des Feldstärkevektors umkehrt.
- Das Magnetfeld hängt auch vom Strom I ab, und zwar linear.

Die Abhängigkeit des Magnetfeldes \vec{H} vom Strom I ist so „vernünftig“, daß man die Größe I der jeweiligen Stromstärke einfach in die Gleichung „einsetzen“ und \vec{H} „ausrechnen“ kann. Anders dagegen verhält es sich mit der Abhängigkeit vom Ort x :

Für $x \in \{-a, a\}$ ist $\vec{H}(x)$ nicht definiert, und man muß die Funktionswerte von $\vec{H}(x)$ für „in der Nähe von $-a$ oder a “ gelegene Werte von x ausrechnen und damit das Verhalten untersuchen, wenn „ x gegen $-a$ oder a strebt“.

Beispiel 4.2

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei definiert durch

$$f(x) := \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

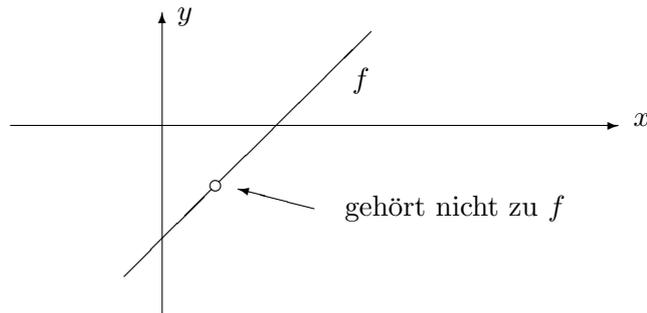
Nun ist

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}),$$

und obwohl f an der Stelle $x = 1$ nicht definiert ist, verhält es sich bei $x = 1$ „vernünftig“ in dem Sinne, daß man eine glatt durchgezogene Linie erhält, wenn man den Punkt $\langle 1, -1 \rangle$ zum Funktionsgraphen hinzunimmt, s. Abb. 4.3.

Im folgenden sollen die Begriffe

- „strebt gegen“

Abbildung 4.3: (Behebbarer) Definitionslücke einer Funktion f

- „verhält sich vernünftig bei Annäherung an“

präzisiert werden.

Definition 4.1

Seien $\varepsilon > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}$.

- (i) $U_\varepsilon(\xi) := (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ heißt ε -Umgebung von ξ .
- (ii) $\dot{U}_\varepsilon(\xi) := U_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\} = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 < |x - \xi| < \varepsilon\}$
heißt *punktierte* oder *gelochte* ε -Umgebung von ξ .
- (iii) Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$. ξ heißt *Häufungspunkt* von \mathcal{M} , wenn in jeder ε -Umgebung von ξ beliebig viele Punkte aus \mathcal{M} liegen:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \mathcal{M} \cap \dot{U}_\varepsilon(\xi) \neq \emptyset.$$

Dazu äquivalent ist:

Es existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{M} , die gegen ξ konvergiert und deren Glieder alle von ξ verschieden sind.

Man beachte: ξ kann, muß aber nicht zu \mathcal{M} gehören!

- (iv) Ist $\xi \in \mathcal{M}$ und ξ nicht Häufungspunkt von \mathcal{M} , dann heißt ξ ein *isolierter Punkt* von \mathcal{M} .

Beispiele 4.3

- (i) $\mathcal{M} := (0, 1)$: Jeder Punkt $\xi \in [0, 1]$ ist ein Häufungspunkt von \mathcal{M} .
- (ii) $\mathcal{M} := [0, 1] \cup \{2\}$: 2 ist ein isolierter Punkt von \mathcal{M} , also kein Häufungspunkt.

(iii) Sei die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann sind die Zahlen -1 und $+1$ zwei Häufungspunkte der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (Beispiel 3.4), aber nicht Häufungspunkte der Menge

$$\mathcal{M} := \{a_n : n \in \mathbb{N} \text{ geeignet}\} = \{-1, 1\}.$$

Bemerkung

Fragen nach Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen sind nur für Häufungspunkte definiert (Grenzwert und Differenzierbarkeit), bzw. interessant (Stetigkeit). Im folgenden wird daher oft vorausgesetzt, daß es sich beim Definitionsbereich einer Funktion um ein Intervall oder um eine endliche Vereinigung von Intervallen handelt. Nach (i) des letzten Beispiels ist dann jeder Punkt des Definitionsbereiches ein Häufungspunkt.

4.1.2 Eigentlicher Grenzwert

Man betrachte die Funktion f aus Beispiel 4.2 des letzten Abschnittes:

$$f(x) := \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

f ist an der Stelle $\xi = 1$ nicht definiert, unterscheidet sich bei Annäherung an $\xi = 1$ aber beliebig wenig vom Wert

$$(x - 2) \Big|_{x=1} = -1.$$

Definition 4.2

Seien f eine Funktion, $\xi \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $\eta \in \mathbb{R}$.

f besitzt an der Stelle ξ den Grenzwert η , wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D(f)$, die gegen ξ konvergiert und deren Glieder x_n alle $\neq \xi$ sind, stets auch die Folge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen η .

Schreibweisen:

- $f(x) \longrightarrow \eta \quad \text{für} \quad x \longrightarrow \xi$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} f(x) = \eta$

Satz 4.1

Hat eine Funktion f an einer Stelle ξ den Grenzwert η , so ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis

Im Widerspruch dazu gebe es zwei Grenzwerte η und τ :

$$\begin{aligned} x_n \longrightarrow \xi &\implies f(x_n) \longrightarrow \eta && (n \rightarrow \infty), \\ y_n \longrightarrow \xi &\implies f(y_n) \longrightarrow \tau && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dann konvergiert auch die „gemischte“ Folge

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$$

gegen ξ . Nach Voraussetzung konvergiert dann auch die „gemischte Folge“ der Funktionswerte

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), f(x_3), f(y_3), \dots$$

Diese Folge hat die beiden Häufungspunkte (Definition 3.7, p. 181) η und τ , also folgt $\eta = \tau$.

Beispiel 4.4

(i) Die Funktion

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

hat für $x \rightarrow \xi = 2$ den Grenzwert $\eta = 4$.

Ohne entsprechende Sätze zur Verfügung zu haben, reicht es nicht, den Wert $\xi = 2$ einfach in die Funktionsgleichung „einzusetzen“; zumal das korrekt auch gar nicht immer geht, da f an der Stelle ξ nicht definiert zu sein braucht. Man muß vielmehr das Verhalten von f in einer ganzen – wenn auch kleinen – Umgebung des Punktes ξ untersuchen.

Vorgehensweise:

Man muß das, was man klein machen *will*, nämlich $|f(x) - \eta|$, abzuschätzen versuchen durch das, was man klein machen *kann*, nämlich $|x - \xi|$. Anders ausgedrückt: man muß die *Toleranz* $|f(x) - \eta|$ abzuschätzen versuchen durch die *Einstellgenauigkeit* $|x - \xi|$.

Wenn man eine Konstante $L \geq 0$ finden kann, so daß für alle $x \in D(f)$, welche in der Nähe von ξ liegen, gilt:

$$|f(x) - \eta| \leq L \cdot |x - \xi|, \quad (4.1)$$

so ist man fertig, denn die Konvergenz der rechten Seite gegen Null zieht auch die Konvergenz der linken Seite gegen Null nach sich (warum?).

Die Konstante L spielt hier die Rolle der (maximalen) „Übersetzung“. Diese Vorgehensweise muß zwar nicht immer zum Ziel führen, klappt bei einfachen Beispielen allerdings meistens.

Sei also $\xi = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - \eta| &= |f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2| \\ &\stackrel{(|x| \leq 3)}{\leq} 5 \cdot |x - 2| = 5|\xi - 2|. \end{aligned}$$

Da man lediglich am Verhalten von f in der Nähe von $\xi = 2$ interessiert ist, läßt sich die Einschränkung $0 \leq |x| \leq 3$ ohne weiteres machen.

(ii) Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & , \quad x \neq 2 \\ 1 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

hat für $x \rightarrow \xi = 2$ ebenfalls den Grenzwert $\eta = 4$.

Der Beweis ist derselbe wie in Teil (i). Man ist *nur* am Verhalten der Funktion in der Umgebung des Punktes $\xi = 2$ interessiert, nicht an ihrem Verhalten an diesem Punkt selbst – dort kann die Funktion irgendeinen Wert haben, ja sie muß dort nicht einmal definiert sein.

(iii) **Aufgabe**

Hat die Funktion

$$h(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$$

hat für $x \rightarrow \xi = 2$ einen Grenzwert? Wenn ja, welchen?

Beispiel 4.5

Die Funktion

$$f(x) := \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

hat für $x \rightarrow \xi = 1$ den Grenzwert $\eta = -1$.

Sei also $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Dann ist

$$|f(x) - (-1)| = \left| \frac{x-2}{x} + 1 \right| = \left| \frac{2x-2}{x} \right| = \frac{2}{|x|} \cdot |x-1|.$$

Da man am Verhalten von f in der Nähe von $\xi = 1$ interessiert ist, kann man die Einschränkung

$$0 < |x-1| < \frac{1}{2}$$

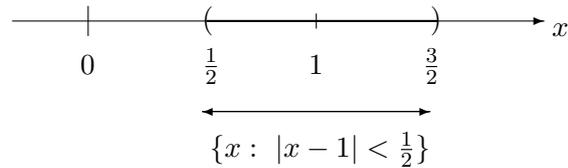


Abbildung 4.4: Betragmäßige Abschätzung

machen, denn dann muß x betragsmäßig größer als $1/2$ sein, s. Abb. 4.4:

$$|x| = |1 + x - 1| \geq 1 - |x - 1| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mit solchen Werten für x kann man dann in obiger Rechnung weiter fortfahren und erhält

$$|f(x) - (-1)| = \frac{2}{|x|} \cdot |x - 1| < \frac{2}{1/2} \cdot |x - 1| = 4 \cdot |x - 1|.$$

Jetzt ist leicht einzusehen, daß f für $x \rightarrow 1$ den Grenzwert $\eta = -1$ hat:

Seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so bestimmt, daß gilt:

$$n \geq N \implies |x_n - 1| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Dann erhält man mit der Abschätzung oben für alle $n \geq N$:

$$|f(x) - (-1)| < 4 \cdot |x - 1| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Da die gegen $\xi = 1$ konvergierende Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig gewählt werden kann, ist die Existenz des Grenzwertes $\eta = -1$ damit nachgewiesen.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen (Satz 4.1) ergeben sich sofort entsprechende Regeln für Grenzwerte von Funktionen:

Satz 4.2

Seien f und g zwei Funktionen, ξ sei ein Häufungspunkt von $D(f) \cap D(g)$. Die folgenden Grenzwerte mögen existieren:

$$a := \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \quad , \quad b := \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

Dann gilt:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \xi} (f \pm g)(x)$ existieren, und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = a \pm b$$

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim_{x \rightarrow \xi} (\lambda \cdot f)(x)$, und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lambda \cdot a$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \xi} (f \cdot g)(x)$ existiert, und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \right) = a \cdot b$$

(iv) Ist $b \neq 0$, so existiert $\lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$, und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)} = \frac{a}{b}$$

Dieser Satz sagt somit aus, daß die Grenzwertbildung mit den Grundrechenarten vertauschbar ist.

Für Kenner und Genießer der Linearen Algebra

Aus dem letzten Satz (i) und (ii) ergibt sich, daß die Menge der Funktionen, die an der Stelle ξ einen Grenzwert haben, einen Vektorraum bildet und daß die Abbildung, die jeder dieser Funktionen ihren Grenzwert zuordnet, eine lineare Abbildung ist.

Der folgende Satz liefert eine äquivalente Charakterisierung des Grenzwertbegriffes und erlangt auch im nächsten Abschnitt über Stetigkeit Bedeutung:

Satz 4.3

Seien f eine Funktion, ξ ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $\eta \in \mathbb{R}$.

Beh. f besitzt an der Stelle ξ den Grenzwert η \iff

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D(f)} \left[0 < |x - \xi| < \delta \implies |f(x) - \eta| < \varepsilon \right]$$

Die Aussage $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ bedeutet anschaulich, daß die Funktionswerte $f(x)$ beliebig nahe bei η liegen, wenn die Argumente x hinreichend wenig von ξ abweichen – ohne je mit ξ zusammenzufallen.

Zu jedem horizontalen Streifen der Breite 2ε um η kann man stets einen vertikalen Streifen der Breite 2δ um ξ finden, so daß der Funktionsgraph von f um den Punkt $\langle \xi, \eta \rangle$ herum – mit der möglichen Ausnahme des Punktes $\langle \xi, f(\xi) \rangle$ – das zugehörige $\varepsilon\delta$ -Rechteck nicht verlassen kann, s. Abb. 4.5 und Abb. 4.6.

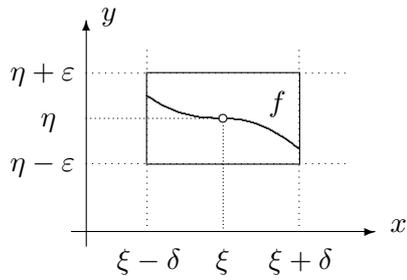


Abbildung 4.5: Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$$

$f(\xi)$ nicht definiert

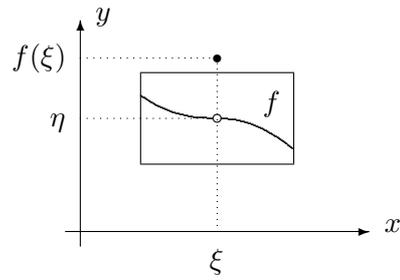


Abbildung 4.6: Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$$

$f(\xi) \neq \eta$

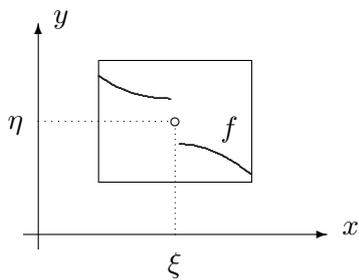


Abbildung 4.7: Kein Grenzwert

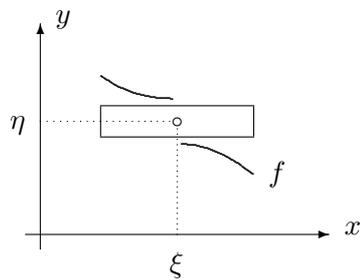


Abbildung 4.8: Kein Grenzwert

Dabei liegt die Betonung auf der Möglichkeit, das Schaubild von f in ein beliebig niedriges Rechteck einsperren zu können. Je niedriger man das Rechteck wählt, desto schmaler wird man es allerdings machen müssen. Wenn auch das nicht funktioniert, dann hat die Funktion an der Stelle ξ keinen Grenzwert, s. Abb. 4.7 und 4.8. Wie man aus Abb. 4.8 erkennt, würde bei der Wahl dieses (kleinen) Rechteckes mit $\langle \xi, \eta \rangle$ als Mittelpunkt eine Reduzierung der Breite des Rechteckes auch nicht dazu führen, daß der Graph von f vollständig in ihm enthalten ist.

Aufgabe

Strenggenommen ist mit einer Situation, wie in Abb. 4.8 beschrieben, nicht gezeigt, daß die Funktion f bei $x = \xi$ keinen Grenzwert hat sondern nur, daß eben η nicht ein Grenzwert sein kann.

Wie etwa könnte ein Beweis dafür aussehen, daß f an dieser Stelle überhaupt keinen Grenzwert besitzt?

Nachdrücklich sei noch einmal betont, daß man bei der Untersuchung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ den Punkt ξ nicht zu „betreten“ braucht, ja u.U. (falls $\xi \notin D(f)$) gar nicht betreten darf. Welchen Wert die Funktion f im Punkt ξ hat oder ob sie dort überhaupt definiert ist, spielt bei der Frage nach dem Grenzwert für $x \rightarrow \xi$ gar keine Rolle. Entscheidend ist allein das Verhalten von f in den punktierten δ -Umgebungen von ξ :

$$\dot{U}_\delta(\xi) := U_\delta(\xi) \setminus \{\xi\}.$$

Beispiel 4.6

Untersuchung des Grenzwertes der Funktion

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

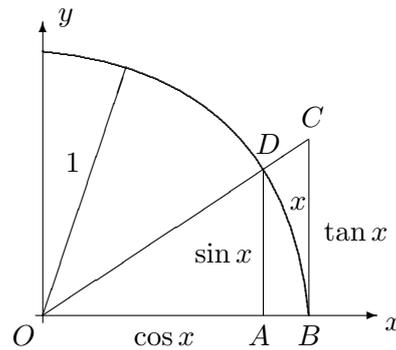
f ist an der Stelle 0 nicht definiert, da $0 \notin D(f)$, aber 0 ist ein Häufungspunkt von $D(f)$. Es ist also sinnvoll, den Grenzwert zu untersuchen. Da f eine gerade Funktion ist (warum?), kann man sich auf die Untersuchung des rechtsseitigen Grenzwertes

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

beschränken.

Aus Abbildung 4.9 liest man die folgenden Beziehungen ab:

$$\begin{aligned} \Delta OAD &< \text{Sektor } OBD < \Delta OBC \\ \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} &< \frac{x}{2\pi \cdot 1} \cdot \pi \cdot 1^2 < \frac{1 \cdot \tan x}{2} \end{aligned}$$

Abbildung 4.9: Zum Grenzwert $\frac{\sin x}{x}$ für $x \rightarrow 0$

Für $x > 0$ läßt sich die Ungleichung durch $\frac{\sin x}{2} > 0$ dividieren, und man erhält

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

also wegen $\cos x > 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ auch

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Die Funktionen

$$x \mapsto \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad x \mapsto \cos x$$

haben für $x \rightarrow 0$ den Grenzwert 1. Das ist anschaulich klar, dort sind die Funktionen auch definiert; allerdings ist das noch kein Beweis, welcher etwa wie folgt aussehen könnte:

Aus Abbildung 4.9 liest man ebenfalls ab:

$$0 \leq \sin x \leq x \quad (x > 0).$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ folgt also auch $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = 0$. Nun ist

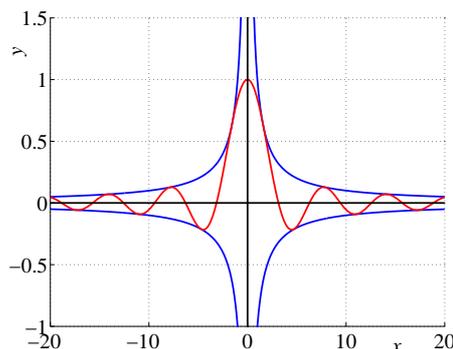
$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \sin^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 - \lim_{x \rightarrow 0+} \sin^2 x = 1 - 0 = 1.$$

Für jede Nullfolge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat die Folge $\{\cos x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte (Definition 3.7) -1 und $+1$. Wegen $\cos x > 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ folgt insgesamt $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = 1$.

Damit gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bemerkung

Abbildung 4.10: Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ für $x \rightarrow 0$

Aufgrund von

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1$$

bedeutet dieser Grenzwert die *Ableitung der Sinusfunktion an der Stelle 0*:

$$\left(\frac{d}{dx} \sin\right)(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1.$$

4.1.3 Einseitiger Grenzwert

Oft ist es zweckmäßig, an einer Stelle sog. *einseitige* Grenzwertuntersuchungen anzustellen. Darunter versteht man die Einschränkung, daß man sich dem in Frage stehenden Punkt $x = \xi$ nur von einer Seite her nähert, also von links *oder* von rechts.

Definition 4.3

Seien f eine Funktion, $\xi \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $\eta_l, \eta_r \in \mathbb{R}$.

f besitzt an der Stelle ξ den *linksseitigen Grenzwert* η_l (bzw. den *rechtsseitigen Grenzwert* η_r), wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D(f)$, die von links (bzw. rechts) gegen ξ konvergiert und deren Glieder x_n alle $\neq \xi$ sind, stets auch die Folge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen η_l (bzw. gegen η_r):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x_n < \xi}} f(x_n) = \eta_l \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x_n > \xi}} f(x_n) = \eta_r)$$

Schreibweisen:

$$\eta_l = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x < \xi}} f(x) = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$$

$$\eta_r = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x > \xi}} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$$

Satz 4.4

Eine Funktion f hat an der Stelle ξ genau dann einen Grenzwert, wenn sie dort einen linksseitigen - und einen rechtsseitigen Grenzwert hat und beide übereinstimmen.

Beispiele 4.7

- (i) In Beispiel 4.6 kommt es nicht darauf an, wie man sich der Stelle $\xi = 0$ nähert:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- (ii) „Sägezahnspannung“ mit periodischen Sprungstellen, s. Abb. 4.11.

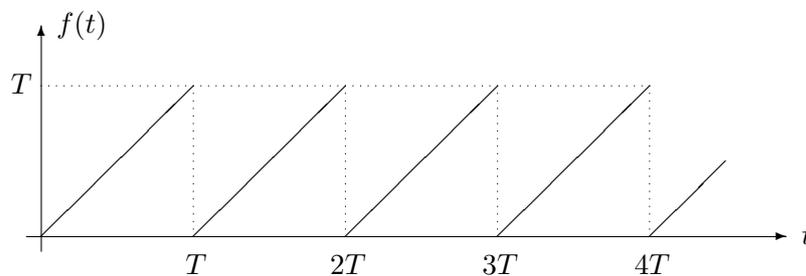


Abbildung 4.11: Sprungstelle bei einer „Sägezahnspannung“

$$f(t) := t - n \cdot T \quad (t \in [nT, (n+1)T), n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow nT^-} f(t) = T \quad , \quad \lim_{t \rightarrow nT^+} f(t) = 0$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, existiert der Grenzwert von f für $t \rightarrow nT$ nicht.

Bemerkung

- (i) Die Grenzwertsätze gelten sinngemäß auch für links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte.
- (ii) Das Vorliegen einer Unendlichkeitsstelle bei $x = \xi$ kann man kurz durch

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad -\infty$$

beschreiben. Entsprechend versteht man

$$\lim_{x \rightarrow \xi \pm} f(x) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad -\infty.$$

Manche Autoren bezeichnen auch ein solches Verhalten einer Funktion als „uneigentlicher Grenzwert“. Das werde ich hier nicht tun und reserviere diesen Namen für das im nächsten Abschnitt zu besprechende Phänomen.

4.1.4 Uneigentlicher Grenzwert

Man betrachte die sog. „gedämpfte Schwingung“ (Beispiel 4.8 und Abb. 4.12)

$$f(t) := e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0, \lambda > 0 \text{ geeignet}).$$

Für wachsende Zeiten t wird $|f(t)|$ immer kleiner und „strebt gegen Null“.

Dieser Sachverhalt soll jetzt präzisiert werden. Wie bei dem bereits eingeführten eigentlichen Grenzwert muß zur Festlegung des Begriffes „uneigentlicher Grenzwert“ sichergestellt werden, daß „in der Nähe von Unendlich“ immer noch Punkte aus $D(f)$ liegen.

Definition 4.4

Sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und gelte

$$\bigwedge_{c \in \mathbb{R}} (c, \infty) \cap D(f) \neq \emptyset$$

(man sagt dann, ∞ sei ein Häufungspunkt von $D(f)$). Sei $\eta \in \mathbb{R}$.

f hat für $x \rightarrow \infty$ oder bei ∞ den (uneigentlichen) Grenzwert η , falls gilt:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D(f)} \left[x \in (c, \infty) \implies |f(x) - \eta| < \varepsilon \right].$$

Bemerkung

- (i) Wieder gilt, daß aus der Existenz eines uneigentlichen Grenzwertes folgt, daß dieser eindeutig bestimmt ist; er wird mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bezeichnet.
- (ii) Völlig analog wird $f(x) \rightarrow \eta$ ($x \rightarrow -\infty$) eingeführt.

Beispiel 4.8

Seien $\lambda, \omega, \phi \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ und (Abb. 4.12)

$$f(t) := e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0).$$

Beh. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Beweis

Wegen $D(f) = \mathbb{R}$ ist ∞ ein Häufungspunkt von $D(f)$. Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$0 \leq |f(t)| = |e^{-\lambda t}| \cdot |\sin(\omega t + \phi)| \leq e^{-\lambda t} < \varepsilon$$

für alle $t \in (c, \infty)$ mit $c = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Bemerkung

Eine Funktion f hat für $x \rightarrow \infty$ nur dann den uneigentlichen Grenzwert η , wenn ab einer Zahl $c > 0$ wirklich *alle* $x \in (c, \infty)$ die Bedingung $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ erfüllen, und zwar dann ohne Ausnahme. So hat die in Abb. 4.13 dargestellte Funktion bei ∞ keinen uneigentlichen Grenzwert.

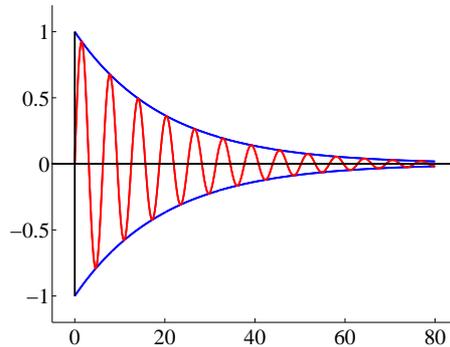
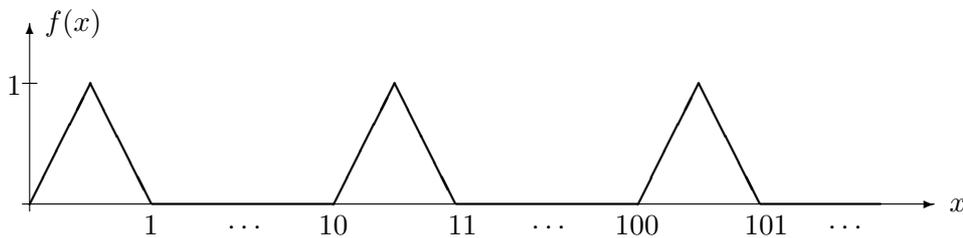


Abbildung 4.12: Gedämpfte Schwingung

Abbildung 4.13: Kein uneigentlicher Grenzwert für $x \rightarrow \infty$

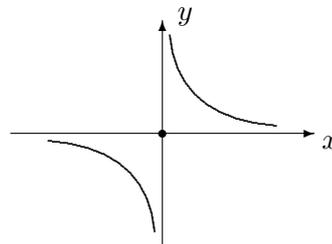
4.2 Stetigkeit von Funktionen

Im letzten Abschnitt wurden Grenzwerte von Funktionen an Häufungspunkten ihres Definitionsbereiches untersucht. Ist ξ ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches $D(f)$ einer Funktion f , so braucht ξ kein Element von $D(f)$ zu sein, *kann* es aber.

In einem solchen Fall gibt es drei Möglichkeiten:

- (i) Für $x \rightarrow \xi$ hat f keinen Grenzwert, s. Abb. 4.14.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Abbildung 4.14: Kein Grenzwert an der Stelle $\xi = 0$

- (ii) $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ existiert, ist aber $\neq f(\xi)$ (Abb. 4.15):

$$1 = \eta := \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \neq f(\xi) = f(0) = 0$$

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

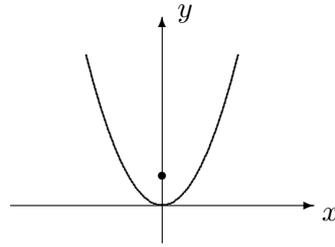


Abbildung 4.15: Grenzwert $\eta = 0$, aber nicht stetig

(iii) $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ existiert und ist gleich dem Funktionswert $f(\xi)$ (Abb. 4.16):

$$0 = \eta := \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) = f(0) = 0$$

$$f(x) := x^2 = \begin{cases} x^2 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

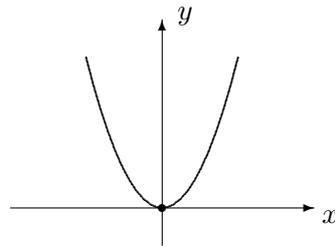


Abbildung 4.16: stetig in $\xi = 0$

Das letzte Beispiel zeigt, daß es Funktionen gibt, die sich in bezug auf die Grenzwertbildung in folgendem Sinne regulär verhalten:

Der Grenzwert $\eta := \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ an der Stelle ξ existiert und stimmt mit dem Funktionswert $f(\xi)$ an der Stelle ξ überein.

Definition 4.5

Sei ξ ein Häufungspunkt von $D(f)$.

(i) f heißt *stetig an der Stelle ξ* , wenn gilt:

(a) $\xi \in D(f)$

(b) Der Grenzwert $\eta := \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ existiert.

(c) $\eta = f(\xi)$

(ii) f heißt *stetig*, wenn f an jeder Stelle $\xi \in D(f)$ stetig ist.

(iii) f heißt *stetig in (einer Menge) \mathcal{D}* , wenn $\mathcal{D} \subseteq D(f)$ gilt und $f \upharpoonright \mathcal{D}$ stetig ist.

Beispiele 4.9

- (i) Für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ sind $f(x) := c$ und $g(x) := x$ stetige Funktionen in ganz \mathbb{R} (Beweis?).
- (ii) Die Signumsfunktion ist an der Stelle $\xi = 0$ nicht stetig:

Gemäß Definition 4.2 sei dazu die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D(f)$ definiert durch $x_n := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{n} \right) = 1 \neq 0 = f(0)$

- (iii) Die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in D(f) := \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

ist stetig. Sie ist in $\xi = 0$ weder stetig noch unstetig, sondern einfach gar nicht definiert.

Dagegen ist die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $\xi = 0$ unstetig.

Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung des Stetigkeitsbegriffes mit Hilfe der $\varepsilon\delta$ -Definition bzw. mit Hilfe der Definition über Folgen. Sein Beweis folgt unmittelbar aus den analogen Definitionen und Sätzen für Grenzwerte von Funktionen im allgemeinen.

Satz 4.5

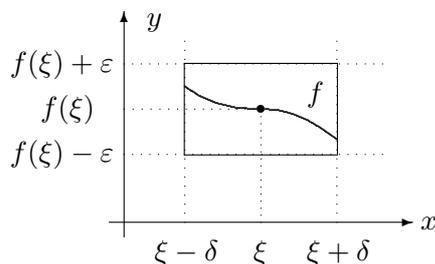
Seien f eine Funktion, $\xi \in D(f)$ und ξ ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i) f ist an der Stelle ξ stetig.
- (ii) Für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D(f)$, die gegen ξ konvergiert, konvergiert stets auch die Folge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, und zwar gegen $f(\xi)$.

(iii) $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D(f)} \left[|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \right]$

Bemerkung

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f in ξ , daß man zu jedem horizontalen Streifen der Breite 2ε um $f(\xi)$ stets einen vertikalen Streifen der Breite 2δ um

Abbildung 4.17: Stetigkeit von f im Punkt ξ

ξ finden kann, so daß der Funktionsgraph von f um den Punkt $\langle \xi, f(\xi) \rangle$ herum das zugehörige $\varepsilon\delta$ -Rechteck nicht verlassen kann, s. Abb. 4.17.

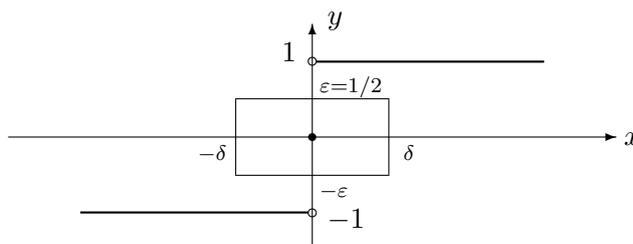
Wieder liegt hier die Betonung auf der Möglichkeit, das Schaubild von f in ein beliebig niedriges Rechteck einsperren zu können.

Beispiele 4.10

- (i) Konstante Funktionen $f(x) := c$ ($c \in \mathbb{R}$ geeignet) sind in ganz \mathbb{R} stetig: zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ beliebig.
- (ii) $g(x) := x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist stetig: zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $\xi, x \in D(f) = \mathbb{R}$ mit $|x - \xi| < \delta$:

$$|g(x) - g(\xi)| = |x - \xi| < \delta = \varepsilon.$$

- (iii) Die Signumsfunktion ist an der Stelle $\xi = 0$ unstetig, s. Abb. 4.18: wähle etwa $\varepsilon := \frac{1}{2}$.

Abbildung 4.18: Unstetigkeit der Signumsfunktion in $\xi = 0$

An allen anderen Stellen ist sgn stetig, d.h. die zwei Funktionen $\text{sgn} \upharpoonright (-\infty, 0)$ und $\text{sgn} \upharpoonright (0, \infty)$ sind stetige Funktionen.

Bemerkung *

- (i) Wegen $\lim_{x \rightarrow \xi} x = \xi$ kann die Stetigkeit in ξ auch wie folgt formuliert werden:

$$f \text{ ist stetig in } \xi \iff$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) = f\left(\lim_{x \rightarrow \xi} x\right)$$

Bei stetigen Funktionen kann die Anwendung der Funktionsvorschrift also mit der Grenzwertbildung vertauscht werden: eine stetige Abbildung ist „strukturerhaltend“ in dem Sinne, daß es egal ist, ob man

- zuerst x auf $f(x)$ abbildet und danach den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ bildet;
- oder
- zuerst den Grenzwert $x \rightarrow \xi$ bildet und danach diesen abbildet: $f\left(\lim_{x \rightarrow \xi} x\right)$.

Eine stetige Abbildung ist für die Analysis – Erhaltung der Grenzwertstruktur – somit das, was eine lineare Abbildung für die Lineare Algebra – Erhaltung der Vektorraumstruktur – ist.

- (ii) Meistens wird Satz 4.5 (ii) oder (iii) als Definition für den Begriff „Stetigkeit“ verwandt, da man – im Gegensatz zur Definition mit Hilfe des Grenzwertes – hier nicht voraussetzen braucht, daß es sich bei dem Punkt ξ um einen Häufungspunkt des Definitionsbereiches handeln muß. M.a.W., verwendet man Satz 4.5 ((ii) oder (iii)) als Definition, so läßt sich die Stetigkeit von Funktionen an jeder Stelle $\xi \in D(f)$ erklären.
- (iii) Aus der letzten Bemerkung folgt dann auch, daß eine Funktion f an einem isolierten Punkt ξ ihres Definitionsbereiches immer stetig ist, denn für jede gegen ξ konvergierende Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D(f)$ gilt, daß von einem gewissen Index N ab ihre Glieder konstant gleich ξ sein müssen.

Insbesondere ist eine auf einer diskreten Menge definierte Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig, also etwa eine Folge (betrachtet als Funktion a mit $D(a) = \mathbb{N}!$):

$$\begin{array}{lll} a : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto a(n) =: a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

Bemerkung

Wenn eine Funktion f in einem Punkt ξ ihres Definitionsbereiches unstetig ist, dann können im Prinzip die folgenden vier Möglichkeiten auftreten:

- (i) Sprungstelle: links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren, sind aber verschieden (Abb. 4.19).
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ existiert, aber es ist

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \neq f(\xi)$$

(Abb. 4.20).

- (iii) Polstelle: links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren nicht (Abb. 4.21).
- (iv) Oszillationsstelle: links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren nicht (Abb. 4.22).

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x < \xi}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x > \xi}} f(x)$$

$$f(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x < \xi}} f(x)$$

∨

$$f(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x > \xi}} f(x)$$

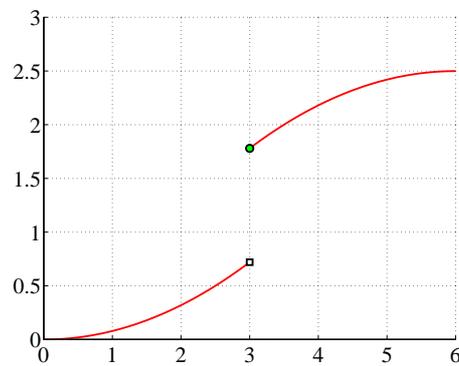


Abbildung 4.19: Sprungunstetigkeit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x < \xi}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x > \xi}} f(x)$$

$$\neq f(\xi)$$

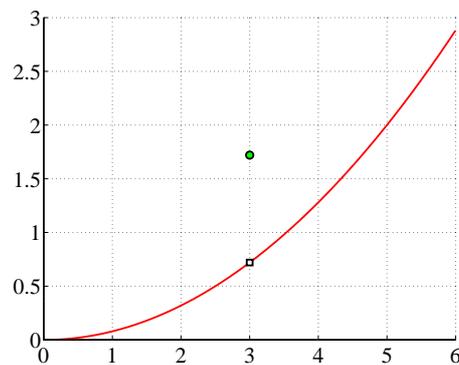


Abbildung 4.20: Grenzwert und Funktionswert sind verschieden

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow \xi, x < \xi)$$

$$f(\xi) = 0$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \xi, x > \xi)$$

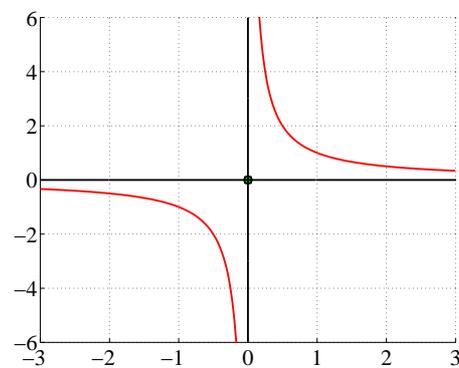


Abbildung 4.21: Polstelle

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

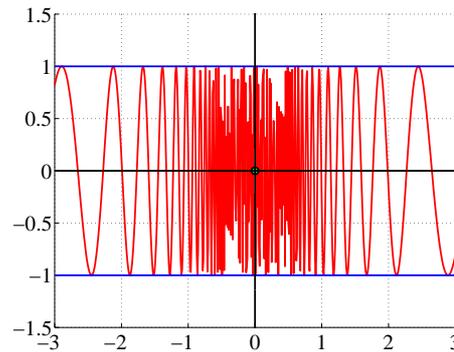


Abbildung 4.22: Oszillationsstelle

4.2.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 4.2) folgt für stetige Funktionen unmittelbar der folgende

Satz 4.6

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von (in einem Punkt ξ ihres gemeinsamen Definitionsbereiches) stetigen Funktionen sind in ξ stetig; der Quotient allerdings nur, falls der Nenner an der Stelle $\xi \neq 0$ ist.

Folgerung

Polynome und rationale Funktionen sind stetig.

Beweis

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß konstante Funktionen und die Identität ($f(x) := x$ ($x \in \mathbb{R}$)) stetige Funktionen sind. Dann wende man Satz 4.6 wiederholt an.

Weitere stetige Funktionen

- Betragsfunktion
- Potenzfunktionen mit reellen Exponenten
- Exponentialfunktionen
- Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen (Logarithmusfunktionen)
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen (Arcusfunktionen)

Satz 4.7

Die Komposition $(f \circ g)$ stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis

Aus $x_n \rightarrow \xi$ folgt $g(x_n) \rightarrow g(\xi)$, also damit

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} f(g(\xi)) = (f \circ g)(\xi).$$

4.2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige bemerkenswerte Eigenschaften behandelt, welche Funktionen allein aufgrund ihrer Stetigkeit haben.

Satz 4.8 (Zwischenwertsatz)

Locker gesprochen, besagt der Zwischenwertsatz, daß eine auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ definierte und dort stetige Funktion jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

Genauere Formulierung:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f stetig und $[a, b] \subseteq D(f)$. Seien

$$\alpha := \min\{f(a), f(b)\} \quad , \quad \beta := \max\{f(a), f(b)\}.$$

Dann existiert zu jedem Wert $y \in [\alpha, \beta]$ ein Urbild $x \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $y = f(x)$.

Graphische Formulierung:

Ist $y \in [\alpha, \beta]$, dann hat die Parallele zur Abszisse in der Höhe y mit $f \upharpoonright ([a, b])$ wenigstens einen Punkt gemeinsam, s. Abb. 4.23.

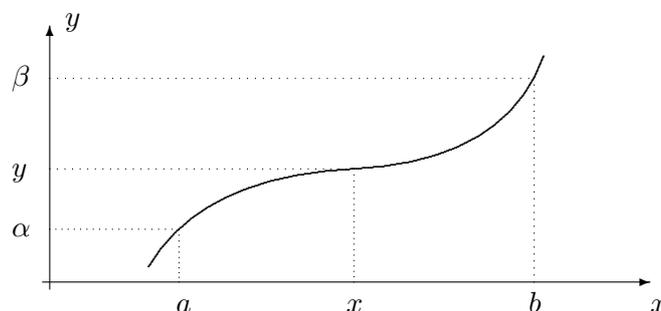


Abbildung 4.23: Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Ist die Funktion nicht stetig, so braucht der Zwischenwertsatz nicht gültig zu sein, s. Abb. 4.24.

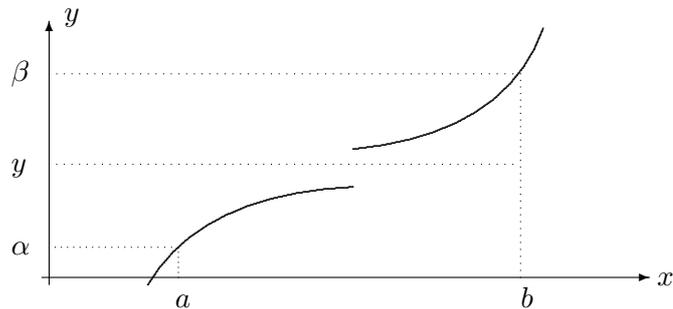


Abbildung 4.24: Der Zwischenwertsatz ist nicht gültig

Folgerung

Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten und einem ungeraden Grad besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis

Jedes Polynom ist in ganz \mathbb{R} stetig. Da der Grad ungerade ist, gilt entweder

$$p(x) \xrightarrow{(x \rightarrow -\infty)} -\infty \quad \wedge \quad p(x) \xrightarrow{(x \rightarrow \infty)} \infty$$

oder

$$p(x) \xrightarrow{(x \rightarrow -\infty)} \infty \quad \wedge \quad p(x) \xrightarrow{(x \rightarrow \infty)} -\infty.$$

Dann muß p die reelle Achse wenigstens einmal schneiden.

Beispiel 4.11 (Ham-Sandwich-Problem)

Eine Scheibe Brot sei mit Schinken belegt. Dann gibt es einen geraden Schnitt, mit dem Brot und Schinken gleichzeitig halbiert werden.

Lösung

Zu jeder Schnittrichtung gibt es eine Gerade, die das Brot halbiert. Sei ϕ der Winkel zwischen einer festen orientierten Geraden und einer orientierten Schnittgeraden ($\phi \in [0, 2\pi)$ geeignet). Seien $l(\phi)$ die links-, $r(\phi)$ die rechts von der orientierten Schnittgeraden liegende Schinkenmenge. Es ist

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto f(\phi) := l(\phi) - r(\phi) \end{aligned}$$

eine stetige Abbildung (warum?).

Ist nun (o.B.d.A.) $f(\phi) \geq 0$ für einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$, so ist $f(\phi + \pi) = -f(\phi) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher einen Winkel $\phi_0 \in [\phi, \phi + \pi]$ mit $f(\phi_0) = 0$, d.h. $l(\phi_0) = r(\phi_0)$.

Satz 4.9

Die Funktion f sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f dort sein Minimum und sein Maximum an, genauer:

$$\bigvee_{m \in [a, b]} f(m) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

$$\bigvee_{M \in [a, b]} f(M) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Inbesondere ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

Aufgabe

Man gebe ein Beispiel für eine Funktion, die auf einem offenen Intervall (a, b) definiert, stetig und beschränkt ist, dort aber kein Minimum und kein Maximum besitzt.

Satz 4.10

Sei f stetig in ξ und gelte $f(\xi) > 0$ (bzw. $f(\xi) < 0$). Dann gilt:

$$\bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{x \in U_\varepsilon(\xi)} f(x) > 0 \quad (\text{bzw. } f(x) < 0).$$

Aufgabe

Man beweise diesen Sachverhalt mit einem Widerspruchsbeweis.

Sehnenverfahren (Regula falsi)

Seien f eine stetige Funktion und x_1 und x_2 zwei Näherungslösungen der Gleichung $f(x) = 0$, so daß $f(x_1)$ und $f(x_2)$ jeweils verschiedene Vorzeichen haben. Dann kann man den Graphen von f zwischen x_1 und x_2 näherungsweise durch die Sehne ersetzen, welche die beiden Punkte $\langle x_1, f(x_1) \rangle$ und $\langle x_2, f(x_2) \rangle$ miteinander verbindet. Deren Schnittpunkt $\langle x_S, 0 \rangle$ mit der x -Achse liefert häufig eine bessere Näherungslösung x_S für die Gleichung $f(x) = 0$, s. Abb. 4.25.

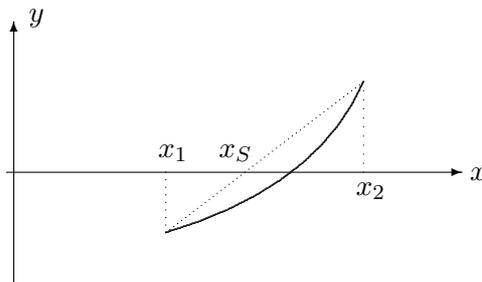


Abbildung 4.25: Sehnenverfahren der Regula Falsi

Die Gleichung der Sehne lautet

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \longrightarrow \quad x_S = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Beispiel 4.12

$$f(x) = e^x - 5x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$x_1 = 0,54 \quad , \quad f(x_1) = 0,016 > 0$$

$$x_2 = 0,55 \quad , \quad f(x_2) = -0,017 < 0$$

$$\longrightarrow \quad x_S = 0,54 - 0,016 \cdot \frac{0,01}{-0,033} \approx 0,545$$

Mit $x_3 := x_S$ und $f(x_3) = -0,00039 < 0$ läßt sich dieses Verfahren dann iterieren.

Satz 4.11

Sei f auf $D(f)$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W(f) \longrightarrow D(f)$$

stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Bemerkung

Die Aussage dieses Satzes bleibt sogar dann richtig, wenn die Funktion f selbst nicht einmal stetig ist.

Beispiel 4.13

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

ist eine auf ganz \mathbb{R} definierte stetige und streng monoton wachsende Funktion. Ihre Umkehrfunktion

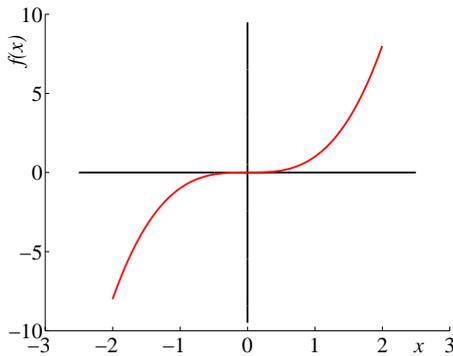
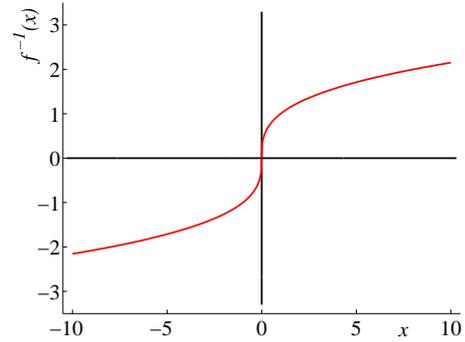
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ist auf ganz \mathbb{R} definiert und stetig, s. Abb. 4.26 und 5.4.

4.3 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Begriff des Grenzwertes von Funktionen
- Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 4.2)

Abbildung 4.26: $f(x) = x^3$ Abbildung 4.27: $f^{-1}(x)$

- Einseitige Grenzwerte, Beispiele
- Uneigentliche Grenzwerte, Beispiele
- Stetigkeit von Funktionen
- Rechenregeln für stetige Funktionen (Satz 4.6)

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Mehrere Charakterisierungen stetiger Funktionen (Satz 4.5)
- Arten der Unstetigkeit von (nicht stetigen) Funktionen
- Regula Falsi zur Nullstellenverbesserung

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Eigenschaften stetiger Funktionen:
 - Abbildungseigenschaften
 - Zwischenwerteigenschaft

Kapitel 5

Differentiation von Funktionen einer reellen Variable

Wie schon im letzten Kapitel steht auch hier bei der Untersuchung des funktionalen Zusammenhanges zweier Größen nicht der Ist-Zustand einer gegebenen Größe, also ihr momentaner Wert im Vordergrund sondern die Frage, welches Änderungsverhalten diese Größe zeigt.

Zwei Änderungsmodi kennen wir bereits: Monotonie und Stetigkeit. Im weiteren Verlauf soll nun die Änderung der Funktion f an einer Stelle ξ , also die Differenz

$$\Delta f := f(x) - f(\xi),$$

verglichen werden mit der Änderung der einfachsten nichtkonstanten Funktion, nämlich mit

$$g(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Untersucht wird dabei der sog. *Differenzenquotient* an der Stelle ξ

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad (x \in D(f), x \neq \xi),$$

um aus seinem Verhalten Rückschlüsse auf das Verhalten von f „in der Nähe“ von ξ zu ziehen.

Erste Ansätze zur Untersuchung des Differenzenquotienten sind schon bekannt, denn es gilt:

$$\bigwedge_{\substack{x,y \in D(f) \\ x \neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0 \quad (\leq 0)$$

$$\iff f \text{ ist monoton wachsend (fallend).}$$

5.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

5.1.1 Definition und Beispiele

Die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle ξ ihres Definitionsbereiches benutzt wesentlich den Begriff des Grenzwertes. Daher ist es erforderlich, daß ξ ein Häufungspunkt von $D(f)$ ist. Das ist insbesondere dann erfüllt, wenn $D(f)$ ein Intervall oder eine endliche Vereinigung von Intervallen ist.

Im folgenden wird daher oft vorausgesetzt, daß $D(f)$ ein Intervall ist.

Definition 5.1

- (i) Seien $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathcal{I}$. f heißt *an der Stelle ξ differenzierbar*, wenn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

(eigentlich) existiert, d.h. existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird mit $f'(\xi)$ bezeichnet und heißt *Ableitung von f an der Stelle ξ* .

- (ii) Ist f an jeder Stelle $\xi \in \mathcal{I}$ differenzierbar, so heißt f *differenzierbar schlechthin*, und die Funktion

$$\begin{aligned} f' : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto f'(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \end{aligned}$$

heißt die *Ableitung* von f .

Beispiele 5.1

- (i) Seien $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) := c$ ($x \in \mathbb{R}$), also f eine konstante Funktion. Dann ist f an jeder Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und man erhält:

$$f'(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{c - c}{x - \xi} = 0.$$

(ii) $f(x) := x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist an jeder Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es ist:

$$f'(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{x - \xi}{x - \xi} = 1.$$

(iii) $f(x) := \sqrt{x}$ ($x \in [0, \infty)$) ist für alle $\xi \in (0, \infty)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\xi}}{x - \xi} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\xi}}{x - \xi} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}}{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion. Dies ist ein Beispiel, für welches der Definitionsbereich der Ableitung echt kleiner ist als der Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion:

$$D(f') \subsetneq D(f).$$

(iv) $f(x) := x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ geeignet) ist (überall) differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(\xi) = n \cdot \xi^{n-1} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Der Nachweis der Differenzierbarkeit wird mit einem Induktionsbeweis geführt:

Beh.
$$\frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k \cdot x^{n-k-1} \quad (x, \xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

Bew.

Für $n = 1$ ist
$$\frac{x - \xi}{x - \xi} = 1 = \sum_{k=0}^{1-1} \xi^k \cdot x^{1-k-1}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für alle Zahlen $n \leq m$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{x^{n+1} - \xi^{n+1}}{x - \xi} &= \frac{x^{n+1} - x \cdot \xi^n + x \cdot \xi^n - \xi^{n+1}}{x - \xi} \\
 &= x \cdot \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} + \xi^n \cdot \frac{x - \xi}{x - \xi} \\
 &= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k \cdot x^{n-k-1} + \xi^n \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k \cdot x^{n-k} + \xi^n \cdot x^0 \\
 &= \sum_{k=0}^n \xi^k \cdot x^{n-k}
 \end{aligned}$$

Nun sind die Potenzfunktionen für alle $\xi \in \mathbb{R}$ stetig, d.h. für $x \rightarrow \xi$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f'(\xi) &= \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \xi} \sum_{k=0}^n \xi^k \cdot x^{n-k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \xi} [x^{n-1} + \xi \cdot x^{n-2} + \dots + \xi^{n-1}] \\
 &= n \cdot \xi^{n-1} \quad (\xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).
 \end{aligned}$$

Folgerung

Die Funktion F , definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} & , \quad x \neq \xi \\ n \cdot \xi^{n-1} & , \quad x = \xi \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist eine auf ganz \mathbb{R} definierte stetige Fortsetzung der Funktion

$$x \longmapsto \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq \xi).$$

Bemerkung

- (i) Statt der Bezeichnung f' für die Ableitung einer Funktion f werden auch andere Schreibweisen verwendet:

$$\frac{df}{dx} := f' \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f := f'.$$

Sie sind folgendermaßen motiviert:

$$(a) \quad \Delta f := f(x) - f(\xi) \quad , \quad \Delta x := x - \xi \quad (x, \xi \in \mathcal{I}, x \neq \xi)$$

$$\longrightarrow \quad f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\xi}$$

Die Ableitung ist der Grenzwert eines *Differenzenquotienten*.

- (b) Der *Differentialquotient*

$$f' = \frac{df}{dx} \quad (\text{gesprochen: } df \text{ nach } dx)$$

verhält sich in manchen Rechnungen so, als wäre er ein Quotient, was er aber nicht ist!

- (ii) Die Tatsache, daß f an der Stelle ξ die Ableitung $f'(\xi)$ besitzt, bedeutet nach dem Folgenkriterium für Grenzwerte:

Für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{I} mit $x_n \rightarrow \xi$, $x_n \neq \xi$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} f'(\xi).$$

- (iii) f besitzt an der Stelle ξ genau dann die Ableitung $f'(\xi)$, wenn die Funktion

$$F_\xi := \begin{cases} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} & , \quad x \neq \xi \\ f'(\xi) & , \quad x = \xi \end{cases}$$

in ξ stetig ist, d.h. der Differenzenquotient ist – als eine in $\mathbb{R} \setminus \{\xi\}$ definierte Funktion – in $x = \xi$ stetig ergänzbar.

- (iv) Ist ξ ein Randpunkt von \mathcal{I} , so ist der Grenzwert des Differenzenquotienten ein einseitiger Grenzwert. Man nennt $f'(\xi)$ dann die *einseitige Ableitung* (*rechts-* bzw. *linksseitig*) von f an der Stelle ξ .

Der folgende Satz zeigt, daß die Differenzierbarkeit einer Funktion eine stärkere Bedingung ist als deren Stetigkeit.

Satz 5.1

Ist f in $\xi \in \mathcal{I}$ differenzierbar, so ist f in ξ auch stetig.

Beweis

Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus \mathcal{I} mit $x_n \rightarrow \xi$, $x_n \neq \xi$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$f(x_n) - f(\xi) = \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} \cdot (x_n - \xi) \quad \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \quad f'(\xi) \cdot 0 = 0.$$

Bemerkung

- (i) Dieser Satz ist nicht umkehrbar: es gibt stetige Funktionen, welche nicht differenzierbar sind:

$f(x) := |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) ist in $\xi = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar, weil z.B. für die beiden Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$x_n := \frac{1}{n} \quad , \quad y_n := -\frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt: $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), jedoch

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{|1/n| - |0|}{1/n - 0} = \frac{1/n}{1/n} \quad \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \quad 1,$$

$$\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \frac{|-1/n| - |0|}{-1/n - 0} = \frac{1/n}{-1/n} \quad \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \quad -1.$$

- (ii) Das Beispiel der Betragsfunktion unter (i) ist noch überall *einseitig differenzierbar* (Annäherung nur von links oder nur von rechts), auch im Nullpunkt. Ein anderes Beispiel ist die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$; im Nullpunkt liegt, wie wir gesehen haben, keine Differenzierbarkeit vor, der Differenzenquotient besitzt aber wenigstens noch ein eindeutiges Verhalten für $x \rightarrow 0$.

Man kann aber Beispiele angeben, wo dies alles nicht zutrifft:

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

Die Untersuchung dieses Beispiels ist Inhalt einer Hausaufgabe.

- (iii) Interessant ist auch das Beispiel der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

welche überall, auch im Nullpunkt, differenzierbar ist, deren Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

jedoch im Nullpunkt nicht stetig ist.

- (iv) Von B. Bolzano und K. Weierstraß¹ stammen die ersten Beispiele von Funktionen, die für *alle* x stetig, aber *nirgends* differenzierbar sind. Ein Beispiel ist die über eine unendliche Reihe definierte Funktion

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \sin(2^n x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5.1.2 Zur historischen Entwicklung der Differentialrechnung

Am Anfang der Entwicklung der Differentialrechnung stehen eine geometrische und eine physikalische Fragestellung.

Das Tangentenproblem

Gesucht ist eine Gerade, die durch einen gegebenen Punkt P_0 eines glatten Kurvenstückes läuft und dieses Kurvenstück „möglichst gut“ approximiert, s. Abb. 5.1.

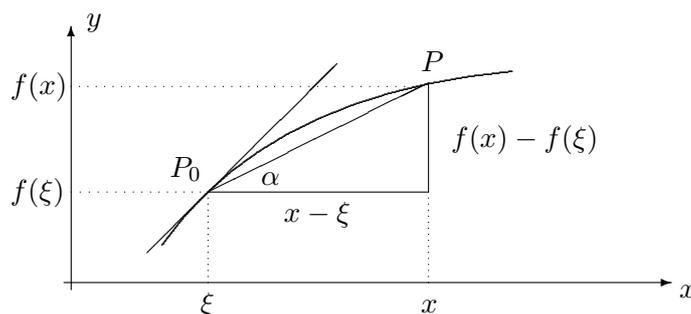


Abbildung 5.1: Zur Definition der Tangente

Der Quotient $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ liefert die Steigung der Sehne durch die beiden Punkte

$$P_0 := \langle \xi, f(\xi) \rangle \quad \text{und} \quad P := \langle x, f(x) \rangle.$$

Die Steigung derjenigen Geraden, welche die Kurve in P_0 berührt, erhält man anschaulich, indem man die Steigung der Sehne durch P_0 und P ermittelt und dann P in Richtung auf P_0 „wandern läßt“. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} =: f'(\xi)$$

existiert, interpretiert man ihn als die *Steigung der Funktion f im Punkt ξ* .

Die Gerade durch P_0 mit der Steigung $f'(\xi)$, also die Gerade

$$y = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi) \quad (x \in \mathbb{R})$$

¹Bernhard Bolzano (1781-1848) und Karl Weierstraß (1815-1897), deutsche Mathematiker

heißt die *Tangente an f im Punkt P_0* . Man mache sich klar, daß man durch diese Konstruktion die Tangente nicht nur *berechnet*, sondern sie zunächst erst einmal *definiert* hat.

Das Problem, die Tangenten einer Kurve zu bestimmen, ja überhaupt erst einmal zu definieren, hat im 17. Jahrhundert die Entwicklung der Differentialrechnung mächtig vorangetrieben. Das Tangentenproblem hatte – neben der mathematischen Interessantheit – eine große praktische Bedeutung, z.B. bei der Herstellung optischer Linsen.

Um das Brechungsgesetz anwenden zu können, muß man den Winkel α zwischen dem einfallenden Lichtstrahl und der sog. *Normalen n* der Linse im Einfallspunkt P_0 kennen. Da aber n die Senkrechte auf der Linsentangente t in P_0 ist, muß der Linsenkonstrukteur diese Tangente bestimmen können, s. Abb. 5.2.

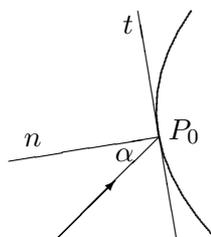


Abbildung 5.2: Zum Brechungsgesetz

Das Problem der Momentangeschwindigkeit

Ein Teilchen bewege sich längs einer geraden Linie. Sei $s(t)$ der Weg, den das Teilchen, beginnend bei der Zeit $t = 0$ und der Streckenmarkierung $s(0) = 0$, nach der Zeit t zurückgelegt hat. Die Funktion $t \mapsto s(t)$ nennt man auch das *Weg-Zeit-Gesetz* der Bewegung.

Was bedeutet es nun, wenn man sagt, das Teilchen habe zur Zeit $t = \tau$ eine gewisse Geschwindigkeit? Empirisch bestimmbar ist doch nur die *mittlere Geschwindigkeit* zwischen den Zeitpunkten τ und $t \neq \tau$, also der Quotient

$$\frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}.$$

Dieser hängt aber von der willkürlichen Wahl des Zeitpunktes t durch den Beobachter ab. Empirisch stellt man nun fest, daß bei den gemeinhin vorkommenden Bewegungsvorgängen die mittleren Geschwindigkeiten „stabil“ sind in dem Sinne, daß sie sich kaum noch ändern, wenn sich nur t hinreichend nahe bei τ befindet.

Folgende Definition der *Geschwindigkeit $v(\tau)$ im Zeitpunkt τ* liegt daher nahe:

$$v(\tau) := \dot{s}(\tau) := \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t \neq \tau}} \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau},$$

vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert überhaupt existiert. Wieder beachte man, daß dadurch die Momentangeschwindigkeit zur Zeit τ nicht nur *ausgerechnet*, sondern zuerst einmal *definiert* wird.

Beispiel 5.2

Für den sog. „freien Fall“ (= Fall eines Körpers im Vakuum) erhält man empirisch das Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad (t \geq 0)$$

mit der *Fallbeschleunigung* $g := 9,81 \frac{m}{s^2}$. Infolgedessen ist die Fallgeschwindigkeit im Zeitpunkt τ definitionsgemäß

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{1}{2} g \frac{t^2 - \tau^2}{t - \tau} = \frac{1}{2} g \cdot \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{(t - \tau)(t + \tau)}{t - \tau} \\ &= \frac{1}{2} g \cdot \lim_{t \rightarrow \tau} (t + \tau) = g \cdot \tau = \dot{s}(\tau). \end{aligned}$$

Die so definierte *momentane Geschwindigkeit* ist selbst eine Funktion der Zeit:

$$t \longmapsto v(t) \quad (t \geq 0).$$

Die *mittlere Beschleunigung* des Teilchens zwischen den Zeitpunkten τ und $t \neq \tau$, also die mittlere Änderung der Geschwindigkeit, ist gegeben durch den Differenzenquotienten

$$\frac{v(t) - v(\tau)}{t - \tau},$$

und ganz ähnliche Überlegungen wie bei der Definition der Momentangeschwindigkeit führen dazu, die *momentane Beschleunigung* $a(\tau)$ zum Zeitpunkt τ folgendermaßen zu definieren:

$$a(\tau) := \dot{v}(\tau) := \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t \neq \tau}} \frac{v(t) - v(\tau)}{t - \tau}.$$

Da es sich hierbei um die Ableitung einer Ableitung handelt – die sog. *zweite Ableitung* – schreibt man dafür auch

$$a(\tau) = \dot{v}(\tau) =: \ddot{s}(\tau).$$

5.2 Ableitung elementarer Funktionen

Die Tabellen 5.2 und 5.1 liefern die Ableitung einiger elementarer Funktionen. Exemplarisch soll die Ableitung der beiden wichtigsten trigonometrischen Funktionen gezeigt werden.

Funktionenklasse	Funktion f	Ableitung f'	$D(f')$
Potenzfunktion	x^n	nx^{n-1} ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$)	\mathbb{R}
		nx^{n-1} ($n \in \mathbb{Z}, n < 0$)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
		nx^{n-1} ($n \in \mathbb{R}, n > 0$)	$(0, \infty)$
		nx^{n-1} ($n \in \mathbb{R}, n < 0$)	$(0, \infty)$
Exponential- funktionen	e^x	e^x	\mathbb{R}
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$	\mathbb{R}
Logarithmus- funktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$	$(0, \infty)$
Trigono- metrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
	$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
Arcus- funktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}

Funktionsklasse	Funktion f	Ableitung f'	$D(f')$
Hyperbel- funktionen	$\sinh x$	$\cosh x$	\mathbb{R}
	$\cosh x$	$\sinh x$	\mathbb{R}
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	\mathbb{R}
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Area- funktionen	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	\mathbb{R}
	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$(1, \infty)$
	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$	$(-1, 1)$
	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Tabelle 5.1: Ableitungen der elementaren Funktionen

Ableitung der Sinusfunktion

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= -\sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Beh.1 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$

Bew. Beispiel 4.6

Beh.2 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0.$

Bew. Mit der Formel $\sin^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos h)$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{h}{2} \right) \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$(\sin')(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ableitung der Kosinusfunktion

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= -\cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x \end{aligned}$$

nach der Argumentation bei der Ableitung der Sinusfunktion. Damit folgt

$$(\cos')(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5.3 Differentiationsregeln

In diesem Abschnitt werden Regeln hergeleitet, mit Hilfe derer man Summen, Differenzen, skalare Vielfache, Produkte, Quotienten und Verkettungen differenzierbarer Funktionen differenzieren kann.

5.3.1 Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenregel

Satz 5.2

Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall \mathcal{I} definiert und im Punkt ξ differenzierbar, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$(i) \quad (f + g), (f - g)$$

$$(ii) \quad (\alpha \cdot f)$$

$$(iii) \quad (f \cdot g)$$

$$(iv) \quad \left(\frac{f}{g}\right)$$

in ξ differenzierbar; letztere allerdings nur, wenn $g(\xi) \neq 0$ ist. Die Ableitungen werden durch die folgenden Formeln gegeben:

$$(i) \quad (f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi) \quad , \quad (f - g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$$

$$(ii) \quad (\alpha \cdot f)'(\xi) = \alpha \cdot f'(\xi)$$

$$(iii) \quad (f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

$$(iv) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

Beweis

Eine im Punkt ξ differenzierbare Funktion ist dort stetig. Damit folgt aus den

Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(\xi) \pm g(\xi))}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \pm \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$\xrightarrow{(x \rightarrow \xi)} f'(\xi) \pm g'(\xi)$$

$$\frac{\alpha f(x) - \alpha f(\xi)}{x - \xi} = \alpha \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

$$\xrightarrow{(x \rightarrow \xi)} \alpha \cdot f'(\xi)$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \cdot g(x) + f(\xi) \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$\xrightarrow{(x \rightarrow \xi)} f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x - \xi} = \frac{1}{g(x) \cdot g(\xi)} \left[\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right]$$

$$\xrightarrow{(x \rightarrow \xi)} \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

Beispiele 5.3

(i) Summenregel

$$\frac{d}{dx} (x^2 + \sin x) = \frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (\sin x) = 2x + \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

(ii) Faktorregel

$$\frac{d}{dx} (6x^2) = 6 \cdot \frac{d}{dx} (x^2) = 6 \cdot 2x = 12x \quad (x \in \mathbb{R})$$

(iii) Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2 \cdot \sin x) &= \frac{d}{dx} (x^2) \cdot (\sin x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) \\ &= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(iv) Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\cos x} \right) &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2) \cdot (\cos x) - x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2x \cdot \cot x + x^2}{\sin x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Bemerkung

(i) Bei der Produktregel ist es gleich, in welcher Reihenfolge die differenzierten Glieder addiert werden:

$$f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) \quad \text{oder} \quad f(\xi) \cdot g'(\xi) + f'(\xi) \cdot g(\xi),$$

bei der Quotientenregel ist es das *nicht!* Man gewöhne sich daher am besten an, auch bei der Produktregel nach der ersten Variante zu verfahren.

(ii) Bei mehr als einem Faktor gilt die Produktregel in der folgenden Form:

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i \right)' = \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{f_i'}{f_i} \quad (n \in \mathbb{N})$$

an solchen Stellen x , an denen alle Funktionen $f_i \neq 0$ sind.

Aufgabe Man beweise diese Formel mit Hilfe vollständiger Induktion.

(iii) Die konstante Funktion $f(x) := c$ ($x \in \mathbb{R}$) ist überall differenzierbar, und ihre Ableitung ist Null. Daher folgt aus der Quotientenregel die nützliche *Reziprokenregel*

$$\left(\frac{1}{g} \right)'(\xi) = - \frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2},$$

wenn g in ξ differenzierbar und $g(\xi) \neq 0$ ist.

(iv) Die ersten zwei Regeln des letzten Satzes lassen sich in der folgenden Formel zusammenfassen und zugleich verallgemeinern:

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right)'(\xi) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k'(\xi)$$

für beliebige Zahlen α_k und in ξ differenzierbare Funktionen f_k .

(v) Die auf \mathcal{I} differenzierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum, und die Abbildung D , die jeder Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet, ist eine lineare Abbildung dieses Vektorraumes in den Funktionenraum aller auf \mathcal{I} definierten Funktionen.

5.3.2 Kettenregel

Eine der wichtigsten Differentiationsregeln ist die sog. *Kettenregel*:

Satz 5.3 (Kettenregel)

Die Kompositionsabbildung $(g \circ f)$ sei auf dem Intervall \mathcal{I} definiert. Seien f in ξ und g in $\eta = f(\xi)$ differenzierbar.

Dann ist $(g \circ f)$ in ξ differenzierbar, und es gilt:

$$(g \circ f)'(\xi) = g'[f(\xi)] \cdot f'(\xi).$$

Beispiel 5.4

(i) $\frac{d}{dx} (\sin(x^2)) = \cos(x^2) \cdot 2x \quad (x \in \mathbb{R})$

(ii) $\frac{d}{dx} (e^{\ln x}) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad (x > 0)$

Läßt sich (ii) auch einfacher berechnen? Was ist zum Definitionsbereich zu sagen?

Bemerkung

- (i) Man bezeichnet den Ausdruck $g'[f(\xi)]$ als *äußere Ableitung* oder Ableitung der *äußeren Funktion* $y \mapsto z = g(y)$ an der Stelle $\eta = f(\xi)$, den Faktor $f'(\xi)$ als *innere Ableitung* oder Ableitung der *inneren Funktion* $x \mapsto y = f(x)$ an der Stelle ξ , das Hinzufügen des Faktors $f'(\xi)$ als *Nachdifferenzieren der inneren Funktion* f .
- (ii) In der Ingenieurliteratur wird oft zwischen einer Funktion und ihrer abhängigen Variable nicht unterschieden. So liest man häufig

$$\begin{array}{lll} y = y(x) & \text{anstelle von} & y = f(x), \\ z = z(y) & \text{anstelle von} & z = g(y). \end{array}$$

Das führt dann dazu, daß die Kettenregel in einer vermeintlich „besonders einprägsamen“ und suggestiven Schreibweise dargestellt wird:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{anstelle von} \quad \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Diese ist jedoch nicht korrekt: im ersten Faktor $\frac{dz}{dy}$ hat y die Bedeutung der unabhängigen Variable, *nach* welcher die Funktion $z = g$ differenziert wird, im zweiten Faktor $\frac{dy}{dx}$ diejenige einer Funktion, welche *selbst* differenziert wird. Darüberhinaus: hängt die Funktion z nun von der Variable x oder von y ab?

Aufgabe

Welches sind in Beispiel 5.4 jeweils die äußeren -, welches die inneren Funktionen?

Beweis von Satz 5.3

Wenn man von den Differenzenquotienten ausgeht, so liegt folgender Beweis für die Kettenregel nahe:

$$\frac{g[f(x)] - g[f(\xi)]}{x - \xi} = \frac{g[f(x)] - g[f(\xi)]}{f(x) - f(\xi)} \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Hier ist jedoch eine kleine zusätzliche Verrenkung zu spendieren, da man berücksichtigen muß, daß es in jeder Umgebung von ξ einen Wert $x \neq \xi$ geben kann, für den $f(x) - f(\xi) = 0$ ist. Daher wird der obige Beweisansatz etwas modifiziert:

$$\frac{g[f(x)] - g[f(\xi)]}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \cdot \begin{cases} \frac{g[f(x)] - g[f(\xi)]}{f(x) - f(\xi)} & , \quad f(x) \neq f(\xi) \\ g'[f(\xi)] & , \quad f(x) = f(\xi) \end{cases}.$$

Nach Voraussetzung ist g in $\eta = f(\xi)$ differenzierbar, also ist $g'[f(\xi)]$ definiert. Im Falle $f(x) = f(\xi)$ steht auf beiden Seiten der Gleichung jedoch Null. Da f in ξ differenzierbar ist, ist f in ξ auch stetig, d.h. für $x \rightarrow \xi$ gilt auch $f(x) \rightarrow f(\xi)$.

Natürlich kann man die Kettenregel auch mehrfach anwenden und mit den anderen Regeln kombinieren:

Beispiel 5.5

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{e^{\sin x}}{x^2 + 1}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{\sin x}}{x^2 + 1}}} \cdot \frac{e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (x^2 + 1) - e^{\sin x} \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \sqrt{e^{\sin x}} \cdot \frac{\cos x \cdot (x^2 + 1) - 2x}{2(x^2 + 1)^{3/2}} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

5.3.3 Differentiation der Umkehrfunktion

Im letzten Kapitel wurde an Beispielen deutlich, daß die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion, sofern sie überhaupt existiert, wieder stetig ist (Satz 4.11); für dieses Ergebnis braucht im übrigen die Ausgangsfunktion selbst nicht einmal stetig zu sein, ihre strenge Monotonie – und damit ihre Umkehrbarkeit – ist für die Stetigkeit der Umkehrfunktion schon hinreichend.

Beispiel 5.6

Die kubische Parabel $y = f(x) := x^3$ verläuft in ganz $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ streng monoton wachsend (Abb 5.3), ist dort also umkehrbar. Wie lautet ihre Umkehrfunktion?

Die Wurzelfunktion

$$y = g(x) := \sqrt[3]{x} \quad (x \geq 0)$$

ist definitionsgemäß die Umkehrfunktion der auf den ersten Quadranten beschränkten kubischen Parabel.

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion für $x < 0$ lautet

$$y = h(x) := -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|} \quad (x < 0).$$

Insgesamt erhält man damit in $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ die folgende Darstellung der Umkehrfunktion (Abb. 5.4)

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , \quad x < 0 \end{cases} .$$

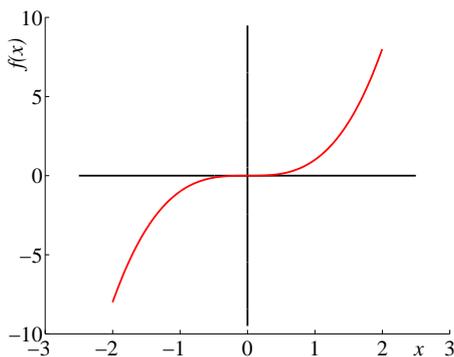


Abbildung 5.3: $f(x) = x^3$

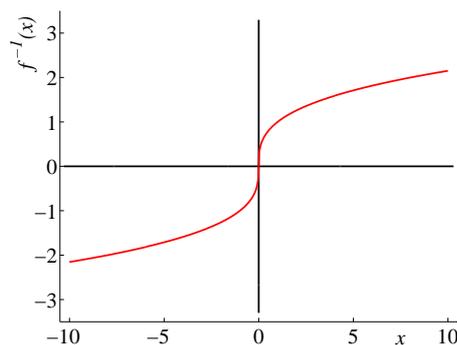


Abbildung 5.4: $f^{-1}(x)$

Die Umkehrfunktion f^{-1} ist an der Stelle $x = 0$ nicht mehr differenzierbar (warum nicht?). Wenn man allerdings von der (umkehrbaren) Ausgangsfunktion f an der Stelle ξ über die Differenzierbarkeit hinaus fordert, daß auch die Ableitung dort ungleich Null ist, so trifft dieser Sachverhalt auch für ihre Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $\eta = f(\xi)$ zu, genauer:

Satz 5.4

f sei stetig und streng monoton auf dem Intervall \mathcal{I} , so daß die Umkehrfunktion auf dem Intervall(!)

$$f(\mathcal{I}) := \{y : y = f(x), x \in \mathcal{I} \text{ geeignet}\}$$

existiert.

Ist im Punkt $\xi \in \mathcal{I}$ die Ableitung $f'(\xi)$ vorhanden und $\neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $\eta = f(\xi)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Beweis

Ist $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $f(\mathcal{I})$ mit $y_n \neq \eta$, $y_n \rightarrow \eta$, $\eta \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), so liegen die Folgenglieder $x_n := f^{-1}(y_n)$ alle in \mathcal{I} , sind wegen der strengen Monotonie von f alle $\neq \xi$, und wegen der Stetigkeit von f^{-1} gilt:

$$x_n = f^{-1}(y_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} f^{-1}(\eta) = \xi.$$

Damit ergibt sich für die Folge der Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} &= \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}. \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion selbst kann man auch über die Kettenregel erhalten:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= (f \circ f^{-1})(y) = y && (y \in U(\eta)) \\ \longrightarrow \quad \frac{d}{dy} (f \circ f^{-1}) \Big|_{y=\eta} &= 1 \Big|_{y=\eta} = 1 \\ \longrightarrow \quad f'(f^{-1}(\eta)) \cdot (f^{-1})'(\eta) &= 1 \\ \longrightarrow \quad (f^{-1})'(\eta) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))} \end{aligned}$$

Warum ist das allein jedoch noch kein Beweis?

Beispiele 5.7

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y &:= f(x) := e^x && (x \in \mathbb{R}) \\ \longrightarrow \quad x &= f^{-1}(y) = \ln y && (y > 0) \end{aligned}$$

$$(\ln)'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{e^\xi} = \frac{1}{\eta}$$

$$(ii) \quad y := f(x) := \tan x \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\longrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \arctan y \quad (y \in (-\infty, \infty))$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy} \arctan\right)(\eta) &= \frac{1}{\left(\frac{d}{dx} \tan\right)(\xi)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \xi}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \xi + \sin^2 \xi}{\cos^2 \xi}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \xi} = \frac{1}{1 + \eta^2} \end{aligned}$$

Aufgabe

- (i) Die Umkehrfunktion aus Beispiel 5.6 ist in $\xi = 0$ nicht differenzierbar. Warum nicht?
- (ii) Wie lautet die Ableitung der Umkehrfunktion aus Beispiel 5.6 für Werte $\xi \neq 0$?

Bemerkung

Die folgende Merkregel ist sehr risikoreich. Man kann nur als Kenner auseinanderhalten, was der Name einer Funktion und was der Name einer (Zahlen-) Variable ist. Schreibt man wieder – wie bei Ingenieuren oft üblich –

$$\begin{array}{llll} y = y(x) & \text{anstelle von} & y = f(x) & \text{und} \\ x = x(y) & \text{anstelle von} & x = f^{-1}(y), & \end{array}$$

dann liest sich die Aussage von Satz 5.4 so:

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=x(y)}},$$

oder unter Weglassung der jeweiligen Argumente noch kürzer (und noch gefährlicher):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

5.4 Wichtige Sätze der Differentialrechnung

Einer der wichtigsten Sätze der Analysis ist der sog. *Mittelwertsatz* (der Differentialrechnung). Er und der *Satz von Rolle* als eine vereinfachte Version sowie sich daraus ergebende Folgerungen sollen in diesem Abschnitt besprochen werden.

5.4.1 Satz von Rolle

Definition 5.2

Seien $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall oder eine endliche Vereinigung von Intervallen, $\xi \in \mathcal{I}$ und $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\delta > 0$ sei $U_\delta(\xi) := (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

- (i) f besitzt an der Stelle ξ ein *relatives* oder *lokales Maximum* bzw. *Minimum*, wenn gilt:

$$\bigvee_{U_\delta(\xi)} \bigwedge_{x \in U_\delta(\xi) \cap \mathcal{I}} f(x) \leq f(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(\xi).$$

Lokale Maxima oder - Minima heißen auch *lokale* oder *relative Extrema*.

- (ii) Das relative Extremum heißt *strenges relatives Maximum* bzw. *Minimum*, wenn gilt:

$$\bigvee_{\dot{U}_\delta(\xi)} \bigwedge_{x \in \dot{U}_\delta(\xi) \cap \mathcal{I}} f(x) < f(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f(x) > f(\xi)$$

mit der punktierten Umgebung

$$\dot{U}_\delta(\xi) := U_\delta(\xi) \setminus \{\xi\}.$$

Bemerkung

Ein lokales Maximum von f kann sehr wohl kleiner sein als das Maximum von f auf dem gesamten Intervall \mathcal{I} , dem sog. *globalen Maximum*, falls letzteres überhaupt existiert. Ein globales Extremum ist natürlich erst recht ein lokales Extremum; s. Abb. 5.5.

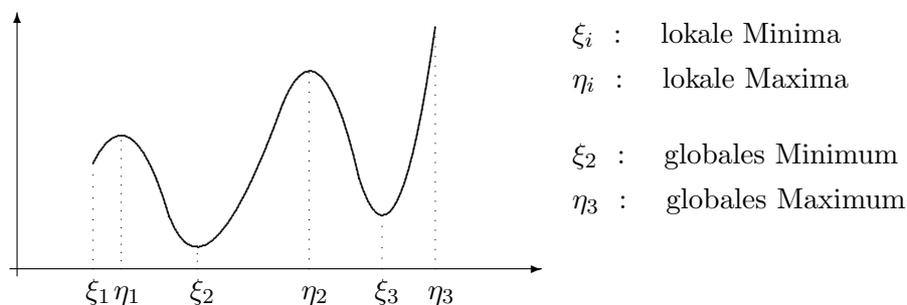


Abbildung 5.5: Lokale - und globale Extrema einer Funktion

Der folgende Satz liefert ein *notwendiges* Kriterium für das Vorliegen eines relativen Extremums und ist zumindest anschaulich klar:

Satz 5.5 (Notwendiges Kriterium)

Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall oder eine endliche Vereinigung von Intervallen, $\xi \in \mathcal{I}$ sei ein innerer Punkt und $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine in ξ differenzierbare Funktion, die in ξ ein lokales Extremum habe.

Beh. $f'(\xi) = 0$.

Aussage: f hat im Punkt $\langle \xi, f(\xi) \rangle$ eine horizontale Tangente.

Bemerkung

(i) Die Voraussetzung, daß ξ ein innerer Punkt von $D(f)$ ist, ist wesentlich:

$$f(x) := x \quad (x \in [0, 1])$$

besitzt in $\xi = 0$ ein lokales (sogar globales) Minimum, es gilt jedoch

$$f'(0) := \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ x \neq 0}} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

(ii) Dieser Satz ist nicht umkehrbar:

$$f(x) := x^3 \quad (x \in [-1, 1]),$$

und im inneren Punkt $\xi = 0$ gilt: $f'(\xi) = 0$, jedoch hat f in $\xi = 0$ kein Extremum.

(iii) Ist f auf dem offenen Intervall (a, b) definiert und in jedem Punkt differenzierbar, so können lokale Extrema nur an denjenigen Stellen ξ vorhanden sein, an denen $f'(\xi) = 0$ ist; solche Punkte heißen *kritische Punkte*. Ob dann die kritischen Punkte tatsächlich Stellen lokaler Extrema sind, muß in jedem Einzelfall gesondert geprüft werden.

(iv) Die letzte Bemerkung unterstreicht noch einmal, daß es sich bei Satz 5.5 nur um ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums handelt. Ein hinreichendes Kriterium steht im Abschnitt „Kurvendiskussion“ und wird im Abschnitt „Taylor’sche Formel“ ergänzt.

Da man die lokalen Extrema einer Funktion in der Menge derjenigen ξ suchen muß, in denen f' verschwindet, ist man an Bedingungen interessiert, unter denen das der Fall ist:

Satz 5.6 (Satz von Rolle²)

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. f sei stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) . Es gelte $f(a) = f(b)$.

Beh. $\bigvee_{\xi \in (a, b)} f'(\xi) = 0$.

Bemerkung

- (i) Der Satz von Rolle ist eine „Übersetzung“ des folgenden geometrischen Sachverhaltes in die Sprache der Analysis:

Ist die Funktion f zwischen zwei Punkten a und b mit gleichen Funktionswerten differenzierbar, dann gibt es wenigstens einen Punkt von f mit einer zur Abszisse parallelen Tangente.

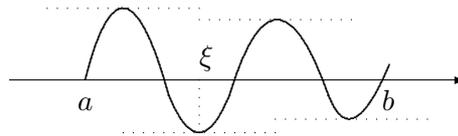
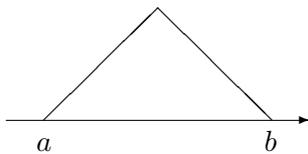
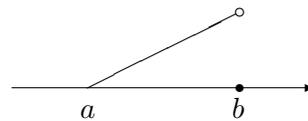


Abbildung 5.6: Satz von Rolle

Insbesondere lässt sich der Satz natürlich für den Bereich einer differenzierbaren Funktion zwischen zwei Nullstellen anwenden; s. Abb. 5.6.

- (ii) Die Aussage des Satzes wird falsch, wenn f nicht mehr überall in (a, b) differenzierbar (Abb. 5.7) oder in $[a, b]$ nicht mehr stetig ist (Abb. 5.8).

Abbildung 5.7: f in (a, b) nicht mehr differenzierbarAbbildung 5.8: f in (a, b) differenzierbar, aber in $[a, b]$ nicht stetig

- (iii) Würde man in der Voraussetzung die Differenzierbarkeit allerdings auch noch in den Randpunkten fordern, so würde man die Gültigkeit des Satzes unnötig einschränken; s. Abb. 5.9.

Beweis des Satzes von Rolle

- (i) Ist f eine konstante Funktion, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, damit ist in diesem Falle die Behauptung wahr.

²Michel Rolle (1652-1719), französischer Mathematiker

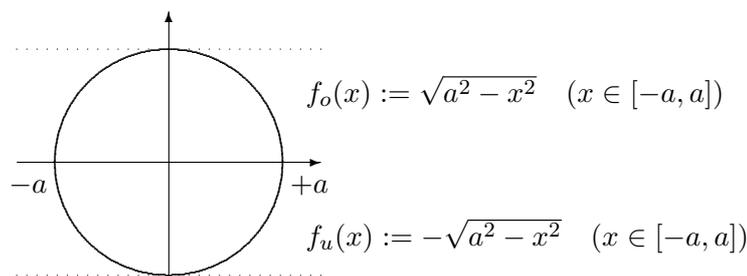


Abbildung 5.9: Keine Differenzierbarkeit in den Randpunkten $-a, +a$

(ii) Sei also f keine konstante Funktion. Als stetige Funktion nimmt f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an (Satz 4.9), welche wegen der Nichtkonstanz verschieden sind:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &:= \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \\
 &< \max\{f(x) : x \in [a, b]\} =: f(x_2)
 \end{aligned}$$

Wegen $f(a) = f(b)$ liegt einer der Punkte x_1, x_2 in (a, b) , etwa x_1 . Somit ist x_1 ein innerer Punkt, an dem ein lokales (sogar globales) Minimum vorliegt. Nach Satz 5.5 folgt

$$f'(x_1) = 0.$$

5.4.2 Mittelwertsätze der Differentialrechnung

In einer etwas anderen Formulierung besagt der Satz von Rolle:

Ist die Funktion f zwischen zwei Punkten a und b mit gleichen Funktionswerten differenzierbar, dann gibt es wenigstens einen Punkt von f , dessen Tangente zur Sehne zwischen den Punkten

$$\langle a, f(a) \rangle \quad \text{und} \quad \langle b, f(b) \rangle$$

parallel ist; s. Abb. 5.6. M.a.W., es gibt eine Zahl $\xi \in (a, b)$, so daß die Tangente an f in ξ die gleiche Steigung hat wie die Sehne durch die beiden Kurvenpunkte

$$\langle a, f(a) \rangle \quad \text{und} \quad \langle b, f(b) \rangle.$$

Der Mittelwertsatz (genauer: 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung) ist nun eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes dahingehend, daß die Sehne bzw. Tangente nicht notwendig horizontal verlaufen müssen. Das ist auch anschaulich klar, denn der mathematische Sachverhalt des Rolle'schen Satzes sollte nicht davon abhängen, ob die betrachteten Objekte in der Zeichnungsebene gleichzeitig gedreht werden, s. Abb. 5.10.

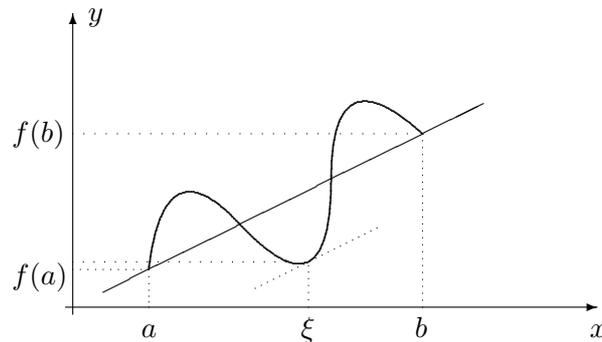


Abbildung 5.10: Mittelwertsatz

Satz 5.7 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

f sei im (abgeschlossenen) Intervall $[a, b]$ stetig und im (offenen) Intervall (a, b) differenzierbar. Dann existiert eine Zahl $\xi \in (a, b)$ mit der Eigenschaft

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Mittelwertsatz läßt sich auch physikalisch interpretieren:

Ein Teilchen bewege sich längs einer Strecke, $s(t)$ bezeichne seinen Ort zur Zeit t . Die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten $t_1 = a$ und $t_2 = b$ ist dann

$$\bar{v} := \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann wenigstens einen Zeitpunkt $\tau \in (t_1, t_2)$, zu dem die Momentangeschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit ist:

$$\bigvee_{\tau \in (t_1, t_2)} \bar{v} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \dot{s}(\tau).$$

Beweis des Mittelwertsatzes

Man definiere die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \quad (x \in [a, b]).$$

Dann genügt g den Voraussetzungen des Satzes von Rolle (u.a. $g(a) = g(b) = 0$). Daher existiert eine Zahl $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Für dieses ξ ist

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

wie man durch Differenzieren von g erkennt.

Der Mittelwertsatz erscheint oft in einer anderen Formulierung, in der die auftretenden Größen a, ξ, b auf das linke Intervallende a bezogen werden. Man setzt

$$x := a, \quad h := b - a; \quad \theta := \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{\xi - a}{h} \quad (\in (0, 1))$$

und erhält die Aussage:

Ist f auf $[x, x + h]$ stetig und auf $(x, x + h)$ differenzierbar, so gilt:

$$\bigvee_{\theta \in (0, 1)} f(x + h) = f(x) + f'(x + \theta h) \cdot h.$$

Man beachte: θ hängt von x und von h ab.

Neben dem ersten - gibt es noch einen zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung; dieser spielt beim Beweis der Regeln von de l'Hospital eine Rolle.

Satz 5.8 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

f und g seien im (abgeschlossenen) Intervall $[a, b]$ stetig und im (offenen) Intervall (a, b) differenzierbar, und es gelte

$$g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b)).$$

Dann gilt:

$$\bigvee_{\xi \in (a, b)} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Bemerkung

- (i) Wählt man $g(x) := x$ ($x \in [a, b]$), so geht der verallgemeinerte Mittelwertsatz in den „gewöhnlichen“ Mittelwertsatz über.
- (ii) Nach dem „gewöhnlichen“ Mittelwertsatz gibt es Stellen $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1) \quad , \quad \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\xi_2),$$

also auch

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{(b - a) f'(\xi_1)}{(b - a) g'(\xi_2)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}.$$

Die Betonung der Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes ruht nun darauf, daß es *eine* Stelle $\xi = \xi_1 = \xi_2$ gibt, welche man benutzen darf.

Im folgenden sollen einige wichtige Anwendungen besprochen werden, deren Beweise sich auf den Mittelwertsatz zurückführen lassen. So besagt etwa der nächste Satz, daß eine differenzierbare Funktion durch ihre Ableitung bis auf eine additive Konstante schon eindeutig festgelegt ist:

Satz 5.9

Seien \mathcal{I} ein Intervall, g_1 und g_2 auf \mathcal{I} definiert, auf \mathcal{I} stetig und im Inneren von \mathcal{I} differenzierbar mit gleichen Ableitungen, d.h. es gelte

$$g_1'(x) = g_2'(x) \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Dann gilt:

$$\bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathcal{I}} g_1(x) = g_2(x) + c$$

Beweis

Dieses Ergebnis ist eine Anwendung des Mittelwertsatzes. Sei dazu $f := g_1 - g_2$. Dann gilt $f'(x) = 0$ ($x \in \mathcal{I}$). Ein beliebiger Punkt $x \in \mathcal{I}$ läßt sich in der Form

$$x = x_0 + h$$

darstellen mit einer geeigneten Zahl $h \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgt dann die Existenz eines $\xi \in (x_0, x_0 + h)$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(\xi) \cdot h \\ &= f(x_0) + 0 \cdot h \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Wählt man $c := f(x_0)$, so folgt

$$g_1(x) = g_2(x) + c \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Folgerung

$$f' = 0 \quad \text{in einem Intervall } \mathcal{I} \quad \implies \quad f = \text{const.}$$

Beweis

Anwendung des letzten Satzes mit $g_2 := 0$.

Bemerkung

- (i) Eine differenzierbare Funktion f ist durch ihre Ableitung f' demnach bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt. Daher muß es grundsätzlich möglich sein, f aus f' und einem gegebenen Funktionswert $f(x_0)$ zu rekonstruieren. *Wie* das zu bewerkstelligen ist, wird man im Kapitel über Integration sehen.
- (ii) Die Aussage der letzten Folgerung läßt sich auch anders formulieren:

Ist f eine Lösung der *Differentialgleichung*

$$y' = 0 \quad (x \in \mathcal{I}),$$

dann ist f eine konstante Funktion:

$$\bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathcal{I}} f(x) = c.$$

Umgekehrt ist natürlich auch jede auf einem Intervall definierte konstante Funktion eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 0$.

Folgerung

f ist eine Lösung des *Anfangswertproblems* (AWP) auf dem Intervall \mathcal{I}

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

\iff

$D(f)$ ist ein Intervall, und es gilt

$$f(x) = y_0 \cdot e^x \quad (x \in D(f)).$$

Beweis

„ \Leftarrow “

Einsetzen und Rechnen!

„ \Rightarrow “

Sei f eine Lösung des AWP und sei (die differenzierbare Funktion) g definiert durch

$$g(x) := f(x) \cdot e^{-x} \quad (x \in D(f)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} \\ &= [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0 \quad (x \in D(f)). \end{aligned}$$

Die Folgerung im Anschluß an den Mittelwertsatz liefert dann

$$g(x) = \text{const.} = g(0) \quad (x \in D(f)),$$

also

$$f(x) \cdot e^{-x} = f(0) \cdot e^0 = y_0 \quad (x \in D(f)),$$

somit

$$f(x) = y_0 \cdot e^x \quad (x \in D(f)).$$

Als eine weitere unmittelbare Anwendung des Mittelwertsatzes wird ein Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und ihrer Monotonie hergestellt:

Satz 5.10

f sei in einem Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt:

- (i) $f'(x) > 0 \quad (x \in (a, b)) \implies f$ ist in $[a, b]$ streng monoton wachsend
- (ii) $f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a, b)) \iff f$ ist in $[a, b]$ monoton wachsend
- (iii) $f'(x) < 0 \quad (x \in (a, b)) \implies f$ ist in $[a, b]$ streng monoton fallend
- (iv) $f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a, b)) \iff f$ ist in $[a, b]$ monoton fallend

Bewiesen werden soll von diesem Satz die „ \implies “-Richtung, da diese eine Anwendung des Mittelwertsatzes darstellt.

Seien dazu $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz existiert eine Zahl $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0},$$

also gilt

$$\text{sgn}[f(x_2) - f(x_1)] = \text{sgn}[f'(\xi)].$$

Damit ist in „ \implies “-Richtung alles gezeigt.

Man beachte:

Im Fall strenger Monotonie gilt „ \iff “ nicht unbedingt, wie etwa an dem Beispiel

$$f(x) := x^3 \quad (x \in [-1, 1])$$

zu sehen ist:

f ist in $[-1, 1]$ streng monoton wachsend, aber es gilt *nicht*:

$$f'(x) > 0 \quad (x \in (-1, 1)).$$

Die Zerlegung des Definitionsbereiches einer Funktion in „Monotonie-Intervalle“ ist oft hilfreich bei der qualitativen Diskussion und dem Skizzieren einer Funktion, wie an dem folgenden Beispiel zu erkennen ist:

Beispiel 5.8

$$f(x) := \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\longrightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\iff 1-x^2 < 0 &\iff |x| > 1 \\ f'(x) = 0 &\iff 1-x^2 = 0 &\iff |x| = 1 \\ f'(x) > 0 &\iff 1-x^2 > 0 &\iff |x| < 1, \end{aligned}$$

also ist f in $(-\infty, -1]$ und $[1, \infty)$ streng monoton fallend und in $[-1, 1]$ streng monoton wachsend. Ferner sind

$$f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

Das Schaubild von f sieht daher aus wie in Abb. 5.11.

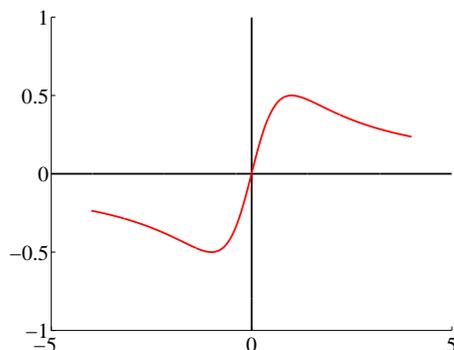


Abbildung 5.11: Graph der Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Als letztes Ergebnis dieses Abschnittes soll eine bemerkenswerte Eigenschaft der Ableitung einer differenzierbaren Funktion erwähnt werden, nämlich ihre Zwischenwerteigenschaft. Sie besagt im wesentlichen, daß eine eventuelle Unstetigkeit der Ableitung nur eine Oszillationsstelle sein kann (cf. p. 239), also keine Sprungstelle und kein Pol:

Satz 5.11 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)

f sei auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gelte $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt die Ableitung f' in (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

5.5 Anwendungen der Differentialrechnung

Für manche Anwendungen der Differentialrechnung werden auch höhere Ableitungen von Funktionen benötigt.

Schlagwort

Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit.

5.5.1 Höhere Ableitungen

Definition 5.3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und f eine Funktion.

- (i) Die n -te Ableitung $f^{(n)}$ von f ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(k)} &:= \left(f^{(k-1)}\right)' \quad (k \in \{1, \dots, n\}) \end{aligned}$$

- (ii) f heißt in ξ n -mal differenzierbar, falls $\xi \in D(f^{(n)})$.

- (iii) Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$, so heißt f in \mathcal{G} n -mal differenzierbar, falls $\mathcal{G} \subseteq D(f^{(n)})$.

- (iv) f heißt n -mal differenzierbar, falls $D(f^{(n)}) = D(f)$.

Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$, so sei vereinbart

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{G}) := \{f : \mathcal{G} \subseteq D(f), f \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ } n\text{-mal differenzierbar, } f^{(n)} \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ stetig}\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}) := \{f : \mathcal{G} \subseteq D(f), f \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ beliebig oft differenzierbar}\}$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\mathcal{G})$$

Bemerkung

- (i) I.a. werden die Definitionsbereiche von $f^{(n)}$ mit wachsendem n kleiner; siehe z.B. die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ ($x \geq 0$), die in $\xi = 0$ nicht differenzierbar ist.

- (ii) Beispiele für \mathcal{C}^∞ -Funktionen:

- Polynome
- Rationale Funktionen

- Trigonometrische Funktionen
- $e \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
- $\ln \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty))$

(iii) Für die erste Ableitung einer Funktion f sind auch die Bezeichnungen $\frac{df}{dx}$ oder $\frac{d}{dx}f$ gebräuchlich. Analog werden für höhere Ableitungen auch die Bezeichnungen $\frac{d^n f}{dx^n}$ oder $\frac{d^n}{dx^n}f$ verwendet.

(iv) Die folgende Funktion ist überall einmal stetig differenzierbar, im Nullpunkt aber nicht zweimal differenzierbar:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

5.5.2 Grenzwertbestimmung unbestimmter Ausdrücke

Die Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ kann erhebliche Schwierigkeiten bereiten, wenn Zähler Nenner für $x \rightarrow \xi$ beide gegen 0 streben, wenn also gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0.$$

Beispiel 5.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = ?$$

Hier darf man selbstverständlich *nicht* den folgenden Grenzwertsatz für einen Quotienten verwenden (warum nicht?):

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)}$$

Man beachte, daß auch dem Problem der Differenzierbarkeit einer Funktion ein ähnlich gelagerter Grenzwert zugrundeliegt:

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Die Berechnung eines solchen Grenzwertes ist jedoch völlig problemlos, wenn gilt:

- $f'(\xi)$ und $g'(\xi)$ existieren,
- $g'(\xi) \neq 0$.

In einem solchen Falle gilt nämlich $f(\xi) = g(\xi) = 0$, weil wegen der Differenzierbarkeit von f und g in ξ beide Funktionen in ξ stetig sind. Also folgt:

$$f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0, \quad , \quad g(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0.$$

Daraus erhält man dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}} \xrightarrow{(x \rightarrow \xi)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Im Eingangsbeispiel 5.9 ist $g(x) = 2x$, also $g'(0) = 2 \neq 0$ und somit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 0}{x - 0}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 5.10 (vgl. Beispiel 4.6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0}} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

In diesem Fall – wie im Fall des eben behandelten Beispiels 5.9 übrigens auch – sind allerdings sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion im Nullpunkt stetig differenzierbar, und daher könnte man hier auch schreiben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Anstelle des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ läßt sich also auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ untersuchen.

Eine weitreichende Verallgemeinerung dieser Ausführungen bringt die sog. *Regel von Bernoulli*³ und *de l'Hospital*⁴

Satz 5.12 (Regel von Bernoulli - de l'Hospital)

Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathcal{I} := (a, b)$, f und g seien auf \mathcal{I} differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ ($x \in \mathcal{I}$). Es treffe eine der beiden folgenden Voraussetzungen zu:

$$(V1) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

³Johann Bernoulli (1667-1748), schweizer Mathematiker

⁴Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661-1704), französischer Mathematiker, veröffentlichte als erster die von Bernoulli gefundene Regel

$$(V2) \quad g(x) \underset{(x \rightarrow a+)}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{oder} \quad g(x) \underset{(x \rightarrow a+)}{\longrightarrow} \infty$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ möge als eigentlicher Grenzwert ($a \in \mathbb{R}$) oder als uneigentlicher Grenzwert ($a = -\infty$) existieren. Dann gilt:

(i) $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert;

(ii) $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

(iii) Ein entsprechender Sachverhalt gilt für den Grenzwert $x \rightarrow b-$.

Bemerkung

- (i) Man leite Zähler- und Nennerfunktion getrennt ab – also nicht nach der Quotientenregel – und setze danach $x = a$ ein. Ergibt sich dann eine reelle Zahl, so ist diese der gesuchte Grenzwert.
- (ii) Wenn die Stelle der Grenzwertbetrachtung – etwa a – endlich ist sowie $f(a), g(a), f'(a), g'(a)$ existieren mit $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$, so trifft das eingangs Gesagte zu, und die Anwendung dieses Satzes ist müßig. Die eigentliche Bedeutung liegt daher in der Anwendung auf Fälle, in denen $a = -\infty$ oder $b = \infty$ ist.
- (iii) Wenn die ersten Ableitungen f' und g' für $x \rightarrow a+$ oder $x \rightarrow b-$ ein ähnliches Verhalten zeigen wie f und g , so kann man im Falle der mehrmaligen Differenzierbarkeit von f und g natürlich auch die höheren Ableitungen zu Rate ziehen und diesen Satz mehrmals anwenden.
- (iv) Aus Gründen der vereinfachenden Schreibweise werden bei der Anwendung der l'Hospitalschen Regel folgende Abkürzungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) := -\infty & \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{für } x \rightarrow a+ \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) := \infty & \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow a+ \end{aligned}$$

Analog für Grenzwerte $x \rightarrow b-$.

- (v) Symbolisch(!) werden bei Vorliegen der beiden Voraussetzungen (V1) bzw. (V2) die entsprechenden Fälle als

$$\text{Fall } \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \text{Fall } \frac{\infty}{\infty}$$

bezeichnet.

Beweis (Spezialfall)

Der Beweis wird für den Fall geführt, daß die Voraussetzung (V1) zutrifft.

eigentlicher Grenzwert:

Wenn f und g an der Stelle a nicht definiert sind, so verschaffe man sich jeweils in a stetige und für $x > a$ differenzierbare Fortsetzungen durch

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x = a \\ f(x) & , \quad x \neq a \end{cases} \quad \text{und} \quad G(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x = a \\ g(x) & , \quad x \neq a \end{cases}$$

und arbeite dann mit den Funktionen F und G weiter, auf welche der erweiterte Mittelwertsatz angewendet wird:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(a + \theta(x - a))}{G'(a + \theta(x - a))}.$$

Für $x \rightarrow a$ strebt auch $a + \theta(x - a) \rightarrow a$, und es folgt

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

uneigentlicher Grenzwert:

Mit Hilfe der Transformation $x = \frac{1}{u}$ führt man diesen Fall auf den schon bewiesenen zurück, indem man setzt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{f'(1/u) \cdot (-1/u^2)}{g'(1/u) \cdot (-1/u^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Sowohl für den eigentlichen - als auch für den uneigentlichen Grenzwert gilt ein entsprechender Sachverhalt mutatis mutandis natürlich für den Fall $x \rightarrow b-$.

Beispiele 5.11

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 5}{2x - 2} = \frac{11}{4}$$

Dieses Beispiel hätte sich allerdings auch ohne die l'Hospital'sche Regel wie folgt behandeln lassen:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 8)}{(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 8}{x + 1} = \frac{11}{4}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Man beachte, daß bei jedem der Schritte die Voraussetzung (V1) von Satz 5.12 erfüllt ist.

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots x^0}{e^x} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Man sagt, „ e^x strebt stärker gegen ∞ als jede Potenz von x “

Bemerkung

Da der Mechanismus, welcher der l’Hospital’schen Regel zugrundeliegt, immer wieder zu Mißverständnissen Anlaß gibt, sei der Sachverhalt hier noch einmal hervorgehoben:

- (i) Ein Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist und bleibt sinnlos und wird auch mit dieser Regel nicht bestimmt.
- (ii) Die Regel gestattet die Bestimmung von Grenzwerten höchstens an solchen Stellen, an denen die gegebene Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ eine behebbare Definitionslücke besitzt.
- (iii) Führt die Anwendung der Regel bei einer Lücke im Endlichen (eigentlicher Grenzwert) zum Ziel, so läuft ihr Formalismus auf die Erzeugung einer Ersatzfunktion hinaus, die an der fraglichen Stelle stetig ist und dort den gesuchten Grenzwert als Funktionswert besitzt.

*** Aufgabe**

Die Voraussetzungen des Anstriches (ii) der Bemerkung von p. 278 mögen zutreffen; es seien also $a \in \mathbb{R}$, $g'(a) \neq 0$ und es gelte

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Unter welchen Zusatzvoraussetzungen an die Funktionen f und g folgt daraus auch

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} ?$$

Hinweis

Man studiere dazu die beiden Eingangsbeispiele 5.9 und 5.10 sowie untersuche das Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Beispiel 5.12

Dieses Beispiel ist eine Verallgemeinerung von Beispiel 5.11 (iii).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha \cdot e^{\alpha x}} = 0 \quad \text{für jede Zahl } \alpha > 0.$$

Wegen $\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \left(\frac{x}{e^{\frac{\alpha}{\beta}x}}\right)^\beta$ folgt daraus mit Hilfe von Satz 4.2 (ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0 \quad \text{für alle Zahlen } \alpha, \beta > 0.$$

In Worten:

Jede noch so kleine (positive) Potenz von e^x geht für $x \rightarrow +\infty$ wesentlich schneller gegen $+\infty$ als jede noch so große Potenz von x . Insbesondere folgt daraus (warum?)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) \cdot e^{-\alpha x} = 0$$

für jedes Polynom p und jedes $\alpha > 0$.

Beispiel 5.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \text{für jede Zahl } \alpha > 0.$$

Wegen $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$ folgt daraus mit Hilfe von Satz 4.2 (ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{für alle Zahlen } \alpha, \beta > 0.$$

In Worten:

Jede noch so große Potenz von $\ln x$ geht für $x \rightarrow +\infty$ wesentlich langsamer gegen $+\infty$ als jede noch so kleine (positive) Potenz von x .

Beispiel 5.14

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{\alpha} x^\alpha\right) = 0$$

für jede Zahl $\alpha > 0$. Wie in den voranstehenden Beispielen schließt man

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \cdot (\ln x)^\beta = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \ln x\right)^\beta = 0$$

für alle Zahlen $\alpha, \beta > 0$.

In Worten:

Jede noch so große Potenz von $\ln x$ geht für $x \rightarrow 0+$ wesentlich langsamer gegen $-\infty$ als jede noch so kleine (positive) Potenz von x gegen Null.

Manchmal kann auf einen Ausdruck die l'Hospital'sche Regel erst angewendet werden, nachdem er umgeformt worden ist; schon beim letzten Beispiel wurde davon Gebrauch gemacht.

Beispiele 5.15

(i) $f(x) := f_1(x) \cdot f_2(x)$, wobei gilt:

$$f_1(x) \longrightarrow 0 \quad , \quad f_2(x) \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow \xi).$$

Hier betrachtet man stattdessen

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \text{oder} \quad f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}.$$

Konkret: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \cot x :$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

(ii) $f(x) := [f_1(x)]^{f_2(x)}$ mit einer nichtnegativen Funktion f_1 , wobei gilt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\longrightarrow 0 \quad , \quad f_2(x) \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow \xi) \quad \text{oder} \\ f_1(x) &\longrightarrow 1 \quad , \quad f_2(x) \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow \xi) \quad \text{oder} \\ f_1(x) &\longrightarrow \infty \quad , \quad f_2(x) \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow \xi). \end{aligned}$$

Hier verwendet man die logarithmische Identität $f(x) = e^{\ln f(x)}$ und betrachtet stattdessen

$$[f_1(x)]^{f_2(x)} = e^{f_2(x) \cdot \ln f_1(x)}$$

und verwendet die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Konkret: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x},$

$$\begin{aligned} \text{Nebenrechnung:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = - \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \right) = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man unter Ausnutzung der Stetigkeit der Exponentialfunktion das Ergebnis

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \cdot \ln x)} = e^0 = 1.$$

(iii) $f(x) := f_1(x) - f_2(x)$, mit $f_1(x), f_2(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \xi$).

Hier kann man wie folgt umformen:

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)f_2(x) \left(\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_1(x)} \right) = \frac{\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)f_2(x)}}.$$

Konkret: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x - \coth x$: Als Quotient geschrieben, lautet das

$$\cot x - \coth x = \frac{\frac{1}{\coth x} - \frac{1}{\cot x}}{\frac{1}{\coth x \cot x}} = \frac{\tanh x - \tan x}{\tanh x \cdot \tan x}.$$

Auf diesen Ausdruck kann die l'Hospital'sche Regel („ $\frac{0}{0}$ “) angewendet werden, und man erhält

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tanh x - \tan x}{\tanh x \cdot \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\tan x}{\cosh^2 x} + \frac{\tanh x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - \cosh^2 x}{\frac{1}{2}(\sin 2x + \sinh 2x)}.$$

Eine nochmalige Anwendung der Regel liefert

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - \cosh^2 x}{\frac{1}{2}(\sin 2x + \sinh 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{-2 \cos x \sin x - 2 \cosh x \sinh x}{2 \cos 2x + 2 \cosh 2x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\sin 2x + \sinh 2x}{\cos 2x + \cosh 2x} = -2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin 2x + \sinh 2x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 2x + \cosh 2x)} = -2 \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

5.5.3 Kurvendiskussion

Unter *Kurvendiskussion* versteht man die systematische Untersuchung des Verlaufs einer Funktion und der Gestalt ihres Funktionsgraphen. Man möchte mit möglichst wenig Arbeitsaufwand den Verlauf des Graphen an seinen wesentlichen Stellen erkennen.

Daher ist es unfruchtbar, wahllos eine große Anzahl von Wertepaaren zu berechnen; dabei können wichtige Daten wie Unstetigkeitsstellen, Nullstellen, Extremwerte, etc. übersehen werden. Es kommt vielmehr darauf an, die charakteristischen Eigenschaften einer Funktion zu erkennen.

Bei einer Kurvendiskussion sollten die folgenden Fragen untersucht werden, wobei die Reihenfolge nicht zwingend vorgeschrieben ist:

Untersuchung bei einer Kurvendiskussion

(i) Definitionsbereich

- Für welchen Teil des Definitionsbereiches liegt ein Interesse vor? Ist die unabhängige Variable beispielsweise eine Länge, eine Frequenz oder die Zeit, so interessieren keine negativen Werte.

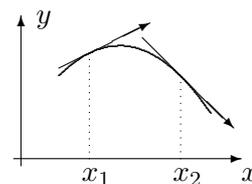
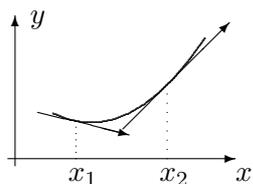
- Gibt es Definitionslücken?
 - Wie verhält sich die Funktion am Rand ihres Definitionsbereiches?
- (ii) Wertebereich
Ist f beschränkt (wodurch?) oder unbeschränkt?
- (iii) Symmetrien
- Ist die Funktion gerade oder ungerade?
 - Ist die Funktion anderswie symmetrisch?
 - Ist die Funktion periodisch?
- (iv) Güte der Funktion
- Wo ist die Funktion stetig?
 - Wo ist die Funktion differenzierbar?
 - Wo verläuft die Funktion (streng) monoton?
- (v) Unendlichkeitsstellen
- Solche können an Definitionslücken auftreten, etwa bei rationalen Funktionen an Stellen, an denen der Nenner verschwindet und zugleich der Zähler ungleich Null ist.
 - Ist die Unendlichkeitsstelle ein Pol?
- (vi) Verhalten am Rand des Definitionsbereiches $D(f) := (a, b)$
Hier sind die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ oder $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ zu untersuchen.
- (vii) Ordinatenabschnitt
Schnittpunkt von f mit der Ordinate: $y_0 = f(0)$.
- (viii) Nullstellen
Schnittpunkte von f mit der Abszisse (x -Achse, t -Achse) heißen *Nullstellen* von f . Zu ihrer konkreten Bestimmung lassen sich auch Näherungsverfahren verwenden, wie z.B. die Regula Falsi oder das Newton'sche Näherungsverfahren.
- (ix) Extremstellen
An den Nullstellen der ersten Ableitung (den kritischen Punkten von f) *können* relative Extremwerte liegen. Mit Hilfe der höheren Ableitungen läßt sich dann feststellen, ob es sich dabei tatsächlich um relative Extremwerte handelt und wenn ja, ob ein relatives Minimum oder ein relatives Maximum vorliegt:
- Gilt neben $f'(x_E) = 0$ auch noch $f''(x_E) \neq 0$, so liegt an der Stelle x_E ein Extremwert vor, und zwar
- ein lokales Minimum, falls $f''(x_E) > 0$,

- ein lokales Maximum, falls $f''(x_E) < 0$.

(x) Wendepunkte

Ein *Wendepunkt* ist ein Kurvenpunkt, in dem der Graph der untersuchten Funktion von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt. Somit ist ein Wendepunkt ein relatives Extremum der Ableitung. Linkskurven heißen auch *konvex*, Rechtskurven *konkav*. Die analytische Bedingung für Links- bzw. Rechtskurven ergibt sich aus der folgenden Schlußkette:

<u>Linkskurven</u>	<u>Rechtskurven</u>
$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$
$\iff \tan \alpha_1 \leq \tan \alpha_2$	$\iff \tan \alpha_1 \geq \tan \alpha_2$
$\iff f'(x_1) \leq f'(x_2)$	$\iff f'(x_1) \geq f'(x_2)$
$\iff f'$ wächst monoton	$\iff f'$ fällt monoton
$\iff f''(x) \geq 0$	$\iff f''(x) \leq 0$



Links- und Rechtskurven werden also durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmt. Beim Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve wechselt die zweite Ableitung ihr Vorzeichen, und zwar:

Linkskurve \rightarrow Rechtskurve : Wechsel von positiv nach negativ
 Rechtskurve \rightarrow Linkskurve : Wechsel von negativ nach positiv

In einem Wendepunkt hat die Steigung des Funktionsgraphen (= erste Ableitung) einen Extremwert. Eine notwendige Bedingung dafür ist bekanntlich das Verschwinden der Ableitung (der ersten Ableitung), mithin der zweiten Ableitung von f . Wenn die zweite Ableitung an einer solchen Übergangsstelle (dem „Wendepunkt“) also überhaupt existiert, so muß sie dort verschwinden:

$$\langle x_W, f(x_W) \rangle \text{ ist ein Wendepunkt} \implies f''(x_W) = 0.$$

Gilt zusätzlich $f'''(x_W) \neq 0$, so sind beide Bedingungen auch hinreichend für das Vorliegen eines Wendepunktes. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} f'''(x_W) < 0 & : & \text{Linkskurve} & \rightarrow & \text{Rechtskurve,} \\ f'''(x_W) > 0 & : & \text{Rechtskurve} & \rightarrow & \text{Linkskurve.} \end{aligned}$$

Es muß allerdings betont werden, daß ein Wendepunkt auch dann vorliegen kann, wenn die Funktion an der besagten Stelle gar nicht differenzierbar ist, man also gar nicht von Ableitungen (jedweder Ordnung) sprechen kann. Ein Beispiel dafür liefert die schon bekannte Umkehrfunktion der kubischen Parabel, s. Abb. 5.12:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases} .$$

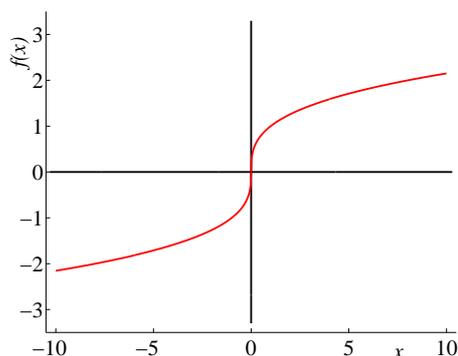


Abbildung 5.12: Eine am Wendepunkt nicht differenzierbare Funktion

Beispiel 5.16

$$f(x) := 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = x^2(3x^2 - 8x + 6) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Da die ersten drei Ableitungen von f sowieso benötigt werden, sollen diese gleich zu Anfang bereitgestellt werden:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x - 1)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f'''(x) = 72x - 48 = 24(3x - 2) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(i) Definitionsbereich

$$D(f) = \mathbb{R}$$

(ii) Wertebereich

$W(f) = [\min f, \infty)$, da die führende Potenz von f gerade ist.

(iii) Symmetrien

Die Funktion ist weder gerade, noch ungerade, noch periodisch.

(iv) Unendlichkeitsstellen

Keine

(v) Verhalten für große Werte von $|x|$

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \pm\infty$$

(vi) Ordinatenabschnitt

$$f(0) = 0$$

(vii) Güte der Funktion

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

(viii) Nullstellen

$$\text{Doppelte (reelle) Nullstelle bei } x = 0 : \quad x_{N_1} = x_{N_2} = 0$$

(ix) Extremstellen

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_1} = 0 \vee x_{E_2} = 1$$

$$f''(x_{E_1}) = 12 > 0 \rightarrow \text{relatives Minimum; } f(x_{E_1}) = 0$$

$$f''(x_{E_2}) = 0 \rightarrow \text{keine Aussage möglich; } f(x_{E_2}) = 1$$

(x) Wendepunkte

$$f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_{W_1} = \frac{1}{3} \vee x_{W_2} = 1$$

$$f'''(x_{W_1}) = -24 < 0 \rightarrow \text{Wendepunkt}$$

(x_{W_1} ist ein relatives Maximum von f' , also Linkskurve \rightarrow Rechtskurve)

$$f(x_{W_1}) = \frac{1}{27} - \frac{8}{27} + \frac{18}{27} = \frac{11}{27} \approx 0.41$$

$$f'''(x_{W_2}) = 24 > 0 \rightarrow \text{Wendepunkt}$$

(x_{W_2} ist ein relatives Minimum von f' , also Rechtskurve \rightarrow Linkskurve)

$$f(x_{W_2}) = 3 - 8 + 6 = 1$$

(xi) Schaubild

(Abb. 5.13)

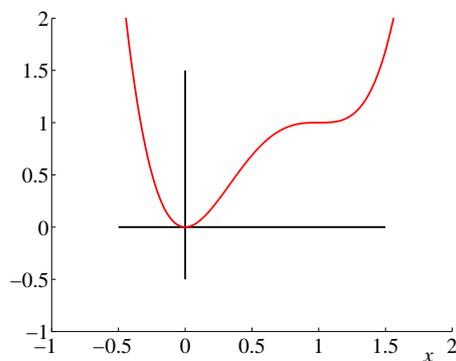


Abbildung 5.13: Graph der Funktion $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

Beispiel 5.17

$$f(x) := (\ln x)^2 - \ln x = \ln x (\ln x - 1) \quad (x > 0)$$

Wieder sollen die ersten drei Ableitungen der Funktion f zuerst berechnet werden ($x > 0$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} &= \frac{2 \ln x - 1}{x} \\ f''(x) &= \frac{1}{x^2} \left[2 \frac{1}{x} \cdot x - (2 \ln x - 1) \cdot 1 \right] &= \frac{3 - 2 \ln x}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{1}{x^4} \left[-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (3 - 2 \ln x) \cdot 2x \right] &= \frac{4(\ln x - 2)}{x^3} \end{aligned}$$

(i) Definitionsbereich

$$D(f) = (0, \infty)$$

(ii) Wertebereich

$$W(f) = [\min f, \infty)$$

(iii) Symmetrien

Keine

(iv) Unendlichkeitsstellen

Keine

(v) Verhalten für $x \rightarrow 0+$ und $x \rightarrow \infty$

Für $x \in (0, 1)$ ist $\operatorname{sgn}(\ln x) = \operatorname{sgn}(\ln x - 1) = -1$, und daher gilt

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \ln x \longrightarrow -\infty \\ \ln x - 1 \longrightarrow -\infty \end{array} \right\} & (x \rightarrow 0+) \\ \longrightarrow \ln x (\ln x - 1) & \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow 0+) \\ \left. \begin{array}{l} \ln x \longrightarrow +\infty \\ \ln x - 1 \longrightarrow +\infty \end{array} \right\} & (x \rightarrow \infty) \\ \longrightarrow \ln x (\ln x - 1) & \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(vi) Ordinatenabschnitt

Existiert nicht

(vii) Güte der Funktion

$$f \in C^\infty((0, \infty))$$

(viii) Nullstellen

$$f(x) \stackrel{!}{=} 0 \implies \begin{cases} \ln x = 0 & \longrightarrow x_{N_1} = 1 \\ \ln x = 1 & \longrightarrow x_{N_2} = e = 2,72 \end{cases}$$

(ix) Extremstellen

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \implies 2 \ln x = \ln x^2 = 1 \longrightarrow x_{E_1} = \sqrt{e} = 1,65$$

$$f''(x_{E_1}) = \frac{3 - 2 \ln \sqrt{e}}{e} = \frac{2}{e} > 0 \longrightarrow \text{relatives Minimum};$$

$$f(x_{E_1}) = (\ln \sqrt{e})^2 - \ln \sqrt{e} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -0,25$$

(x) Wendepunkte $f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \implies \ln x = \frac{3}{2} \longrightarrow x_{W_1} = \sqrt{e^3} = 4,48$

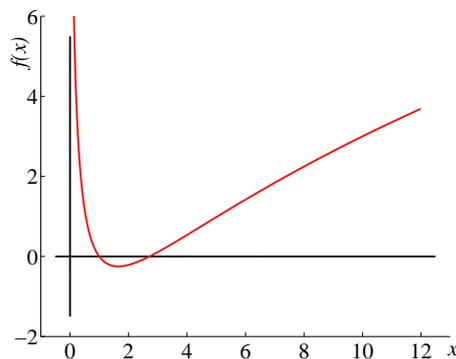
$$f'''(x_{W_1}) = \frac{4}{e^{9/2}} \left(\frac{3}{2} - 2\right) = -\frac{2}{e^{9/2}} < 0 \longrightarrow \text{Wendepunkt}$$

(relatives Maximum für f' , also Linkskurve \rightarrow Rechtskurve)

$$f(x_{W_1}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0,75$$

(xi) Schaubild

(Abb. 5.14)

Abbildung 5.14: Graph der Funktion $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$ **Bemerkung**

Bei manchen Funktionen geben die erste - und zweite Ableitung allein noch keinen Aufschluß über die Art eines Extremums (bzw. die zweite - und dritte Ableitung über einen Wendepunkt).

Beispiel $f(x) := x^n$ mit $n \geq 4$.

Hier ist der folgende Satz hilfreich, welcher, locker formuliert, aussagt:

Hinreichend für das Vorliegen eines Extremums ist, daß die erste in ξ nicht verschwindende Ableitung von *gerader* Ordnung ist; für einen Wendepunkt muß die erste in ξ nicht verschwindende Ableitung von *ungerader* Ordnung sein.

Satz 5.13

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

(i) Sei $f \in \mathcal{C}^{2n}(U_r(\xi))$. Gilt

$$f'(\xi) = \dots = f^{(2n-1)}(\xi) = 0, \quad f^{(2n)}(\xi) \neq 0,$$

dann hat f an der Stelle ξ ein relatives Extremum, und zwar

- ein strenges relatives Minimum, falls $f^{(2n)}(\xi) > 0$,
- ein strenges relatives Maximum, falls $f^{(2n)}(\xi) < 0$ ist.

(ii) Sei $f \in \mathcal{C}^{2n+1}(U_r(\xi))$. Gilt

$$f''(\xi) = \dots = f^{(2n)}(\xi) = 0, \quad f^{(2n+1)}(\xi) \neq 0,$$

dann hat f an der Stelle ξ einen Wendepunkt.

Der Beweis wird später (p. 327) im Anschluß an die Taylor'sche Formel gebracht.

Beispiel 5.18

Man betrachte die Serienschaltung folgender Wechselstromwiderstände in Abb. 5.15.

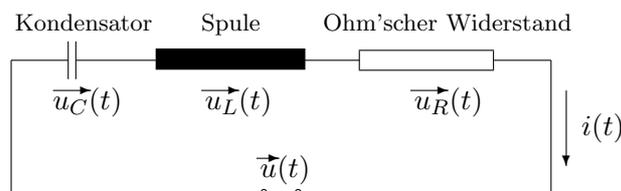


Abbildung 5.15: Elektrischer Reihenschwingkreis

Der komplexe Widerstand (Scheinwiderstand) ist gegeben durch

$$\underline{Z} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) =: X + iY,$$

$$\begin{aligned} X = \Re \underline{Z} &= R & : & \text{Wirkwiderstand,} \\ Y = \Im \underline{Z} &= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & : & \text{Blindwiderstand.} \end{aligned}$$

Der Betrag des Scheinwiderstandes lautet

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Beim Anlegen der Wechselspannung $u(t) := \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u)$ ($t \geq 0$) fließt der Strom $i(t) := \hat{i} \sin(\omega t + \phi_i)$ ($t \geq 0$), dessen Scheitelwert sich nach der Formel

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{Z}$$

berechnet, denn es gilt das Ohm'sche Gesetz der Wechselstromtechnik:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \hat{u} \cdot e^{i(\omega t + \phi_u)} &= & \hat{u} \cdot e^{i\phi_u} \cdot e^{i\omega t} &= & \hat{u} \cdot e^{i\omega t} \\ \underline{i}(t) &= \hat{i} \cdot e^{i(\omega t + \phi_i)} &= & \hat{i} \cdot e^{i\phi_i} \cdot e^{i\omega t} &= & \hat{i} \cdot e^{i\omega t} \\ \underline{Z} &= \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} &\longrightarrow & Z = |\underline{Z}| = \left| \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \right| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}. \end{aligned}$$

Es soll jetzt der Scheitelwert \hat{i} als Funktion der Frequenz ω diskutiert werden:

$$\hat{i} := f(\omega) := \frac{\hat{u}}{\sqrt{g(\omega)}} \quad , \quad g(\omega) := R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \quad (\omega > 0)$$

Die Berechnung der ersten drei Ableitungen wird mit Hilfe der Ersatzfunktion g durchgeführt ($\omega > 0$):

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{g(\omega)}} = \hat{u} \cdot [g(\omega)]^{-1/2} \\ f'(\omega) &= -\frac{1}{2} \hat{u} [g(\omega)]^{-3/2} \cdot g'(\omega) = -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{g'(\omega)}{\sqrt{g(\omega)}^3} \\ f''(\omega) &= -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{1}{[\sqrt{g(\omega)}]^6} \left[g''(\omega) \cdot [g(\omega)]^{3/2} - g'(\omega) \cdot \frac{3}{2} \cdot [g(\omega)]^{1/2} \cdot g'(\omega) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{1}{[\sqrt{g(\omega)}]^5} \left[g''(\omega) \cdot g(\omega) - \frac{3}{2} [g'(\omega)]^2 \right] \\ f'''(\omega) &= -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{1}{[\sqrt{g(\omega)}]^7} \left[g'''(\omega) \cdot [g(\omega)]^2 - \frac{9}{2} g(\omega) g'(\omega) g''(\omega) + \frac{15}{4} [g'(\omega)]^3 \right] \end{aligned}$$

Im wesentlichen werden also die Ableitungen von g benötigt:

$$\begin{aligned} g'(\omega) &= 2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) = 2\omega L^2 - \frac{2}{\omega^3 C^2} \\ g''(\omega) &= 2L^2 + \frac{6}{\omega^4 C^2} \\ g'''(\omega) &= -\frac{24}{\omega^5 C^2} \end{aligned}$$

(i) Definitionsbereich

$$D(f) = (0, \infty)$$

(ii) Wertebereich

Es sind $f(\omega) > 0$ und $f(\omega) \leq \frac{\hat{u}}{R}$, also $W(f) \subseteq (0, \frac{\hat{u}}{R}]$.

(iii) Symmetrien

Keine

(iv) Unendlichkeitsstellen

Keine

(v) Verhalten für $\omega \rightarrow \infty$

$$f(\omega) = \frac{\hat{u}}{\omega \cdot \sqrt{L^2 + (R^2 - \frac{2L}{C})\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{C^2\omega^4}}} \longrightarrow 0 \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

(vi) Ordinatenabschnitt

Nicht definiert

(vii) Güte der Funktion

$f \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty))$

(viii) Nullstellen

Keine im Definitionsbereich $(0, \infty)$

(ix) Extremstellen

Man kann den Extremwert auch ohne Differentialrechnung erraten: er ergibt sich für $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$. Das folgt allerdings auch aus dem Verschwinden der ersten Ableitung:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \implies \quad \omega_r := \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Die Frequenz ω_r heißt *Resonanzfrequenz*.

Als hinreichende Bedingung für die Existenz eines Extremwertes muß die zweite Ableitung an der Stelle ω_r ausgewertet werden. Dazu gibt es hier zwei Möglichkeiten:

(1) Einsetzen des Ausdruckes von ω_r in die zweite Ableitung f'' von f :

$$f''(\omega_r) = -\frac{1}{2} \frac{\hat{u}}{R^5} \cdot 8L^2 \cdot R^2 = -\frac{4\hat{u}L^2}{R^3} < 0$$

$$\longrightarrow \quad \omega_r \text{ ist Maximum für } f, \quad f(\omega_r) = \frac{\hat{u}}{R}$$

(2) f wird dann am größten, wenn die im Nenner unter der Wurzel stehende Funktion g am kleinsten wird. Dazu muß ihr (absolutes) Minimum bestimmt werden. Dieses wird innerhalb von $(0, \infty)$ angenommen, d.h. es ist $g''(\omega_r)$ auszuwerten:

$$g''(\omega_r) = 2\left(L + \frac{LC}{C}\right)^2 = 8L^2 > 0$$

$$\longrightarrow \quad \omega_r \text{ ist Minimum für } g$$

An der Stelle ω_r der Resonanzfrequenz erreicht der Scheitelwert \hat{i} seinen größten Wert, der Scheinwiderstand Z ist gleich dem Ohm'schen Widerstand R , und es gilt

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{R}.$$

(x) Wendepunkte

$$f''(\omega) \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad g''(\omega) \cdot g(\omega) - \frac{3}{2} \cdot [g'(\omega)]^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

$$\begin{aligned} & g''(\omega) \cdot g(\omega) - \frac{3}{2} \cdot [g'(\omega)]^2 \\ &= \frac{2}{\omega^4} \left[-2L^4\omega^6 + L^2 \left(R^2 - \frac{2L}{C} \right) \omega^4 + 10 \frac{L^2}{C^2} \omega^2 + \frac{3}{C^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Im Spezialfall $R^2 - \frac{2L}{C} = 0$ erhält man

$$\omega^4 = \frac{5}{(LC)^2}, \quad \text{also} \quad \omega_W = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{LC}} \approx 1,5 \cdot \omega_r.$$

Aufgabe

Man zeige: $f'''(\omega_W) \neq 0$.

Damit hat der Graph von \hat{i} in diesem Spezialfall höchstens einen Wendepunkt. Sein Funktionswert ist

$$f(\omega_W) = \frac{\hat{u}}{R \sqrt{\frac{3}{5} \sqrt{5}}} \approx 0,8633 \frac{\hat{u}}{R}.$$

(xi) Schaubild

Zur besseren Darstellung der Funktion (Abb. 5.16 und 5.17) werden noch die Größen $\lim_{\omega \rightarrow 0+} f(\omega)$ und $\lim_{\omega \rightarrow 0+} f'(\omega)$ berechnet:

$$f(\omega) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{g(\omega)}} = \frac{\hat{u} \cdot \omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C} \right)^2}} \quad \rightarrow \quad 0 \quad (\omega \rightarrow 0+)$$

$$\begin{aligned}
 f'(\omega) &= -\frac{1}{2} \hat{u} [g(\omega)]^{-3/2} \cdot g'(\omega) = -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{g'(\omega)}{\sqrt{g(\omega)}^3} \\
 &= -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{-\frac{2}{C^2 \omega^3} [1 - (LC)^2 \omega^4]}{\sqrt{\frac{1}{C^2 \omega^2} [1 + (LC)^2 \omega^4 + (C^2 R^2 - 2LC) \omega^2]}^3} \\
 &= -\frac{1}{2} \hat{u} \frac{-\frac{2}{C^2 \omega^3} [1 - (LC)^2 \omega^4]}{\frac{1}{C^3 \omega^3} \sqrt{1 + (LC)^2 \omega^4 + (C^2 R^2 - 2LC) \omega^2}^3} \\
 &= C \cdot \hat{u} \cdot \frac{1 + p(\omega)}{[1 + q(\omega)]^{3/2}} \longrightarrow C \cdot \hat{u} \quad (\omega \rightarrow 0+),
 \end{aligned}$$

wobei p und q Polynome in ω sind mit $p(0) = q(0) = 0$.

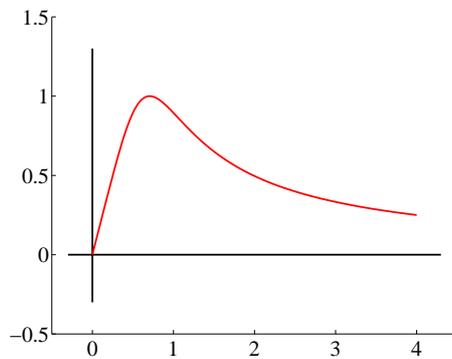


Abbildung 5.16: Graph der Funktion $\hat{i} = f(\omega)$ für $R^2 - \frac{2L}{C} = 0$

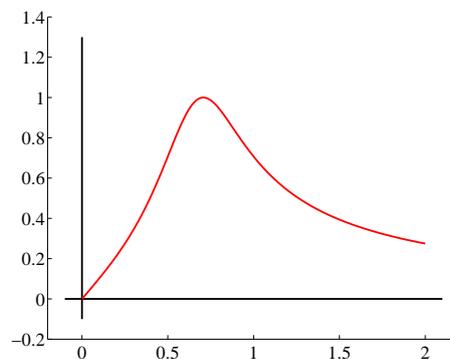


Abbildung 5.17: Graph der Funktion $\hat{i} = f(\omega)$ für $R = C = 1, L = 2$

Bemerkung

Auch wenn man die Gleichung 3. Grades zur Berechnung der Wendepunkte nur schwer lösen kann, so läßt sich jetzt eine Bedingung angeben, unter denen sich im Intervall $(0, \omega_r)$ noch ein Wendepunkt befindet. Dazu wird die rechtsseitige Steigung von f im Nullpunkt verglichen mit der Steigung der Gerade durch die Punkte $\langle 0, 0 \rangle$ und $\langle \omega_r, f(\omega_r) \rangle$. Ein Wendepunkt existiert dann, wenn gilt (Abb. 5.17):

$$\begin{aligned}
 f'(0+) &< \frac{f(\omega_r) - 0}{\omega_r - 0} = \frac{f(\omega_r)}{\omega_r} \\
 \iff & C \cdot \hat{u} < \frac{\hat{u}/R}{1/\sqrt{LC}} = \frac{\hat{u} \sqrt{LC}}{R} \\
 \iff & R < \sqrt{\frac{L}{C}}
 \end{aligned}$$

5.5.4 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

Die lokalen Extremwerte einer differenzierbaren Funktion lassen sich dadurch ermitteln, daß man zuerst die kritischen Punkte bestimmt:

Kritische Punkte sind solche, in denen der Funktionsgraph eine waagerechte Tangente besitzt.

Analytisch läuft diese Ermittlung darauf hinaus, die Nullstellen der ersten Ableitung zu bestimmen und mit Hilfe der zweiten (oder einer höheren) Ableitung zu untersuchen, ob der ermittelte kritische Punkt tatsächlich ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum) ist.

Oft unterliegen die gestellten Aufgaben noch zusätzlichen Bedingungen, den sog. *Nebenbedingungen*. Will man beispielsweise den kürzesten Weg von Berlin nach Neuseeland ermitteln, so besteht dieser in einer (geraden) Strecke, die in der Nähe des Erdmittelpunktes vorbeiführt, eine zwar richtige -, praktisch aber unbrauchbare Lösung. Hier lautet die Nebenbedingung, daß man den kürzesten Weg auf der *Erdoberfläche* suchen muß.

Die Schwierigkeiten bei der Lösung eines Extremalproblems mit Nebenbedingungen bestehen im wesentlichen in den folgenden drei Punkten:

- (I) Analytische Umsetzung des Problems
- (II) Verarbeitung der Nebenbedingung(en) zur Reduzierung der Anzahl der auftretenden Variablen
- (III) Anwendung der Maschinerie der Differentialrechnung (kritische Punkte, 2. Ableitung, etc.)

Beispiel 5.19

Welches Verhältnis müssen Radius und Höhe einer zylindrischen Dose aufweisen, damit

- (a) bei gegebenem Volumen V_0 die Oberfläche A minimal ist;
- (b) bei gegebener Oberfläche A_0 das Volumen V maximal ist;

Lösung Fall (a)

- (I) Analytische Umsetzung des Problems:

Die Oberfläche einer solchen Dose berechnet sich nach der Formel

$$A := a(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h).$$

(II) Verarbeitung der Nebenbedingung zur Reduzierung der Anzahl der auftretenden Variablen:

Das Volumen der Dose berechnet sich nach der Formel

$$V := v(r, h) = \pi r^2 h = V_0 \quad (r, h > 0),$$

$$\longrightarrow h = \frac{V_0}{\pi r^2}.$$

Diese Größe für h wird in die Formel für die Oberfläche eingesetzt, und man erhält eine Funktion von nur einer Variable:

$$A = a\left(r, h = \frac{V_0}{\pi r^2}\right) = 2\pi r \cdot \frac{V_0}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{V_0}{r} + \pi r^2\right) =: b(r).$$

(III) Anwendung der Maschinerie der Differentialrechnung:

$$A' = b'(r) = 2\left(-\frac{V_0}{r^2} + 2\pi r\right)$$

$$A'' = b''(r) = 4\left(\frac{V_0}{r^3} + \pi\right) > 0 \quad (r > 0)$$

$$b'(r) \stackrel{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad r_0 := \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

Zu diesem Wert r_0 gehört die Höhe

$$h_0 = \frac{V_0}{\pi r_0^2} = \frac{V_0}{\pi \sqrt[3]{\frac{V_0^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V_0^3 4\pi^2}{\pi^3 V_0^2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} = 2r_0.$$

Die Dose hat also einen quadratischen Querschnitt. Die Lösung der Aufgabe im Fall (b) liefert durch eine Maximierung des Volumens dasselbe Ergebnis.

Beispiel 5.20

Der kreisförmige Querschnitt der Spule eines Transformators soll durch einen Eisenkern von kreuzförmigem Querschnitt maximal ausgefüllt werden, s. Abb. 5.18.

- Wie sind die Abmessungen des kreuzförmigen Querschnittes zu wählen?
- Wieviel Prozent der Kreisfläche werden von dem Eisenkernquerschnitt ausgefüllt?

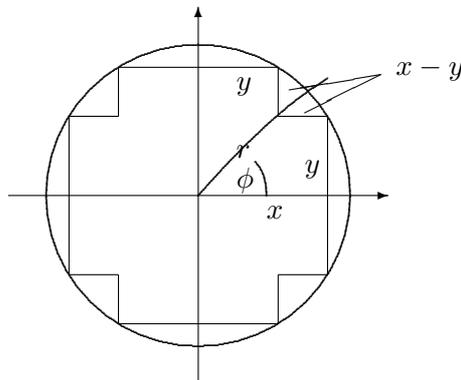


Abbildung 5.18: Eisenkern in der Spule eines Transformators

Lösung

(I) Analytische Umsetzung des Problems:

Die Querschnittsfläche des Eisenkerns ist gegeben durch

$$A := a(x, y) = 2 \cdot 2xy + 2 \cdot 2y(x - y) = 4y(2x - y).$$

(II) Verarbeitung der Nebenbedingung zur Reduzierung der Anzahl der auftretenden Variablen:

Die Nebenbedingung lautet hier, daß x und y nicht beliebig voneinander gewählt werden können, sondern über den Spulenradius miteinander gekoppelt sind:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Setzt man das in die Gleichung für die Querschnittsfläche A ein, so erhält man eine Funktion, die nur von einer Variable abhängt:

$$A = a(x = \sqrt{r^2 - y^2}, y) = 4y(2\sqrt{r^2 - y^2} - y) =: b(y).$$

(III) Anwendung der Maschinerie der Differentialrechnung:

Diese Funktion ist jetzt wie üblich zu behandeln ($x, y, r > 0$):

$$\begin{aligned} A' = b'(y) &= 4(2\sqrt{r^2 - y^2} - y) + 4y\left(2 \frac{-2y}{2\sqrt{r^2 - y^2}} - 1\right) \\ &= 8\left(\sqrt{r^2 - y^2} - y - \frac{y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'' = b''(y) &= 8\left(\frac{-2y}{2\sqrt{r^2 - y^2}} - 1 - \frac{2y\sqrt{r^2 - y^2} - y^2 \frac{-2y}{2\sqrt{r^2 - y^2}}}{r^2 - y^2}\right) \\ &= -\frac{8}{\sqrt{r^2 - y^2}}\left(3y + \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{y^3}{r^2 - y^2}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b'(y) \stackrel{!}{=} 0 &\quad \longrightarrow \quad 8 \left(\sqrt{r^2 - y^2} - y - \frac{y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right) = 0 \\
 &\longrightarrow \quad \frac{8}{\sqrt{r^2 - y^2}} \left(r^2 - y^2 - y\sqrt{r^2 - y^2} - y^2 \right) = 0 \\
 &\longrightarrow \quad r^2 - 2y^2 = y\sqrt{r^2 - y^2} \\
 &\longrightarrow \quad (r^2 - 2y^2)^2 = y^2(r^2 - y^2) \\
 &\longrightarrow \quad 5y^4 - 5r^2y^2 + r^4 = 0
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine sog. *biquadratische* Gleichung und wird durch die Substitution $u := y^2$ gelöst. Man erhält die beiden Lösungen

$$u_1 := \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \quad \text{und} \quad u_2 := \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

und daraus die vier Werte

$$\begin{aligned}
 y_1 &:= \frac{r}{2} \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{5}} & \left(y_2 &:= -\frac{r}{2} \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{5}} \right), \\
 y_3 &:= \frac{r}{2} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}} & \left(y_4 &:= -\frac{r}{2} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}} \right).
 \end{aligned}$$

y_2 und y_4 haben keine praktische Bedeutung, da nur positive Lösungen interessieren: diese sind die beiden Lösungen y_1 und y_3 . Dazu gehören die zwei korrespondierenden Werte x_1 und x_3 , und zwar:

$$\begin{aligned}
 x_1 &:= \sqrt{r^2 - y_1^2} = \frac{r}{2} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}} = y_3, \\
 x_3 &:= \sqrt{r^2 - y_3^2} = \frac{r}{2} \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{5}} = y_1.
 \end{aligned}$$

Das war zu erwarten: die Lösung dieser Aufgabe kann nicht davon abhängen, *welche* der beiden Strecken des Eisenkerns x und welche y genannt wird.

Die zweite Ableitung b'' ist global negativ, d.h. es ergibt sich stets ein negativer Funktionswert unabhängig davon, welches (positive) Argument y man einsetzt. Somit liegt in der Tat ein relatives Maximum für b vor.

Andere Alternative:

Bei der Lösung der Aufgabe wurde so vorgegangen, daß eine Variable mit Hilfe der Nebenbedingung durch einen Ausdruck ersetzt wurde, in welchem nur noch die andere Variable auftrat (hier: x wurde durch $\sqrt{r^2 - y^2}$ ersetzt). Man kann auch *beide* Variablen x und y zugunsten einer neuen, dritten Variable eliminieren. Anbieten tun sich hier Polarkoordinaten, was auch noch den Vorteil hat, daß man die Wurzel und damit das lästige Differenzieren umgeht.

ϕ wird als unabhängige Variable eingeführt, der Spulenradius r ist konstant:

$$x = r \cdot \cos \phi \quad , \quad y = r \cdot \sin \phi$$

$$A = c(\phi) := 4(2r^2 \sin \phi \cos \phi - r^2 \sin^2 \phi) = 4r^2(\sin 2\phi - \sin^2 \phi)$$

$$A' = c'(\phi) = 4r^2(2 \cos 2\phi - \sin 2\phi)$$

$$A'' = c''(\phi) = -8r^2(2 \sin 2\phi + \cos 2\phi)$$

$$c'(y) \stackrel{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad \tan 2\phi = 2$$

$$2\phi = \arctan 2 = 1,107 \quad , \quad \phi_0 = 0,5536$$

$$c''(\phi_0) = -8r^2 \cos 2\phi_0(2 \tan 2\phi_0 + 1) = -40r^2 \cdot 0,4473 < 0$$

→ für ϕ_0 liegt ein relatives Maximum vor.

Die gesuchten Abmessungen ergeben sich zu

$$x_0 = r \cdot \cos \phi_0 = 0,8506 r$$

$$y_0 = r \cdot \sin \phi_0 = 0,5256 r$$

$$A = c(\phi_0) = 4r^2 \cdot (0,8944 - 0,2764) = 2,472 r^2$$

und damit beträgt die von dem Kreuz ausgefüllte Fläche

$$\frac{c(\phi_0)}{\pi r^2} = \frac{2,472}{\pi} = 0,787 = 78,7\%.$$

Beispiel 5.21 (Leistungsanpassung)

Ein Generator mit der Quellenspannung U_q hat einen Innenwiderstand R_i . Angeschlossen ist ein veränderlicher Verbraucherwiderstand R_a , s. Abb. 5.19.

Bei Kurzschluß ($R_a = 0$, also $U_a = 0$) und bei Leerlauf ($R_a \rightarrow \infty$, also $I = I_a \rightarrow 0$) erfolgt keine Leistungsaufnahme ($P = U_a \cdot I_a, I_a = I$). Dazwischen gibt es für den Verbraucherwiderstand R_a einen Wert, bei dem er die größtmögliche Energie aufnimmt (*Leistungsanpassung*). Dieser Maximalwert soll bestimmt werden.

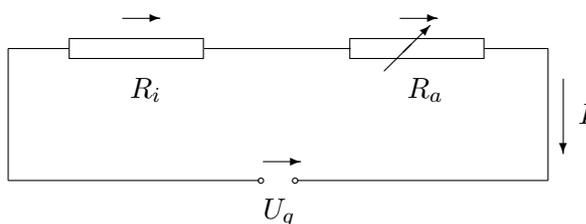


Abbildung 5.19: Generator mit Innenwiderstand und Verbraucherwiderstand

Lösung

$R_g := R_a + R_i$ ist der Gesamtwiderstand der vorliegenden Serienschaltung. Nach dem Ohm'schen Gesetz fließt ein Strom der Stärke

$$I = \frac{U_q}{R_g} = \frac{U_q}{R_a + R_i}.$$

Damit ergibt sich die Leistungsaufnahme ($P = U \cdot I$) am Verbraucher zu

$$P = U_a \cdot I = \frac{U_a \cdot U_q}{R_a + R_i} =: f(U_a, R_a).$$

Mit Hilfe einer Nebenbedingung (Maschenregel) sowie dem Ohm'schen Gesetz erhält man daraus eine Funktion von nur einer Variable:

Nebenbedingung: (Maschenregel)

$$\begin{aligned} U_q &= U_a + U_i = U_a + R_i \cdot I \\ \longrightarrow U_a &= U_q - R_i \cdot I \end{aligned}$$

U_i : Spannungsabfall am Innenwiderstand der Spannungsquelle

Die vom Verbraucherwiderstand R_a aufgenommene Leistung beträgt somit

$$\begin{aligned} P &= f(U_a = U_q - R_i \cdot I, R_a) \\ &= (U_q - R_i \cdot I) \cdot I \\ &= \left(U_q - \frac{R_i U_q}{R_a + R_i} \right) \cdot \left(\frac{U_q}{R_a + R_i} \right) \\ &= U_q^2 \cdot \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2} \\ &=: g(R_a) \\ P' = g'(R_a) &= U_q^2 \cdot \frac{R_i - R_a}{(R_a + R_i)^3} \\ P'' = g''(R_a) &= 2U_q^2 \cdot \frac{R_a - 2R_i}{(R_a + R_i)^4} \end{aligned}$$

$$g'(y) \stackrel{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad R_a = R_i \quad , \quad P = g(R_i) = \frac{U_q^2}{4R_i}$$

$$g''(R_a = R_i) = -\frac{U_q^2}{(2R_i)^3} < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Die maximale Leistungsaufnahme erfolgt für $R_a = R_i$, wenn also der Verbraucherwiderstand mit dem Innenwiderstand der Spannungsquelle übereinstimmt (*Leistungsanpassung*).

Angebotene Generatorleistung:

Beim Kurzschluß des Generators ($R_a = 0$) ist die Generatorleistung zwar groß, wird aber im Innenwiderstand R_i verbraucht; es erfolgt keine Leistungsaufnahme (Die Wicklungen der Spulen des Generators werden hierbei von hohen Strömen durchflossen, die den Generator sehr stark erwärmen und nach kurzer Zeit zerstören können). In diesem Fall hat die Generatorleistung den Wert

$$P = U_q \cdot I = U_q \cdot \frac{U_q}{R_i} = \frac{U_q^2}{R_i} =: P_a$$

Man nennt diesen theoretischen Wert P_a die *angebotene Leistung des Generators*; sie ergibt sich bei Kurzschluß.

Verfügbare Leistung:

Die maximale Leistungsaufnahme

$$P = g(R_a = R_i) = \frac{U_q^2}{4R_i}$$

läßt sich mit Hilfe von P_a ausdrücken:

$$P_{\max} := g(R_a = R_i) = \frac{1}{4} \cdot P_a.$$

Diese maximal von einem Generator mit bestimmter EMK an einen Verbraucher abgegebene Leistung nennt man die *verfügbare Leistung des Generators*. Diese beträgt ein Viertel der bei Kurzschluß vom Generator erzeugten maximalen Leistung P_a , s. Abb. 5.20.

5.5.5 Fehlerrechnung

Um den Wert einer Größe (Stromstärke, Temperatur) zu bestimmen, werden Messungen mit bestimmten Instrumenten nach bestimmten Methoden durchgeführt. Der erhaltene Meßwert wird i.a. nicht mit dem wahren Wert der Größe übereinstimmen, da bei den experimentell durchgeführten Messungen Fehler unvermeidlich sind.

Man unterscheidet drei Arten von Meßfehlern:

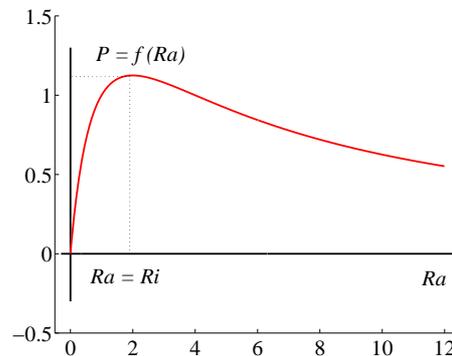


Abbildung 5.20: Graph der Funktion $P = g(R_a)$

(i) Grobe Fehler

Diese ergeben sich etwa durch Unaufmerksamkeit des Messenden (Beobachters), beispielsweise dann, wenn ein (grober) Ablesefehler erfolgt. Prinzipiell gehören grobe Fehler zu den vermeidbaren Fehlern.

(ii) Systematische Fehler

Diese sind nicht immer vermeidbar und resultieren hauptsächlich aus Mängeln des Meßinstrumentes bzw. der Art des Meßvorganges.

Beispiele:

- Ein Maßband ist zu kurz.
- Ein Thermometer besitzt einen Nullpunktfehler.
- Eine Personenwaage zeigt stets ein kg zuviel an ...

Solche regelmäßigen Fehler haben daher immer dasselbe Vorzeichen. Abhilfe schaffen Kontrollmessungen mit anderen Meßinstrumenten oder eine Eichung des Meßinstrumentes vor der Messung.

(iii) Zufällige - oder statistische Fehler

Diese ergeben sich aus dem Zusammenwirken zahlreicher Fehlerursachen, die vom Beobachter in der Regel nicht erfaßt und deshalb auch nicht beseitigt werden können; solche Fehler sind daher nicht vermeidbar. Die hier auftretenden kleinen Teilfehler ergeben sich zufällig, so daß positive - wie negative Abweichungen gleichwahrscheinlich sind. Einige der Teilfehler können sich somit gegenseitig aufheben.

Wie die Teilfehler zu den einzelnen Fehlerkategorien bleibt auch der resultierende Fehler unbekannt, er heißt *Meß-* oder *Beobachtungsfehler*. In diesem Abschnitt werden zufällige - oder statistische Fehler behandelt.

5.5.5.1 Absoluter - und relativer Fehler

Definition 5.4

Sei x_w der wahre Wert einer Meßgröße X und x der erhaltene Meßwert.

$\Delta x := x - x_w$ heißt *absoluter Fehler*

$\frac{\Delta x}{x}$ heißt *relativer Fehler*

der Meßgröße X .

Bemerkung

- (i) In der Regel ist der wahre Wert x_w nicht bekannt und muß geschätzt werden, etwa als Mittelwert einer aus mehreren Einzelmessungen bestehenden *Stichprobe*.
- (ii) In der Statistik wird die Meßgröße X durch eine sog. *Zufallsvariable* mathematisch beschrieben, die erhaltenen Meßwerte heißen *beobachtete Werte* oder *Realisierungen* von X .

Beispiel 5.22

An zwei Voltmetern wird je eine Messung vorgenommen und der Meßfehler geschätzt:

$$U_1 := (42,9 \pm 0,3) V$$

$$U_2 := (77,3 \pm 0,5) V$$

Für die zugehörigen relativen Fehler erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_1}{U_1} &:= \frac{\pm 0,3 V}{42,9 V} = \pm 0,007 = \pm 0,7 \% \\ \frac{\Delta U_2}{U_2} &:= \frac{\pm 0,5 V}{77,3 V} = \pm 0,006 = \pm 0,6 \% \end{aligned}$$

Der relative Fehler zeigt also besser als der absolute Fehler, daß die zweite Messung genauer ist. Aus diesem Grund sollten Messungen mit analogen Meßinstrumenten möglichst im oberen Drittel des Anzeigebereiches durchgeführt werden.

Ist ein Meßwert x mit einem (absoluten oder relativen) Fehler gegeben und soll daraus mit Hilfe einer Funktion f eine neue Größe $y = f(x)$ berechnet werden, so ist auch diese mit einem Fehler behaftet:

→ der Fehler pflanzt sich fort.

5.5.5.2 Fehlerfortpflanzung und logarithmische Differentiation

Seien \mathcal{I} ein Intervall und f in \mathcal{I} differenzierbar. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz für $x_0, x \in \mathcal{I}$, $\Delta x := x - x_0$:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

mit einem geeigneten $\theta \in (0, 1)$, das von x_0 und Δx abhängt.

Man betrachte die folgende Identität:

$$\begin{aligned} \Delta f &:= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \Delta x + [f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) - f'(x_0)] \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Δf ist der *fortgepflanzte Fehler*, welcher hier interessiert. Ersetzt man nun Δf durch $f'(x_0) \cdot \Delta x$, so macht man einen Fehler, der sich wie folgt abschätzen läßt:

$$|\Delta f - f'(x_0) \cdot \Delta x| \leq 2 \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| \cdot \Delta x.$$

Damit erhält man das Ergebnis:

Ist f' auf der Menge \mathcal{I} der untersuchten Werte beschränkt, so entsteht ein von Δx linear abhängender Fehler, wenn man die (aus der Anwendung des Mittelwertsatzes resultierende) Größe $f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)$ ersetzt durch die Ableitung an der Stelle x_0 : $f'(x_0)$.

Definition 5.5

$\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ heißt *absoluter fortgepflanzter Fehler*

$\frac{\Delta f}{f} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$ heißt *relativer fortgepflanzter Fehler*

der Meßgröße X unter der Funktion f . Näherungsweise setzen Ingenieure meistens

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \\ \frac{\Delta f}{f} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Beispiel 5.23

Es wird ein Winkel ϕ im Gradmaß gemessen und daraus der Funktionswert im Bogenmaß $f(\phi) := \cos \phi$ berechnet. Wie groß sind die relativen Fehler für

die Winkel und die Absolutbeträge der relativen fortgepflanzten Fehler bei den folgenden Messungen:

$$\phi_1 = 2^\circ \pm 1^\circ,$$

$$\phi_2 = 87^\circ \pm 1^\circ ?$$

Lösung

$$\left| \frac{\Delta\phi_1}{\phi_1} \right| = \left| \frac{\pm 1^\circ}{2^\circ} \right| = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$\left| \frac{\Delta\phi_2}{\phi_2} \right| = \left| \frac{\pm 1^\circ}{87^\circ} \right| = \frac{1}{87} = 1,15\%$$

Aufgrund von $f'(\phi) = -\sin\phi$ erhält man für die relativen fortgepflanzten Fehler im Bogenmaß die folgenden Werte:

$$\left| \frac{\Delta \cos \phi_1}{\cos \phi_1} \right| \approx |-\tan \phi_1 \cdot \Delta\phi_1| = |-0,035 \cdot 1| \cdot 0,01745 \text{ rad} = 0,0609\%$$

$$\left| \frac{\Delta \cos \phi_2}{\cos \phi_2} \right| \approx |-\tan \phi_2 \cdot \Delta\phi_2| = |-19,08 \cdot 1| \cdot 0,01745 \text{ rad} = 33,3\%$$

Ergebnis:

Im ersten Fall resultiert aus einem relativen Eingabefehler von 50 % bei der Fehlerfortpflanzung ein relativer Ausgabefehler von nur 0,06 %, im zweiten Fall dagegen produziert schon ein relativer Eingabefehler von etwa 1 % bei der Fehlerfortpflanzung einen relativen Ausgabefehler von 33 %.

Begründung:

Wegen $\cos \phi_1 \gg 0$ machen sich bei der ersten Rechnung Eingabefehler wenig bemerkbar. Bei der zweiten Rechnung dagegen machen sich wegen $\cos \phi_2 \approx 0$ auch kleine Eingabefehler stark bemerkbar.

Bemerkung

An dieser Stelle ist nichts Quantitatives darüber bekannt, wenn „ \approx “ durch „ $=$ “ ersetzt wird. Jedoch läßt die explizite Angabe des Fehlers

$$\Delta f - f'(x_0) \cdot \Delta x = [f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) - f'(x_0)] \cdot \Delta x$$

vermuten, daß man – hinreichende Differenzierbarkeit von f vorausgesetzt – durch eine weitere Anwendung des Mittelwertsatzes auf die rechte Seite auf

$$\Delta f - f'(x_0) \cdot \Delta x = f''(x_0 + \theta_1 \cdot \theta \cdot \Delta x) \cdot (\Delta x)^2$$

($\theta_1 \in (0, 1)$ geeignet) schließen kann.

Diese Vermutung ist tatsächlich richtig und wird später mit einer Art erweitertem Mittelwertsatz verifiziert, der *Formel von Taylor*; s. Satz 5.17.

Beispiel 5.24

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die durch die Potenzfunktion

$$y := f(x) := c \cdot x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hervorgerufene relative Fehlerfortpflanzung in einer kleinen Umgebung von x_0 ungefähr das Produkt aus relativem Eingabefehler und Exponenten der Funktion:

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) := c \cdot n \cdot x^{n-1} && (x \in \mathbb{R}) \\ \longrightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} &\approx \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x = n \cdot \frac{\Delta x}{x} \end{aligned}$$

nach Definition 5.5.

Anwendung:

Bei der Berechnung der Fallhöhe s aus der Fallzeit t beim freien Fall ergibt sich der relative Fehler wie folgt:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} g t^2 && (t \geq 0) \\ \longrightarrow \quad \frac{\Delta s}{s} &\approx \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \cdot \Delta t = 2 \cdot \frac{\Delta t}{t}. \end{aligned}$$

Der relative Fehler der Fallhöhe ist doppelt so groß wie der relative Fehler der Zeitmessung.

Ich kehre noch einmal zurück zu der Näherungsformel aus Definition 5.5:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \Delta x;$$

hierbei wird natürlich $f(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x_0) > 0 & : \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{d}{dx} \left(\ln(f(x)) \right) \Big|_{x=x_0}, \\ (b) \quad f(x_0) < 0 & : \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{d}{dx} \left(\ln(-f(x)) \right) \Big|_{x=x_0}, \end{aligned}$$

da $f(x) \neq 0$ ($x \in U(x_0)$) (warum?). Faßt man die beiden Fälle (a) und (b) zusammen, so erhält man insgesamt

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{d}{dx} \left(\ln |f(x)| \right) \Big|_{x=x_0}.$$

Definition 5.6

Sei f in einem Intervall \mathcal{I} differenzierbar und dort für alle x ungleich Null. Dann heißt

$$\frac{d}{dx} \left(\ln |f(x)| \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \quad (x \in \mathcal{I})$$

die *logarithmische Ableitung* von f in \mathcal{I} .

Mit Hilfe dieser neuen Bezeichnung erhält man für den relativen Fehler das folgende

Korollar

Man erhält den ungefähren relativen fortgepflanzten Fehler der Funktion f dadurch, daß man die Funktionsgleichung für den Betrag,

$$y = |f(x)| \quad (x \in \mathcal{I}, f(x) \neq 0),$$

zuerst logarithmiert, dann differenziert und anschließend das Ergebnis mit Δx multipliziert.

Beweis

$$\begin{aligned} y &= |f(x)| \\ \longrightarrow \ln y &= \ln |f(x)| \\ \longrightarrow \frac{y'}{y} \cdot \Delta x \Big|_{x=x_0} &= \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \Delta x \approx \frac{\Delta f}{f} \end{aligned}$$

5.5.5.3 Das Differential

In diesem Abschnitt soll der Näherung für den absoluten fortgepflanzten Fehler ein Name gegeben werden:

Definition 5.7

Der Ausdruck

$$df := f'(x_0) \cdot \Delta x$$

heißt *Differential* von f an der Stelle x_0 zur Verschiebung Δx .

Dabei gilt die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \Delta x + [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] - f'(x_0) \cdot \Delta x \\ &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right] \cdot \Delta x \\ &=: df + R(x_0, \Delta x) \\ \longrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} &= f'(x_0) + \frac{R(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Aufgrund der letzten Beziehung ist die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 notwendig und hinreichend dafür, daß der „Rest“ gegen Null konvergiert, falls $\Delta x \rightarrow 0$ gilt:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Die geometrische Interpretation ist der Abbildung 5.21 zu entnehmen.

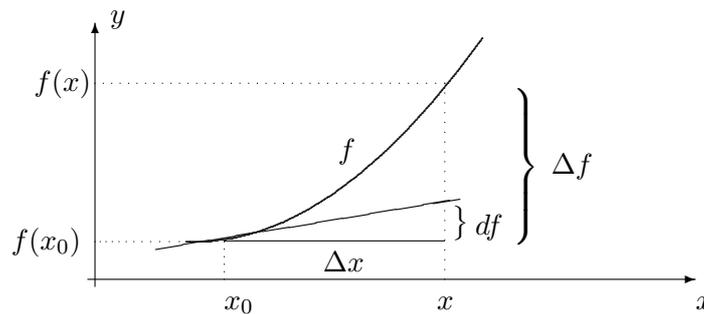


Abbildung 5.21: Das Differential der Funktion f

Die Tangente an der Stelle x_0 an f hat die Gleichung

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = 0$ bedeutet, daß die Differenz $\Delta f - df$ zwischen

- dem Zuwachs Δf von f auf dem Graphen f und
- dem Zuwachs df von f auf der Tangente an f in x_0

für $x \rightarrow x_0$, d.h. für $\Delta x \rightarrow 0$, ebenfalls gegen Null geht.

Bemerkung

Wie im letzten Abschnitt schon bemerkt, weiß man nichts Quantitatives über diese Konvergenz, also darüber, *wie schnell* $\Delta f - df$ gegen Null geht für $\Delta x \rightarrow 0$.

Ingenieure ersetzen dennoch den Fehler Δf für „kleine“ Δx durch df und hoffen, nicht allzu sehr vom wahren Ergebnis abzuweichen. Mathematisch bedeutet das die Ersetzung des Funktionswertes der Ableitung an der Zwischenstelle $f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)$ im Mittelwertsatz durch den Funktionswert $f(x_0)$ selbst bzw., was auf dasselbe hinausläuft, den Abbruch der Taylor-Reihe nach dem 2.Glied *ohne* Berücksichtigung des Restgliedes.

*** Aufgabe**

Ist f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar, so gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} \frac{R(x_0, \Delta x)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0) \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Zahl $\theta \in (0, 1)$. Nun ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) - f'(x_0)] \\ \longrightarrow \quad f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x). \end{aligned}$$

Diese letzte Beziehung scheint zu bedeuten, daß die Ableitung f' von f im Punkt x_0 stetig ist: Grenzwert der Funktionswerte = Funktionswert des Grenzwertes. Tatsächlich muß das aber nicht unbedingt der Fall sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f(x) := \begin{cases} x^{3/2} \cdot \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

f ist im Intervall $[-1, 1]$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) := \begin{cases} \frac{3}{2}x^{1/2} \cdot \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2} \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Die Ableitung f' ist in $[-1, 1]$ überall definiert, aber unbeschränkt und in $x = 0$ unstetig.

Wo in dieser Aufgabe hat die Schlußweise zu Eingang des Beispiels versagt?

Zumindest im Fall einer stetig differenzierbaren Funktion tritt dieses Phänomen nicht auf, und man erhält $\Delta f \approx df$ um so besser, je kleiner $|\Delta x|$ ist.

Beispiel 5.25

Durch Erwärmung vergrößere sich der Radius einer Kugel von

$$r_1 := 2,000 \quad \text{auf} \quad r_2 := 2,034.$$

Wie groß ist die Zunahme des Kugelvolumens?

Lösung

Die Berechnung des absoluten fortgepflanzten Fehlers

$$\Delta V := \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.415$$

ist recht unbequem: er beträgt $\Delta V = 1,738$, der relative fortgepflanzte Fehler errechnet sich zu

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{0.415}{8} = 0,0519 = 5,2\%.$$

Eine leichter zu erhaltende Näherung erhält man aus der Näherung für den absoluten fortgepflanzten Fehler

$$\Delta V \approx dV = 4\pi r_1^2 \cdot \Delta r = 4\pi \cdot 2,000^2 \cdot 0,034 = 1,71,$$

woraus sich als Näherung für den relativen fortgepflanzten Fehler ergibt (vgl. Beispiel 5.24 über die Fehlerfortpflanzung einer Potenzfunktion):

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r_1^2 \cdot \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r_1} = 3 \cdot \frac{0,034}{2,000} = 0,051 = 5,1\%.$$

Die prozentuale Änderung des Kugelvolumens beträgt also ungefähr 5,1 %, was als Näherung gar nicht so schlecht ist, wenn man den geringeren Rechenaufwand berücksichtigt.

Beispiel 5.26

Mit welcher Genauigkeit muß der Durchmesser d einer Kugel gemessen werden, wenn der relative Fehler des daraus berechneten Kugelvolumens unter 1 % liegen soll?

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &\approx \frac{dV}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta d}{d} < 0,01 = 1\% \\ \longrightarrow \quad \frac{\Delta d}{d} &< 0,0033 = 0,33\% \end{aligned}$$

Bemerkung

- (i) In den zwei letzten Beispielen liegt keine Angabe darüber vor, *wie groß* der Fehler ist, den man macht, wenn man „ \approx “ durch „ $=$ “ ersetzt.
- (ii) Das Gegenbeispiel davor (* Aufgabe) macht klar, daß man genau das in den Griff bekommen muß, also eine Abschätzung dafür, *wie groß* der Fehler ist, den man macht, wenn man den absoluten fortgepflanzten Fehler Δy durch das Differential dy ersetzt. M.a.W., zur exakten Beschreibung fehlt eine quantitative Abschätzung des sog. Restgliedes $R(x_0, \Delta x)$.

- (iii) Unnötiger- und verwirrenderweise hat sich eine andere Schreibweise eingebürgert. Wenn – wie so oft üblich – das Funktionssymbol f mit dem Wert $f(x)$ dieser Funktion an der Stelle x identifiziert wird – $f = f(x)$ – so erhält man für die spezielle Funktion

$$f(x) := x \quad (x \in \mathbb{R})$$

– $f = f(x) = x$ – das Differential

$$df = dx = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Mit der Beziehung $\Delta x = dx$ wird dann aus dem Differential einer *beliebigen* Funktion g :

$$y = g(x) \quad \Longrightarrow \quad dg = g'(x) \cdot dx.$$

5.5.6 Newton'sches Tangentenverfahren

Ein spezielles und sehr effektives Iterationsverfahren zur Näherungslösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist das sog. *Newton'sche Tangentenverfahren*, zu dessen Anwendung allerdings die Differenzierbarkeit von f benötigt wird.

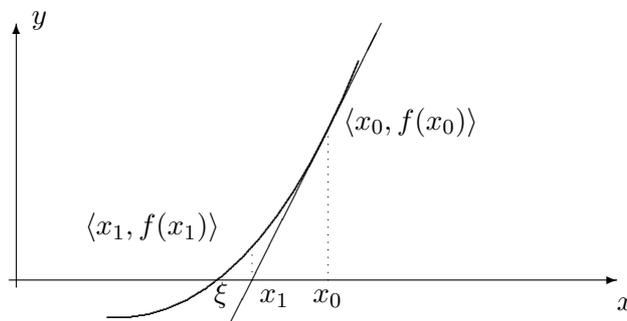


Abbildung 5.22: Newton'sches Tangentenverfahren

Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, die Funktion f an der Stelle x_0 zu *linearisieren*. Darunter versteht man ihre Ersetzung durch eine Gerade g derart, daß gilt:

$$f(x_0) = g(x_0) \quad , \quad f'(x_0) = g'(x_0).$$

Aus dem Ansatz für eine Gerade $g(x) := mx + n$ ($x \in \mathbb{R}$) ermittelt man sofort

$$m = f'(x_0) \quad , \quad n = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0),$$

also

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Geometrische Bedeutung der Linearisierung

Ersetzung des Funktionsgraphen durch die Tangente im Punkt $\langle x_0, f(x_0) \rangle$. Der Schnittpunkt der Tangente mit der Abszisse ist i.a. eine verbesserte Näherungslösung für die Lösung von $f(x) = 0$ als der Startpunkt x_0 es ist.

Zur Berechnung dieses Schnittpunktes x_1 der Tangente mit der Abszisse (Nullstelle der Tangente) erhält man aus

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \stackrel{!}{=} 0$$

die Beziehung

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nun kann man das Verfahren mit x_1 wiederholen und erhält eine *Iterationsfolge* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{5.1}$$

Das ist die *Newton'sche Iterationsformel*.

Bemerkung

- (i) Als Iterationsverfahren dient das Newton'sche Verfahren nicht zur Berechnung von Lösungen von Gleichungen sondern zur Verbesserung bereits vorhandener Näherungslösungen.
- (ii) Anschaulich ist klar, daß der Startpunkt x_0 der Iteration nicht in der Nähe eines kritischen Punktes (erste Ableitung gleich Null) liegen darf und daß zwischen x_0 und der gesuchten Nullstelle ξ keine Extrema oder Wendepunkte liegen dürfen (Abb. 5.23 - 5.25).

Bemerkung

Offensichtlich muß man sich über die Konvergenz des Newton-Verfahrens unterhalten, da i.a. nicht sicher ist, ob die konstruierte Iterationsfolge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle konvergiert und wenn ja, ob es auch die richtige ist; s. Abb. 5.25. Dazu muß man jedoch etwas weiter ausholen und einen sog. *Fixpunktsatz* heranziehen. Das ist ein Problem der Numerischen Mathematik und soll hier unterbleiben.

Beispiel 5.27

Für

$$f(x) := x^3 - 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

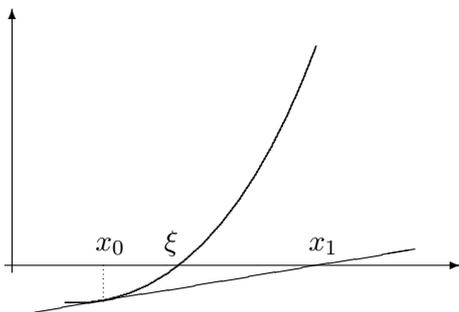


Abbildung 5.23: Startpunkt in der Nähe eines Extremums

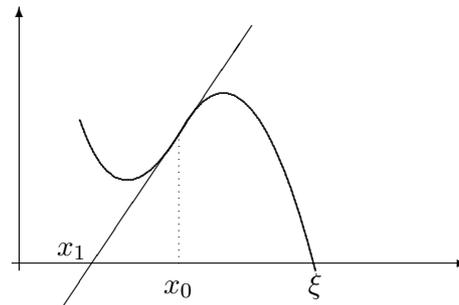


Abbildung 5.24: Extremum zwischen x_0 und der Nullstelle ξ

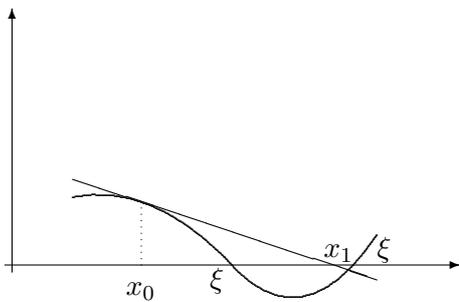


Abbildung 5.25: Wendepunkt zwischen x_0 und der Nullstelle ξ

ist $f'(x) \neq 0$ außer für $x \in \{-1, 1\}$; dies sind aber keine Nullstellen von f , also läßt sich die Iterationsfolge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ „weit weg“ von -1 und 1 ansiedeln. Für den Startwert $x_0 := 0,3$ erhält man durch Einsetzen in (5.1) die Werte

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,3 \\ x_1 &= 0,3 - \frac{0,127}{-2,73} = 0,34652015 \\ x_2 &= 0,346520 - \frac{0,00205}{-2,6398} = 0,34729612 \\ x_3 &= 0,347296 - \frac{0,0000009}{-2,6381565} = 0,34729636 \end{aligned}$$

5.6 Differentiation von Potenzreihen

Eine Potenzreihe mit dem Entwicklungsmittelpunkt z_0 und den Entwicklungskoeffizienten a_k ist gegeben durch einen Ausdruck der Form (3.10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ist r der Konvergenzradius dieser Potenzreihe, so ist durch

$$z \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (|z - z_0| < r)$$

eine (komplexe) Funktion definiert.

Eigenschaften dieser Funktion werden im folgenden untersucht. Dabei beschränke ich mich hier auf

- den Fall reeller Koeffizienten, i.e. $a_k = \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}_0$),
- Reihen mit dem Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$.

Ein erstes Ergebnis ist der folgende

Satz 5.14 (Stetigkeit von Potenzreihen)

Seien $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge, r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $r > 0$.

Dann ist die durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (-r < x < r)$$

definierte Funktion stetig.

Beweisidee

Sei $\xi \in (-r, r)$. Dann ist zu zeigen:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x| < r} [|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon].$$

Dazu zerlegt man $f(x) - f(\xi)$ in die Form

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k x^k - \sum_{k=0}^N a_k \xi^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \xi^k.$$

Dann wählt man

- N so groß, daß die letzten beiden Summen „klein“ werden, und zwar jede einzeln, gleichmäßig für alle x einer geeigneten Umgebung $U_\delta(\xi)$,
- $\delta > 0$ so klein, daß für $|x - \xi| < \delta$ die Differenz der ersten beiden (endlichen!) Summen klein ist; diese Differenz ist als Differenz zweier Polynome eine stetige Funktion.

Beim Übergang von Polynomen zu Potenzreihen bleibt innerhalb des Konvergenzintervalles die Eigenschaft der Stetigkeit also erhalten. Es gilt jedoch mehr: die Eigenschaft der Differenzierbarkeit bleibt auch erhalten, und zwar ist

„die Ableitung der Reihe gleich der Reihe der Ableitungen“, diese ist wieder eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Satz 5.15 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt

- Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius r .
- Die durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($-r < x < r$) definierte Funktion ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (-r < x < r),$$

d.h. es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)' \quad (-r < x < r).$$

Beweis

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt[k]{|k \cdot a_k|} = \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Falls der Grenzwert $s := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert, so stellt er den reziproken Konvergenzradius der Ausgangsreihe dar: $r = 1/s$. Dann folgt nach der Bemerkung auf p. 211 unmittelbar

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k \cdot a_k|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \\ &= 1 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}, \end{aligned}$$

d.h. die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius r .

(ii) Mit einer zum Beweis des letzten Satzes analogen Idee zeigt man

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{|x| < r} \left[|x - \xi| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1} \right| < \varepsilon \right].$$

Folgerung

Die durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist innerhalb des Konvergenzintervalles der Potenzreihe beliebig oft differenzierbar, und die Ableitung f' erhält man dort durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe. Innerhalb ihres Konvergenzintervalles (Konvergenzkreises in \mathbb{C}) können Potenzreihen daher quasi wie Polynome behandelt werden.

Dieses Ergebnis soll nun an einigen Beispielen demonstriert werden.

Beispiel 5.28

Man betrachte die reelle Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Nach (3.12) ist diese Reihe überall konvergent. Daher ist f überall beliebig oft

differenzierbar, und es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^k)' \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot k \cdot x^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

Bemerkung

Es ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

und diese „Gleichheit“ kann man dann als Definition der Exponentialfunktion verwenden, s. (3.16).

Beispiel 5.29

Die reelle Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist nach (3.13) ebenfalls überall konvergent, läßt sich damit überall beliebig oft

differenzieren und besitzt die Ableitung ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (x^{2k})' \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \cdot 2k \cdot x^{2k-1} \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2(k-1)+1}}{(2(k-1)+1)!} \\
 &= - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &=: -f(x)
 \end{aligned}$$

Bemerkung

Nach (3.16) ist die Reihe für die Funktion g die Potenzreihe der Kosinusfunktion, und die Reihe für f ist die der Sinusfunktion. In der Mathematik werden die trigonometrischen Funktionen durch diese Potenzreihen definiert.

Aufgabe

Man argumentiere, daß die durch eine Potenzreihe definierte Funktion h ,

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

beliebig oft differenzierbar ist und führe die Differentiation explizit aus.

5.7 Taylor-Polynome und Taylor-Reihen

Im folgenden soll für eine hinreichend „glatte“ Funktion f ein Polynom p bestimmt werden, das in der Nähe einer Stelle $x_0 \in D(f)$ die Funktion f „gut approximiert“ in dem Sinne, daß f und das Polynom p an der Stelle x_0 gleiche Ableitungen bis zur Ordnung n haben (n : Grad des Polynoms).

Man hat dann die Hoffnung, daß sich in der Nähe von x_0 die Funktionswerte und die Werte des Polynoms nur „wenig“ unterscheiden.

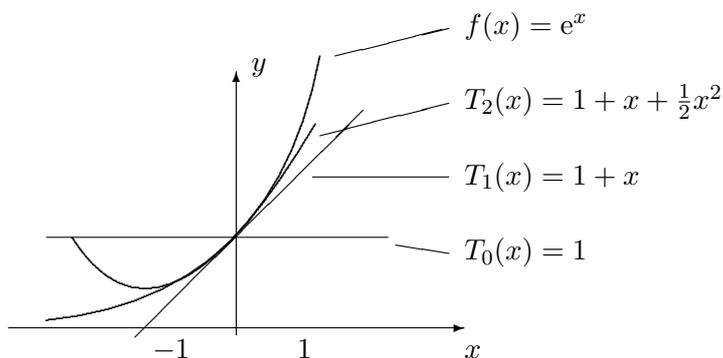


Abbildung 5.26: Approximation der e-Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ durch Polynome

Beispiel 5.30 (s. Abb. 5.26)

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= e^x & (x \in \mathbb{R}) \\
 T_0(x) &:= 1 & : T_0(0) = f(0) \\
 T_1(x) &:= 1 + x & : T_1(0) = f(0), T_1'(0) = f'(0) \\
 T_2(x) &:= 1 + x + \frac{x^2}{2} & : T_2(0) = f(0), T_2'(0) = f'(0), T_2''(0) = f''(0)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Die Polynome, welche eine hinreichend oft differenzierbare Funktion f auf diese Weise approximieren, heißen *Taylor-Polynome*.

Bemerkung

Es gibt natürlich noch andere Möglichkeiten zu vereinbaren, wann ein Polynom eine gegebene Funktion „gut“ approximiert. Einige dieser Möglichkeiten seien hier aufgezählt:

1. Interpolationspolynom vom Grad n durch $(n+1)$ gegebene Punkte

Vorteil: Das Polynom stimmt mit der Funktion an $(n+1)$ Punkten überein, die man sich aussuchen kann.

Nachteil: An den übrigen Punkten kann die Abweichung sehr groß sein.

2. Approximationspolynom im \mathcal{L}^2 -Sinne

Vorteil: Auf dem ganzen Intervall gibt es nirgendwo eine große Abweichung.

Nachteil: Die Funktionswerte des Polynoms haben keine Bedeutung.

3. Taylor-Approximation

Vorteil: In einer Umgebung *eines* Punktes, nämlich x_0 , wird die Funktion f außerordentlich gut dargestellt.

Nachteil: Außerhalb dieser Umgebung kann die Abweichung sehr groß sein.

5.7.1 Taylor'sche Formel (Satz von Taylor)

Das Ziel ist hier die Approximation einer Funktion f durch ein Polynom p . Ist f hinreichend oft differenzierbar, so wird die Approximation beliebig gut sein in dem Sinne, daß an einer Stelle $x = x_0$ nicht nur die Funktionswerte von f und p übereinstimmen sondern auch die ersten Ableitungen.

Satz 5.16

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \{0, \dots, n\}$) und

$$p(x) := \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

ein Polynom. Dann gilt

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \{0, \dots, n\}).$$

Aussage

Die Koeffizienten eines Polynoms lassen sich durch die Ableitungen dieses Polynoms am Entwicklungspunkt x_0 ausdrücken.

Beweis

Seien $x \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\frac{d^l}{dx^l} [(x - x_0)^k] = \begin{cases} k(k-1) \cdots (k-[l-1])(x - x_0)^{k-l} & , \quad 0 < l < k \\ k! & , \quad l = k \\ 0 & , \quad l > k \end{cases}$$

Daraus folgt

$$p^{(l)}(x_0) = l! \cdot a_l \quad (l \in \{1, \dots, n\}).$$

Ist f eine (hinreichend oft) differenzierbare Funktion, deren Ableitungen im Punkt x_0 mit denen eines Polynoms p bis zur Ordnung n übereinstimmen, so lassen sich demnach die Koeffizienten a_k von p mit Hilfe von f ausdrücken:

Folgerung

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, f eine Funktion, $x_0 \in D(f)$, f in x_0 n -mal differenzierbar, $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \{0, \dots, n\}$) und

$$p(x) := \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

ein Polynom.

Dann gilt für alle $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Beweis

Nach dem letzten Satz gilt

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \{0, \dots, n\}),$$

und daraus folgt schon die Behauptung.

Beispiel 5.31 (s. Abb. 5.26)

$$f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$p(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Dann gilt:

$$f^{(k)}(0) = p^{(k)}(0) \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Man beobachte, wie die Funktion f im Punkte $x_0 = 0$ immer besser durch die Polynome

$$T_0(x) := 1$$

$$T_1(x) := 1 + x$$

$$T_2(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} [(x+1)^2 + 1]$$

approximiert wird.

Wie kommt man zu diesen Polynomen?

Definition 5.8

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, f eine Funktion und $x_0 \in D(f^{(n)})$, d.h. $x_0 \in D(f)$ und f in x_0 n -mal differenzierbar. Dann heißt

$$T_n(x) := T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (5.3)$$

das *Taylor-Polynom vom Grad n von f an der Stelle x_0* oder auch das *n -te Taylor-Polynom von f in x_0* .

Bemerkung

An dem Beispiel der e-Funktion ist zu sehen, daß eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion f sich in einer Umgebung der Stelle x_0 umso besser durch ein Polynom approximieren läßt,

- je höher der Grad n des Polynoms gewählt wird und
- je näher man sich am Punkt x_0 befindet.

Der folgende Satz macht eine quantitative Aussage darüber, um wieviel sich eine Funktion von ihrem n -ten Taylor-Polynom unterscheidet.

Satz 5.17 (Taylor'sche Formel mit Lagrange-Restglied)

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, f eine Funktion mit

$$U_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D(f).$$

f sei in $U_r(x_0)$ $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt:

$$\bigwedge_{x \in U_r(x_0)} \bigvee_{\xi \in (x_0 - x, x_0 + x)} f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

oder äquivalent

$$\bigwedge_{x \in U_r(x_0)} \bigvee_{\theta \in (0,1)} f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

(5.4)

Bemerkung

- (i) Für $n = 0$ ist die Taylor-Formel gerade der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 5.7):

$$\bigwedge_{x \in U_r(x_0)} \bigvee_{\xi \in (x_0-x, x_0+x)} f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Dasjenige Polynom vom Grad 0, das mit f in der nullten Ableitung an der Stelle x_0 übereinstimmt, ist die konstante Funktion

$$T_0(f, x_0)(x) = f(x_0) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Taylor-Formel ist also ein verfeinerter Mittelwertsatz.

- (ii) Der Unterschied zwischen f und seinem n -ten Taylorpolynom an der Stelle x_0 heißt (*Lagrange'sches Restglied*):

$$R_n(x) := R_n(f, x_0)(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Daneben gibt es noch andere Darstellungsformen des Restgliedes, hier begnüge ich mich mit der Lagrange'schen Form.

Beweis (von Satz 5.17)

Zum Beweis der Taylor'schen Formel wird eine Hilfsfunktion definiert, auf welche der Satz von Rolle (Satz 5.6) angewendet wird.

f genüge also den Voraussetzungen des Satzes von Taylor. Seien $x \in U_r(x_0)$ und ρ definiert durch

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \rho \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{also}$$

$$\rho := \begin{cases} \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot [f(x) - T_n(f, x_0)(x)] & , \quad x \neq x_0 \\ 0 & , \quad x = x_0 \end{cases}.$$

Die Hilfsfunktion F lautet

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \rho \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Diese Funktion F ist

- in $\mathcal{I} := [x_0, x]$ oder $[x, x_0]$ stetig,
- in $\overset{\circ}{\mathcal{I}} := (x_0, x)$ oder (x, x_0) differenzierbar,

- erfüllt $F(x) = 0$ (trivialerweise),
- erfüllt $F(x_0) = 0$ (nach Definition von ρ).

Die Ableitung von F lautet:

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} + \rho \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
 &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \rho \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
 &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \rho \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle (Satz 5.6) besitzt F' im Intervall $\overset{\circ}{\mathcal{I}}$ eine Nullstelle ξ . Aus $F'(\xi) = 0$ folgt dann sofort

$$\rho = f^{(n+1)}(\xi)$$

und damit die Behauptung des Satzes.

Bemerkung

Über die Größe ξ , welche im Restglied des Taylor'schen Satzes auftritt, weiß man gar nichts, außer, daß es sie eben gibt. In vielen Fällen läßt sich jedoch die n -te Ableitung $f^{(n+1)}$ von f auf dem Intervall \mathcal{I} global abschätzen; s. dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 5.32

Die Taylor-Formel wird zum Beweis der folgenden Abschätzung verwendet:

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{4!} x^4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Für $\mathcal{I} = [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ folgt daraus etwa

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{240\,000} \quad (x \in \mathcal{I}),$$

was bedeutet, daß sich $\cos x$ in der Nähe von $x_0 = 0$ nur wenig von der Parabel

$p(x) := 1 - \frac{x^2}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$) unterscheidet.

$$\begin{aligned}
 \cos x - T_3(\cos, 0)(x) &= \cos x - \left[\cos 0 + \frac{\cos' 0}{1!}x + \frac{\cos'' 0}{2!}x^2 + \frac{\cos''' 0}{3!}x^3 \right] \\
 &= \cos x - \left[1 + 0 + \frac{-1}{2!}x^2 + 0 \right] \\
 &= \cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] \\
 \text{(Taylor-Formel)} &= \frac{\cos^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \\
 &= \frac{\cos \xi}{4!}x^4 \quad (\xi \in (-x, x) \text{ geeignet, } x \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Die globale Abschätzung $|\cos \xi| \leq 1$ ($\xi \in \mathbb{R}$) liefert dann die Behauptung.

Aufgabe

Man leite in demselben Intervall eine Abschätzung her für

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Beispiel 5.33

Das Taylor-Polynom vom Grad n an der Stelle $x_0 = \pi$ mit Lagrange-Restglied soll für die Funktion

$$f(x) = e^x \cdot \sin x = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \cdot \sin x & , & & f(\pi) &= 0 \\
 f'(x) &= e^x \cdot (\cos x + \sin x) & , & & f'(\pi) &= -e^\pi \\
 f''(x) &= 2e^x \cdot \cos x & , & & f''(\pi) &= -2e^\pi \\
 f'''(x) &= 2e^x \cdot (\cos x - \sin x) & , & & f'''(\pi) &= -2e^\pi \\
 f^{(4)}(x) &= -4e^x \cdot \sin x & , & & f^{(4)}(\pi) &= 0
 \end{aligned}$$

\vdots für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
 f^{(4n)}(x) &= (-4)^n e^x \cdot \sin x & , & & f^{(4n)}(\pi) &= 0 \\
 f^{(4n+1)}(x) &= (-4)^n e^x \cdot (\cos x + \sin x) & , & & f^{(4n+1)}(\pi) &= -(-4)^n e^\pi \\
 f^{(4n+2)}(x) &= (-4)^n \cdot 2e^x \cdot \cos x & , & & f^{(4n+2)}(\pi) &= -2(-4)^n e^\pi \\
 f^{(4n+3)}(x) &= (-4)^n \cdot 2e^x \cdot (\cos x - \sin x) & , & & f^{(4n+3)}(\pi) &= -2(-4)^n e^\pi
 \end{aligned}$$

Um sich nicht in der Betrachtung von Einzelfällen zu verlieren, nehme ich der Einfachheit halber an, es gelte $n = 4m$ mit einer geeigneten Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ und ermittle die Taylor-Formel für f mit dem Restglied der Ordnung $n + 1$:

$$f(x) = e^x \cdot \sin x = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$T_n(f, \pi)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!} (x - \pi)^k \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$R_n(f, \pi)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - \pi)^{n+1} = \frac{f^{(4m+1)}(\xi)}{(4m+1)!} (x - \pi)^{4m+1},$$

$$\begin{aligned} |R_n(f, \pi)(x)| &= \left| \frac{-(-4)^m e^\xi (\cos \xi + \sin \xi)}{(4m+1)!} (x - \pi)^{4m+1} \right| \\ &\leq \frac{2 \cdot 4^m e^{\pi+x}}{(4m+1)!} |x - \pi|^{4m+1}. \end{aligned}$$

Für $n = 4$, also $m = 1$ erhält man dann beispielsweise die Abschätzung

$$|R_4(f, \pi)(x)| \leq \frac{8e^\pi e^x}{5!} |x - \pi|^5 = \frac{8 \cdot 23,1407}{120} e^x |x - \pi|^5 = 1,8513 e^x |x - \pi|^5.$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &|e^x \cdot \sin x - (-e^\pi x - \frac{2}{2!} e^\pi x^2 - \frac{2}{3!} e^\pi x^3)| \\ &= |e^x \cdot \sin x - e^\pi (-x - x^2 - \frac{1}{3} x^3)| \\ &\leq 1,8513 e^x |x - \pi|^5 \end{aligned}$$

und die Ersetzung von f durch das angegebene Polynom dritten Grades ist umso besser, je näher man sich am Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ befindet.

Bemerkung

- (i) Bei gegebener Funktion f hängt die Zwischenstelle ξ des Taylor'schen Satzes von n, x_0 und x ab. Ändert sich nur eine dieser Größen, so wird man i.a. auch mit einer Änderung von ξ rechnen müssen. Um diese Abhängigkeit deutlich hervorzuheben, schreibt man manchmal $\xi(n, x_0, x)$ oder $\xi_n(x_0, x)$ anstelle von ξ .
- (ii) Obwohl man die Zahl ξ i.a. nicht genau kennt, läßt sich häufig der Betrag $|R_n(x)|$ des Restgliedes nach oben abschätzen, wie das in den Beispielen der Fall ist. So läßt sich oft eine Aussage darüber gewinnen, wie gut $T_n(x)$ den Funktionswert $f(x)$ approximiert.

Bei der Behandlung der sog. *Taylor-Reihen* im übernächsten Abschnitt wird darauf zurückgekommen.

- (iii) Ist f selbst ein Polynom n -ten Grades, so folgt aus der Taylor-Formel wegen $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ sofort, daß f mit seinem n -ten Taylor-Polynom an jeder Stelle x_0 übereinstimmt:

f ist ein Polynom vom Grad n

$$\begin{aligned} & \iff \\ & \bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}} f = T_n(f, x_0) \end{aligned}$$

5.7.2 Anwendungen der Taylor'schen Formel

Als erste Anwendung der Taylor'schen Formel wird ein Ergebnis verifiziert, welches schon bei der Kurvendiskussion verwendet worden ist.

Beweis von Satz 5.13

Wegen des Verschwindens der ersten $(n-1)$ Ableitungen lautet die Taylor'sche Formel für f im Punkt x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n \quad (x \in U_r(x_0))$$

mit einer geeigneten Zahl $\xi \in (x_0 - x, x_0 + x)$.

Nach Voraussetzung ist $f^{(n)}$ stetig, und es gilt $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Daher ist auch $f^{(n)}(x) \neq 0$ für alle x einer geeigneten Umgebung von x_0 , etwa von der ganzen Umgebung $U_r(x_0)$ selbst; $f^{(n)}(x)$ und $f^{(n)}(x_0)$ haben dann dort dasselbe Vorzeichen. Es ist

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n \quad (x \in U_r(x_0)).$$

- (a) Ist n ungerade, so hat $[f(x) - f(x_0)]$ für $x < x_0$ ein anderes Vorzeichen als für $x > x_0$, daher kann in x_0 kein Extremwert vorliegen.

- (b) Ist n gerade, so folgt für alle $x \in \dot{U}_r(x_0)$

- $f(x) - f(x_0) > 0 \iff f^{(n)}(x_0) > 0,$
- $f(x) - f(x_0) < 0 \iff f^{(n)}(x_0) < 0,$

also die Behauptung von Satz 5.13.

Bemerkung

Dieses Ergebnis läßt sich auch zum Nachweis eines Wendepunktes verwenden, wenn man es mit f' anstelle von f beginnt:

f hat in x_0 einen Wendepunkt, wenn f' in x_0 ein relatives Extremum hat.

Beispiel 5.34

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$). Nach Satz 5.13 hat dann f in $x_0 = 0$

- für gerades n ein Minimum,
- für ungerades n einen Wendepunkt.

Als weitere Anwendung der Taylor'schen Formel wird Satz 5.9 und die daran anschließende Bemerkung verallgemeinert.

Satz 5.18

Seien $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{I})$, und es gelte

$$f^{(n+1)}(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad n .

Beweis

Nach der Taylor-Formel gilt für $x_0, x \in \mathcal{I}$:

$$f(x) - T_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^n = 0 \quad (x \in \mathcal{I})$$

mit einem geeigneten $\xi \in (x_0 - x, x_0 + x)$.

5.7.3 Taylor-Reihen

In diesem Abschnitt wird die Taylor-Formel für eine Funktion f , definiert auf einem Intervall \mathcal{I}

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(x) \quad (x \in \mathcal{I}),$$

$$T_n(x) = T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (x \in \mathcal{I}),$$

$$R_n(x) = R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (x \in \mathcal{I}),$$

wieder aufgegriffen, und es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen man zu einer Abschätzung des Restgliedes gelangen kann und welche weitergehenden Aussagen dann möglich sind. Die zentrale Aussage (Satz 5.19) wird dabei anhand des folgenden Beispiels ermittelt.

Beispiel 5.35

Die Funktion

$$f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar und erfüllt

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Aufgrund des Taylor'schen Satzes (Satz 5.17) erhält man also für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Darstellung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit einer Zahl $\theta \in (0, 1)$, die von $x_0 = 0$, x und n abhängen kann.

Beh. $R_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in θ .

Bew.

Seien $x \in \mathbb{R}$, $a_n := \frac{|x|^n}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Dann ist die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend, sobald $n+1 > |x|$ ist, denn es gilt:

$$a_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{|x|}{n+1} = a_n \cdot \frac{|x|}{n+1} < a_n \quad \text{für } n+1 > |x|.$$

Da die Glieder der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ stets nichtnegativ sind, existieren die drei Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1},$$

und sie sind alle gleich Null:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1}}_0 = 0.$$

Damit gilt für jedes $\theta \in (0, 1)$ und jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot e^{|x|}}{(n+1)!} = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung bedeutet die behauptete Gleichmäßigkeit in θ : letztendlich ist die Abschätzung von θ unabhängig zu bewerkstelligen.

Beispiel 5.36

Analog läßt sich die Taylor-Formel auf die sin- und cos-Funktionen anwenden. Man erhält für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\theta \in (0, 1)$ geeignet:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (\sin \vee \cos) \theta x \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} (\sin \vee \cos) \theta x \end{aligned}$$

Nach einem zur Beh. des letzten Beispiels analogen Argument gilt auch hier:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{x^l}{l!} (\sin \vee \cos) \theta x = 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$, $l \in \{2n, 2n+1\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 5.9

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $f \in C^\infty(U_r(x_0))$. Der Ausdruck

$$T(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{5.5}$$

heißt die *Taylor-Reihe von f um x_0* . Falls $x_0 = 0$ ist, ist auch der Name *MacLaurin-Reihe* gebräuchlich.

Im Anschluß an diese Definition ergeben sich sofort zwei Fragen:

- (F1) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylor-Reihe einer Funktion f ?
- (F2) Ist für diejenigen x , für welche die Taylor-Reihe von f konvergiert, der Wert der Reihe gleich $f(x)$?

Die Beispiele 5.35 und 5.36 sind von der Art, daß beide Fragen positiv beantwortet werden können; insbesondere Frage (F2) scheint immer positiv zu beantworten zu sein. Das dem nicht immer so ist, möge das folgende Gegenbeispiel beleuchten, das ich jedoch nur skizzieren möchte.

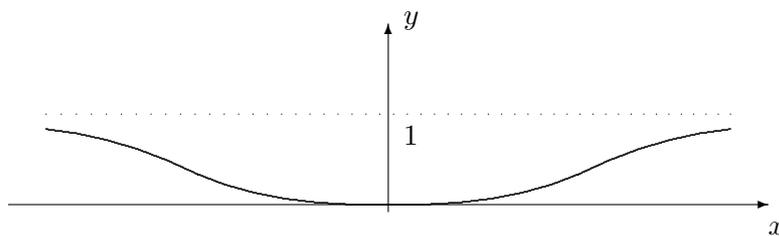


Abbildung 5.27: Beispiel einer Funktion, welche nicht durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird

Beispiel 5.37

Sei f definiert durch (Abb. 5.27)

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Lemma

Die Taylor-Reihe $T(f, 0)$ von f ist die Nullfunktion, es gilt also

$$T(f, 0)(x) = 0 \neq f(x) \quad (x \neq 0).$$

Beweis

In einer Reihe von Schritten wird der Beweis nur angedeutet.

(a) Beh.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein Polynom P_{2n} vom Grade $2n$, so daß gilt:

$$f^{(n)}(x) = P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \quad (x > 0).$$

Bew. Vollständige Induktion, Differentiation nach der Produktregel und Kettenregel

(b) Beh. $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$,

insbesondere ist f in 0 also beliebig oft differenzierbar.

Bew. Vollständige Induktion unter Benutzung des Ergebnisses (a):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{2n}(t) \cdot e^{-t} = 0$$

(c) Mit Hilfe des Schrittes (b) erhält man

$$T(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad (x \geq 0),$$

und diese Gleichung gilt wegen der Symmetrie von f auch für $x < 0$.

Bemerkung

Die Nullfunktion ist beliebig oft differenzierbar und hat die (gegen Null) konvergente Taylor-Reihe, deren Glieder nur aus Nullen besteht. Die Funktion f aus dem letzten Beispiel hat bei $x_0 = 0$ dieselbe Taylor-Reihe. M.a.W., der Unterschied zwischen der Nullfunktion und f ist bei $x = 0$ kleiner als jede Potenz, er wird von der Taylor-Reihe nicht wahrgenommen (*exponential splitting*).

Die Konvergenz der Taylor-Reihe von f allein ist somit nicht hinreichend zur Darstellung des Funktionswertes $f(x)$. Es muß darüberhinaus gefordert werden, daß das Restglied mit wachsendem n gegen 0 konvergiert.

Aufgabe

Welches ist das Restglied für die Funktion des letzten Beispiels?

Satz 5.19

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x \in U_r(x_0)$ sowie $f \in \mathcal{C}^\infty(U_r(x_0))$. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = T(f, x_0)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &\iff \\ \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) &= 0. \end{aligned}} \quad (5.6)$$

Beweis

Aufgrund der Taylor-Formel (Satz 5.17) gilt für $x \in U_a(x_0)$

$$R_n(f, x_0)(x) = f(x) - T_n(f, x_0)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Die Darstellung einer Funktion f an der Stelle $x \in U_a(x_0)$ durch „ihre“ Taylor-Reihe gilt also genau dann, wenn das Restglied mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Dazu liefert der nächste Satz eine hinreichende Bedingung:

Satz 5.20

Das Restglied $R_n(x)$ in der Taylor-Formel von f strebt gegen Null für $n \rightarrow \infty$, wenn die folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\bigvee_{M>0} \bigvee_{C>0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} \bigwedge_{t \in [x_0-x, x_0+x]} |f^{(n)}(t)| \leq M \cdot C^n$$

In Worten:

Mit wachsendem n darf die Ableitung $f^{(n)}$ von f höchstens wie eine Potenz wachsen, also z.B. nicht exponentiell.

Beweis

Unter den gemachten Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(f, x_0)(x)| &= |R_n(f, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^n \right| \\ &\leq \frac{M \cdot C^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} = M \cdot \frac{|C \cdot (x - x_0)|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist gleich $M \times$ dem $(n+1)$ -ten Glied der Taylor-Reihe der Funktion

$$g(x) := e^{C \cdot |x - x_0|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Da diese Reihe nach Beispiel 5.35 für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, bilden ihre Reihenreste eine Nullfolge. Nach der obigen Rechnung läßt sich $|R_n(x)|$ durch den $(n+1)$ -ten Reihenrest abschätzen, konvergiert also selbst gegen Null für $n \rightarrow \infty$.

5.7.3.1 Taylor-Reihen und Potenzreihen

Die Taylor-Reihen um x_0 sind Potenzreihen mit x_0 als Entwicklungspunkt. Wird eine Funktion f durch ihre Taylor-Reihe um x_0 dargestellt – etwa im Intervall $|x - x_0| < r$ – so hat man f damit in eine Potenzreihe entwickelt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (|x - x_0| < r)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Ist umgekehrt f in eine Potenzreihe entwickelbar,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (|x - x_0| < r),$$

so ist f beliebig oft differenzierbar, und die Ableitungen ergeben sich durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe. Insbesondere ist

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Potenzreihe und die Darstellbarkeit durch ihre Taylor-Reihe sind also gleichwertig.

5.7.3.2 Beispiele

Beispiel 5.38

Die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f(x) := \sinh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

um $x_0 = 0$ soll bestimmt und eine Abschätzung des Restgliedes angegeben werden.

Es ist

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \sinh 0 = 0 & , \quad k \text{ gerade} \\ \cosh 0 = 1 & , \quad k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\longrightarrow T_{2n+1}(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R_{2n+1}(f, 0)(x) = \frac{\sinh(\theta x)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{\sinh(\theta x)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \right| \leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0,$$

da die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

für $|x|^2 < (2n+1)(2n+2)$ streng monoton fallend ist (s. das Argument im Beweis der Beh. zu Beispiel 5.35).

Auf die Konvergenz des Restgliedes gegen 0 hätte man auch mit Hilfe von Satz 5.20 schließen können:

Für alle $t \in [-x, x]$ ist

$$|f^{(n)}(t)| = \left\{ \begin{array}{l} |\sinh t| \\ |\cosh t| \end{array} \right\} \leq \cosh x \cdot 1^n =: M \cdot C^n.$$

Damit lautet die Taylor-Reihe von \sinh :

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

und diese Entwicklung ist gültig für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 5.39

Analog folgt

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung

Gliedweise Addition der beiden konvergenten Reihen für

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

liefert

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Beispiel 5.40

Die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1, \infty))$$

um $x_0 = 0$ soll bestimmt und eine Abschätzung des Restgliedes angegeben werden.

Es ist

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \in \mathbb{N}, x \in (-1, \infty))$$

$$\longrightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)} \cdot (k-1)!,$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\longrightarrow f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Aufgrund der nächsten Behauptung läßt sich die hinreichende Wachstumsbeschränkung von Satz 5.20 zur Abschätzung des Restgliedes *nicht* heranziehen:

Beh.

Es gibt keine Zahlen $M, C > 0$ so, daß für alle $t \in [-x, x]$ gilt:

$$|f^{(n)}(t)| = \left| \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+t)^n} \right| \leq M \cdot C^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bew.

Im Gegensatz zur Behauptung werde angenommen, es gäbe eine solche Abschätzung. Dann wäre auch

$$(n-1)! \leq M \cdot [C(1+t)]^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also auch

$$\sqrt[n]{(n-1)!} \leq \sqrt[n]{M} \cdot C(1+t) \leq \sqrt[n]{M} \cdot C(1+|x|) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1$ (Beispiel 3.7) ist die rechte Seite dieser Ungleichung beschränkt, die linke dagegen nicht, denn es gelten die folgenden Abschätzungen für die Fakultäten:

- (i) Rückführung der Abschätzung für $\sqrt[n]{(n-1)!}$ auf eine für $\sqrt[n]{n!}$:

$$\sqrt[n]{(n-1)!} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n}}$$

(man beachte Beispiel 3.7: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.)

- (ii) Anwendung des Binomischen Satzes zur Abschätzung der Fakultäten⁵ durch Potenzen von n :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} \\ &\leq 1 + 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + \dots + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

⁵Die Folge $1 + \frac{1}{n}$ $_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Ihr Grenzwert ist e.

(iii) Nach einer Hausaufgabe gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}$$

(iv) Aus (iii) folgt dann mit Hilfe der Abschätzung (ii):

$$\frac{n^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq 3^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^n, \quad \text{also}$$

$$n! \geq 3 \cdot \frac{n^n}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{3}\right)^n, \quad \text{also}$$

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{3} \cdot \frac{n}{3} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \infty$$

unter Beachtung von Beispiel 3.8 im letzten Schritt: $\sqrt[n]{3} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

(v) **Bemerkung**

Es läßt sich eine sehr viel bessere Abschätzung der Fakultäten nach unten und nach oben angeben (Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1, Aufgabe 21.3):

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Das Restglied muß also für jedes x einzeln abgeschätzt werden.

(a) $x > 0$:

$\theta \in (0, 1)$ kann beliebig nahe bei 0 liegen, also kann man $R_n(x)$ nur abschätzen zu

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x > 0).$$

(b) $x \leq 0$:

$\theta \in (0, 1)$ kann beliebig nahe bei 1 liegen, also folgt hier nur

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+1}} \quad (x > 0)$$

wegen $1 + \theta x \geq 1 - |x|$. Diese Abschätzung kann sehr schlecht sein; z.B. ergibt sich für $x = -2/3$:

$$|R_n(-\frac{2}{3})| \leq \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad \text{also etwa } |R_9(-\frac{2}{3})| \leq \frac{1024}{10} = 102,4.$$

Tatsächlich gilt $|R_9(-\frac{2}{3})| \leq 0,005$, wie ein Vergleich mit $\ln(1 - 2/3) = \ln(1/3)$ zeigt.

Berechnung von $\ln 2$:

Setzt man $x = 1$, so erhält man

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} + R_n(2)$$

mit $|R_n(2)| \leq \frac{1}{n+1}$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(2) = 0$ erhält man das theoretisch interessante, numerisch aber nicht brauchbare Ergebnis des Grenzwertes der alternierenden harmonischen Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

Beispiel 5.41

Das letzte Beispiel läßt sich benutzen, um die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$g(x) := \frac{1}{1+x} \quad (x \in (-1, \infty))$$

um $x_0 = 0$ anzugeben, ist doch g die Ableitung der dortigen Funktion f :

$$g(x) = \frac{d}{dx} \ln(1+x) \quad (x \in (-1, \infty)).$$

Nach Satz 5.15 ergibt sich die Potenzreihe für g aus derjenigen von f durch gliedweise Differentiation:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots \\ g(x) &= f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n}{n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + - \dots \end{aligned}$$

Wie die Potenzreihe für f auch, so hat die Potenzreihe für g nach Satz 5.15 denselben Konvergenzradius, also $r = 1$. Durch die Setzung $x := t^2$ gewinnt man daraus die Potenzreihe für die Funktion h :

$$h(t) := \frac{1}{1+t^2} \quad (t \in (-\infty, \infty)) :$$

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t^2)^n}{n} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3} + - \dots \quad (t \in (-1, 1))$$

Obwohl h für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und keinen Pol hat, also eine „harmlose“ Funktion ist, hat ihre Potenzreihe doch nur den Konvergenzradius $r = 1$. Wie kommt das?

Die Formel aus Definition 3.13 zur Berechnung des Konvergenzradius benutzt den Betrag der Koeffizienten und kann daher nicht unterscheiden, ob es sich um eine reelle oder eine komplexe Potenzreihe handelt. Die obige Reihe für h hat aber (komplexe) Pole an den Stellen i und $-i$, und diese Pole definieren den Konvergenzradius.

5.8 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Ableitung elementarer Funktionen
- Beherrschung aller Differentiationsregeln
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- Kurvendiskussionen
- Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Genaue Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt
- Abgrenzung der Differenzierbarkeit einer Funktion zur Stetigkeit
- Differentiation der Umkehrfunktion
- Regeln von Bernoulli und de l'Hospital
- Fehlerrechnung
- Schwierige Kurvendiskussionen
- Schwierige Extremalprobleme mit Nebenbedingungen
- Differentiation von Potenzreihen
- Anwendung der Taylor'schen Formel
- Taylor-Reihen

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Anwendung des Newton'schen Tangentenverfahrens, Konvergenz

Stichwortverzeichnis

- $(-\infty, \infty)$, 9
- $(-\infty, a]$, 9
- $U_\varepsilon(\xi)$, 222
- $[a, \infty)$, 9
- \Im , 20
- \Re , 20
- arg, 27
- $\dot{U}_\varepsilon(\xi)$, 222
- e, 110
- \equiv , 60, 66
- $\frac{0}{0}$, 281
- $\frac{\infty}{\infty}$, 281
- $\frac{df}{dx}$, 250
- $\frac{d}{dx} f$, 250
- $\frac{d}{dx}$, 250
- i, 16
- inf, 11
- lg, 113
- lim inf, 184
- lim sup, 184
- ln, 113
- $C^n(\mathcal{G})$, 276
- $C^\infty(\mathcal{G})$, 276
- max, 11
- min, 11
- $\overline{\lim}$, 184
- $\prod_{i=1}^n c_i$, 3
- rad, 25
- sgn, 13
- $\sum_{i=1}^n c_i$, 3
- sup, 11
- glb, 11
- lub, 11
- \underline{Z}_C , 51
- \underline{Z}_L , 52
- \underline{Z}_R , 50
- $\underline{\lim}$, 184
- lim, 231
- $\lim_{x \nearrow \xi}$, 231
- $\lim_{x \rightarrow \xi^-}$, 231
- $\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x < \xi}}$, 231
- $\lim_{x \uparrow \xi}$, 231
- $\lim_{n \rightarrow \infty}$, 172
- $\lim_{x \rightarrow \infty}$, 233
- \downarrow , 61
- ε -Umgebung, 23, 222
- f' , 247
- $f'(\xi)$, 247
- $f^{(0)}$, 276
- $f^{(n)}$, 276
- i, 19
- \mathbb{C} , 17, 18
- \mathbb{N} , 4
- \mathbb{N}_0 , 4
- \mathbb{Q} , 5
- \mathbb{R} , 1
- \mathbb{Z} , 5
- Abbildung, 58
- Ableitung, 247
 - äußere, 261
 - der Umkehrfunktion, 263
 - einseitige, 250
 - innere, 261
 - linksseitige, 250
 - rechtsseitige, 250
- Additionstheoreme
 - der Hyperbelfunktionen, 141
 - der trigonometrischen Funktionen, 127
- Amplitudenmodulation, 162
- Anfangswertproblem, 273
- Arbeitspunkt, 73
- Arcus cosinus ($\arccos x$), 130
- Arcus cotangens ($\operatorname{arccot} x$), 130

- Arcus sinus ($\arcsin x$), 130
 Arcus tangens ($\arctan x$), 130
 Arcusfunktion, 130
 Area cosinus hyperbolicus ($\operatorname{arcosh} x$), 144
 Area cotangens hyperbolicus ($\operatorname{arcoth} x$), 144
 Area sinus hyperbolicus ($\operatorname{arsinh} x$), 144
 Area tangens hyperbolicus ($\operatorname{artanh} x$), 144
 Areafunktion, 144
 Asymptote
 vertikale, *siehe* Polgerade
 Asymptote im Unendlichen, 90
 Auslenkung, 45

 Basis, 93
 Beschleunigung, 254
 beschränkt, 10
 Betragsfunktion, 12, 62
 biquadratische Gleichung, 299
 Blindleistung, 57
 Blindleitwert, 53
 Blindwiderstand, 48, 55
 induktiver, 52
 kapazitiver, 51
 Bogenmaß, 25

 Cauchy-Folge, *siehe* Folge
 Cosinus ($\cos x$), 124
 Cosinus hyperbolicus ($\cosh x$), 139
 Cotangens ($\cot x$), 124
 Cotangens hyperbolicus ($\coth x$), 139

 Definitionsbereich, 59
 Definitionslücke, 86
 behebbar, 89
 Dezimalbruch, 188
 Differential, 308
 Differentialgleichung, 273
 Differentialquotient, 250
 Differenzenquotient, 246, 250
 differenzierbar, 247
 divergent, 110
 dividierte Differenzen, 81
 Drehstreckung, 30, 38
 Drehung, 30, 38
 Dreiecksungleichung, 13, 23

 effektive Leistung, 56
 Effektivwert, 55
 Einheitshyperbel, 146
 Einheitswurzel, 36
 Ellipse, 102
 Elongation, 45, 150
 Entwicklungsmittelpunkt, 315
 Entwicklungspunkt
 eines Polynoms, 72
 Euler'sche Formel, 28
 explizit, 59
 Exponent, 93
 Exponentialfunktion, 98, 104
 Funktionalgleichung, 105
 natürliche, 110
 Exponentialgleichung, 120
 Extremalproblem, 296
 Extremum
 relatives, 266

 Faktorregel, 257
 fast alle, 173
 Fehler
 absoluter, 304
 absoluter fortgeplanter -, 305
 Beobachtungsfehler, 303
 fortgeplanter, 305
 grober -, 303
 Mesfehler, 303
 relativer, 304
 relativer fortgeplanter -, 305
 statistischer -, 303
 systematischer -, 303
 Folge, 110
 beschränkte, 178
 Cauchy-Folge, 181
 divergente, 110, 172
 Grenzwert, 172
 Häufungspunkt, 182
 komplexe, 171
 konstante, *siehe* stationäre
 konvergente, 110, 172
 monoton fallende, 178
 monoton wachsende, 178
 nach oben beschränkte, 178
 nach unten beschränkte, 178
 reelle, 171

- stationäre, 174
- Teilfolge, 183
- Frequenzband, 163
- Fundamentalsatz der Algebra, 78
- Funktion, 58
 - beschränkte, 63
 - Darstellung, 61
 - Fortsetzung, 61
 - ganzrationale, 66
 - gebrochen rationale, 67
 - gerade, 64, 215
 - Graph, 61
 - inverse, 61
 - irrational algebraische, 67
 - konstante, 62
 - monotone, 64
 - Parameterdarstellung, 63
 - periodische, 64
 - rationale, 85
 - Restriktion, 61
 - stückweise definierte, 62
 - umkehrbar, 61
 - ungerade, 64, 215
- Funktionen
 - Differenz, 64
 - Gleichheit, 60
 - Komposition, 65
 - Produkt, 64
 - Quotient, 64
 - Summe, 64
 - Verkettung, *siehe* Komposition
- g.g.T., 159, 168
- gedämpfte Schwingung, 233
- geometrische Summenformel, 187
- Gleichung
 - algebraische, 66, 99
 - Grad, 66
- Grenzwert, 110, 223
 - einseitiger, 231
 - uneigentlicher, 233
- Grundzahl, 93
- Häufungspunkt, 222
- Ham-Sandwich-Problem, 242
- harmonisches Mittel, 192
- Hauptwert, 26
- Hintereinanderschaltung von Funktionen, 65
- Hochzahl, 93
- Horner-Schema, 69
- Hyperbel, 103
- Hyperbelfunktionen, 137
 - mit komplexem Argument, 143
- Identitätssatz für Polynome, 77
- Imaginärteil, 20
- Impedanz, 48
- implizit, 59
- Infimum, 10
- injektiv, 61
- Interferenz, 154
- Interpolation, 79
- Interpolationsaufgabe, 80
- Interpolationspolynom
 - von Lagrange, 80
 - von Newton, 80
- Intervall, 9
 - abgeschlossenes, 9
 - halboffenes, 9
 - offenes, 9
- Intervallschachtelung, 181
- isolierter Punkt, 222
- Iterationsfolge, 313
- Kartesisches Produkt, 58
- Kegelschnitte, 100
- Kettenlinie, 137
- Kettenregel, 261
- Kirchhoff'sche Regeln, 42
- komplexe Amplitude, 46
- Komplexe Zahl
 - algebraische Form, 19
 - Argument, 27
 - Betrag, 27
 - Exponentialform, 24, 28
 - kartesische Form, 19
 - Phase, 27
 - Polarform, 28
 - trigonometrische Form, 24, 27
- Komplexifizierung, 49, 50
- konjugiert komplexe Zahl, 21
- konkav, 286
- konvergent, 110

- Konvergenzkreis, 211
 Konvergenzradius, 210, 211
 konvex, 286
 Kreis, 101
 Kreisfrequenz, 45, 150
 Kreisteilungsgleichung, 36
 kritischer Punkt, 267
 Kurvendiskussion, 284

 lb, 113
 Leistungsanpassung, 300
 Leitwert
 komplexer, 48
 limes inferior, 184
 limes superior, 184
 linearisieren, 312
 Lissajous-Figuren, 168
 logarithmische Ableitung, 308
 Logarithmus, 113
 binärer, 113
 dekadischer, 113
 einer komplexen Zahl, 117
 Hauptwert, 118
 Nebenwert, 118
 natürlicher, 113
 Logarithmusfunktion, 115
 Logarithmusgleichung, 120

 MacLaurin-Reihe, 331
 Majorantenkriterium, 202
 Maximum, 11
 globales, 266
 relatives, 266
 Minimum, 11
 relatives, 266
 Minorantenkriterium, 202
 Mittelwertsatz
 erster \sim der Differentialrechnung, 270
 zweiter \sim der Differentialrechnung, 271
 Modulationsgrad, 163
 Momentangeschwindigkeit, 253
 Momentanleistung, 55
 Momentanwert, 47
 Monom, 68
 Monotoniegesetz, 7

 Nebenbedingung, 296
 negativ, 7
 Newton'sche Iterationsformel, 313
 nichtnegativ, 7
 nichtpositiv, 7
 Normalform, 19
 Nullfolge, 111, 175
 Nullphasenwinkel, 45, 150
 Nullteilerfreiheit, 3

 obere Grenze, 10
 Ordnung
 eines Pols, 87
 Ordnungsrelation, 6
 Oszillationsstelle, 238

 Parabel, 102
 Parallelschaltung, 43
 Parallelschwingkreis, 43
 Periode, 150
 Phase, 45, 150
 Phasenverschiebung, 55
 Phasenwinkel, 45, 150
 Pol, 87
 mit Vorzeichenwechsel, 87
 ohne Vorzeichenwechsel, 87
 Ordnung, 89
 Polarkoordinaten, 24
 Polarwinkel, 25
 Polgerade, 87
 Polordnung, 87
 Polynom, 66
 Grad, 66
 Koeffizienten, 66
 Linearfaktorzerlegung, 77
 Nullstelle, 68
 Polynomdivision, 70, 75
 positiv, 7
 Potenzfunktion, 67, 92, 96
 Potenzreihe, 208
 beständig konvergente, 214
 Entwicklungspunkt, 208
 Potenzreihen
 Identitätssatz, 215
 Produktregel, 257
 Produktzeichen, 3
 punktierte ε -Umgebung, 222

- Quadratische Form, 100
 Quotientenkriterium, 205
 Quotientenregel, 257

 radiant, 25
 radioaktiver Zerfall, 107
 Realteil, 20
 reell, 21
 Reelle Zahlen
 Axiome, 1
 reellwertig, 59
 Regel von Bernoulli und de l'Hospital, 278
 Regula Falsi, 243
 Reihe, 189
 absolut konvergent, 196
 alternierende harmonische, 194, 195
 bedingt konvergente, 196
 divergente, 190
 geometrische, 191
 harmonische, 192
 konvergente, 190
 Konvergenzgeschwindigkeit, 199
 Partialsumme, 189
 Summe, 190
 unbedingt konvergente, 196
 Wert, 190
 Reihenschwingkreis, 42
 rein-imaginär, 21
 Relation, 58
 Resonanzfrequenz, 293
 Restglied
 von Lagrange, 324
 Restriktion, *siehe* Funktion
 Reziprokenregel, 260
 Riemann'sche Fläche, 118, 119

 Satz von Moivre, 31
 Scheinleitwert, 53
 Scheinwiderstand, 48
 reeller, 55
 Schranke
 größte untere, 11
 kleinste obere, 11
 obere Schranke, 10
 untere Schranke, 10

 Schwebung, 160
 Dauer, 161
 Frequenz, 161
 Kreisfrequenz, 161
 Periode, 160
 Schwingung, 148
 Amplitude, 45, 150
 Auslenkung, 150
 Dauer, 45, 150
 elliptisch polarisierte, 165
 harmonische, 149
 linear polarisierte, 166
 Scheitelwert, 45, 150
 Zeit, 150
 zirkular polarisierte, 168
 Schwingungen
 Superposition, 151
 Sehnenverfahren, *siehe* Regula Falsi
 Seitenband, 163
 Serienschaltung, 43
 Signalschwingung, 162
 Signumsfunktion, 13, 62
 Sinus ($\sin x$), 124
 Sinus hyperbolicus ($\sinh x$), 139
 Stützpunkt, 79
 Stützstelle, 79
 Stützwert, 79
 Stauchung, 38
 stetig, 235
 Streckung, 30, 38
 Summenregel, 257
 Summenzeichen, 3
 Supremum, 10
 symbolische Methode, 41

 Tangens ($\tan x$), 124
 Tangens hyperbolicus ($\tanh x$), 139
 Tangente, 253
 Tangentenproblem, 252
 Taylor'sche Formel, 323
 Taylor-Polynom, 320, 323
 Taylor-Reihe, 331
 Term, 59
 Trägerschwingung, 162
 Transitivitätsgesetz, 7
 Trichotomiegesetz, 7
 Trigonometrische Funktionen, 122

- mit komplexem Argument, 143
- Trigonometrische Gleichung, 134
- Umgebung, 10
 - ε -Umgebung, 10
- Umkehrabbildung, 61
- Umkehrfunktion, 61
- unendliche Reihe, 189
- Unendlichkeitsstelle, 87
- Unstetigkeit, 238
- untere Grenze, 10
- Vektorfeld, 220
- Verkettung von Funktionen, 65
- Verknüpfung von Funktionen, 65
- Versor, 29
- Vielfachheit einer Nullstelle, 77
- vollständig, 11
- Wendepunkt, 286
- Wertebereich, 59
- Widerstand
 - komplexer, 48
- Widerstandsoperator, 48
- Winkelfaktor, 29
- Wirkleistung, 57
- Wirkleitwert, 53
- Wirkwiderstand, 48, 55
- Wurzelexponent, 94
- Wurzelfunktion, 67, 92, 94
- Wurzelkriterium, 204
- Zahlenfolge, 110, *siehe* Folge
- Zeiger, 20
- Zeigerdiagramm, 45
 - komplexes, 46
 - reelles, 46
- Zeitfunktion, 46
- Zwischenwertsatz, 241
- Zyklometrische Funktion, *siehe* Arcusfunktion