

# Analysis II

Prof. Dr. A. Raphaélian  
Fachbereich 1 - Ingenieurwissenschaften I  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

# Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Integration von Funktionen einer reellen Variable</b>	<b>1</b>
6.1	Das bestimmte Integral . . . . .	1
6.1.1	Arbeit und Flächeninhalt . . . . .	1
6.1.2	Definition des bestimmten Integrals . . . . .	2
6.1.2.1	Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion . . . . .	11
6.1.3	Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	13
6.2	Das unbestimmte Integral . . . . .	18
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	20
6.4	Explizit berechenbare Integrale - Integrationsmethoden . . . . .	26
6.4.1	Grundintegrale . . . . .	27
6.4.2	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	27
6.4.2.1	Beispiele aus der Wechselstromtechnik . . . . .	31
6.4.3	Partielle Integration . . . . .	35
6.4.3.1	Restglied der Taylor-Formel in Integralform . . . . .	39
6.4.4	Integration durch Substitution . . . . .	40
6.4.5	Integration nach Partialbruchzerlegung . . . . .	56
6.4.5.1	Partialbruchzerlegung . . . . .	57
6.4.5.2	Stammfunktionen rationaler Funktionen . . . . .	59
6.5	Rotationskörper . . . . .	65
6.5.1	Mantelfläche eines Rotationskörpers . . . . .	65
6.5.2	Volumen eines Rotationskörpers . . . . .	69
6.5.3	Schwerpunkt ebener Flächen; erste Guldin'sche Regel . . . . .	77
6.6	Uneigentliche Integrale . . . . .	87
6.6.1	Definition und einführende Beispiele . . . . .	87
6.6.2	Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale . . . . .	94
6.6.3	Uneigentliche Integrale und unendliche Reihen . . . . .	100
6.6.4	Euler'sche Gammafunktion . . . . .	102
6.7	Numerische Integration . . . . .	105
6.7.1	Rechtecks- und Trapezregeln . . . . .	105
6.7.2	Simpson'sche Regel . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Fourier-Analyse</b>	<b>109</b>
7.1	Fourier-Reihen . . . . .	109
7.1.1	Begriff der Fourier-Reihe . . . . .	109
7.1.1.1	Einführung . . . . .	109

7.1.1.2	Euler-Fourier'sche Formeln im Reellen . . . . .	111
7.1.2	Symmetrieeigenschaften bei Fourier-Reihen . . . . .	122
7.1.2.1	Fourier-Reihen von fortgesetzten Funktionen . . . . .	129
7.1.3	Konvergenz einer Fourier-Reihe . . . . .	132
7.1.3.1	Punktweise Konvergenz einer Fourier-Reihe . . . . .	134
7.1.3.2	Gleichmäßige Konvergenz einer Fourier-Reihe . . . . .	135
7.1.3.3	Konvergenz einer Fourier-Reihe im quadratischen Mittel . . . . .	140
7.1.4	Fourier-Reihen in komplexer Form . . . . .	149
7.2	Fourier-Transformation . . . . .	154
7.2.1	Einführung . . . . .	154
7.2.2	Komplexe Form des Fourier-Integrals . . . . .	159
7.2.3	Interpretation des Fourier-Integrals . . . . .	165
7.2.4	Reelle Form des Fourier-Integrals . . . . .	167
7.2.5	Fourier-Sinus- und Fourier-Kosinus-Transformierte . . . . .	175
7.3	Diskrete Fourier-Transformation . . . . .	183
<b>8</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>185</b>
8.1	Einleitung und Grundlagen . . . . .	185
8.1.1	Grundbegriffe . . . . .	185
8.1.2	Geometrische Deutung einer Differentialgleichung, Richtungsfeld . . . . .	189
8.1.3	GDgl und PDgl . . . . .	194
8.1.4	Lösungen einer Gewöhnlichen Differentialgleichung . . . . .	195
8.1.5	Physikalische Beispiele - Auftreten von Differentialgleichungen . . . . .	199
8.1.6	Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	207
8.1.7	Randwertproblem . . . . .	213
8.2	Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	214
8.2.1	Differentialgleichungen mit separierbaren Variablen . . . . .	215
8.2.1.1	Differentialgleichung der Form $y' = f(x)$ . . . . .	218
8.2.1.2	Autonome Differentialgleichung . . . . .	219
8.2.2	Substitutionen . . . . .	221
8.2.2.1	Substitution eines linearen Terms . . . . .	222
8.2.2.2	Gleichgradige Differentialgleichung . . . . .	223
8.2.2.3	Weitere Substitutionen . . . . .	224
8.2.3	Lineare Differentialgleichung . . . . .	225
8.2.3.1	Homogene lineare Differentialgleichung . . . . .	226
8.2.3.2	Inhomogene lineare Differentialgleichung . . . . .	228
8.2.4	Exakte Differentialgleichung - Euler'scher Multiplikator . . . . .	237
8.3	Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung . . . . .	243
8.3.1	Definition und allgemeine Eigenschaften . . . . .	243
8.3.2	Fundamentalsystem - Wronski-Determinante . . . . .	244
8.3.3	Homogene lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten - Exponentialansatz für ein Fundamentalsystem . . . . .	248
8.3.4	Inhomogene lineare Differentialgleichung . . . . .	250

8.3.4.1	Superpositionsprinzip . . . . .	251
8.3.4.2	Grundlösungsverfahren . . . . .	252
8.3.4.3	Variation der Konstanten . . . . .	254
8.3.4.4	Störgliedansatz . . . . .	257
8.3.5	Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (Schwingungen) . . . . .	259
8.3.5.1	Mechanische und elektrische Modelle . . . . .	260
8.3.5.2	Freie Schwingung . . . . .	263
8.3.5.3	Erzwungene Schwingung . . . . .	268
8.3.6	Euler'sche Differentialgleichung . . . . .	277
<b>9</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>280</b>
9.1	Einführung . . . . .	280
9.1.1	Motivation . . . . .	282
9.1.2	Definition und Beispiele . . . . .	284
9.1.3	Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace- Transformation . . . . .	287
9.2	Laplace-transformierbare Funktionen . . . . .	294
9.2.1	Klassen Laplace-transformierbarer Funktionen . . . . .	294
9.2.2	Rechenregeln für die Laplace-Transformation . . . . .	298
9.2.3	Transformation periodischer Funktionen . . . . .	305
9.3	Umkehrung der Laplace-Transformation . . . . .	307
9.3.1	Zur Eindeutigkeit der Rücktransformation . . . . .	307
9.3.2	Rücktransformation rationaler Bildfunktionen . . . . .	308
9.3.2.1	Bestimmung der Originalfunktion zu einer ra- tionalen Bildfunktion . . . . .	309
9.3.2.2	Einfache Nullstellen des Nennerpolynoms . . . . .	312
9.3.2.3	Pol-Nullstellenplan . . . . .	315
9.3.3	Rücktransformation nichtrationaler Bildfunktionen . . . . .	318
9.4	Anwendungen in der Nachrichten- und Regelungstechnik . . . . .	323
9.4.1	Übertragungsfunktion eines Netzwerkes . . . . .	323
9.4.2	Laplace-Transformation und Symbolische Methode . . . . .	330
9.4.3	Sprungfunktion als Eingangssignal . . . . .	332
9.4.4	Dirac'sche Deltafunktion . . . . .	333
9.4.5	Impulsfunktion als Eingangssignal . . . . .	337
9.4.6	Erweiterung von Funktionen zu Distributionen . . . . .	338
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>344</b>

# Kapitel 6

## Integration von Funktionen einer reellen Variable

### 6.1 Das bestimmte Integral

#### 6.1.1 Arbeit und Flächeninhalt

Seien  $a, b > 0$ ,  $\mathcal{I} := [a, b]$ ,  $f_0 > 0$  und

$$f(x) := f_0 \quad (x \in [a, b]).$$

Diese konstante Funktion wird interpretiert als konstante Kraft in Richtung eines geradlinigen Weges längs der  $x$ -Achse von  $x = a$  bis  $x = b$ . Das Produkt

$$W := f_0 \cdot (b - a)$$

heißt die *mechanische Arbeit* von  $f$  längs dieses Weges.

**Beispiel** Reibungsarbeit bei konstanter Geschwindigkeit (Abb. 6.1)

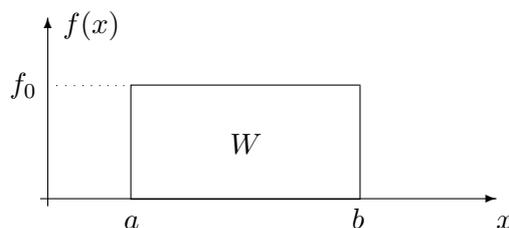


Abbildung 6.1: Mechanische Arbeit einer konstanten Kraft

Die Arbeit  $W$  läßt sich interpretieren als Inhalt der Fläche (Rechteck) zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$  in den Grenzen von  $x = a$  bis  $x = b$ .

Wenn die Kraft  $f$  nicht konstant, sondern linear ansteigend ist mit  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = f_0$ , s. Abb. 6.2:

$$f(x) := \frac{f_0}{b - a} \cdot (x - a) \quad (x \in \mathcal{I}),$$

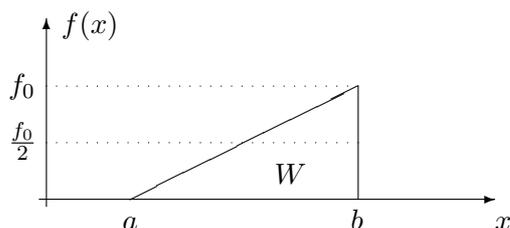


Abbildung 6.2: Mechanische Arbeit einer linear ansteigenden Kraft

so wird man den Mittelwert  $f_0/2$  als Arbeit interpretieren. Man tut also so, als ob zwischen  $x = a$  und  $x = b$  eine konstante Kraft der halben Größe geherrscht hätte. Das entspricht dem Flächeninhalt des Dreiecks

$$W = \frac{f_0 \cdot (b - a)}{2} = \frac{f_0}{2} \cdot (b - a).$$

Ist nun die Kraft  $f$  nicht mehr linear, also insbesondere nicht konstant, so gelingt die Berechnung der Arbeit  $W$  nicht mehr auf so elementare Weise. Interpretieren läßt sie sich aber immer noch als Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[a, b]$ , s. Abb. 6.3.

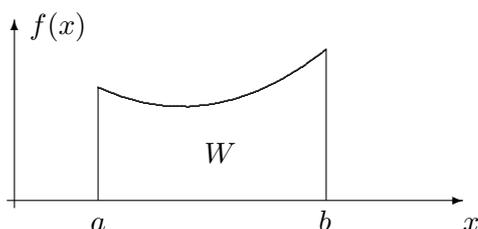


Abbildung 6.3: Mechanische Arbeit einer nichtlinearen Kraft

### Problem

Wie berechnet man den Inhalt dieser Fläche, ja wie definiert man ihn zuvor überhaupt?

Diese Aufgabe ist eine Grundaufgabe der Analysis, und sie wird durch die Definition des *bestimmten Integrals* befriedigend gelöst.

#### 6.1.2 Definition des bestimmten Integrals

Im folgenden löst man sich von der Interpretation von  $f$  als einer Kraft und von  $x$  als einem Weg:

$f$  sei eine beliebige, aber *beschränkte* Funktion auf dem Intervall  $\mathcal{I} := [a, b]$ .

Ein naheliegender Ansatz zur Berechnung des in Frage stehenden Flächeninhaltes geht davon aus, die Fläche durch eine Anzahl von Rechtecken zu approximieren und deren Anzahl dann wachsen zu lassen. Approximativ ist die gesuchte

Fläche gleich der (genauer: wird der Inhalt der gesuchten Fläche definiert als) Summe der Fläche der einzelnen Rechtecke, s. Abb. 6.4 und 6.5.

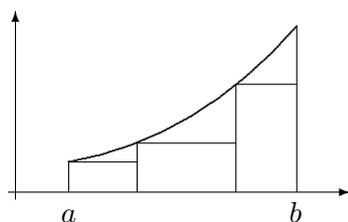


Abbildung 6.4: Approximation einer Fläche durch eine Untersumme

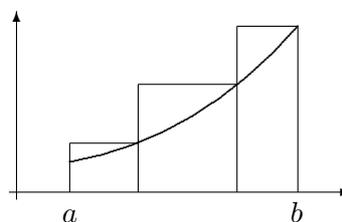


Abbildung 6.5: Approximation einer Fläche durch eine Obersumme

### Definition 6.1

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{I} := [a, b]$ .

- (i) Eine Menge  $\mathcal{Z} := \{x_0, \dots, x_n\}$  von  $(n + 1)$  Zahlen heißt eine *Zerlegung* oder eine *Partition* von  $\mathcal{I}$ , falls gilt:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

- (ii) Für  $k \in \{1, \dots, n\}$  heißen

$$\mathcal{I}_k := [x_{k-1}, x_k] \quad : \quad k\text{-tes Teilintervall}$$

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1} \quad : \quad \text{Länge von } \mathcal{I}_k$$

Offensichtlich gilt:  $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ .

- (iii)  $\|\mathcal{Z}\| := \max \{ \Delta x_k : k \in \{1, \dots, n\} \text{ geeignet} \}$  heißt *Norm* oder *Feinheit* der Zerlegung  $\mathcal{Z}$ .

- (iv) Eine Folge  $\{\mathcal{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen heißt eine *ausgezeichnete Zerlegungsfolge*, wenn ihre Feinheit mit wachsendem  $n$  gegen Null konvergiert:

$$\|\mathcal{Z}_n\| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

### Definition 6.2

Seien  $\mathcal{I} := [a, b]$ ,  $f$  eine beschränkte Funktion auf  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{Z} := \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $\mathcal{I}$ .

- (i) Folgende Abkürzungen werden definiert:

$$\begin{aligned} m_k &:= \inf_{\mathcal{I}_k} f(x) & M_k &:= \sup_{\mathcal{I}_k} f(x), \\ m &:= \inf_{\mathcal{I}} f(x) & M &:= \sup_{\mathcal{I}} f(x). \end{aligned}$$

(ii) *Untersumme* von  $f$  bzw. *Obersumme* von  $f$  bzgl.  $\mathcal{Z}$  sind definiert durch

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{bzw.} \quad \overline{S}(\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k;$$

dieses sind jeweils die Summen der Flächen der „unteren“ - bzw. der „oberen“ Rechtecke, s. Abb. 6.4 und 6.5.

(iii) Sei  $\mathcal{B} := \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  eine Menge von Zahlen mit der Eigenschaft

$$\xi_k \in \mathcal{I}_k \quad (k \in \{1, \dots, n\}),$$

ein sog. *Zwischenpunktsystem* oder eine *Besetzung* von  $\mathcal{Z}$ . Dann heißt der Ausdruck

$$S(\mathcal{Z}, \mathcal{B}) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

eine *Riemann'sche Summe* oder eine *Zwischensumme* von  $f$  zur Besetzung  $\mathcal{B}$ , s. Abb. 6.6.

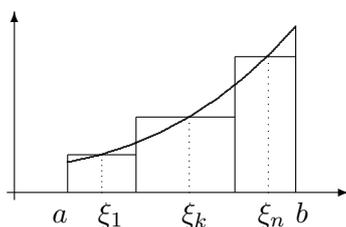


Abbildung 6.6: Approximation einer Fläche durch eine Riemann'sche Zwischensumme

### Man beachte:

Eine Unter- oder Obersumme ist nicht notwendig eine Riemann'sche Summe. Warum nicht?

Anschaulich ist der folgende Satz klar, welcher besagt, daß eine Zwischensumme, genau wie der gesuchte (und noch zu definierende!) Flächeninhalt „zwischen“ Unter- und Obersumme liegt.

### Satz 6.1

Seien  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung und  $\mathcal{B}$  eine Besetzung des Intervalles  $\mathcal{I}$ . Dann gilt:

$$m \cdot (b - a) \leq \underline{S}(\mathcal{Z}) \leq S(\mathcal{B}, \mathcal{Z}) \leq \overline{S}(\mathcal{Z}) \leq M \cdot (b - a).$$

*Beweis*

Für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt die Abschätzung

$$m \leq m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \leq M,$$

dann ergibt sich die Behauptung nach Multiplikation mit  $\Delta x_k$  und anschließender Summation.

Im folgenden soll geschlossen werden, daß Unter- und Obersumme den gesuchten Flächeninhalt um so besser approximieren, je mehr Zerlegungspunkte gewählt werden. Das gilt i.a. allerdings nur dann, wenn die neuen Zerlegungspunkte so gewählt werden, daß die Feinheit mit wachsendem  $n$  auch kleiner wird.

### Definition 6.3

Gegeben seien die beiden Zerlegungen  $\mathcal{Z} := \{x_0, \dots, x_n\}$  und  $\mathcal{Z}' := \{x_0, \dots, x_m\}$  von  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{Z}'$  heißt eine *Verfeinerung* von  $\mathcal{Z}$ , wenn  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$  gilt.

Eine Verfeinerung  $\mathcal{Z}'$  einer Zerlegung  $\mathcal{Z}$  entsteht also dadurch, daß zu den vorhandenen Teilungspunkten zusätzlich neue Punkte eingefügt werden. Anschaulich ist klar, daß bei dem Prozeß der Verfeinerung die Untersumme i.a. größer und die Obersumme i.a. kleiner wird, s. Abb. 6.7.

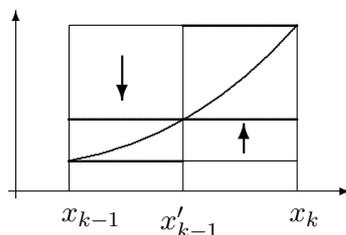


Abbildung 6.7: Einfügen eines neuen Teilungspunktes

Im folgenden Satz werden die beiden wichtigsten Eigenschaften für Unter- und Obersummen formuliert:

### Satz 6.2

- (i) Sei  $\mathcal{Z}'$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{Z}$ . Bzgl. dieser Verfeinerung sind die Untersummen monoton wachsend, die Obersummen monoton fallend, i.e.

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) \leq \underline{S}(\mathcal{Z}') \quad , \quad \overline{S}(\mathcal{Z}) \geq \overline{S}(\mathcal{Z}').$$

- (ii) Seien  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$  zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt:

$$\underline{S}(\mathcal{Z}_1) \leq \overline{S}(\mathcal{Z}_2).$$

Inbesondere sind alle Untersummen nach oben und alle Obersummen nach unten beschränkt.

*Beweis*

- (i)  $\mathcal{Z}'$  entsteht aus  $\mathcal{Z}$  durch Hinzunahme von endlich vielen weiteren Teilungspunkten.  $\mathcal{Z}'$  läßt sich aus  $\mathcal{Z}$  also sukzessive durch Hinzunahme jeweils eines weiteren Teilungspunktes konstruieren. Gilt bei jedem dieser Schritte, daß die Untersumme nicht fällt und die Obersumme nicht wächst, so gilt das auch für das Endresultat.
- (ii) Die Zerlegung  $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$  ist eine Verfeinerung sowohl von  $\mathcal{Z}_1$  als auch von  $\mathcal{Z}_2$ . Dann folgt mit dem unter (i) erzielten Ergebnis:

$$\underline{S}(\mathcal{Z}_1) \leq \underline{S}(\mathcal{Z}) \leq \bar{S}(\mathcal{Z}) \leq \bar{S}(\mathcal{Z}_2).$$

Nach dem letzten Satz gilt für jede Folge  $\{\mathcal{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen mit immer kleiner werdenden Feinheit, daß sowohl die zugehörige Folge  $\{\underline{S}(\mathcal{Z}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  der Untersummen (welche monoton steigt und nach oben beschränkt ist) als auch die zugehörige Folge  $\{\bar{S}(\mathcal{Z}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  der Obersummen (welche monoton fällt und nach unten beschränkt ist) jeweils einen Grenzwert hat. Es bleibt die Frage, ob diese beiden Grenzwerte gleich sind, es sich bei dem Paar von Folgen  $\langle \{\underline{S}(\mathcal{Z}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\bar{S}(\mathcal{Z}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$  mithin um eine Intervallschachtelung handelt.

Damit ist die nachstehende Definition sinnvoll. Man beachte, daß  $f$  nach Voraussetzung auf dem Intervall  $[a, b]$  beschränkt ist.

**Definition 6.4**

- (i) Das *untere (Riemann)-Integral* ist definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ \underline{S}(\mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a, b] \};$$

- (ii) Das *obere (Riemann)-Integral* ist definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ \bar{S}(\mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a, b] \};$$

- (iii) Gilt  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ , so heißt  $f$  über (oder „auf“ oder „in“)  $[a, b]$  *(Riemann)-integrierbar*, und

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx \quad \left( = \int_a^b f(x) dx \right)$$

heißt das *(Riemann)-Integral* von  $f$  über  $[a, b]$ .

**Bemerkung**

- (i) Aufgrund des letzten Satzes gilt  $\underline{S}(\mathcal{Z}_1) \leq \overline{S}(\mathcal{Z}_2)$  für zwei beliebige Zerlegungen  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$ . Daher gilt auch

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Wenn  $f$  also nicht (Riemann)-integrierbar ist, so ist das Unterintegral echt kleiner als das Oberintegral.

- (ii) Folgende Bezeichnungen gelten für das Integral:

$[a, b]$	:	<i>Integrationsintervall</i>
$a, b$	:	<i>untere und obere Integrationsgrenze</i>
$x$	:	<i>Integrationsvariable</i>
$f(x)$	:	<i>Integrand</i>

Ähnlich wie bei Summationsindices darf die Bezeichnung der Integrationsvariable zugunsten einer noch nicht auftretenden Variable beliebig geändert werden:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\alpha) d\alpha = \dots$$

- (iii) Anstelle abgeschlossener Intervalle hätte man bei der Definition des Integrals auch offene oder halboffene Intervalle verwenden können:

eine Änderung des (beschränkten!) Integranden an endlich vielen Stellen des Definitionsbereiches ändert den Wert des Integrals nicht. Warum nicht?

- (iv) Will man den Wert  $\int_a^b f(x) dx$  eines Integrals durch eine Unter- oder Obersumme numerisch approximieren, so macht man einen Fehler. Dieser Fehler läßt sich von vornherein kleiner gestalten, wenn man stattdessen Riemann'sche Zwischensummen verwendet, s. Abb. 6.6.

Aufgrund von

$$m_k = \inf_{\mathcal{I}_k} f(x) \leq f(\xi_k) \leq \sup_{\mathcal{I}_k} f(x) = M_k$$

für jedes Teilintervall  $[x_{k-1}, x_k]$  gilt dann auch

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = \overline{S}(\mathcal{Z}),$$

damit ist die Riemann'sche Summe  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$  i.a. eine bessere Näherung für das Integral  $\int_a^b f(x) dx$ .

Um das Integral als Grenzwert einer Summe tatsächlich auszurechnen, benutzt man dann eine Folge  $\{\mathcal{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen mit abnehmender Feinheit:

$$\|\mathcal{Z}_n\| = \max\{\Delta x_k : k \in \{1, \dots, n\} \text{ geeignet}\} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

Im Falle der Integrierbarkeit von  $f$  gilt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right)_{\mathcal{Z}_n}.$$

Dies erklärt die Symbolik der Verwendung eines stilisierten „S“ für das Integralzeichen „ $\int$ “.

### Beispiele 6.1

- (i) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f(x) := c$  für  $x \in [a, b]$ . In diesem Fall gilt  $m_k = M_k = c$  für alle Zahlen  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Damit sind alle Untersummen und alle Obersummen gleich, und zwar gleich  $c \cdot (b - a)$ :

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c \cdot (b - a) = \overline{S}(\mathcal{Z}).$$

Also ist  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c \cdot (b - a).$$

Speziell für  $c = 1$  folgt:

$$\int_a^b dx := \int_a^b 1 dx = b - a.$$

- (ii) Sei  $f$  die *Dirichlet-Funktion* auf dem Intervall  $[a, b]$ , i.e.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 1 & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases}$$

Dann gilt für jede Unter- und Obersumme

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) = 0 \quad , \quad \overline{S}(\mathcal{Z}) = b - a,$$

somit ist die Dirichlet-Funktion auf  $[a, b]$  nicht integrierbar.

Ein nicht ganz so extremes Beispiel wie die beiden ebengenannten wird im Anschluß an den nächsten Satz behandelt.

### Satz 6.3

Seien  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt und  $\{\mathcal{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Dann gelten

$$\underline{S}(\mathcal{Z}_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_a^b f(x) dx \quad , \quad \overline{S}(\mathcal{Z}_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_a^b f(x) dx.$$

Dieser Satz lehrt also, daß man zum Nachweis der Integrierbarkeit einer Funktion jede Zerlegungsfolge wählen kann, deren Feinheit gegen Null konvergiert; insbesondere also eine Folge *äquidistanter Zerlegungen*. Man beachte jedoch, daß in einer Folge  $\{\mathcal{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  äquidistanter Zerlegungen das Folgenglied  $\mathcal{Z}_{n+1}$  für  $n \neq 1$  keine Verfeinerung des vorangehenden Gliedes  $\mathcal{Z}_n$  im Sinne von Definition 6.3 mehr ist.

### Beispiel 6.2

$\mathcal{I} := [a, b]$ ,  $f(x) := x$  ( $x \in \mathcal{I}$ ),  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), (Abb. 6.8)

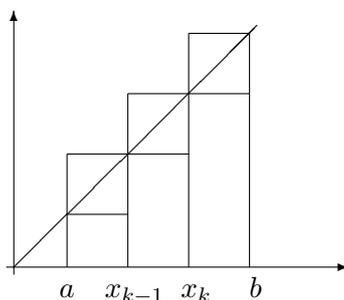


Abbildung 6.8: Approximation der Funktion  $f(x) = x$  ( $x \in \mathcal{I}$ ) durch Unter- und Obersummen bzgl. einer äquidistanten Zerlegung

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n x_{k-1} \cdot \Delta x_k \quad , \quad \overline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta x_k \quad ,$$

$$\begin{aligned} \overline{S}(\mathcal{Z}) - \underline{S}(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (b-a) \quad \longrightarrow \quad 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Damit ist die Integrierbarkeit von  $f$  über  $[a, b]$  gezeigt, der Wert des Integrals selbst ist damit aber noch nicht bekannt. Dazu wird die äquidistante Zerlegung

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad (k \in \{0, \dots, n\})$$

betrachtet, und man erhält:

$$\begin{aligned} \bar{S}(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left( a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left[ n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k \right] \\ &= (b-a) \cdot \left[ a + \frac{b-a}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= (b-a) \cdot \left[ a + (b-a) \cdot \frac{1+1/n}{2} \right] \\ &= (b-a) \cdot \left[ \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &= \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(b-a)^2}{2} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}$$

### Ergebnis

Die Funktion  $f(x) = x$ , ( $x \in [a, b]$ ) ist über  $[a, b]$  integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

### Aufgabe

Wie könnte der Nachweis der Integrierbarkeit unter Benutzung einer beliebigen ausgezeichneten Zerlegungsfolge geführt werden, also ohne Benutzung einer äquidistanten Zerlegungsfolge, welche ja von Hause aus ausgezeichnet im Sinne von Definition 6.1 (iv) ist.

**Bemerkung**

Im Grunde wurde mit Beispiel 6.2 ein sehr viel weiter führender Satz bewiesen:

**Satz 6.4**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton<sup>1</sup>. Dann ist  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar.

*Beweis*

O.B.d.A. sei  $f$  monoton wachsend. Dann gilt fast wörtlich wie im Beweis von Beispiel 6.2:

$$\begin{aligned} \underline{S}(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k \quad , \quad \bar{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k \quad , \\ \bar{S}(\mathcal{Z}) - \underline{S}(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \quad \longrightarrow \quad 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Nach Satz 6.2 ist jede Folge von Untersummen nach oben und jede Folge von Obersummen nach unten beschränkt. Wenn, wie gezeigt,  $\bar{S}(\mathcal{Z}) - \underline{S}(\mathcal{Z})$  eine Nullfolge ist, dann bilden Untersummen- und Obersummenfolge eine Intervallschachtelung.

Damit ist die Integrierbarkeit einer monoton wachsenden Funktion bewiesen.

**6.1.2.1 Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion**

Als eine weitere Anwendung, wie man von einer Riemann'schen Summe zum Integral kommt, sei eine Formel zur Berechnung der Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion hergeleitet.

Seien  $\mathcal{I} := [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$  und  $\mathcal{Z} := \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$  sei ein einbeschriebener Polygonzug, der aus (stetig differenzierbaren) Geradenstücken zusammengesetzt ist, s. Abb. 6.9. Seine Länge soll nun berechnet

---

<sup>1</sup> $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton  $\implies f$  beschränkt

*Beweis:* (für monoton wachsendes  $f$ )

$$\left[ \bigwedge_{x \in [a, b]} f(a) \leq f(x) \leq f(b) \right] \implies f[a, b] \subseteq f(a), f(b) .$$

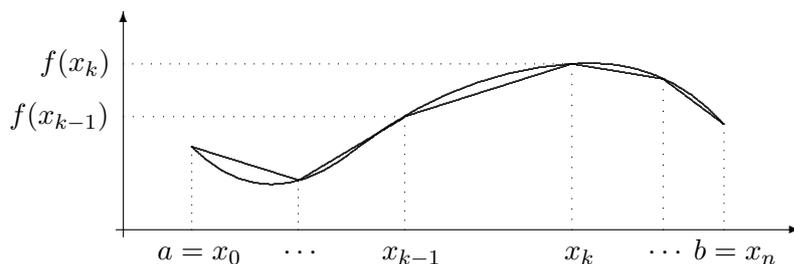


Abbildung 6.9: Polygon-Approximation einer stetig differenzierbaren Funktion

werden:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{P}(\mathcal{Z})| &= \sum_{k=1}^n \|\langle x_k, f(x_k) \rangle - \langle x_{k-1}, f(x_{k-1}) \rangle\| \\
 &= \sum_{k=1}^n \|\langle x_k - x_{k-1}, f(x_k) - f(x_{k-1}) \rangle\| \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[ (x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 \right]^{1/2} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n \left[ (x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))^2 \right]^{1/2} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[ (x_k - x_{k-1})^2 + f'(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})^2 \right]^{1/2} \\
 &= \sum_{k=1}^n [1 + f'(\xi_k)^2]^{1/2} (x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n [1 + f'(\xi_k)^2]^{1/2} \cdot \Delta x_k \\
 &\longrightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ und } \|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

da der letzte Summenausdruck eine Riemann'sche Summe für das Integral ist; an der Stelle (\*) wurde dabei der (erste) Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwandt.

### Beispiele 6.3

Man berechne die Länge der Graphen der folgenden Funktionen:

(i)  $f(x) := x \quad (x \in [0, 1])$

Auf dem Intervall  $[0, 1]$  ist  $f'(x) = 1$ , damit ergibt sich

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 1} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 dx = \sqrt{2} \end{aligned}$$

(ii)  $f(x) := \cosh x$  ( $x \in [-1, 1]$ )

Auf dem Intervall  $[-1, 1]$  ist  $f'(x) = \sinh x$ , damit ergibt sich

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 x} dx &= \int_{-1}^1 |\cosh x| dx \\ &= \int_{-1}^1 \cosh x dx &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 e^x dx + \int_{-1}^1 e^{-x} dx \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (e^1 - e^{-1}) - \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-(-1)}) \\ &= \sinh 1 - \sinh(-1) &= 2 \sinh 1 \\ &= e^1 - e^{-1} &\approx 2,35, \end{aligned}$$

wobei (\*) aufgrund einer Hausaufgabe und Satz 6.6 (iv) zustandekommt.

### 6.1.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Beispiel 6.1 (ii) führte deshalb zum „Erfolg“, d.h. zur Nicht-Integrierbarkeit der Funktion  $f$ , weil sich in jedem Teilintervall  $\mathcal{I}_k = [x_{k-1}, x_k]$  die beiden Ausdrücke  $\inf_{\mathcal{I}_k} f(x)$  und  $\sup_{\mathcal{I}_k} f(x)$  stets um eine konstante Größe – nämlich 1 – voneinander unterscheiden. Daher sind in jedem (noch so kleinen) Teilintervall die Untersumme und die Obersumme „wesentlich“ voneinander verschieden.

Man sollte daher annehmen, daß Funktionen integrierbar sind, bei denen das nicht der Fall ist. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß

$$m_k := \inf \{f(x) : x \in \mathcal{I}_k\} \quad \text{und} \quad M_k := \sup \{f(x) : x \in \mathcal{I}_k\}$$

sich um so weniger unterscheiden, je kleiner  $\Delta x_k$  ausfällt, ist die Stetigkeit von  $f$ . Tatsächlich gilt der

#### Satz 6.5

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \implies f \text{ ist über } [a, b] \text{ integrierbar.}$$

Zuerst wird in der folgenden Definition für die Menge aller über einem Intervall  $\mathcal{I}$  integrierbaren Funktionen eine Bezeichnung angegeben:

**Definition 6.5**

Sei  $\mathcal{I}$  ein beschränktes offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall. Dann wird definiert („ $\mathcal{R}$ “ steht für Riemann)

$$\mathcal{R}(\mathcal{I}) := \{f : f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ist beschränkt und über } \mathcal{I} \text{ integrierbar}\}$$

**Satz 6.6**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und gelte  $a < b$ .

(i)  $\mathcal{R}([a, b])$  zusammen mit der für Funktionen auf einem gemeinsamen Definitionsbereich erklärten Addition und Skalarenmultiplikation bildet einen Vektorraum.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b (\lambda \cdot f(x)) dx &= \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

für alle  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $f, g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies (f \cdot g) \in \mathcal{R}([a, b])$

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), \inf_{[a, b]} |g| > 0 \implies \left(\frac{f}{g}\right) \in \mathcal{R}([a, b])$$

**Man beachte**

Der Vorgang der Integration ist nicht multiplikativ, d.h. es gilt i.a.

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx &\neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) dx &\neq \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \end{aligned}$$

(iv) „Aufspalten“ des Integrals:

Für  $c \in [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  sind auch  $f \in \mathcal{R}([a, c])$  sowie  $f \in \mathcal{R}([c, b])$ , und es gilt die Aufspaltungsregel (Abb. 6.10)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Hierbei wird definiert:

$$\int_a^a f(x) dx := 0.$$

(v) „Zusammensetzen“ des Integrals:

Für  $c \in [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{R}([a, c]) \cap \mathcal{R}([c, b])$  ist auch  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , und es gilt die Zusammensetzungsregel (Abb. 6.10)

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

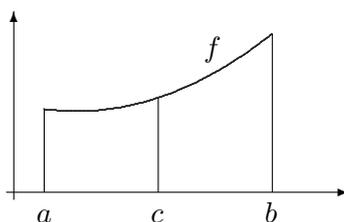


Abbildung 6.10: Aufspalten bzw. Zusammensetzen des Integrals

(vi) Monotonie des Integrals:

Für  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) ist

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

insbesondere gelten für  $x \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &\implies 0 = \int_a^b 0 dx \leq \int_a^b f(x) dx, \\ m \leq f(x) \leq M &\implies m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a). \end{aligned}$$

(vii) Absolute Integrierbarkeit von  $f$ :

Für  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  ist auch  $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ , und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Bemerkung**

(i) Bei der Definition des bestimmten Integrals wird nicht benutzt, daß die Funktion  $f$  positiv zu sein hat, sondern nur bei der Interpretation von  $\int_a^b f(x) dx$  als Fläche oder als Arbeit. Sei nun  $f(x) \leq 0$  in  $[a, b]$ . Dann ist dort  $-f(x) \geq 0$ , und es folgt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b -[-f(x)] dx = - \int_a^b \underbrace{[-f(x)]}_{\geq 0} dx.$$

Der Wert des Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  bei negativem  $f$  läßt sich also deuten als Flächeninhalt der (positiven) Funktion  $-f$ , versehen mit einem negativen Vorzeichen.

Schlagwortartig: Flächen unterhalb der Abszisse werden negativ gezählt.

Daher ist verständlich, daß der Wert eines Integrals gleich Null ist, wenn der Funktionsgraph oberhalb der Abszisse eine genauso große Fläche ausschneidet wie unterhalb.

**Beispiele**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0, \quad \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0, \dots$$

(ii) Die Definition des bestimmten Integrals wird für den Fall  $b \leq a$  wie folgt erweitert:

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx.$$

Die im letzten Satz erwähnte Aufspaltungsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

gilt dann für jede Anordnung von  $a, b, c$ . Eine äquivalente Schreibweise ist

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0.$$

- (iii) Aufgrund dieser Regel erweisen sich sofort die *stückweise stetigen* Funktionen, die an endlich vielen Stellen des Intervalles endliche Sprungstellen haben, als integrierbar: man integriert einfach von Sprungstelle zu Sprungstelle; vgl. Abb. 6.11 und dazu das nachfolgende Beispiel.

#### Beispiel 6.4

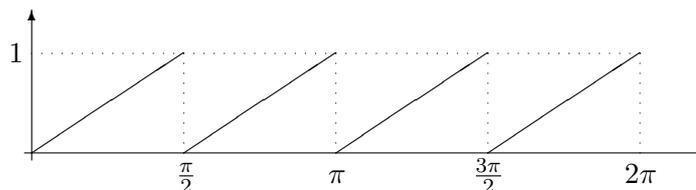


Abbildung 6.11: Integration einer „Sägezahnfunktion“

Die Gleichung der in Abb. 6.11 dargestellten Funktion im Intervall  $[0, \pi/2]$  lautet

$$f(x) := \frac{2}{\pi} x \quad (x \in [0, \pi/2]).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} f(x) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x) dx \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x dx \stackrel{\text{(Beispiel 6.2)}}{=} \frac{8}{\pi} \cdot \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 0^2}{2} = \pi \end{aligned}$$

- (iv) Die in Satz 6.6 (vi) angesprochene Monotonie des bestimmten Integrals gilt für Ableitungen nicht. Gegenbeispiel?

#### Beispiel 6.5

**Beh.**  $\int_{\pi}^{\pi/2} \cos x dx > 0$ ; s. Abb. 6.12.

*Bew.*

Hier wird eine Funktion mit negativen Funktionswerten in negativer Richtung integriert, daher kommt es zu zwei sich gegenseitig kompensierenden negativen Vorzeichen:

Nach (ii) und (i) der letzten Bemerkung sowie aus Symmetriegründen gilt

$$\int_{\pi}^{\pi/2} \cos x dx \stackrel{\text{(ii)}}{=} - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx \stackrel{\text{(i)}}{=} \int_0^{\pi/2} \cos x dx > 0.$$

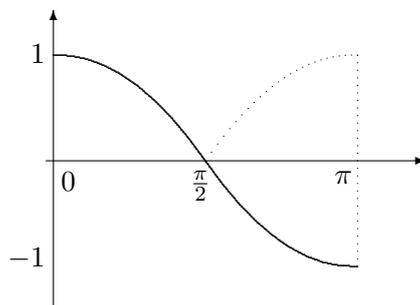


Abbildung 6.12: Kosinus-Funktion zwischen 0 und  $\pi$

## 6.2 Das unbestimmte Integral

Die Berechnung eines bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe ist meistens sehr aufwendig; vgl. Beispiel 6.2. Die im folgenden eingeführten Begriffe „Stammfunktion“ und „unbestimmtes Integral“ dienen daher weniger der Theorie als vielmehr der Bequemlichkeit bei der Berechnung von (bestimmten) Integralen, also etwa von Flächeninhalten.

### Definition 6.6

Seien  $f$  eine Funktion und  $D(f)$  ein Intervall.

- (i) Jede differenzierbare Funktion  $F$  mit der Eigenschaft  $F' = f$ , d.h. jede Lösung der *Differentialgleichung*  $y' = f(x)$  mit  $D(F) = D(f)$  heißt eine *Stammfunktion* von  $f$ .
- (ii) Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  wird mit  $\int f(x) dx$  bezeichnet und heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$ .

Nicht jede Funktion  $f$  hat eine Stammfunktion, d.h. ist Ableitung einer Funktion  $F$ . Für die Dirichlet-Funktion (Beispiel 6.1 (ii)) auf dem Intervall  $[a, b]$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 1 & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases}$$

etwa gilt:  $\int f(x) dx = \emptyset$ .

Falls zu einer Funktion  $f$  jedoch Stammfunktionen existieren, so können diese nicht allzu verschieden sein, denn es gilt:

### Satz 6.7

Seien  $f$  eine Funktion und  $D(f)$  ein Intervall.

- (i) Sind  $F_1$  und  $F_2$  zwei Stammfunktionen von  $f$ , so gibt es eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$F_2(x) = F_1(x) + c \quad (x \in D(f)).$$

- (ii) Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist für alle Zahlen  $c \in \mathbb{R}$  auch die Funktion  $F_1$ , definiert durch

$$F_1(x) := F(x) + c \quad (x \in D(f))$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

*Beweis*

- (i) folgt aus  $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = 0$  und der Tatsache, daß sich zwei Funktionen mit gleicher Ableitung nur um eine konstante Funktion unterscheiden.
- (ii) folgt durch Differentiation unter Beachtung von  $D(F_1) = D(F) = D(f)$ .

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion  $f$ , also das unbestimmte Integral  $\int f(x) dx$ , läßt sich auch mit Hilfe einer Äquivalenzrelation charakterisieren:

**Satz 6.8**

- (i) Auf der Menge aller Funktionen ist durch

$$g \sim h \iff \begin{cases} D(g) = D(h) \\ \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D(g)} g(x) = h(x) + c \end{cases}$$

eine Äquivalenzrelation erklärt; die zugehörigen Äquivalenzklassen seien mit  $[\cdot]$  bezeichnet.

- (ii) Sei  $f$  eine Funktion mit einem Intervall als Definitionsbereich und gelte  $\int f(x) dx \neq \emptyset$ . Dann gilt für eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ :

$$\int f(x) dx = [F].$$

*Beweis*

- (i) Übung.
- (ii) Nach dem letzten Satz und der Definition von „ $\sim$ “ ist

$$\int f(x) dx = \left\{ F_1 : \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D(f)} F_1(x) = F(x) + c \right\} = [F].$$

**Bemerkung**

- (i) Statt  $[F]$  schreibt man üblicherweise  $F(x) + c$  mit nicht quantifiziertem  $c$ , weshalb die Schreibweise auch gefährlich ist; z.B.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R}),$$

was dann zu lesen ist:

- die durch  $F(x) := \frac{x^3}{3}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) definierte Funktion  $F$  ist *eine* Stammfunktion zu  $f(x) := x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )     oder
- die Menge aller Stammfunktionen zu  $f(x) := x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist gegeben durch

$$F_c(x) := \frac{x^3}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

- (ii) Aus den Gleichungen

$$\int f(x) dx = F_1(x) \quad , \quad \int f(x) dx = F_2(x)$$

darf man also nicht auf  $F_1 = F_2$  schließen sondern lediglich darauf, daß sich  $F_1$  und  $F_2$  nur um eine additive Konstante unterscheiden.

- (iii)  $\int f(x) dx$  bedeutet eine Menge von Funktionen,  $\int_a^b f(x) dx$  bedeutet eine Zahl.
- (iv) Jede Differentiationsformel liefert sofort eine Integrationsformel, also eine Vorschrift zur Bestimmung einer Stammfunktion.

Die Schreibweisen des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  und des unbestimmten Integrals  $\int f(x) dx$  suggerieren, daß das eine etwas mit dem anderen zu tun hat. Diese Vermutung ist wahr, und sie wird im folgenden Abschnitt untersucht.

### 6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zur Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung werden zwei vorbereitende Sätze benötigt.

**Satz 6.9**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\mathcal{I} := [a, b]$  und die Funktion  $f$  über  $\mathcal{I}$  Riemann-integrierbar; insbesondere ist  $f$  also beschränkt.

### 6.3. HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG 21

Die beiden Funktionen  $F$  und  $G$ , definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad , \quad G(x) := \int_x^b f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

sind stetig.

In Worten:

Für eine integrierbare Funktion  $f$  ist das Integral eine stetige Funktion der oberen - und der unteren Grenze.

*Beweis*

Seien  $x, \xi \in \mathcal{I}$ . Dann folgt unter Berücksichtigung der Beschränktheit von  $f$  auf  $\mathcal{I}$  ( $f(x) \leq M$  ( $x \in \mathcal{I}$ )):

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\xi)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^\xi f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f(t) dt + \int_\xi^a f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_\xi^x f(t) dt \right| \\ (\text{Satz 6.6 (vi), (vii)}) &\leq \left| \int_\xi^x |f(t)| dt \right| \leq M \cdot \left| \int_\xi^x dt \right| \leq M \cdot |x - \xi|. \end{aligned}$$

Analog für  $G$ .

Über das Bisherige hinaus wird jetzt die Stetigkeit von  $f$  in  $\mathcal{I}$  vorausgesetzt:

#### **Satz 6.10**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\mathcal{I} := [a, b]$  und die Funktion  $f$  in  $\mathcal{I}$  stetig.

Die beiden Funktionen  $F$  und  $G$  des letzten Satzes sind im Intervall  $\mathcal{I}$  differenzierbar, und es gilt

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x) = -\frac{dG}{dx}(x) \quad (x \in [a, b]).$$

In Worten:

Für eine stetige Funktion  $f$  ist das Integral eine differenzierbare Funktion der oberen - und der unteren Grenze.

*Beweis*

Seien  $x, \xi \in \mathcal{I}$ . Dann folgt für den Differenzenquotienten von  $F$ :

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} &= \frac{1}{x - \xi} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^\xi f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - \xi} \left( \int_a^x f(t) dt + \int_\xi^a f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - \xi} \int_\xi^x f(t) dt \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{x - \xi} \cdot f[\xi + \theta(x - \xi)] \cdot \int_\xi^x dt \\ &\stackrel{(**)}{=} f[\xi + \theta(x - \xi)] \end{aligned}$$

mit einem geeigneten  $\theta \in (0, 1)$ . An der Stelle  $(*)$  wurde dabei der 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 6.12) angewandt: Ist der Integrand stetig, so darf er an einer „Zwischenstelle“ aus dem Integral herausgezogen werden; an der Stelle  $(**)$  vgl. Beispiel 6.1 (i).

Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  in  $\mathcal{I}$  hat der Differenzenquotient von  $F$  für  $x \rightarrow \xi$  den Grenzwert  $f(\xi)$ :

$$F'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = f(\xi).$$

Analog zeigt man die Behauptung für die Funktion  $G$ .

Ist die (stetige) Funktion  $f$  positiv, so stellt  $F(x)$  anschaulich einen Flächeninhalt dar, s. Abb. 6.13.

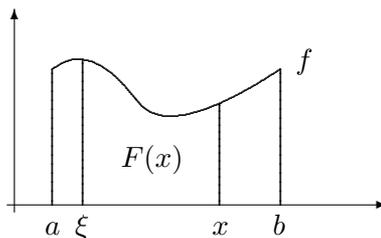


Abbildung 6.13: Fläche unterhalb des Graphen von  $f$  zwischen  $\xi$  und  $x$

Der letzte Satz liefert das folgende

**Korollar**

Eine in einem Intervall stetige Funktion  $f$  besitzt dort eine Stammfunktion, z.B. für  $a \in \mathcal{I}$ :

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

**Bemerkung**

Nicht unbedingt jede Stammfunktion von  $f$  läßt sich in obiger Form mit einem geeigneten  $a \in \mathcal{I}$  darstellen. Es gestatten genau diejenigen Stammfunktionen eine solche Darstellung, die im Intervall  $\mathcal{I}$  die Nullstelle  $a$  besitzen.

**Beispiel**

$$F(x) := \frac{x^2}{2} + 1 \text{ ist eine Stammfunktion von } f(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

besitzt aber nirgendwo eine Nullstelle, insbesondere nicht im Intervall  $\mathcal{I}$ . Folglich ist, cf. Beispiel 6.2:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x t dt = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \neq \frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Der folgende Satz heißt deshalb „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“, weil er zwei scheinbar ganz verschiedene Konzepte der Analysis miteinander verknüpft:

- Das Konzept der Stammfunktion, also ein Problem der Differentialrechnung
- Das Problem der Flächenberechnung, also ein Problem der Integralrechnung

Im Falle eines stetigen Integranden läßt sich das Problem der Berechnung eines Flächeninhaltes durch „rückwärtiges“ Differenzieren („Aufleiten“) lösen:

**Satz 6.11** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Seien  $\mathcal{I}$  ein Intervall und  $f$  stetig auf  $\mathcal{I}$ . Seien  $a, b \in \mathcal{I}$  und  $F$  irgendeine (nach dem Korollar auf p. 22 existierende) Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (6.1)$$

**Bemerkung**

- (i) Der besondere Wert des Hauptsatzes liegt darin, daß mit ihm die Berechnung bestimmter Integrale von stetigen Funktionen (Arbeit, Flächen) auf das Auffinden von Stammfunktionen zurückgeführt ist. Stammfunktionen einer großen Anzahl elementarer Funktionen kennt man jedoch bereits: man braucht nur die entsprechenden Ableitungsformeln in der anderen Richtung zu lesen.

(ii) Für  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  ist

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (x \in [a, b]),$$

d.h. erst integrieren, dann differenzieren reproduziert eine stetige Funktion  $f$ .

Für  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  ist

$$\int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt = f(x) - f(a) \quad (x \in [a, b]),$$

d.h. erst differenzieren, dann integrieren liefert im Fall einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  den Ausdruck  $f(x) - f(a)$ .

In *diesem* Sinne ist das Integrieren (= Aufsuchen von Stammfunktionen) die Umkehrung des Differenzierens.

(iii) Für die rechte Seite der Aussage des Hauptsatzes ist die Abkürzung  $[F(x)]_a^b$  in Gebrauch oder auch  $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ , wenn Irrtümer bzgl. der unabhängigen Variable zu befürchten sind. Mit dieser Schreibweise lautet die Aussage des Hauptsatzes

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b. \tag{6.2}$$

Der Beweis des weittragenden Hauptsatzes ist überraschend einfach:

*Beweis* (von Satz 6.11)

(a) Für die nach dem Korollar auf p. 22 existierende spezielle Stammfunktion

$$F_0(x) := \int_a^x f(t) dt \text{ gilt}$$

$$F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

(b) Jede andere Stammfunktion  $F$  hat die Gestalt

$$F(x) = F_0(x) + c \quad (x \in \mathcal{I}, c \in \mathbb{R} \text{ geeignet}),$$

so daß die Behauptung ebenso einfach folgt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F_0(b) + c - [F_0(a) + c] \\ &= F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

### Bemerkung

Die stereotyp hingeschriebene Integrationskonstante  $c$  wird in Zukunft oft weggelassen bzw. erst bei Bedarf hinzugefügt; bei der Anwendung des Hauptsatzes hebt sie sich ohnehin weg.

Wichtig ist die Integrationskonstante jedoch in folgendem Zusammenhang: der Begriff der Stammfunktion ist ein Begriff der Differentialrechnung, erst durch den Hauptsatz wird er zur Integralrechnung in Beziehung gesetzt. Das Problem, Stammfunktionen zu bestimmen (= „unbestimmt zu integrieren“) und die auftretenden Integrationskonstanten dann anhand der auftretenden Anfangs- und Randbedingungen anzupassen, tritt beispielsweise beim Lösen von Differentialgleichungen auf.

### Beispiel 6.6

Für den freien Fall ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes gilt für den Weg  $s(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  die Differentialgleichung

$$\ddot{s}(t) = g \quad (t \geq 0, g : \text{Fallbeschleunigung}).$$

Zweimalige Integration dieser Gleichung nach  $t$  liefert

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \int \frac{d\dot{s}}{dt}(t) dt = \int g dt = g \cdot t + c_1 \\ s(t) &= \int \frac{ds}{dt}(t) dt = \int (gt + c_1) dt = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten erkennt man, wenn man in  $s$  und  $\dot{s}$  die Anfangsbedingung einsetzt, s. Abb 6.14.

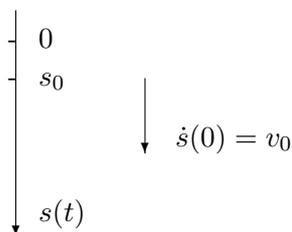


Abbildung 6.14: Freier Fall vom Ort  $s_0$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$

$$t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} s(0) = s_0 \\ \dot{s}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \quad (t \geq 0)$$

**Bemerkung**

Es sei nochmals betont, daß

- die Existenz des Riemann-Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  und
- die Existenz einer Stammfunktion  $F \in \int f(x) dx$

begrifflich zwei völlig verschiedene Dinge sind und sorgfältig auseinandergehalten werden müssen. Für stetige Funktionen schafft der Hauptsatz eine Verbindung, jedoch kann bei nicht stetigen Funktionen alles Mögliche passieren:

**Beispiele 6.7**

- (i) Beispiel einer Riemann-integrierbaren Funktion, zu der keine Stammfunktion existiert:

$$f(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x \in [-1, 0) \\ 1 & , \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Daß  $f$  keine Stammfunktion besitzt, folgt etwa aus dem Zwischenwertsatz für Ableitungen.

- (ii) Beispiel einer auf  $[-1, 1]$  differenzierbaren Funktion  $F$ , deren Ableitung unbeschränkt, also nicht R-integrierbar ist:

$$F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

**6.4 Explizit berechenbare Integrale - Integrationsmethoden**

Für stetige Funktionen  $f$  bekommt man durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.11) ein weittragendes Mittel in die Hand, ein bestimmtes Integral zu berechnen:

Sind  $a < b$ ,  $f \in C^0([a, b])$ , dann ist

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

Nun ist es nicht möglich, für alle stetigen Funktionen eine Stammfunktion in geschlossener Form anzugeben. Beispielsweise läßt sich zeigen, daß  $\int e^{x^2} dx$  keine „elementare“ Funktion ist, d.h. es ist nicht möglich, dieses Integral durch eine endliche Anzahl der Operationen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ ,  $\ln$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\sqrt{\quad}$  etc. auszudrücken.

**Definition 6.7**

Das Integral  $\int_a^x f(x) dx$  heißt *explizit berechenbar*, falls man es durch einen Term angeben kann, in welchem kein Integralzeichen mehr vorkommt.

Dabei gelten hier  $\ln$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  als Terme, obwohl man strenggenommen auch zum Berechnen von  $e^x$  einen Grenzwert bestimmen muß:

$$\text{entweder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

**6.4.1 Grundintegrale**

In den Tabellen 6.1 und 6.2 sind einige „Grundintegrale“ aufgeführt. Man beweist die dort gemachten Aussagen jeweils durch Differentiation der angegebenen Stammfunktion.

**Bemerkung**

Die beiden nachstehend aufgeführten Ergebnisse sind Folgerungen aus allgemeinen Sätzen über *Turing-Maschinen*, die der Engländer Alan Mathison Turing (1912 - 1954) als theoretische Hilfe 1936 in die mathematische Logik eingeführt hat, um damit den Begriff des Algorithmus’ streng fassen zu können:

- Es gibt kein allgemeingültiges Verfahren, mit dessen Hilfe man für eine elementare Funktion  $f$  feststellen kann, ob  $\int f(x) dx$  wieder elementar ist oder nicht.
- Es gibt keinen Algorithmus, d.h. kein mit einer endlichen Abfolge von Schritten angebbares Verfahren, das für zwei beliebige elementare Funktionen  $f$  und  $g$  festzustellen gestattet, ob  $f = g$  gilt; Beispiel:

$$f(x) := \sin^2 x \quad , \quad g(x) := 1 - \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**6.4.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige (!) Funktion und  $\mathcal{Z} := \{x_0, \dots, x_n\}$  eine äquidistante Zerlegung von  $[a, b]$  mit der Schrittweite  $h := \frac{b-a}{n}$ . Dann wird man den arithmetischen Mittelwert der  $n$  Funktionswerte  $f(x_1), \dots, f(x_n)$ , also die Zahl

$$\mu_n(f) := \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot h \tag{6.3}$$

Funktionsklasse	Funktion $f$	Stammfunktion $F$	$D(F)$
Potenzfunktionen	$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\mathbb{R}$
		$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in -\mathbb{N} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
		$\ln x  + C \quad (n = -1)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponentialfunktionen	$e^x$	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
	$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbb{R}$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$x \cdot (\ln x - 1) + C$	$(0, \infty)$
	$\log_a x$	$x \cdot (\log_a x - \ln a) + C$	$(0, \infty)$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
	$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$
	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq k\pi$
Arkusfunktionen	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$(-1, 1)$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$	$\mathbb{R}$

Tabelle 6.1: Stammfunktionen elementarer Funktionen

Funktionsklasse	Funktion $f$	Stammfunktion $F$	$D(F)$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x + C$	$\mathbb{R}$
	$\cosh x$	$\sinh x + C$	$\mathbb{R}$
	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x + C$	$\mathbb{R}$
	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{coth} x + C$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Areafunktionen	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\operatorname{arsinh} x + C$	$\mathbb{R}$
	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\operatorname{arcosh} x + C$	$(x > 1)$
	$\frac{1}{1 - x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 & , \quad  x  < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 & , \quad  x  > 1 \end{cases}$	$( x  \neq 1)$

Tabelle 6.2: Stammfunktionen elementarer Funktionen

als einen „mittleren“ Wert der Funktion  $f$  ansehen können – jedenfalls dann, wenn  $n$  hinreichend groß ist und  $f$  nicht zu sehr schwankt; beispielsweise verfährt man so bei der Bestimmung der mittleren Tagestemperatur.

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  integrierbar, so kann man sich von den Möglichkeiten der willkürlichen Wahl von  $n$  und der unklaren Forderung,  $f$  möge nicht zu stark schwanken, befreien. Die rechte Seite von (6.3) ist eine Riemann'sche Summe für das Integral

$$\mu(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.4)$$

Man nennt daher  $\mu(f)$  den (*linearen* oder *arithmetischen*) *Mittelwert* der Funktion  $f$  auf  $[a, b]$ . Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, da für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\inf_{[a,b]} f(x) \leq \mu_n(f) \leq \sup_{[a,b]} f(x)$$

gilt (Satz 6.6.(vi)), im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  dann also auch für  $\mu(f)$ .

**Satz 6.12** (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f \in R([a, b])$ . Dann existiert eine Zahl  $\mu \in [\inf_{[a,b]} f(x), \sup_{[a,b]} f(x)]$ , nämlich der

Mittelwert  $\mu(f)$  von  $f$ , so daß gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a).$$

Ist  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , so wird ein Mittelwert „angenommen“, d.h. es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $\mu = f(\xi)$ .

*Beweis*

Aufgrund von (6.4) und der nachfolgenden Bemerkung ist nur noch die letzte Aussage zu beweisen, und diese folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Für eine auf dem Intervall  $[a, b]$  positive Funktion  $f$  besagt dieser Satz, daß die Fläche unter der Kurve für eine geeignete Zahl  $\xi \in (a, b)$  gleich dem Inhalt des Rechteckes mit den Seiten  $(b - a)$  und  $f(\xi)$  ist, s. Abb. 6.15.

Die Aussage des Satzes, den Zwischenwert  $f(\xi)$  betreffend, wird falsch, wenn  $f$  nur noch als integrierbar, nicht aber mehr als stetig vorausgesetzt wird, s. Abb. 6.16.

Neben dem linearen - ist auch noch der sog. *quadratische Mittelwert* von Bedeutung.

**Definition 6.8**

Seien  $\mathcal{I} := [a, b]$  und  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  (Nach Satz 6.6 (iii) gilt damit automatisch  $f^2 \in \mathcal{R}([a, b])$ ).

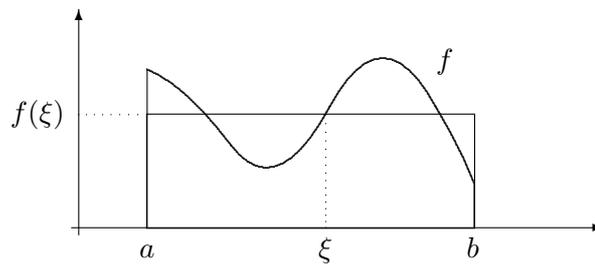


Abbildung 6.15: Mittelwertsatz der Integralrechnung für eine stetige Funktion

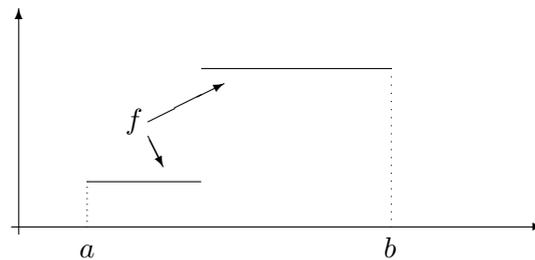


Abbildung 6.16: Unstetige Funktion

$$(i) \quad \bar{f}_1 := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{heißt linearer Mittelwert (s. (6.4))}$$

$$(ii) \quad \bar{f}_2 := \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx} \quad \text{heißt quadratischer Mittelwert}$$

oder *Effektivwert*

der Funktion  $f$  im Intervall  $\mathcal{I}$ .

#### 6.4.2.1 Beispiele aus der Wechselstromtechnik

Fließt durch ein Meßinstrument ein zeitlich veränderlicher Strom  $i(\cdot)$ , dessen Frequenz wesentlich höher ist als die Eigenfrequenz des Meßinstrumentes, so zeigt dieses aufgrund seiner Trägheit nur einen zeitlich konstanten Wert an.

Entsprechendes gilt auch, wenn man das Meßinstrument als Spannungsmeißinstrument benutzt. Sinngemäß gelten die folgenden Beispiele daher auch für eine Spannung  $u(\cdot)$ .

##### Beispiel 6.8 (Drehspulgalvanometer; linearer Mittelwert)

Bei einem Drehspulgalvanometer ist der Ausschlag dem Strom proportional. Daher beträgt der Mittelwert ( $T$  : Periode,  $\omega T = 2\pi$ ):

$$\bar{i}_{gal} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt.$$

Für einen sinusförmigen Strom  $i(t) := \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi)$  erhält man daher für eine volle Periode  $T$ :

$$\overline{i_{gal}} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi) dt = -\frac{\hat{i}}{\omega T} [\cos(\omega t + \phi)]_0^T = 0.$$

Dieser Mittelwert ist nicht sehr aussagekräftig, da der Strom in der zweiten Halbperiode ein negatives Vorzeichen hat. Ja, ohne einen vorgeschalteten Gleichrichter kann solch ein Strom zu einer Zerstörung des Meßinstrumentes führen.

Hier wird daher eine Zweiweg-Gleichrichtung angenommen und der Mittelwert nur über eine halbe Periode betrachtet, also der Mittelwert der gleichgerichteten Funktion berechnet, s. Abb. 6.17.

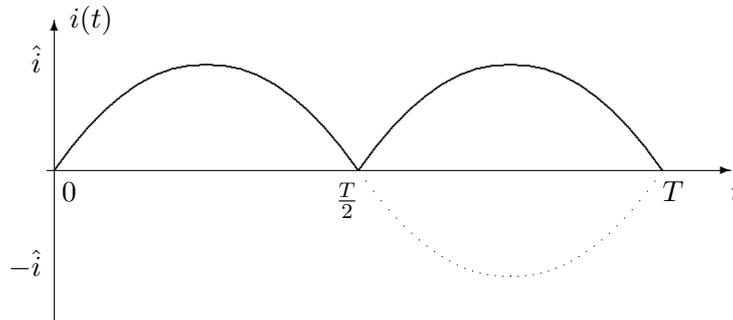


Abbildung 6.17: Zweiweg-gleichgerichtete Sinus-Funktion im Intervall  $[0, T]$

$$\begin{aligned} \overline{i_{gal}} &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i(t) dt &= \frac{2\hat{i}}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega t + \phi) dt \\ &= -\frac{2\hat{i}}{\omega T} [\cos(\omega t + \phi)]_0^{T/2} &= -\frac{2\hat{i}}{\omega T} \left( \cos\left(\frac{\omega T}{2} + \phi\right) - \cos \phi \right) \\ &= -\frac{2\hat{i}}{\omega T} (\cos(\pi + \phi) - \cos \phi) &= -\frac{2\hat{i}}{\omega T} (-\cos \phi - \cos \phi) \\ &\stackrel{(\omega T=2\pi)}{=} \frac{2\hat{i}}{\pi} \cos \phi &\stackrel{(\phi:=0)}{=} \frac{2}{\pi} \hat{i} = 0,637 \hat{i} \end{aligned} \tag{6.5}$$

**Beispiel 6.9** (Dreheisenmeßwerk; quadratischer Mittelwert)

Ein *Dreheisenmeßwerk* dient zur Anzeige von Strömen, indem es diese in einen der Stromstärke entsprechenden Zeigerausschlag umwandelt. Innerhalb einer Spule des Meßwerkes befinden sich ein fester - und ein an der Zeigerachse befestigter und mit ihr beweglicher Eisenkern. Fließt ein Strom durch die Spule,

so werden beide Eisen gleichsinnig magnetisiert, stoßen sich daher ab, bewegen sich gegeneinander und bringen dadurch den Zeiger zum Ausschlag. Da die beiden Eisenkerne unabhängig von der Polung immer gleichsinnig magnetisiert werden und sich demzufolge abstoßen, eignet sich dieses Meßwerk zur Anzeige sowohl von Gleichstrom als auch von Wechselstrom.

Die den Ausschlag erzeugende Kraft ist hier proportional zum Quadrat des Stromes, also zur effektiven Stromstärke. Deshalb wird bei der negativen Halbwelle auch kein Gleichrichter wie beim Drehspulmeßwerk benötigt; weiterhin ist deswegen auch die Skala nicht linear.

Der Effektivwert des Stromes ist gegeben durch den quadratischen Mittelwert über eine Periode:

$$I := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}.$$

Für einen sinusförmigen Wechselstrom

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0)$$

erhält man den Effektivwert

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt = \frac{\hat{i}^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\hat{i}^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega t + \phi)] dt \\ &= \frac{\hat{i}^2}{2T} \left[ t - \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t + \phi) \right]_0^T \\ &= \frac{\hat{i}^2}{2T} \cdot T = \frac{\hat{i}^2}{2} \end{aligned}$$

unter Beachtung von  $\omega T = 2\pi$  und bei (\*) von der für alle  $x \in \mathbb{R}$  gültigen Formel

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) - \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Zwischen Effektivwert  $I$  und Scheitelwert  $\hat{i}$  besteht daher die Beziehung

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}.$$

**Aufgabe**

Man stelle die beiden Funktionen

$$i(t) := \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad \text{und} \quad i^2(t) = \hat{i}^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0)$$

graphisch dar.

**Definition 6.9**

Für  $t \geq 0$  heißt

(i)  $P(t) := u(t) \cdot i(t) \quad (t \geq 0) \quad \text{Momentanleistung,}$

(ii)  $P := \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad \text{mittlere Leistung oder Leistung schlechthin.}$

**Beispiel 6.10** (Leistung des Wechselstromes; linearer Mittelwert)

Eine kosinusförmige Wechselspannung  $u(t) := \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \phi_u)$  erzeugt einen kosinusförmigen Wechselstrom  $i(t) := \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \phi_i)$  für  $t \geq 0$ . O.B.d.A. wird  $\phi_i := 0$  gesetzt.

Für die mittlere Leistung ergibt sich der Wert

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{\hat{u} \hat{i}}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi_u) \cos \omega t dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\hat{u} \hat{i}}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \phi_u) + \cos \phi_u] dt \\ &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2T} \left[ \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \phi_u) + \cos \phi_u \cdot t \right]_0^T \\ &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2T} \cos \phi_u \cdot T = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \cos \phi_u \\ &= U \cdot I \cdot \cos \phi_u \end{aligned}$$

unter Beachtung von  $\omega T = 2\pi$  und bei (\*) von der für alle  $x \in \mathbb{R}$  gültigen Formel

$$\begin{aligned} \cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) \\ &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 + \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 \\ &= \cos x_1 \cos x_2. \end{aligned}$$

Die Größe  $\cos \phi_u$  heißt *Leistungsfaktor*.

### Aufgabe

Man bestimme den Effektivwert  $U$  der durch den Graphen der Funktion aus Abb. 6.18 definierten Spannung.

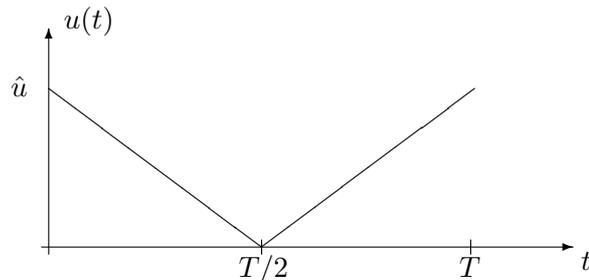


Abbildung 6.18: Effektivwert einer Dreiecksspannung

### Lösung

Der Effektivwert ist gegeben durch die Beziehung

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt},$$

daher folgt:

$$\begin{aligned} T U^2 &= \int_0^T u(t)^2 dt &&= 2 \int_0^{T/2} u(t)^2 dt \\ &= 2 \int_0^{T/2} \left[ \hat{u} \left( 1 - \frac{2}{T} t \right) \right]^2 dt &&= 2 \hat{u}^2 \int_0^{T/2} \left( 1 - \frac{2}{T} t \right)^2 dt \\ &= 2 \hat{u}^2 \left( -\frac{T}{6} \right) \left[ \left( 1 - \frac{2}{T} t \right)^3 \right]_0^{T/2} &&= \hat{u}^2 \cdot \frac{T}{3} \\ \longrightarrow & && U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \hat{u}. \end{aligned}$$

### 6.4.3 Partielle Integration

Die *partielle Integration* oder *Produktintegration* ist eine der beiden Standard-Methoden zur Auswertung eines bestimmten oder unbestimmten Integrals; sie ist die integralrechnerische Interpretation der Produktregel der Differentialrechnung.

Sind  $f$  und  $g$  zwei auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig differenzierbare Funktionen, so folgt nach der Produktregel der Differentialrechnung für  $x \in [a, b]$ :

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

und daraus durch Übergang zur Stammfunktion

$$\int \frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] dx = f(x) \cdot g(x) = \int [f'(x) \cdot g(x)] dx + \int [f(x) \cdot g'(x)] dx.$$

Das ist schon die Formel für die partielle Integration unbestimmter Integrale:

**Satz 6.13**

Seien  $a < b$  und  $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int [f'(x) \cdot g(x)] dx &= f(x) \cdot g(x) - \int [f(x) \cdot g'(x)] dx \\ \int_a^b [f'(x) \cdot g(x)] dx &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \cdot g'(x)] dx \end{aligned}$$

(6.6)

**Bemerkung**

Bei der ersten Formel handelt es sich um die Gleichheit von unbestimmten Integralen, also um die Gleichheit von *Mengen* von Funktionen, nicht um die von einzelnen Funktionen selbst.

**Beispiele 6.11**

(i) Unbestimmtes Integral:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C \quad (x > 0) \end{aligned}$$

(ii) Bestimmtes Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx &= \int_0^1 x^2 \cdot (e^x)' dx \\ &= x^2 \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2x \cdot e^x dx \\ &= e - \int_0^1 2x \cdot e^x dx \\ &= e - \int_0^1 2x \cdot (e^x)' dx \\ &= e - \left( 2x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \cdot e^x dx \right) \\ &= e - 2e + 2e^x \Big|_0^1 \\ &= e - 2e + 2e - 2 \\ &= e - 2\end{aligned}$$

(iii) Bestimmtes Integral (Abb. 6.19):

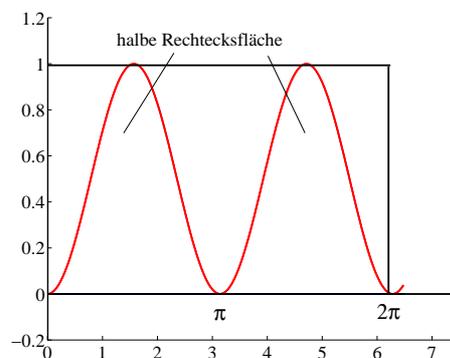


Abbildung 6.19:  $f(x) = \sin^2 x$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin x \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin x \cdot (-\cos)' x \, dx \\
 &= [\sin x \cdot (-\cos x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\sin)' x \cdot (-\cos x) \, dx \\
 &= 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 x) \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 \, dx - \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \\
 &= 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \\
 \longrightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi
 \end{aligned}$$

(iv) Unbestimmtes Integral:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} &= \int \frac{\cot x}{\cos^2 x} dx = \int \cot x \cdot (\tan)' x \, dx \\
 &= \cot x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot (\cot)' x \, dx \\
 &= 1 + \int \frac{\tan x}{\sin^2 x} dx \\
 &= 1 + \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
 \longrightarrow 0 &= 1
 \end{aligned}$$

Wo liegt der Fehler ???

### Bemerkung

Eine Stammfunktion zu diesem Integral ist (Beispiel 6.23 mit einer Substitution)

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \ln |\tan x| + C.$$

### 6.4.3.1 Restglied der Taylor-Formel in Integralform

Als eine weitere Anwendung der partiellen Integration soll eine Darstellung des Restgliedes der Taylor'schen Formel in Integralform gegeben werden.

**Satz 6.14** (Taylor'sche Formel mit Restglied in Integralform)

Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  eine Funktion mit

$$U_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D(f).$$

$f$  sei in  $U_r(x_0)$   $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\bigwedge_{x \in U_r(x_0)} f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x)$$

mit 
$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

und 
$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt$$

(6.7)

*Beweis*

Das einzig neue an diesem Satz ist die Integraldarstellung des Restgliedes. Man beachte, daß die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit an  $f$  etwas stärker ausfällt als zuvor: hier muß auch die  $(n + 1)$ -te Ableitung von  $f$  auf  $U_r(x_0)$  noch stetig sein.

Der Beweis läuft über vollständige Induktion nach  $n$ .

(a) Für  $n = 0$  ist

$$R_0(f, x_0)(x) = \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f^{(0+1)}(t) dt = f(x) - f(x_0),$$

also

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = T_0(f, x_0)(x) + R_0(f, x_0)(x).$$

(b) Es wird nun angenommen, der Satz gelte für eine natürliche Zahl  $n \leq m$ :

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x) \quad (x \in U_r(x_0)).$$

(c) Mit Hilfe partieller Integration (nach  $t$ !) erhält man daraus

$$\begin{aligned}
 R_n(f, x_0)(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt \\
 &= \frac{1}{n!} \left[ \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^x \right. \\
 &\quad \left. - \int_{x_0}^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt \right] \\
 &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt \\
 &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(f, x_0)(x).
 \end{aligned}$$

Die Induktionsbehauptung folgt dann durch Einsetzen des zuletzt erhaltenen Ausdrucks in die Induktionsvoraussetzung.

#### 6.4.4 Integration durch Substitution

Neben der (Methode der) partiellen Integration ist die (Methode der) *Integration durch Substitution* die zweite Standard-Methode zur Berechnung eines Integrals. Sie ist die integralrechnerische Interpretation der Kettenregel der Differentialrechnung.

##### Satz 6.15

Seien  $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(W(g))$ . Dann gelten:

$$\begin{aligned}
 \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt &= \int f(x) dx \Big|_{x=g(t)} \\
 \int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t) dt &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx
 \end{aligned}$$

(6.8)

Hat also der Integrand die spezielle Bauart  $f[g(t)] \cdot g'(t)$ , so kann man eine Stammfunktion von ihm dadurch bestimmen, daß man das Integral  $\int f(x) dx$  berechnet und im Ergebnis für  $x$  wieder  $g(t)$  setzt.

**Beispiel 6.12**

Zu berechnen ist  $\int \cos(t^2) \cdot 2t dt$ . Dieses Integral ist von der obigen Form mit  $x = g(t) = t^2$  sowie  $\frac{dx}{dt} = g'(t) = 2t$ . Also ergibt sich mit Satz 6.15

$$\int \cos(t^2) \cdot 2t dt = \int \cos x dx \Big|_{x=t^2} = \sin x + C \Big|_{x=t^2} = \sin(t^2) + C$$

**Beispiel 6.13**

Auch das Integral  $\int_0^{\pi/2} \sin t e^{\cos t} dt$  ist letztendlich von der obigen Form:

$$\int_0^{\pi/2} \sin t e^{\cos t} dt = - \int_0^{\pi/2} e^{\cos t} \cdot (-\sin t) dt = - \int_{\cos 0}^{\cos \pi/2} e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

**Bemerkung**

Für die Anwendung der Substitutionsregel ist die folgende Merkregel hilfreich:

$$\text{Mit } x := g(t) \quad \text{folgt} \quad \frac{dx}{dt} = g'(t).$$

Tut man nun so, als wäre  $\frac{dx}{dt}$  ein Quotient – was es nicht ist – so erhält man  $dx = g'(t) dt$ . Die Substitutionsregel besagt dann, daß man im Integral  $\int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$  die Zeichen

$$g(t) \text{ durch } x \quad \text{und} \quad g'(t) dt \text{ durch } dx$$

ersetzen kann.

Von der Substitutionsregel gibt es zwei wichtige Spezialfälle:

1. Lineare Substitution:

$$\int f(at + b) dt = \frac{1}{a} \int f(at + b) \cdot a dt = \frac{1}{a} \int f(x) dx \Big|_{x=at+b}$$

$$(x := g(t) = at + b, \quad \frac{dx}{dt} = g'(t) = a)$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega t + \phi) dt &= \frac{1}{\omega} \int \sin(\omega t + \phi) \cdot \omega dt = \frac{1}{\omega} \int \sin x dx \Big|_{x=\omega t + \phi} \\ &= -\frac{1}{\omega} \cos x + C \Big|_{x=\omega t + \phi} = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \phi) + C \end{aligned}$$

2. Integration einer logarithmischen Ableitung:

$$\begin{aligned} \int \frac{g'(t)}{g(t)} dt &= \int \frac{1}{g(t)} \cdot g'(t) dt = \int \frac{1}{x} dx \Big|_{x=g(t)} \\ &= \ln|x| + C \Big|_{x=g(t)} = \ln|g(t)| + C \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} \int \cot t dt &= \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int \frac{1}{\sin t} \cdot (\sin)'(t) dt \\ &= \int \frac{1}{x} dx \Big|_{x=\sin t} = \ln|x| + C \Big|_{x=\sin t} = \ln|\sin t| + C \end{aligned}$$

Bei dieser Substitution ist jeweils  $f(x) = \frac{1}{x}$  mit entweder  $x < 0$  oder  $x > 0$ .

Zur Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe der Substitutionsregel muß man entweder

- (a) die Integrationsgrenzen gemäß der Formel aus Satz 6.15 transformieren oder
- (b) im Ergebnis der unbestimmten Integration für die Variable  $x$  die Funktion  $g(t)$  einsetzen und danach die „alten“ Grenzen verwenden.

**Beispiel 6.14**

$$I := \int_0^{\pi/8} \cos(4t) dt \quad , \quad x := g(t) := 4t$$

$$(a) \quad I := \frac{1}{4} \int_0^{\pi/8} \cos(4t) \cdot 4 dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{1}{4} [\sin x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad I &:= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/8} \cos(4t) \cdot 4 dt = \left[ \frac{1}{4} \int \cos x dx \Big|_{x=4t} \right]_0^{\pi/8} \\ &= \left[ \frac{1}{4} \sin x + C \Big|_{x=4t} \right]_0^{\pi/8} = \left[ \frac{1}{4} \sin 4t + C \right]_0^{\pi/8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

*Beweis der Substitutionsregel* (Satz 6.15)

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , es gelte also

$$D(F) = D(f) \quad , \quad F(x) = \int f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad F'(x) = f(x) \quad (x \in D(f)).$$

Substituiert man nun mit Hilfe einer stetig differenzierbaren Funktion  $x = g(t)$ , d.h. drückt man die „alte“ Variable  $x$  als Funktion der „neuen“ Variable  $t$  aus, so ergibt sich mit der Kettenregel für  $x = g(t) \in D(f)$ :

$$\frac{d}{dt}(F \circ g)(t) = (F \circ g)'(t) = F'[g(t)] \cdot g'(t) = f[g(t)] \cdot g'(t). \quad (6.9)$$

Somit ist die Funktion  $(F \circ g)$  eine Stammfunktion der (stetigen) Funktion  $(f \circ g) \cdot g'$ .

Im den unbestimmten Fall folgt aus der Integration der Gleichung (6.9):

$$\begin{aligned} \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt &= \int (F \circ g)'(t) dt \\ &= (F \circ g)(t) \\ &= F[g(t)] \\ &= F(x) \Big|_{x=g(t)} \\ &= \int f(x) dx \Big|_{x=g(t)}. \end{aligned}$$

Das ist der Beweis der Substitutionsregel für unbestimmte Integrale. Im bestimmten Fall folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.11):

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t) dt &= \int_a^b (F \circ g)'(t) dt \\ &= \left[ (F \circ g) \right]_a^b \\ &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \\ &= F[g(b)] - F[g(a)] \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Bisher wurde durch Anwendung der Substitutionsregel ein Integral der Form

$$\int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

auf das Integral

$$\int f(x) dx$$

zurückgeführt. Diese Vorgehensweise funktioniert allerdings nur dann, wenn ein Integral auch in der ersten Form vorliegt, zumindest aber durch eine leichte Manipulation – etwa Erweitern mit einer Zahl – auf eine solche gebracht werden kann. Und das ist mehr oder weniger Zufall.

Die eigentliche Stärke der Substitutionsregel liegt in der umgekehrten Art ihrer Benutzung. Es sei betont, daß es sich nach wie vor um dieselbe Substitutionsregel handelt – es gibt nur eine – lediglich die Art und Weise ihrer Anwendung ändert sich und zwar dahingehend, daß nun ein Integral der Form

$$\int f(x) dx$$

vorliegt, welches man durch die Substitution  $x := g(t)$  auf das Integral

$$\int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

zurückführt.

Vorteil: Die Art der Substitutionsfunktion ist weitgehend frei wählbar.

Nachteil: Bei der Substitutionsfunktion hat man dafür die Qual der Wahl.

Dennoch zeigt sich bei dieser Art der Benutzung der Substitutionsformel ihre eigentliche Stärke. Als zusätzliche Voraussetzung muß jedoch die Substitutionsfunktion  $x := g(t)$  umkehrbar sein, damit man

(a) im unbestimmten Fall:

mit Hilfe der gefundenen Stammfunktion  $\Phi$  von  $(f \circ g) \cdot g'$  durch die Setzung  $t = g^{-1}(x)$  zu einer Stammfunktion  $F$  von  $f$  gelangt:

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \Phi(t) \Big|_{t=g^{-1}(x)} =: F(x);$$

(b) im bestimmten Fall:

die Grenzen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $\int_{\alpha}^{\beta}$  mit Hilfe der inversen Funktion  $t = g^{-1}(x)$  auf die neuen Grenzen transformieren kann:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f[g(t)] \cdot g'(t) dt.$$

Im folgenden Satz sind die Voraussetzungen etwas schärfer formuliert als notwendig, für die meisten Fälle ist das jedoch ausreichend.

**Satz 6.16**

$\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}_0$  seien Intervalle, und es mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:

- (i)  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}_0)$
- (ii)  $g'(t) \neq 0 \quad (t \in \mathcal{I}_0)$
- (iii)  $g(\mathcal{I}_0) = \mathcal{I}$
- (iv) Eine (unter diesen Voraussetzungen existierende) Stammfunktion von  $(f \circ g) \cdot g'$  auf dem Intervall  $\mathcal{I}_0$  sei die Funktion  $\Phi$ .

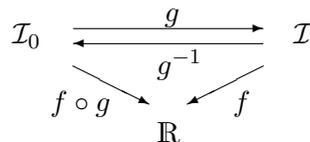


Abbildung 6.20: Darstellung der Komposition von  $g$  und  $f$

Dann gilt:

- (i)  $g^{-1}$  existiert auf  $\mathcal{I}$ ,  $g^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$
- (ii)  $F := \Phi \circ g^{-1}$  ist eine Stammfunktion von  $f$ , d.h. es gilt für alle  $x \in \mathcal{I}$ :

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \Phi(t) \Big|_{t=g^{-1}(x)} =: F(x).$$

### Frage

Aus welcher der Voraussetzungen folgt die Existenz von  $g^{-1}$ ? Ist die Voraussetzung auch notwendig?

### Antwort

Das Nicht-Verschwinden der Ableitung von  $g$  garantiert die strenge Monotonie und damit die Umkehrbarkeit. Zur Umkehrbarkeit von  $g$  allein ist  $g'(t) \neq 0$  ( $t \in \mathcal{I}_0$ ) zwar nicht notwendig (Beispiel:  $g(t) = t^3$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist global umkehrbar). Jedoch ist diese Voraussetzung notwendig, wenn man von  $g^{-1}$  nicht nur die Existenz, sondern auch die Differenzierbarkeit haben will.

### Beispiel 6.15

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \in (1, \infty))$$

Substitution:  $x := g(t) := \cosh t$  ,  $\frac{dx}{dt} = g'(t) = \sinh t$

$g$  ist auf  $[0, \infty)$  streng monoton wachsend, und es ist  $g'(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, \infty)$ .  
Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} \cdot \sinh t dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \\
 &= \int \frac{\sinh t}{\sinh t} dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \\
 &= t + C \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \operatorname{arcosh} x + C
 \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Bei dieser Methode hat man eine weitgehende Freiheit (mit allen Vor- und Nachteilen!) in der Wahl der Substitutionsfunktion. Das Mitführen des Ausdruckes „ $dx$ “ im Integral erlaubt die folgende mechanische Anwendung der Substitutionsregel:

(i) Im Integral  $\int f(x) dx$  setze man

$$x := g(t) \quad , \quad dx := g'(t) dt$$

und werte das so entstehende Integral

$$\int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

aus.

(ii) Im Ergebnis ersetze man dann  $t$  durch  $g^{-1}(x)$  bzw. transformiere die Grenzen des Integrals  $\int_{\alpha}^{\beta}$  mit Hilfe der Funktion  $g^{-1}$ .

**Beispiel 6.16**

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx = \int \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right] dx$$

Hier gilt  $|x| > 1$ , also entweder  $x < -1$  oder  $x > -1$ .

Aufgrund des letzten Beispiels beträgt der Wert des zweiten Integrals gleich  $\operatorname{arcosh} x + C$ . Im ersten wird

$$x := g(t) := \sinh t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = g'(t) = \cosh t$$

substituiert, und man erhält

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\cosh t}{\cosh t} dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = t + C \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \operatorname{arsinh} x + C.$$

Insgesamt erhält man für das Integral die Auswertung

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx &= \operatorname{arsinh} x - \operatorname{arcosh} x + C \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right| + C \quad (x < -1 \text{ oder } x > 1). \end{aligned}$$

Formel für die Substitution	Integrand	Substitution	$dx$
$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$	$f(x; \sqrt{x^2 - 1})$	$x = \cosh t$	$dx = \sinh t dt$
	$f(x; \sqrt{x^2 + 1})$	$x = \sinh t$	$dx = \cosh t dt$
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$	$f(x; \sqrt{1 - x^2})$	$x = \cos t$	$dx = -\sin t dt$
		oder $x = \sin t$	$dx = \cos t dt$

Tabelle 6.3: Substitutionen von Integranden mit Wurzelausdrücken

### Bemerkung

Warum führen die Substitutionen  $x = g(t) = \cosh t$  im ersten Beispiel und  $x = g(t) = \sinh t$  im zweiten Beispiel zum Erfolg? Weil dadurch die Wurzelausdrücke im Integranden beseitigt werden können! Offenbar kann man sich die Beziehung  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$  zunutze machen und damit Integranden bearbeiten, welche Wurzelausdrücke der Formen

$$\sqrt{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 - 1}$$

enthalten.

Tritt nun eine Wurzel der Form  $\sqrt{1 - x^2}$  auf, so hilft eine trigonometrische Substitution  $x = g(t) := \cos t$  oder  $x = g(t) := \sin t$  weiter. Dabei gilt die Übersicht für Substitutionen von Integranden mit quadratischen Wurzelausdrücken aus Tabelle 6.3.

### Beispiel 6.17

Tritt im Integranden ein Term der Form  $\sqrt{a^2 - x^2}$  auf, so helfen die Substitutionen (o.B.d.A. sei  $a > 0$ )

$$x := g(t) := a \cdot \sin t \quad , \quad dx = a \cdot \cos t dt$$

oder

$$x := g(t) := a \cdot \cos t \quad , \quad dx = -a \cdot \sin t dt$$

weiter;  $x = a \cdot \sin t$  etwa ist invertierbar für  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Der Integrand vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} &= a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t \\ dx &= a \cdot \cos t dt, \end{aligned}$$

und man erhält – etwa für  $\sqrt{a^2 - x^2}$  als Integranden –

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cdot \cos t \cdot a \cdot \cos t dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = a^2 \int \cos^2 t dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}.$$

Das letzte Integral läßt sich mit Produktintegration bearbeiten oder einfacher wie folgt:

$$a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] + C.$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

für  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , also  $\cos t > 0$ , folgt weiter

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Big|_{t=\arcsin \frac{x}{a}} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ t + \sin t \cos t \right] \Big|_{t=\arcsin \frac{x}{a}} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \sin \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \left( \arcsin \frac{x}{a} \right)} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Genauso gut hätte bei diesem Integral die Substitution

$$\begin{aligned} x &:= a \cdot \cos t && \iff && t = \arccos \frac{x}{a} && (t \in (0, \pi)) \\ dx &= -a \sin t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= a \sqrt{1 - \cos^2 t} = a \sin t \end{aligned}$$

zum Ziel geführt:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= -a^2 \int \sin^2 t dt \Big|_{t=\arccos \frac{x}{a}} \\ &= -\frac{a^2}{2} (t - \cos t \cdot \sin t) \Big|_{t=\arccos \frac{x}{a}} + C \\ &= -\frac{a^2}{2} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Wegen

$$\arcsin \frac{x}{a} + \arccos \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$$

sind beide Stammfunktionen bis auf eine additive Konstante gleich.

### Beispiel 6.18

Steht unter der Wurzel ein „gemischt quadratischer Ausdruck“, so führt die quadratische Ergänzung und eine leichte Modifikation der Substitution weiter:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}} dx$$

Substitution:

$$x + \frac{1}{2} := \frac{\sqrt{5}}{2} \cosh t \quad \Longleftrightarrow \quad t = \operatorname{arcosh} \frac{2}{\sqrt{5}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcosh} \frac{2x + 1}{\sqrt{5}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \sinh t dt \quad (t \geq 0)$$

Strenggenommen, müßte die Substitution eigentlich lauten:

$$x := g(t) := \frac{\sqrt{5}}{2} \cosh t - \frac{1}{2} \quad (t \geq 0)$$

$$dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \sinh t dt$$

Oft rechnet man sich daher nicht speziell aus, welcher Ausdruck  $g(t)$  denn nun für die Variable  $x$  im einzelnen substituiert wird, sondern substituiert einen ganzen von  $x$  abhängenden Ausdruck (hier:  $x + \frac{1}{2}$ ) durch eine Funktion  $g$  mit dem Ziel, den Integranden zu vereinfachen.

Man erhält

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4} \cosh^2 t - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sinh t,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 1}} dx &= \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cosh t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \sinh t} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \sinh t dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \sinh t - \frac{t}{2} \Big|_{t=g^{-1}(x)} \\ &= \sqrt{x^2 + x - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} \frac{2x + 1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.19**

Dieses Beispiel beleuchtet eine der vielen Analogien zwischen trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen.

(a) Berechnung der Fläche eines Kreissektors (Abb. 6.21)

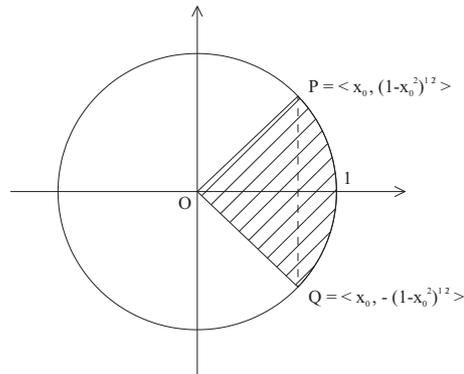


Abbildung 6.21: Fläche eines Einheitskreissektors

Zur Fläche des Dreieckes  $OPQ$  wird die doppelte Fläche zwischen den Graphen der Funktionen

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x = x_0 \quad , \quad x = 1$$

addiert. Man erhält

$$A_K = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot \sqrt{1-x_0^2} + 2 \int_{x_0}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Das letzte Integral wurde in Beispiel 6.17 schon behandelt. Die dort angegebene Substitution

$$\begin{aligned} x &:= \sin t \quad , \quad t = \arcsin x && \left( t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \\ dx &= \cos t dt \quad , \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t && \left( x \in [-1, 1] \right) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_{x_0}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin x_0 - x_0 \sqrt{1-x_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \arccos x_0 - x_0 \sqrt{1-x_0^2} \right), \end{aligned}$$

so daß man insgesamt erhält:

$$A_K = x_0 \cdot \sqrt{1 - x_0^2} + \frac{2}{2} \left( \arccos x_0 - x_0 \sqrt{1 - x_0^2} \right) = \arccos x_0. \quad (6.10)$$

(b) Berechnung der Fläche eines Hyperbelsektors (Abb. 6.22)

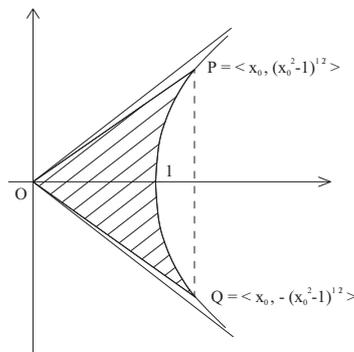


Abbildung 6.22: Fläche eines Einheitshyperbelsektors

Zur Berechnung der schraffierten Fläche wird von der Fläche des Dreiecks  $OPQ$  die doppelte Fläche zwischen den Graphen der Funktionen

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = x_0$$

subtrahiert. Man erhält

$$A_H = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1} - 2 \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Die Substitution für das letzte Integral wurde in Beispiel 6.15 schon behandelt. Die dort angegebene Substitution

$$\begin{aligned} x &:= \cosh t \quad , \quad t = \operatorname{arcosh} x && (t \in [0, \infty)) \\ dx &= \sinh t dt \quad , \quad \sqrt{x^2 - 1} = \sinh t && (x \in [1, \infty)) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned}
 \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} \, dx &= \int_0^{\operatorname{arcosh} x_0} \sinh^2 t \, dt \\
 &= \int_0^{\operatorname{arcosh} x_0} \frac{1}{2} (\cosh 2t - 1) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sinh 2t - t \right]_0^{\operatorname{arcosh} x_0} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} 2 \sinh t \cdot \cosh t - t \right]_0^{\operatorname{arcosh} x_0} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \cosh t \cdot \sqrt{\cosh^2 t - 1} - t \right]_0^{\operatorname{arcosh} x_0} \\
 &= \frac{1}{2} \left( x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1} - \operatorname{arcosh} x_0 \right),
 \end{aligned}$$

so daß man insgesamt erhält:

$$A_H = x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{2}{2} \left( x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \operatorname{arcosh} x_0 \right) = \operatorname{arcosh} x_0. \quad (6.11)$$

**Beispiel 6.20**

Das Integral  $\int \frac{dx}{4x - 8}$  soll im folgenden auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:

(i) Ausklammern eines Faktors, dann Substitution:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{4x - 8} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 2} \stackrel{\substack{(x-2=t) \\ (dx=dt)}}{=} \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=x-2} \\
 &= \frac{1}{4} \ln |t| + C \Big|_{t=x-2} = \frac{1}{4} \ln |x - 2| + C
 \end{aligned}$$

(ii) Direkte Substitution, ohne Ausklammern eines Faktors:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{4x - 8} &\stackrel{\substack{(4x-8=t) \\ (4dx=dt)}}{=} \int \frac{dt/4}{t} \Big|_{t=4x-8} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=4x-8} \\
 &= \frac{1}{4} \ln |t| + C \Big|_{t=4x-8} = \frac{1}{4} \ln |4x - 8| + C
 \end{aligned}$$

Sind beide Ergebnisse korrekt?

$x = \ln t, t > 0$	$t = e^x, x \in \mathbb{R}$
$\sinh x = \frac{t^2 - 1}{2t}$	$\cosh x = \frac{t^2 + 1}{2t}$
$dx = \frac{1}{t} dt$	

Tabelle 6.4: Substitutionen von rationalen Funktionen von  $e^x$ ,  $\sinh$  und  $\cosh$

Bei Integranden, welche rationale Funktionen von  $e^x$ ,  $e^{-x}$ ,  $\sinh x$  oder  $\cosh x$  sind, führt häufig die Substitution

$$x = g(t) = \ln t \quad , \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

zum Erfolg; dabei gelten die Formeln aus Tabelle 6.4.

Diese Formeln kommen folgendermaßen zustande:

$$\begin{aligned} e^x &= t \quad , \quad e^{-x} = \frac{1}{t} && \implies \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 - 1}{2t} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t} \\ dx &= && = \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

**Beispiel 6.21**

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{e^x}{\cosh x} dx$$

Die Substitution  $x = g(t) = \ln t$  führt zu dem Integral

$$\int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} \frac{t \cdot 2t}{t^2 + 1} \frac{dt}{t} = \int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 2t dt = \ln(t^2 + 1) \Big|_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} = \ln \left| \frac{e + 1}{\sqrt{e} + 1} \right| = \ln \frac{e + 1}{\sqrt{e} + 1}$$

Analog führen bei Integranden, welche rationale Funktionen von  $\sin x$  oder  $\cos x$  sind, häufig die Substitutionen

$$x = g(t) = \arctan t \quad \text{oder} \quad x = g(t) = 2 \arctan t$$

zum Erfolg; dabei gelten die Formeln aus Tabelle 6.5.

$x = \arctan t, \quad t \in \mathbb{R}$ $t = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$x = 2 \arctan t, \quad t \in \mathbb{R}$ $t = \tan \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)$
$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Tabelle 6.5: Substitutionen von rationalen Funktionen von sin und cos

Diese Formeln kommen folgendermaßen zustande:

$$\begin{aligned}
 x = 2 \arctan t, \quad t = \tan \frac{x}{2} & \implies \\
 \sin x = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\
 \cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
 dx &= \frac{2}{1+t^2} dt
 \end{aligned}$$

Analog für die andere Substitution.

Die nächsten beiden Beispiele behandeln in gewisser Weise schon sog. *uneigentliche Integrale*. Durch eine Einschränkung des Definitionsbereiches der auftretenden Funktionen – etwa auf das Intervall  $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$  – hätte man es dann aber doch wieder mit eigentlichen Integralen zu tun.

**Beispiel 6.22**

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$$

Die Substitution  $x = g(t) = \arctan t$  führt zu dem Integral

$$\int \frac{(1+t^2)(1+t^2)^2}{t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C,$$

wobei man sich wegen des Auftretens von  $\frac{1}{t}$  auf eines der Intervalle  $(-\infty, 0)$  oder  $(0, \infty)$  beschränken muß. Also ist

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} = -\cot x + 2 \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{oder} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

**Beispiel 6.23**

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Die Substitution  $x = g(t) = 2 \arctan t$  führt zu dem Integral

$$\int \frac{(1+t^2)}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$

$$(t \in (-\infty, 0) \quad \text{oder} \quad t \in (0, \infty)).$$

Also ist

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \quad (x \in (-\pi, 0) \quad \text{oder} \quad x \in (0, \pi)).$$

**Beispiel 6.24**

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

Auf den ersten Blick ist dieses Beispiel nicht sehr verschieden vom vorherigen. Zu seiner Lösung erfordert es jedoch einen kleinen Trick, welcher schon zum nächsten Abschnitt überleiten soll.

Die Substitution  $x = g(t) = 2 \arctan t$  führt zu dem Integral

$$\int \frac{(1+t^2)}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int \left( \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt$$

$$= \ln |1+t| - \ln |1-t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C.$$

Die in (\*) benutzte Zerlegung eines Bruches in seine Teilbrüche heißt *Partialbruchzerlegung* und wird im nächsten Abschnitt behandelt. Nach der Rücksubstitution  $t = \tan \frac{x}{2}$  erhält man für das zu berechnende Integral abschließend

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C \quad \left(\tan \frac{\pi}{4} = 1\right)$$

$$= \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{x}{2} \cdot \tan \frac{\pi}{4}} \right| + C$$

$$= \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

wobei in der letzten Gleichung das Additionstheorem für die tan-Funktion benutzt wurde.

**Bemerkung**

Hätte man vorher gewußt, daß Beispiel 6.24 so viel aufwendiger ist als Beispiel 6.23, so hätte man natürlich auch dieses erste Beispiel zu Hilfe nehmen können:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln \left| \tan \frac{(x + \frac{\pi}{2})}{2} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \quad \left( x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

**6.4.5 Integration nach Partialbruchzerlegung**

Das dritte Integrationsverfahren zur Berechnung eines Integrals wendet sich ausschließlich an eine bestimmte Klasse von Funktionen, die Klasse der rationalen Funktionen, also Funktionen der Form

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei  $p$  und  $q$  ganze rationale Funktionen (Polynome) in  $x$  sind.

O.B.d.A. darf vorausgesetzt werden, daß es sich bei der Funktion  $r$  um eine echt gebrochen rationale Funktion handelt. Wenn das etwa nicht der Fall sein sollte, dann kann eine Polynomdivision durchgeführt werden, welche  $r$  zerlegt in ein Polynom und einen echt gebrochenen Anteil. Die Integration eines Polynoms (ganze rationale Funktion) bereitet keine Schwierigkeiten. Aufgrund der Linearität des Integrals kann man sich daher auf den echt gebrochenen Anteil beschränken.

Es wird sich herausstellen, daß sich rationale Funktionen geschlossen integrieren lassen, wenn nur die Nullstellen des Nennerpolynoms bekannt sind. Behandelt werden Integrale folgender Typen, welche natürlich auch gemischt auftreten können:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{dx}{(x - 1)(x + 1)} && : \text{ einfache reelle Nullstellen} \\ \int \frac{dx}{(x - 1)^2} &= \int \frac{dx}{(x - 1)(x - 1)} && : \text{ mehrfache reelle Nullstellen} \\ \int \frac{dx}{x^2 + 1} &= \int \frac{dx}{(x - i)(x + i)} && : \text{ einfache komplexe Nullstellen} \\ \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} &= \int \frac{dx}{(x - i)^2(x + i)^2} && : \text{ mehrfache komplexe Nullstellen} \end{aligned}$$

### 6.4.5.1 Partialbruchzerlegung

Zur Erklärung des Prinzips der Partialbruchzerlegung werden zuerst zwei Brüche mit linearen Nennern addiert:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} = \frac{3(x+5) + 2(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{5x+11}{x^2+3x-10}.$$

Die Zerlegung eines gebrochen rationalen Terms

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

in sog. *Partialbrüche* ist der umgekehrte Vorgang. Dabei ist es erforderlich, die Nullstellen des Nennerpolynoms explizit zu kennen; nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist deren Existenz gesichert. Die oben aufgeführten vier Fälle sind dabei zu unterscheiden.

**Satz 6.17** (Existenz einer Partialbruchzerlegung)

Sei  $r(x) := p(x)/q(x)$  eine echt gebrochen rationale Funktion. Ihr Definitionsbereich ist ganz  $\mathbb{R}$  mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$ . Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra besitze das Nennerpolynom  $q$  die folgende Zerlegung in Linearfaktoren:

$$q(x) = C \cdot (x - x_1)^{\rho_1} \dots (x - x_r)^{\rho_r} (x^2 + A_1x + B_1)^{\sigma_1} \dots (x^2 + A_sx + B_s)^{\sigma_s},$$

wobei gilt:

$$\rho_1 + \dots + \rho_r + 2\sigma_1 + \dots + 2\sigma_s =: n =: \text{grad } q.$$

**Beh.**

$r$  besitzt eine bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutige Darstellung der Form ( $a_{ij}, \alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$  geeignet,  $x \neq x_i$ )

$$\begin{aligned} r(x) = & \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1\rho_1}}{(x - x_1)^{\rho_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{r1}}{x - x_r} + \frac{a_{r2}}{(x - x_r)^2} + \dots + \frac{a_{r\rho_r}}{(x - x_r)^{\rho_r}} \\ & + \frac{\alpha_{11}x + \beta_{11}}{x^2 + A_1x + B_1} + \frac{\alpha_{12}x + \beta_{12}}{(x^2 + A_1x + B_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1\sigma_1}x + \beta_{1\sigma_1}}{(x^2 + A_1x + B_1)^{\sigma_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{\alpha_{s1}x + \beta_{s1}}{x^2 + A_sx + B_s} + \frac{\alpha_{s2}x + \beta_{s2}}{(x^2 + A_sx + B_s)^2} + \dots + \frac{\alpha_{s\sigma_s}x + \beta_{s\sigma_s}}{(x^2 + A_sx + B_s)^{\sigma_s}} \end{aligned}$$

**Beispiel 6.25**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^9 - x^8 - 2x^5 + 2x^4 + x - 1} &= \frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2(x^2+1)^2} \\ &= \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{12}}{(x-1)^2} + \frac{a_{13}}{(x-1)^3} \\ &\quad + \frac{a_{21}}{x+2} + \frac{a_{22}}{(x+2)^2} \\ &\quad + \frac{\alpha_{11}x + \beta_{11}}{x^2+1} + \frac{\alpha_{12}x + \beta_{12}}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Nachdem die Existenz einer Partialbruchzerlegung sichergestellt ist, stellt sich die Frage, wie die unbekanntenen Koeffizienten denn nun praktisch bestimmt werden können. Dazu gibt es mehrere Methoden, welche sich untereinander auch kombinieren lassen.

Die unterschiedlichen Methoden werden anhand von Beispielen demonstriert.

(1.) Methode des Koeffizientenvergleiches:

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{5x + 11}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

Eine Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert

$$5x + 11 = A(x+5) + B(x-2) = (A+B)x + 5A - 2B$$

$$\longrightarrow (A+B-5) \cdot x + (5A-2B-11) \cdot 1 = 0.$$

Diese Beziehung gilt für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$ , also müssen die Koeffizienten des Polynoms (ersten Grades) verschwinden (warum?):

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ 5A - 2B &= 11 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad A = 3, B = 2$$

(2.) Methode des Einsetzens:

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{5x + 11}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

$$x := 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{26}{8} = A + \frac{B}{8}, \quad A = \frac{1}{8}(26 - B)$$

$$x := 4 \quad \longrightarrow \quad \frac{31}{18} = \frac{A}{2} + \frac{B}{9}, \quad A = \frac{1}{9}(31 - 2B)$$

$$\longrightarrow \quad A = 3, B = 2.$$

(3.) Grenzwertmethode:

Gewöhnlich ist diese Methode die zweckmäßigste, sie funktioniert allerdings nicht bei komplexen Nullstellen. Man multipliziert die Gleichung mit  $(x - x_j)$  und bildet dann den Grenzwert  $x \rightarrow x_j$ . Im Grunde läuft dieses Verfahren einfach darauf hinaus, nach ausgeführter Multiplikation zu kürzen und  $x = x_j$  zu setzen:

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{5x + 11}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5}$$

$$(a) \frac{5x + 11}{x + 5} = A + (x - 2) \cdot \frac{B}{x + 5}, \quad A = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{5x + 11}{x + 5} = \frac{21}{7} = 3$$

$$(b) \frac{5x + 11}{x - 2} = B + (x + 5) \cdot \frac{A}{x - 2}, \quad B = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{5x + 11}{x - 2} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Natürlich eignet sich dieses Verfahren auch bei Vorliegen einer mehrfachen reellen Nullstelle. Allerdings muß hier mit der Berechnung des Koeffizienten der höchsten Potenz begonnen werden, indem die Gleichung zuerst mit der höchsten Potenz multipliziert wird:

$$\frac{x - 5}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x - 5}{(x - 3)^2} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2}$$

$$(a) x - 5 = (x - 3) \cdot A + B, \quad B = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 5) = -2$$

(b) Jetzt wird  $B = -2$  eingesetzt, der entsprechende Term auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert, und man erhält eine rationale Funktion, deren Nennerpolynom die Nullstelle  $x = 3$  höchstens  $(2 - 1)$  mal aufweist:

$$\frac{x - 5}{(x - 3)^2} - \frac{-2}{(x - 3)^2} = \frac{x - 3}{(x - 3)^2} = \frac{1}{x - 3} = \frac{A}{x - 3}$$

$$\longrightarrow A = 1$$

### Bemerkung

Die verschiedenen Ansätze zur Berechnung der Koeffizienten einer Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion versagen übrigens, wenn die Funktion unecht gebrochen rational ist.

#### 6.4.5.2 Stammfunktionen rationaler Funktionen

In diesem Teil geht es um das eigentliche Ziel dieses Abschnittes, nämlich um die Integration rationaler Funktionen. Da man jede unecht gebrochen rationale Funktion in die Form

$$\text{Polynom} + \text{echt gebrochen rationale Funktion}$$

bringen kann, genügt es, die Integration echt gebrochener rationaler Funktionen zu studieren. Jede derartige Funktion  $r$  lässt sich nach Satz 6.17 in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen – wobei man ganz im Reellen bleiben kann – und infolgedessen wird man  $r$  integrieren können, sobald man über Stammfunktionen von Brüchen der Form

$$\frac{1}{(x - \xi)^m} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^m} \quad (a^2 < 4b, m \in \mathbb{N})$$

verfügt.

Im Falle  $a^2 \geq 4b$  besitzt  $x^2 + ax + b$  nur reelle Nullstellen, der Term  $(\alpha x + \beta)/(x^2 + ax + b)^m$  kommt infolgedessen in der Partialbruchzerlegung nicht vor.

Die verschiedenen auftretenden Fälle werden jeweils an Beispielen demonstriert.

1. Einfache reelle Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 9}{x^2 - 2x - 24} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x - 6} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 4} \\ &= \frac{3}{2} \ln|x - 6| - \frac{1}{2} \ln|x + 4| + C = \ln \sqrt{\left| \frac{(x - 6)^3}{x + 4} \right|} + C. \end{aligned}$$

Das hier angewandte Verfahren lässt sich leicht auf Fälle übertragen, in welchen der Grad des Nennerpolynoms höher als 2 ist.

2. Mehrfache reelle Nullstellen des Nenners:

$$(i) \int \frac{x - 5}{x^2 - 6x + 9} dx = \int \frac{x - 5}{(x - 3)^2} dx$$

Partialbruchzerlegung (s. das Beispiel zur Grenzwertmethode auf p. 59):

$$\frac{x - 5}{x^2 - 6x + 9} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2}$$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner  $(x - 3)^2$  liefert

$$x - 5 = A(x - 3) + B,$$

woraus sich durch Einsetzen ergibt:

$$A = 1 \quad , \quad B = -2.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 5}{x^2 - 6x + 9} dx &= \int \frac{dx}{x - 3} + (-2) \int \frac{dx}{(x - 3)^2} \\ &= \ln|x - 3| + \frac{2}{x - 3} + C. \end{aligned}$$

$$(ii) \int \frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx = \int \frac{15x^2 + 26x - 5}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} &= \frac{15x^2 + 26x - 5}{(x-1)(x+2)^2} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4}{x-1} + \frac{11}{(x+2)} - \frac{1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx &= \int \frac{15x^2 + 26x - 5}{(x-1)(x+2)^2} dx \\ &= \int \frac{4}{x-1} dx + \int \frac{11}{(x+2)} dx - \int \frac{1}{(x+2)^2} dx \\ &= 4 \ln|x-1| + 11 \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C. \end{aligned}$$

Kommen bei Nennern höheren Grades Nullstellen mit größerer Vielfachheit vor, so sind beim Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche alle Potenzen des zugehörigen Linearfaktors zu berücksichtigen, von der ersten Potenz bis hin zu derjenigen, welche gleich seiner Vielfachheit ist.

### 3. Einfache komplexe Nullstellen des Nenners:

$$\int \frac{6x - 8}{x^2 - 6x + 34} dx = \int \frac{6x - 8}{[x - (3 - 5i)][x - (3 + 5i)]} dx$$

Würde man hier genauso vorgehen wie im Fall einfacher reeller Nullstellen, so erhielte man eine Partialbruchzerlegung, in welcher auch die Koeffizienten der entsprechenden Teilbrüche komplex wären:

$$\frac{6x - 8}{x^2 - 6x + 34} = \frac{3 + i}{x - (3 - 5i)} - \frac{3 - i}{x - (3 + 5i)}.$$

Infolgedessen verzichtet man hier auf eine vollständige Partialbruchzerlegung und integriert den Ausdruck mit quadratischem Nenner nach folgendem Ver-

fahren durch Aufspalten in zwei Brüche:

$$\begin{aligned} \frac{6x - 8}{x^2 - 6x + 34} &= \frac{3 \cdot (2x - 6) + 10}{x^2 - 6x + 34} \\ &= 3 \cdot \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 34} + \frac{10}{(x - 3)^2 + 25} \\ &= 3 \cdot \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 34} + \frac{10}{25} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-3}{5}\right)^2} \end{aligned}$$

Die Integrale zu den letzten beiden Teilbrüchen lassen sich nun berechnen; der erste Integrand ist die logarithmische Ableitung des Polynoms im Nenner, das zweite Integral kann mit der Substitution

$$z := \frac{x - 3}{5}, \quad dx = 5dz$$

angegangen werden. Man erhält abschließend:

$$\int \frac{6x - 8}{x^2 - 6x + 34} dx = 3 \cdot \ln|x^2 - 6x + 34| + 2 \cdot \arctan \frac{x - 3}{5} + C.$$

### Bemerkung

Hier stellt sich die Frage, ob sich nicht auch rationale Funktionen mit zwei reellen Nullstellen auf diese Art und Weise behandeln lassen. Diese Frage soll anhand des Beispiels von p. 60 beantwortet werden.

$$\begin{aligned} \frac{x + 9}{x^2 - 2x - 24} &= \frac{1}{2} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 24} + \frac{10}{(x - 1)^2 - 25} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 24} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x-1}{5}\right)^2} \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion des letzten Quotienten ist nicht mehr durch eine arctan-Funktion, sondern – wegen des Minuszeichens im Nenner – durch eine artanh- oder eine arcoth-Funktion gegeben. O.B.d.A. sei im folgenden  $\left|\frac{x-1}{5}\right| < 1$ , sonst muß man mit der arcoth-Funktion arbeiten:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} \cdot \int \frac{dx}{1 - \left(\frac{x-1}{5}\right)^2} &= -2 \operatorname{artanh} \frac{x - 1}{5} + C \\ &= -\frac{2}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{x-1}{5}}{1 - \frac{x-1}{5}} \right| + C \\ &= -\ln \left| \frac{5 + x - 1}{5 - x + 1} \right| + C \\ &= -\ln \left| \frac{4 + x}{6 - x} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x - 6}{x + 4} \right| + C \end{aligned}$$

Für das gesamte Integral erhält man

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+9}{x^2-2x-24} dx &= \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-24| + \ln\left|\frac{x-6}{x+4}\right| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln|(x+4)(x-6)| + \ln|x-6| - \ln|x+4| + C \\
 &= \frac{3}{2} \ln|x-6| - \frac{1}{2} \ln|x+4| + C \\
 &= \ln\sqrt{\left|\frac{(x-6)^3}{x+4}\right|} + C,
 \end{aligned}$$

also das alte Ergebnis.

Auch im Falle komplexer Nullstellen können natürlich reelle Nullstellen zusätzlich vorliegen, so daß man die geschilderten Verfahren koppeln muß.

#### 4. Mehrfache komplexe Nullstellen des Nenners:

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten komplexe Nullstellen immer paarweise konjugiert komplex auf. Dieser Fall tritt daher frühestens bei rationalen Funktionen auf, deren Nennerpolynom den Grad 4 hat.

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 104x + 169} dx \\
 &= \int \frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{(x^2 - 4x + 13)^2} dx \\
 &= \int \frac{(6x - 5)(x^2 - 4x + 13) + (2x + 1)}{(x^2 - 4x + 13)^2} dx \\
 &= \int \frac{6x - 5}{x^2 - 4x + 13} dx + \int \frac{2x + 1}{(x^2 - 4x + 13)^2} dx \\
 &=: \quad I_1 \quad + \quad I_2
 \end{aligned}$$

Das Integral  $I_1$  ist von demjenigen Typ, der im letzten Abschnitt behandelt wurde:

$$\begin{aligned}
 \frac{6x-5}{x^2-4x+13} &= 3 \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+13} + 7 \cdot \frac{1}{(x-2)^2+9} \\
 &= 3 \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+13} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2} \\
 \longrightarrow I_1 &= 3 \ln|x^2-4x+13| + \frac{7}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C
 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von  $I_2$  verfährt man anfänglich nach derselben Strategie wie bei der von  $I_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{(x^2-4x+13)^2} &= \frac{2x-4}{(x^2-4x+13)^2} + \frac{5}{[(x-2)^2+9]^2} \\ &= \frac{2x-4}{(x^2-4x+13)^2} + \frac{5}{81} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right]^2} \\ \longrightarrow I_2 &= \int \frac{2x-4}{(x^2-4x+13)^2} dx + \frac{5}{81} \int \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right]^2} dx \\ &=: J_1 + J_2 \end{aligned}$$

$$J_1 = -\frac{1}{x^2-4x+13} + C$$

$$J_2 = \frac{5}{27} \int \frac{1}{(1+u^2)^2} du \quad \left[ \text{Substitution: } u := \frac{x-2}{3}, dx = 3 du \right]$$

Das Integral  $J_2$  ist von der Form

$$L_k := \int \frac{1}{(1+t^2)^k} dt \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für  $k = 1$  erhält man  $L_1 = \arctan t + C$ .

Für  $k > 1$  folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} L_{k-1} &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} - \int t \cdot (-k+1) \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^k} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} + 2(k-1) \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^k} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} + 2(k-1) \cdot L_{k-1} - 2(k-1) \cdot L_k \\ \longrightarrow L_k &= \frac{1}{2(k-1)} \cdot \left[ \frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} + (2k-3) \cdot L_{k-1} \right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der letzten *Rekursionsformel* kann man „sich“ also von  $L_k$  für  $k > 1$  bis zu  $L_1$  „durch-rechnen“.

Für das Beispiel erhält man als Gesamtergebnis

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 104x + 169} dx \\
 &= I_1 + J_1 + J_2 \\
 &= 3 \ln |x^2 - 4x + 13| + \frac{7}{3} \arctan \left( \frac{x-2}{3} \right) - \frac{1}{x^2 - 4x + 13} \\
 &\quad + \frac{5}{54} \left[ \frac{\frac{x-2}{3}}{1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2} + 3 \cdot \arctan \left( \frac{x-2}{3} \right) \right] + C \\
 &= \frac{1}{18} \frac{5x - 28}{x^2 - 4x + 13} + 3 \ln |x^2 - 4x + 13| + \frac{47}{18} \arctan \left( \frac{x-2}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

## 6.5 Rotationskörper

Bei den folgenden Anwendungen der Berechnung von Mantelflächen und Volumina dreidimensionaler Körpern handelt es sich, streng genommen, bereits um die Berechnung von sog. *Oberflächen-* oder *Bereichsintegralen*. Diese Integrale lassen sich jedoch dann auf einfache Integrale zurückführen, wenn eine spezielle Voraussetzung über die Form der auftretenden Körper getroffen wird:

die Körper sind *rotationssymmetrisch*.

Sie entstehen durch Rotation des Graphen einer reellwertigen Funktion um die Abszissen- oder Ordinatenachse; z.B. weisen alle auf einer Drehbank hergestellten Werkstücke diese Symmetrie auf, s. Abb. 6.23.

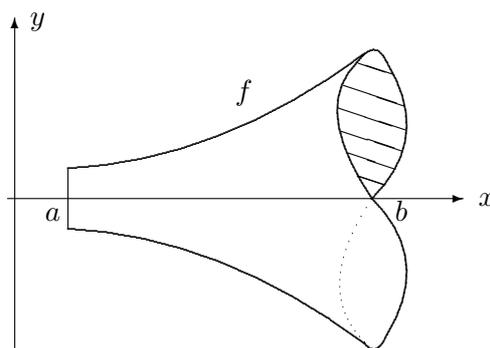


Abbildung 6.23: Rotationskörper

### 6.5.1 Mantelfläche eines Rotationskörpers

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gegeben als Summe seiner Mantelfläche und den Flächen seiner beiden Begrenzungskreise. Die Flächen der Be-

grenzungskreise sind – etwa bei Rotation um die  $x$ -Achse – leicht zu bestimmen:

$$K_l = \pi f(a)^2 \quad , \quad K_r = \pi f(b)^2,$$

also besteht das Hauptproblem in der Berechnung der Mantelfläche.

Die Idee zur Berechnung der Mantelfläche ist die gleiche wie die bei der Berechnung der Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion, s. Abschnitt 6.1.2.1, p. 11:

Ist  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ , so ist die Länge des Funktionsgraphen

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

gegeben durch

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Zur Herleitung dieser Formel wurde der Funktionsgraph durch ein einbeschriebenes Polygon approximiert, dessen Länge sich als Untersumme bzgl. einer Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{x_0, \dots, x_n\}$  des obigen Integrals erwies. Hier geht man nun analog vor:

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers wird approximiert durch die Mantelflächen derjenigen Kegelstümpfe, welche durch Rotation eines einer nichtnegativen Funktion  $f$  einbeschriebenen Polygons entstehen, s. Abb. 6.24.

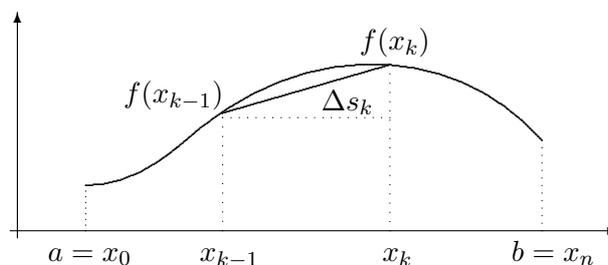


Abbildung 6.24: Polygon-Approximation einer stetig differenzierbaren Funktion

Seien  $f \geq 0$  im Intervall  $[a, b]$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Die Mantelfläche des  $k$ -ten Kegelstumpfes ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} O_k &= 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k \\ &= \pi \cdot (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \cdot \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \pi \cdot (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \cdot \sqrt{((f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2)} \\ &= \pi \cdot (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \cdot \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Riemann'sche Summe eines Integrals, und die Mantelfläche aller Kegelstümpfe ist damit gegeben durch

$$M_n = \sum_{k=1}^n O_k \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (6.12)$$

für eine stetig differenzierbare nichtnegative Funktion  $f$ .

### Bemerkung

Der „naheliegende“ Ansatz, die zu berechnende Mantelfläche durch Zylinder  $Z_k$  approximieren zu wollen, welche die Mantelfläche

$$M_{Z_k} = 2\pi f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

aufweisen, und damit dann auf das Integral

$$\sum_{k=1}^n 2\pi f(x_k) \cdot \Delta x_k \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 2\pi \int_a^b f(x) dx$$

geführt zu werden, erweist sich als falsch.

Diesem Ansatz entspricht der Versuch, die Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion durch waagerechte Teilstücke approximieren zu wollen s. Abb. 6.25.

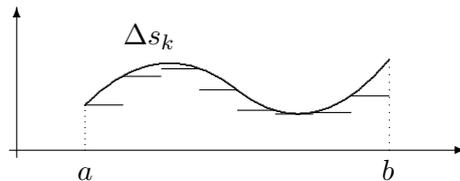


Abbildung 6.25: Falsche Approximation der Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion durch waagerechte Teilstücke

$$\Delta s_k = \Delta x_k \implies L(f) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a,$$

und dieses Ergebnis ist offensichtlich falsch.

### Beispiel 6.26

Mantelfläche einer Halbkugel vom Radius  $r$  (Abb. 6.26)

Die Mantelfläche einer Halbkugel vom Radius  $r > 0$  wird dadurch berechnet, daß man den Graphen der einen Viertelkreis darstellenden Funktion um die  $x$ -Achse rotieren läßt und dann die Formel (6.12) anwendet.

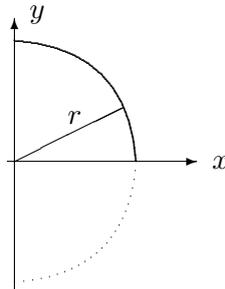


Abbildung 6.26: Mantelfläche einer Halbkugel

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\longrightarrow \quad O = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r^2$$

**Beispiel 6.27** Mantelfläche eines Rotationsparaboloides (Abb. 6.27)

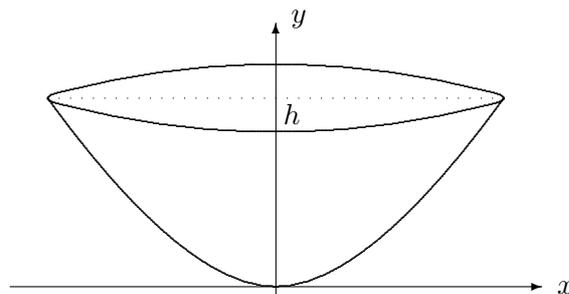


Abbildung 6.27: Mantelfläche eines Rotationsparaboloides

Das Paraboloid entsteht durch Rotation der Normalparabel  $y = f(x) = x^2$  um die  $y$ -Achse. Formel (6.12) muß also modifiziert werden zu

$$O = 2\pi \int_0^h g(y) \sqrt{1 + g'(y)^2} dy$$

mit

$$g(y) := f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (y \in [0, h]).$$

$$\begin{aligned}
g'(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad , \quad \sqrt{1+g'(y)^2} = \sqrt{\frac{4y+1}{4y}} \\
\rightarrow M &= 2\pi \int_0^h \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{4y+1}{4y}} dy = \pi \int_0^h \sqrt{4y+1} dy \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^{4h+1} \sqrt{z} dz = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{2}{3} z^{3/2} \right]_1^{4h+1} \\
&= \frac{\pi}{6} (\sqrt{(4h+1)^3} - 1)
\end{aligned}$$

### 6.5.2 Volumen eines Rotationskörpers

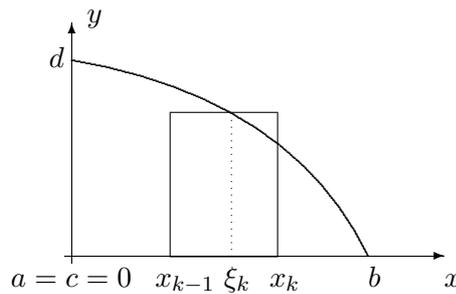


Abbildung 6.28: Zur Volumenberechnung eines Rotationskörpers

Das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph einer Funktion  $f$  um die  $x$ -Achse gedreht wird, lässt sich durch eine Riemann'sche Summe der Volumina der Kegelstümpfe approximieren (Abb. 6.28):

$$\begin{aligned}
V_k &= \pi \cdot f(\xi_k)^2 \cdot \Delta x_k \\
\rightarrow V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k,
\end{aligned}$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx} \tag{6.13}$$

#### Beispiel 6.28

Zu berechnen ist das Volumen eines Kegels, der entsteht, wenn die Gerade aus Abb. 6.29 um die  $x$ -Achse rotiert.

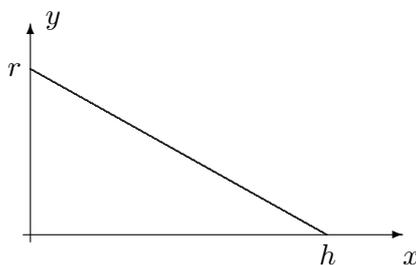


Abbildung 6.29: Volumen eines Kreiskegels

Die die Mantelfläche generierende Gerade ist gegeben durch

$$y := f(x) := r - \frac{r}{h}x \quad (x \in [0, h]),$$

damit lautet das Kegelvolumen nach der Formel (6.13)

$$V = \pi \int_0^h \left(r - \frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \left[ r^2x - \frac{r^2}{h}x^2 + \frac{r^2}{3h^2}x^3 \right]_0^h = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

### Bemerkung

Bei der „gewöhnlichen“ Flächenberechnung ist man analog vorgegangen: man hat die zu berechnende Fläche durch die Summe der Flächen vertikaler Rechtecke approximiert, deren Anzahl erhöht und deren Breite gegen Null gehen lassen.

Ist  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  eine streng monoton fallende Funktion, so ist  $f$  invertierbar, und man hätte statt der vertikalen auch horizontale Rechtecke wählen können, um die Gesamtfläche zu approximieren, s. Abb. 6.30 und 6.31.

Hierbei wurde  $g(y) := f^{-1}(y)$  für  $y \in [c, d]$  gesetzt mit

$$D(f) = [a, b] \quad , \quad D(g) = [c, d] \quad , \quad a = c = 0 \quad , \quad d = f(a) \quad , \quad b = g(c).$$

Bei der „gewöhnlichen“ Flächenberechnung haben die beiden Integrale  $\int_a^b f(x) dx$  und  $\int_c^d g(y) dy$  dann das gleiche Aussehen.

Führt man eine analoge Betrachtung für das Volumenintegral (6.13) durch, so weist das entstehende Integral ein anderes Aussehen auf, obwohl sich natürlich dasselbe Volumen ergibt. Man kann eine konkrete Aufgabe also auf zwei verschiedene Arten lösen und nimmt meistens diejenige, bei welcher das entstehende Integral leichter auszuwerten ist.

Zuerst jedoch die entsprechende Formel. Dazu wird die rotierende Fläche in horizontale Streifen zerlegt, so daß bei Rotation um die  $x$ -Achse Hohlzylinder entstehen (Abb. 6.32), deren Volumen sich wie folgt berechnen läßt:

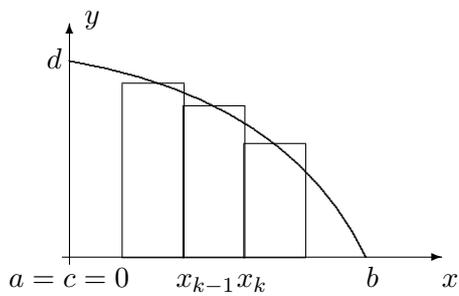


Abbildung 6.30: Approximation einer Fläche durch vertikale Rechtecke

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

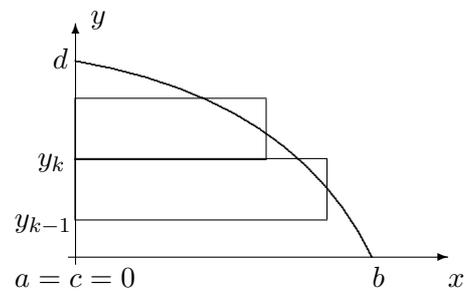


Abbildung 6.31: Approximation einer Fläche durch horizontale Rechtecke

$$F = \int_c^d g(y) dy$$

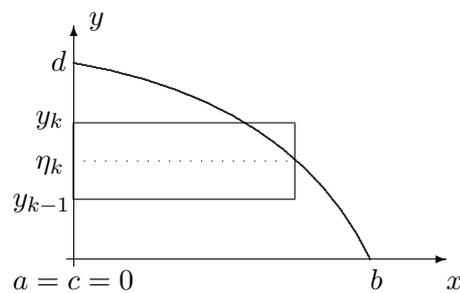


Abbildung 6.32: Zur Volumenberechnung eines Rotationskörpers

$$\begin{aligned}
 V_k &= \pi \cdot (y_k^2 - y_{k-1}^2) \cdot g(\eta_k) = \pi \cdot (y_k + y_{k-1}) \cdot g(\eta_k) \cdot \Delta y_k \\
 \longrightarrow \quad V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi \cdot (y_k + y_{k-1}) \cdot g(\eta_k) \cdot \Delta y_k,
 \end{aligned}$$

$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy \tag{6.14}$$

**Beispiel 6.29**

Es soll noch einmal das Volumen des Kegels (Abb. 6.29) bei Rotation um die  $x$ -Achse berechnet werden, dieses Mal mit der Formel (6.14).

Die die Mantelfläche generierende Gerade ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) = r - \frac{r}{h}x && (x \in [0, h]) \\
 \longrightarrow \quad x &= g(y) = h - \frac{h}{r}y && (y \in [0, r]),
 \end{aligned}$$

damit lautet das Kegelvolumen nach (6.14)

$$V = 2\pi \int_0^r y \left( h - \frac{h}{r}y \right) dy = 2\pi \left[ \frac{h}{2}y^2 - \frac{h}{3r}y^3 \right]_0^r = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

**Bemerkung**

Die beiden Formeln (6.13) und (6.14) liefern natürlich nur dann dasselbe Ergebnis, wenn die entstehenden Rotationskörper identisch sind. Diese ergeben sich aus der Rotation (hier: um die  $x$ -Achse):

- (a) der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der  $x$ -Achse
- (b) der Fläche zwischen der  $y$ -Achse und dem Funktionsgraphen

Die generierende Fläche wird also begrenzt vom Funktionsgraphen und derjenigen Achse, auf der die Intervallunterteilung vorgenommen wird, welche dann zu dem entsprechenden Integral führt.

**Beispiel 6.30**

Seien

$$V_x^I := \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad , \quad V_x^{II} := 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy$$

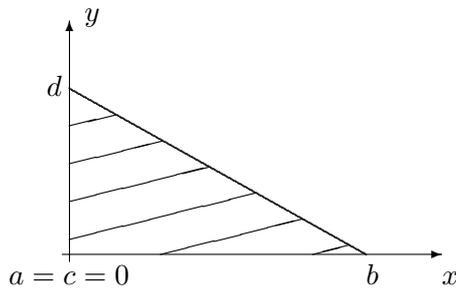


Abbildung 6.33: Streng monoton fallende Funktion

$$V_x^I = V_x^{II}$$

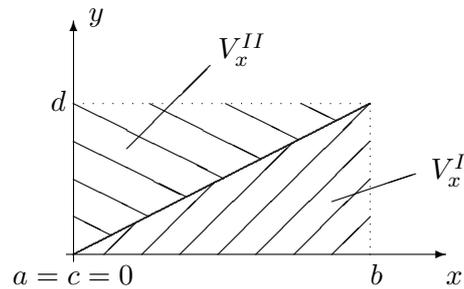


Abbildung 6.34: Streng monoton wachsende Funktion

$$V_x^I \neq V_x^{II}$$

Für die Rotation um jede der beiden Achsen existieren somit jeweils zwei Formeln, falls die Funktion, deren Graph rotiert wird, bijektiv ist. Je nachdem, welches Volumen man berechnen möchte, muß man die eine oder die andere Formel verwenden; im Falle einer streng monoton fallenden Funktion sowie der Bedingung (warum?)  $a = c = 0$  liefern beide Formeln dasselbe Ergebnis; stets sei hier  $g = f^{-1}$ :

Rotation um die $x$ -Achse		
$V_x^I = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$V_x^{II} = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy$	(6.15)

Rotation um die $y$ -Achse		
$V_y^I = \pi \int_c^d g(y)^2 dy$	$V_y^{II} = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$	(6.16)

### Beispiel 6.31

In diesem Beispiel sollen die sich ergebenden zwei verschiedenen Volumina bei Rotation um die  $x$ -Achse des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion berechnet werden. Sei  $b > 0$ , die Funktion  $f$  und ihre Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} y = f(x) &:= e^x & (x \in [0, b]), \\ x = g(y) &:= \ln y & (y \in [1, e^b]); \end{aligned}$$

s. Abb. 6.35.

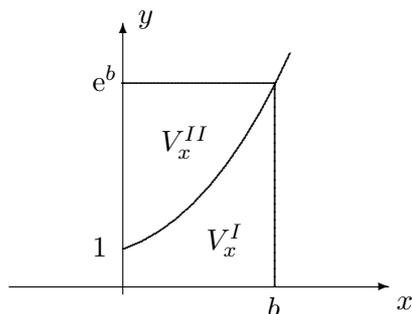


Abbildung 6.35: Verschiedene Volumina  $V_x^I$  und  $V_x^{II}$  bei einer streng monoton wachsenden Funktion

(i) Berechnung von  $V_x^I$ :

$$V_x^I = \pi \int_0^b (e^x)^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^b = \frac{\pi}{2} (e^{2b} - 1)$$

(ii) Berechnung von  $V_x^{II}$ :

$$\begin{aligned} V_x^{II} &= 2\pi \int_1^{e^b} y \ln y dy = 2\pi \left( \frac{y^2}{2} \cdot \ln y \Big|_1^{e^b} - \int_1^{e^b} \frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{y} dy \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{e^{2b}}{2} \cdot b - 0 - \left[ \frac{y^2}{4} \right]_1^{e^{2b}} \right) = \pi \left( e^{2b} \cdot b - \frac{e^{2b}}{2} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

(iii) Vergleich:

$$\begin{aligned} V_x^I + V_x^{II} &= \frac{\pi}{2} (e^{2b} - 1) + \pi \left( e^{2b} \cdot b - \frac{e^{2b}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \pi \cdot e^{2b} \cdot b \\ &= \pi (e^b)^2 \cdot b \\ &= V_{\text{Zylinder}} \end{aligned}$$

### Beispiel 6.32

Zu berechnen ist die Masse des Halbrundniets aus Abb. 6.36 bei einer angenommenen homogenen Massenverteilung.

Wie man aus der Zeichnung erkennt, muß stückweise integriert werden. Der erste Graph ist ein Kreisbogen mit der Gleichung

$$f_1(x) := \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{x(2R - x)} \quad (x \in [0, k]),$$

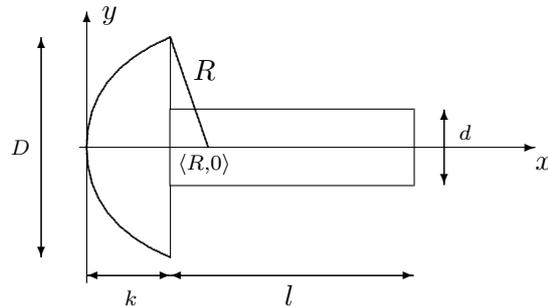


Abbildung 6.36: Halbrundniet

der zweite Graph ist eine Parallele zur  $x$ -Achse mit der Gleichung

$$f_2(x) := \frac{d}{2} \quad (x \in [k, k+l]).$$

Zur Berechnung der Masse bzw. des Volumens kann man den Graphen des Halbrundnietes um die  $x$ -Achse rotieren lassen und dann die Volumenformel (6.13) verwenden; bei Verwendung von (6.14) würde sich ein anderes Volumen ergeben (welches?). Man erhält ( $\rho$ : spezifische Dichte):

$$\begin{aligned} M &= \rho \cdot \pi \left( \int_0^k (2Rx - x^2) dx + \int_k^{k+l} \left(\frac{d}{2}\right)^2 dx \right) \\ &= \rho \cdot \pi \left( 2R \frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{3} + \frac{d^2}{4} l \right). \end{aligned}$$

Man möchte noch  $R$  ersetzen mit Hilfe von

$$(R - k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2,$$

da sich  $R$  mit einer Schieblehre nicht bestimmen läßt. Mit  $R = \frac{D^2}{8k} + \frac{k}{2}$  ergibt sich dann

$$M = \rho \cdot \pi \left( \frac{D^2 k}{8} + \frac{k^3}{6} + \frac{d^2 l}{4} \right).$$

### Aufgabe

Anstatt den Kreisbogen mit der Gleichung

$$f_1(x) := \sqrt{R^2 - (x - R)^2} \quad (x \in [0, k])$$

von 0 nach  $k$  zu integrieren, könnte man auch den Kreisbogen um den Nullpunkt mit der Gleichung

$$f_2(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \in [-R, k - R])$$

von  $-R$  nach  $k-R$  integrieren. Warum und worauf läuft diese Rechnung hinaus?

**Bemerkung**

Die hergeleiteten Formeln liefern das gesamte Volumen eines Körpers, der generiert wird, wenn die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und derjenigen Achse, auf welcher sich die Intervallunterteilung bezieht, um eine Achse rotiert. Will man stattdessen das Volumen erhalten, das sich aus der Rotation eines Flächenstückes ergibt, welches zwischen zwei Graphen verläuft (Abb. 6.37 und 6.38), so ändern sich die Formeln.

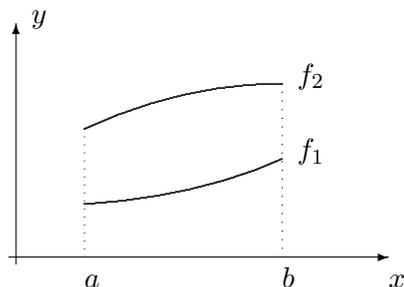


Abbildung 6.37: Flächenstück zwischen zwei Kurven

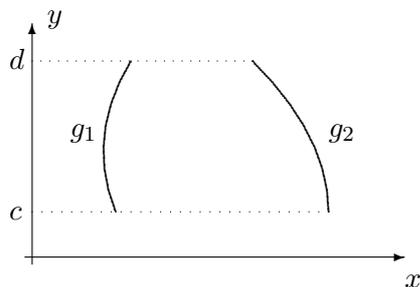


Abbildung 6.38: Flächenstück zwischen zwei Kurven

- Bei Rotation um die  $x$ -Achse:

$$V_x^I = \pi \int_a^b (f_2(x)^2 - f_1(x)^2) dx$$

$$V_x^{II} = 2\pi \int_c^d y(g_2(y) - g_1(y)) dy$$

- Bei Rotation um die  $y$ -Achse:

$$V_y^I = \pi \int_c^d (g_2(y)^2 - g_1(y)^2) dy$$

$$V_y^{II} = 2\pi \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x)) dx$$

Bezogen auf die Integrationsvariable, also letztendlich auf die Grenzen, müssen die Flächen *zylindrisch* sein, sog. *Normalbereiche* darstellen, will man die durch sie generierten Volumina mit einem der o.a. Integrale berechnen.

Auch darf sich die erzeugende Fläche bei einmaliger Rotation nicht wieder treffen. Die Fläche in Abb. 6.39 beispielsweise müßte erst zerlegt werden, wenn sie um die  $x$ -Achse rotiert. Hier würde es sogar genügen, die unter der  $x$ -Achse verlaufende Kurve einfach wegzuschneiden.

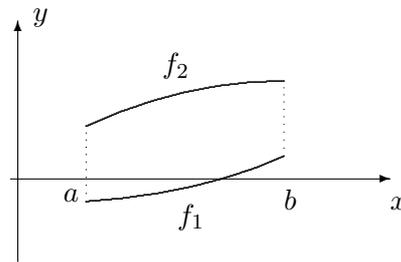


Abbildung 6.39: Sich bei einmaliger Rotation schneidendes Flächenstück

### 6.5.3 Schwerpunkt ebener Flächen; erste Guldin'sche Regel

Zur Motivation dieses Abschnittes wird das folgende Beispiel behandelt.

#### Beispiel 6.33 (Volumen eines Torus')

Zu berechnen ist das Volumen eines Volltorus'; generiert werden könnte er beispielsweise von einem Kreisring, welcher um die  $x$ -Achse rotiert, s. Abb. 6.40.

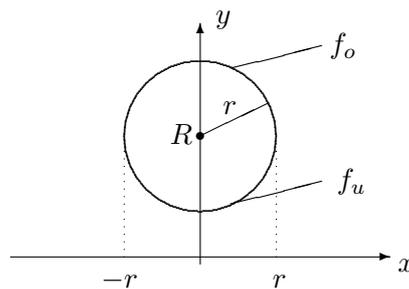


Abbildung 6.40: Kreisring, dessen Rotation einen Torus erzeugt

Anzugeben ist zuerst die obere - und die untere Begrenzungsfunktion der das Volumen erzeugenden Querschnittsfläche:

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2 \quad \longrightarrow \quad (y - R) = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f_o(x) := R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (x \in [-r, r])$$

$$f_u(x) := R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Mit Hilfe der entsprechenden Formel aus der Bemerkung von p. 76 erhält man für das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (f_o(x)^2 - f_u(x)^2) dx = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 4\pi R \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = (\pi r^2) \cdot (2\pi R) \\ &= (\text{Querschnittsfläche}) \times (\text{Weg des Kreismittelpunktes}) \end{aligned}$$

Das Volumen des Torus' ist also gleich dem Produkt aus erzeugender Querschnittsfläche und dem Weg des „Mittelpunktes“ der Fläche bei einmaliger Rotation. Diese sog. *Erste Guldin'sche Regel* soll jetzt für beliebige ebene Flächenstücke hergeleitet werden. Die Rolle des Mittelpunktes wird dabei der sog. *Flächenschwerpunkt* einnehmen.

**Definition 6.10**

Der *Schwerpunkt*  $S = \langle x_S, y_S \rangle$  einer ebenen Fläche  $A$  ist durch die Forderung definiert, daß die beiden statischen Momente erster Ordnung

$$A \cdot x_S \quad \text{bzw.} \quad A \cdot y_S$$

das Gesamtmoment erster Ordnung der Fläche in bezug auf die  $y$ -Achse bzw. auf die  $x$ -Achse ergeben:

$$\begin{aligned} m_y &= A \cdot x_S & \text{bzw.} & & m_x &= A \cdot y_S, \\ \text{d.h. also} \quad x_S &= \frac{m_y}{A} & \text{bzw.} & & y_S &= \frac{m_x}{A}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Was ist nun ein statisches Moment erster Ordnung? Dazu wird an die Definition des Drehmomentes einer Kraft erinnert:

Das Drehmoment  $m$  einer Kraft  $f$  bzgl. einer Achse (Abb. 6.41) ist definiert als Vektorprodukt

$$m := r \times f.$$

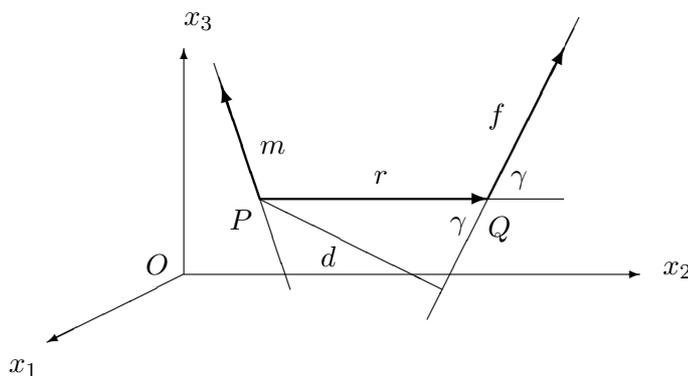


Abbildung 6.41: Drehmoment als Vektorprodukt

$$\|m\| = \|r \times f\| = \|r\| \cdot \|f\| \cdot \sin \gamma = \|f\| \cdot d$$

Im Falle  $\gamma = \pi/2$  gilt die bekannte Beziehung

$$\begin{aligned}\|m\| &= \|f\| \cdot \|r\| \\ \text{Drehmoment} &= \text{Kraft} \cdot \text{Hebelarm}\end{aligned}$$

Analog dazu definiert man in der Festigkeitslehre:

**Definition 6.11**

Das *statische Moment 1. Ordnung* einer ebenen Fläche in bezug auf eine Achse in derselben Ebene ist das Produkt aus

- Fläche und
- Abstand eines ausgezeichneten Punktes – des *Flächenschwerpunktes* – von dieser Achse.

**Problem**

Mit den Definitionen 6.10 und 6.11 dreht man sich hier im Kreis:

Einerseits wird der Schwerpunkt mit Hilfe der ersten Momente definiert, andererseits wird auch das erste Moment mit Hilfe eines ausgezeichneten Punktes definiert, eben des Schwerpunktes.

Ein Ausweg wäre, den Schwerpunkt mit Hilfe eines Integrals formal zu definieren, aber das erscheint – ohne zusätzliche Erläuterungen – unanschaulich. Daher werden eben diese Integraldefinition hergeleitet und dabei als unbewiesene Voraussetzung die folgenden beiden Ergebnisse benutzt:

- (a) Der Schwerpunkt eines Rechteckes ist gleich seinem Mittelpunkt.
- (b) Das Gesamtmoment zweier Teilflächen ist die Summe ihrer Einzelmomente.

Damit ist der weitere Weg zur Definition des Flächenschwerpunktes vorgezeichnet: eine beliebige Fläche wird in Teilrechtecke zerlegt, deren Schwerpunkte ihre Mittelpunkte sind und deren Momente addiert werden. Im Grenzwert gelangt man dann zu der gesuchten Integraldefinition des Gesamtmomentes bzw. zu derjenigen des Schwerpunktes.

Sei, wie in diesem Abschnitt üblich,  $f$  eine streng monoton fallende Funktion mit  $D(f) = [a = 0, b]$  und  $g = f^{-1}$  ihre Umkehrfunktion mit  $D(g) = [c = 0, d]$ .

Das statische Moment erster Ordnung eines vertikalen Streifens

$$A_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

in bezug auf die  $y$ -Achse beträgt (Abb. 6.42)

$$(m_y)_k = \xi_k \cdot A_k = \xi_k \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

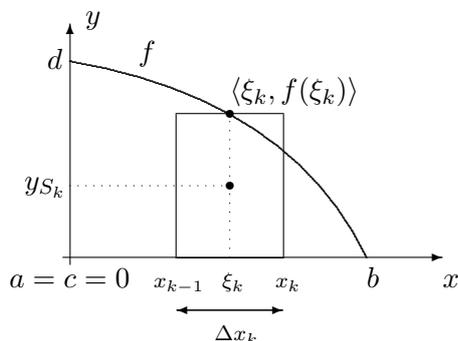


Abbildung 6.42: Moment erster Ordnung eines vertikalen Streifens in bezug auf die  $y$ -Achse

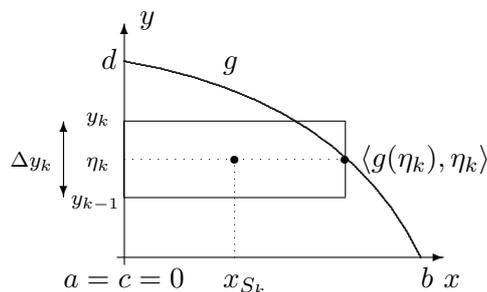


Abbildung 6.43: Moment erster Ordnung eines horizontalen Streifens in bezug auf die  $x$ -Achse

Analog beträgt das statische Moment erster Ordnung eines horizontalen Streifens

$$B_k = g(\eta_k) \cdot \Delta y_k$$

in bezug auf die  $x$ -Achse (Abb. 6.43)

$$(m_x)_k = \eta_k \cdot B_k = \eta_k \cdot g(\eta_k) \cdot \Delta y_k.$$

Damit sind die Gesamtmomente gegeben durch die Grenzwerte der entsprechenden Riemann'schen Summen

$$m_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (m_y)_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k f(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

$$m_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (m_x)_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \eta_k g(\eta_k) \cdot \Delta y_k,$$

und man erhält die Koordinaten des Flächenschwerpunktes zu

$$\begin{aligned} m_y &= x_S \cdot A = \int_a^b x \cdot f(x) dx \\ m_x &= y_S \cdot A = \int_c^d y \cdot g(y) dy \end{aligned} \tag{6.18}$$

**Bemerkung**

Die in diesen Gleichungen auftretenden Flächenstreifen  $A_k$  bzw.  $B_k$  liegen mit ihrer Längsseite parallel zur jeweiligen Bezugsachse. Deshalb ist es nicht notwendig, daß sie von dem Funktionsgraphen bis an die andere Achse heranreichen. Auch hier gilt dasselbe wie in der Bemerkung auf p. 76:

Unter der Voraussetzung, daß im Integrationsintervall

$$\begin{array}{lll} [a, b] & \text{stets} & f_1(x) \leq f_2(x) \\ [c, d] & \text{stets} & g_1(y) \leq g_2(y) \end{array}$$

gilt, lassen sich die Formeln (6.18) unmittelbar zur Berechnung des Schwerpunktes einer ganz zwischen zwei Graphen liegenden Fläche benutzen.

Im folgenden werden zwei andere Formeln für die Schwerpunktkoordinaten hergeleitet. Dieses Mal wird die Fläche in zur jeweiligen Bezugsachse vertikale Streifen zerlegt (Abb. 6.44 und 6.45).

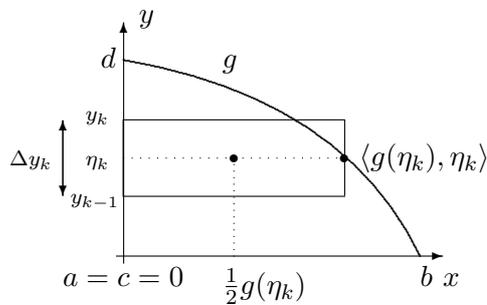


Abbildung 6.44: Moment erster Ordnung eines horizontalen Streifens in bezug auf die  $y$ -Achse

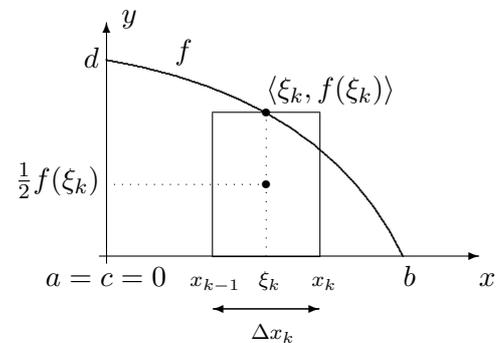


Abbildung 6.45: Moment erster Ordnung eines vertikalen Streifens in bezug auf die  $x$ -Achse

Die Schwerpunktkoordinate  $(x_S)_k$  eines horizontalen Streifens  $B_k$  beträgt

$$(x_S)_k = \frac{1}{2} g(\eta_k),$$

die Schwerpunktkoordinate  $(y_S)_k$  eines vertikalen Streifens  $A_k$  beträgt

$$(y_S)_k = \frac{1}{2} f(\xi_k).$$

Damit berechnen sich die entsprechenden Momente zu

$$(m_y)_k = (x_S)_k \cdot B_k = \frac{1}{2} g(\eta_k) \cdot g(\eta_k) \cdot \Delta y_k,$$

$$(m_x)_k = (y_S)_k \cdot A_k = \frac{1}{2} f(\xi_k) \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Für die Koordinaten des Gesamtflächenschwerpunktes resultieren daher die In-

tegrale

$$\begin{aligned}
 m_y = x_S \cdot A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} g(\eta_k)^2 \cdot \Delta y_k = \frac{1}{2} \int_c^d g(y)^2 dy \\
 m_x = y_S \cdot A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} f(\xi_k)^2 \cdot \Delta x_k = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

Auch in diesen Formeln lassen sich

$$g(y)^2 \quad \text{durch} \quad g_2(y)^2 - g_1(y)^2 \quad (y \in [c, d])$$

$$f(x)^2 \quad \text{durch} \quad f_2(x)^2 - f_1(x)^2 \quad (x \in [a, b])$$

ersetzen, falls die Fläche durch die beiden entsprechenden Funktionsgraphen berandet ist.

### Beispiel 6.34

Zu berechnen sind die Schwerpunktkoordinaten des Dreieckes aus Abb. 6.46.

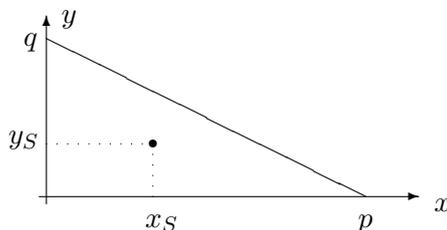


Abbildung 6.46: Schwerpunkt eines Dreieckes

Flächeninhalt:  $A = \frac{1}{2} p q$

Geradengleichungen:

$$f(x) = q - \frac{q}{p} x \quad , \quad g(y) = p - \frac{p}{q} y.$$

Daraus folgt mit der Schwerpunktsformel (6.18)

$$x_S = \frac{2}{pq} \int_0^p \left( qx - \frac{q}{p} x^2 \right) dx = \frac{p}{3} \quad , \quad y_S = \frac{2}{pq} \int_0^q \left( py - \frac{p}{q} y^2 \right) dy = \frac{q}{3}.$$

Zwischen den Formeln für die Schwerpunktkoordinaten ((6.18) und (6.19)) sowie den Formeln für die Volumenberechnung von Rotationskörpern ((6.15) und (6.16)) besteht ein überraschender Zusammenhang:

Bis auf den Faktor  $2\pi$  enthalten beide Formelgruppen die gleichen Integrale!

**Satz 6.18** (Erste *Guldin'sche Regel*)

Rotiert ein ebenes Flächenstück um eine Achse, die in der gleichen Ebene liegt und dieses Flächenstück nicht schneidet, so ist das Volumen des erzeugten Rotationskörpers das Produkt aus dem Flächeninhalt und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt des Flächenstückes bei (einmaliger) Rotation zurücklegt:

$$V_x = 2\pi y_S \cdot A \quad , \quad V_y = 2\pi x_S \cdot A \quad (6.20)$$

Der Flächeninhalt in (6.20) ist ggfs. mit einem negativen Vorzeichen zu versehen, falls  $y_S \leq 0$  oder  $x_S \leq 0$  sind.

**Beispiel 6.35** (Wiederaufgriff von Beispiel 6.34)

Berechnet man die Schwerpunktkoordinaten des Dreiecks aus dem letzten Beispiel mit Hilfe der ersten Guldin'schen Regel, so erhält man recht einfach

$$x_S = \frac{V_y}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{3}\pi p^2 q}{2\pi \frac{1}{2}qp} = \frac{p}{3} \quad , \quad y_S = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{3}\pi q^2 p}{2\pi \frac{1}{2}qp} = \frac{q}{3}.$$

**Beispiel 6.36**

Man bestimme den Schwerpunkt eines Viertelkreises (Abb. 6.47).

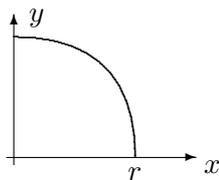


Abbildung 6.47: Schwerpunkt eines Viertelkreises

(i) Direkte Berechnung mit Hilfe der Schwerpunktsformel (6.18):

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\pi r^2/4} \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \frac{-2}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot (-2x) dx = \frac{-2}{\pi r^2} \left[ \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - x^2}^3 \right]_0^r \\ &= \frac{-4}{3\pi r^2} (0 - r^3) = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist  $y_S = x_S$ .

(ii) Bestimmung mit Hilfe der ersten Guldin'schen Regel:

Berechnet wird die Schwerpunktkoordinate  $x_S$ , es wird also eine Rotation um die  $y$ -Achse zugrundegelegt. Der entstehende Rotationskörper ist eine Halbkugel mit dem Volumen

$$V_y = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Mit (6.20) folgt

$$x_S = \frac{V_y}{2\pi A} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{\pi}{4}r^2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Wieder ist aus Symmetriegründen  $y_S = x_S$ .

### Beispiel 6.37

Man bestimme den Schwerpunkt eines Viertelkreisringes (Abb. 6.48) mit Hilfe der ersten Guldin'schen Regel.

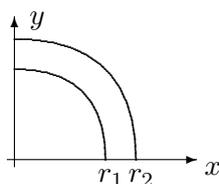


Abbildung 6.48: Schwerpunkt eines Viertelkreisringes

Man rechnet nach:

$$y_S = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot (r_2^3 - r_1^3)}{2\pi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2}{r_2 + r_1} = x_S$$

Man beachte, daß die den oberen Viertelkreis definierende Funktion auf einem anderen Intervall definiert ist  $([0, r_2])$  als die den unteren  $([0, r_1])$ .

Dieses Ergebnis hätte man natürlich auch mit dem *Teilschwerpunktsatz* durch Addition der Momente unter Berücksichtigung des Ergebnisses von Beispiel 6.36 erhalten können:

$$\begin{aligned} m_y^2 &= m_y^1 + m_y^{\text{Ring}} \\ A_2 \cdot x_{2S} &= A_1 \cdot x_{1S} + A_{\text{Ring}} \cdot x_{\text{Ring}} \\ \longrightarrow x_{\text{Ring}} &= \frac{A_2 \cdot x_{2S} - A_1 \cdot x_{1S}}{A_{\text{Ring}}} \end{aligned}$$

Spezialfälle:

(i)  $r_1 = 0 \longrightarrow$  die in Beispiel 6.36 hergeleitete Formel;

(ii)  $r_1 = r_2 \longrightarrow x_S = \frac{2r_1}{\pi}$ ; das ist die Formel für einen dünnen Ring.

### Bemerkung

Um diese Einführung nicht zu kompliziert zu gestalten, habe ich in diesem Abschnitt sämtliche Funktionen so gewählt, daß sie streng monoton fallend mit  $a = c = 0$  sind, die Zweideutigkeiten bei der Anwendung der verschiedenen Formeln treten hier dann nicht offen zutage. Selbstverständlich gilt das darüber im letzten Abschnitt Gesagte aber auch hier.

### Bemerkung

Analog zum Schwerpunkt einer ebenen Fläche läßt sich der Schwerpunkt einer Kurve definieren; dazu benötigt man den Begriff des sog. *Kurvenintegrals erster Art*, eine Art eindimensionales *Oberflächenintegral*. Ist die Kurve eben, so läßt sich der Schwerpunkt ebener Flächen oder räumlicher Bereiche zur Definition verwenden. So gelangt man u.a. zur sog. zweiten Guldin'schen Regel:

### Satz 6.19 (Zweite Guldin'sche Regel)

Rotiert ein ebenes Kurvenstück um eine Achse, die in der gleichen Ebene liegt und dieses Kurvenstück nicht schneidet, so ist die Mantelfläche des erzeugten Rotationskörpers das Produkt aus der Bogenlänge des Kurvenstückes und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt des Kurvenstückes bei (einmaliger) Rotation zurücklegt:

$$A_x = 2\pi y_S \cdot L \quad , \quad A_y = 2\pi x_S \cdot L \quad (6.21)$$

In ähnlicher Weise gelangt man in der Geometrie und Physik zu einer Fülle von Integralen, welche mehr oder weniger ähnlich hergeleitet werden wie die in diesem Abschnitt. Hier sollen nur die Ergebnisse zitiert und Analogien aufgezeigt werden:

(i) Fläche zwischen  $x$ -Achse und Graph eines ebenen Kurvenstückes:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

(ii) Bogenlänge eines ebenen Kurvenstückes:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

(iii) Mantelfläche eines Rotationskörpers:

$$M = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

(iv) Volumen eines Rotationskörpers:

$$V_x^I = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad , \quad V_x^{II} = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy$$

(v) Kurvenschwerpunkt eines homogenen ebenen Kurvenstückes:

$$x_S = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}$$

$$y_S = \frac{M/2\pi}{L} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}$$

(vi) Flächenschwerpunkt eines homogenen ebenen Flächenstückes:

$$x_S = \frac{V_y/2\pi}{A} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$y_S = \frac{V_x/2\pi}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

(vii) Volumenschwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers:

$$x_S = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)^2 dx}{\pi \int_a^b f(x)^2 dx} \quad , \quad y_S = z_S = 0$$

(viii) Trägheitsmoment eines homogenen ebenen Kurvenstückes:

$$I_x = \int_a^b f(x)^2 \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

(ix) Trägheitsmoment eines homogenen ebenen Flächenstückes:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b f(x)^3 dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx$$

(x) Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers:

$$I_x = \frac{\pi}{2} \rho \int_a^b f(x)^4 dx$$

$$I_y = 2\pi\rho \int_a^b x^3 \cdot f(x) dx$$

## 6.6 Uneigentliche Integrale

### 6.6.1 Definition und einführende Beispiele

Zur Motivation dessen, was uneigentliche Integrale sind und wo sie auftreten, sollen zuerst einige Beispiele betrachtet werden.

**Beispiel 6.38** (unbeschränkte Funktion)

Sei  $f$  definiert durch

$$\begin{aligned} f : (0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0, 1]). \end{aligned}$$

Sei  $a \in (0, 1]$ . Dann ist  $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  definiert, und es ist (Abb. 6.49)

$$I(a) := \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2 \cdot \sqrt{x} \right]_a^1 = 2(1 - \sqrt{a}).$$

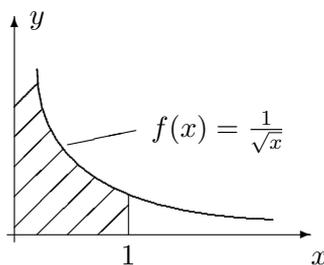


Abbildung 6.49: Endliche Fläche bei einer unbeschränkten Funktion

Die „Fläche“ zwischen dem Funktionsgraphen und den beiden Koordinatenachsen ist „unendlich ausgedehnt“, aber offenbar läßt sich ihr doch ein endlicher Wert zuordnen:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx := \lim_{a \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{a}) = 2.$$

Da die Funktion  $f$  auf dem Integrationsintervall unbeschränkt ist, ist sie nicht im eigentlichen Sinne integrierbar.

**Beispiel 6.39** (unbeschränktes Integrationsintervall)

Ein Teilchen bewege sich längs einer Geraden und habe zur Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v(t) > 0$  ( $t \in [a, \infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  geeignet), es finde also keine Umkehr der Bewegungsrichtung statt. Ferner gelte  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ , d.h. das Teilchen werde schließlich immer langsamer und bleibe „zur Zeit  $t = \infty$  stehen“.

Der zwischen der Zeit  $t = a$  und  $t > a$  zurückgelegte Weg beträgt

$$s(t) := \int_a^t v(\tau) d\tau.$$

$s(\cdot)$  ist streng monoton wachsend, da  $\dot{s}(t) = v(t) > 0$ . Wann bleibt  $s(t)$  endlich für  $t \rightarrow \infty$ , und wie erhält man dann den insgesamt zurückgelegten Weg?

**Konkret**

Eine Waage komme nach der Abklingfunktion  $f(t) := e^{-t}$  aus einer bestimmten Position zur Zeit  $t = 0$  zur Zeit  $t > 0$  wieder in ihre Ausgangslage zurück (Abb. 6.50).

Welches ist der insgesamt zurückgelegte Weg der Waagschale?

$$\int_0^t e^{-s} ds = \left[-e^{-s}\right]_0^t = 1 - e^{-t},$$

$$\int_0^\infty e^{-s} ds := \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) = 1.$$

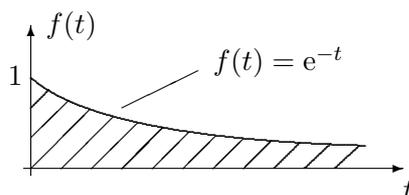


Abbildung 6.50: Endliche Fläche bei einem unbeschränkten Integrationsintervall

Hier ist das Integrationsintervall unbeschränkt, die Funktion ist also auch nicht im eigentlichen Sinne integrierbar. Dennoch „existiert“ das Integral.

Man kann die letzten beiden Beispiele auch zusammenbauen und dadurch die Existenz eines Integrals zeigen, bei dem sowohl Integrand als auch das Integrationsintervall unbeschränkt sind.

#### Beispiel 6.40

Für je zwei Zahlen  $a \in (0, 1]$  und  $b > 1$  gilt nach Satz 6.6 (vi) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \\
 &= \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx + \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \\
 &\leq \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^b e^{-x} dx \\
 &= 2(1 - \sqrt{a}) + (1 - e^{-b}) \\
 &\leq 3
 \end{aligned}$$

Das Integral  $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$  ist somit „gleichmäßig“ in  $a$  und  $b$  beschränkt, d.h. durch eine von  $a$  oder  $b$  unabhängig wählbare Schranke. Weiterhin ist es wegen der Positivität des Integranden sowohl für  $a \rightarrow 0$  als auch für  $b \rightarrow \infty$  monoton wachsend, damit also konvergent.

Das zeigt, daß auch der gesamten Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}$  ( $x > 0$ ) und den beiden Koordinatenachsen ein endlicher Wert zugeordnet werden kann, selbst wenn man ihn nicht durch Angabe einer Stammfunktion über den Hauptsatz ausrechnen kann. Ein sog. „uneigentliches“ Integral ist dann definierbar durch

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx := \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx.$$

**Problem**

In welcher Reihenfolge werden die Grenzwerte ausgeführt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \quad \text{oder} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx ?$$

**Bemerkung**

Die Existenz des Integrals  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$  wurde hier mit einem Vergleichskriterium nachgewiesen, ähnlich wie bei unendlichen Reihen. Genau wie dort kennt man den Wert des Integrals i.a. nicht.

**Beispiel 6.41**

Zu berechnen ist die Arbeit  $W$ , die erforderlich ist, einen Körper aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entfernen. Die Stärke der Gravitationskraft zweier Körper der Massen  $m$  und  $M$ , deren Schwerpunkte sich in der Entfernung  $r$  voneinander befinden, ist gegeben durch (*Newton'sches Gravitationsgesetz*)

$$F(r) = G \cdot \frac{m M}{r^2}$$

mit der Gravitationskonstante  $G := 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ . Man erhält für die potentielle Energie des Körpers  $m$  in bezug auf die Erde  $M$  ( $R$ : Erdradius,  $r \geq R$ ):

$$\begin{aligned} W(r) &:= \int_R^r F(s) ds = G \cdot m M \int_R^r \frac{ds}{s^2} \\ &= G \cdot m M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \xrightarrow{(r \rightarrow \infty)} G \cdot m M \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Diese Arbeit muß in Form von kinetischer Energie zugeführt werden:

$$G \cdot m M \frac{1}{R} = \frac{m}{2} v^2$$

$$\longrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Das ist die sog. *Fluchtgeschwindigkeit*, die sich ergibt, wenn man die relevanten Daten der Erde einsetzt:

$$\text{Erdmasse: } M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad , \quad \text{Erdradius: } R = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

**Bemerkung**

Man denke nun nicht, jedes uneigentliche Integral existiere! Wenn man Beispiel 6.38 etwas abändert, wird man für  $a \in (0, 1]$  mit der Funktion

$$\begin{aligned} g : (0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1]) \end{aligned}$$

auf das Integral

$$J(a) := \int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^1 = \ln 1 - \ln a = -\ln a$$

geführt, welches als uneigentliches Integral (an der unteren Grenze) *nicht* existiert:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx := \lim_{a \rightarrow 0} J(a) = \lim_{a \rightarrow 0} (-\ln a) \quad \text{existiert nicht.}$$

Ebenso existiert das Integral

$$K(b) := \int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

für  $b \in [1, \infty)$  mit der Funktion

$$\begin{aligned} h : [1, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \quad (x \in [1, \infty)) \end{aligned}$$

als uneigentliches Integral (an der oberen Grenze) *nicht*:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx := \lim_{b \rightarrow \infty} K(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b) \quad \text{existiert nicht.}$$

**Definition 6.12** (Uneigentliches Integral)

Seien  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Die Funktion  $f$  sei auf jedem abgeschlossenen und beschränkten Teilintervall  $[\alpha, \beta]$  von  $(a, b)$  R-integrierbar:

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \left[ [\alpha, \beta] \subseteq (a, b) \implies f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]) \right]$$

- (i) Das *uneigentliche Integral*  $\int_a^b f(x) dx$  heißt bei  $a$  bzw. bei  $b$  *konvergent* oder *existent*, falls es Zahlen  $c_1$  bzw.  $c_2 \in (a, b)$  gibt, so daß die folgenden beiden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow a \\ \alpha > a}} \int_\alpha^{c_1} f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ \beta < b}} \int_{c_2}^\beta f(x) dx$$

- (ii) Ist das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  bei  $a$  und bei  $b$  konvergent, dann heißt es *konvergent* oder *existent* schlechthin, und man vereinbart

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\alpha \rightarrow a \\ \alpha > a}} \int_{\alpha}^c f(x) dx + \lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ \beta < b}} \int_c^{\beta} f(x) dx \quad (c \in (a, b)).$$

**Bemerkung**

- (i) Wie bei unendlichen Reihen auch wird hier *ein* Zeichen, nämlich  $\int_a^b f(x) dx$ , einmal für ein Objekt verwendet, welches Konvergenzuntersuchungen zuläßt, zum anderen, im Falle der Konvergenz, für eine Zahl, nämlich den *Wert* des uneigentlichen Integrals.

Entsprechend beinhaltet beispielsweise (Beispiel 6.39)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

zwei Aussagen, nämlich

1.  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  ist konvergent und
  2.  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  hat den Wert 1.
- (ii) Wenn einer der beiden Grenzwerte unter (i) der letzten Definition existiert, dann existiert er für jede Wahl von  $c_1$  bzw.  $c_2$  (natürlich mit einem anderen Wert!).
- (iii) In (ii) der letzten Definition steckt die Behauptung, daß man jede Zahl  $c \in (a, b)$  wählen darf und zum selben Ergebnis kommt.
- (iv) Das uneigentliche Riemann-Integral ist eine echte Erweiterung des (eigentlichen) Riemann-Integralbegriffes in folgendem Sinne:

Ist  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , so ist  $f$  auf  $(a, b)$  auch uneigentlich integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+}^{b-} f(x) dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow a \\ \alpha > a}} \lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ \beta < b}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

*Beweis*

Seien  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann folgt mit der Beschränktheit von  $f$  auf  $[a, b]$  ( $f(x) \leq M$  ( $x \in [a, b]$ )):

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f(x) dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \right| \\
 & \leq \left| \int_a^b f(x) dx - \int_{a_n}^b f(x) dx \right| + \left| \int_{a_n}^b f(x) dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \right| \\
 & = \left| \int_a^b f(x) dx + \int_b^{a_n} f(x) dx \right| + \left| \int_{a_n}^b f(x) dx + \int_{b_n}^{a_n} f(x) dx \right| \\
 & \leq \int_a^{a_n} |f(x)| dx + \int_{b_n}^b |f(x)| dx \\
 & \leq M(|a_n - a| + |b_n - b|) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0
 \end{aligned}$$

Damit braucht man bei dem Zeichen  $\int_a^b f(x) dx$  gar nicht mehr zu überlegen, ob man ein eigentliches Integral (Funktion und Integrationsintervall beschränkt) oder ein uneigentliches Integral (Funktion oder Integrationsintervall unbeschränkt) auszuwerten hat: im ersten Fall liefern beide Definitionen dasselbe Ergebnis.

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 x^2 dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^c x^2 dx + \lim_{b \rightarrow 2} \int_c^b x^2 dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{c^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) + \lim_{b \rightarrow 2} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{c^3}{3} \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( -\frac{a^3}{3} \right) + \lim_{b \rightarrow 2} \left( \frac{b^3}{3} \right) \\
 &= \frac{8}{3} \quad (c \in (0, 2))
 \end{aligned}$$

- (v) Schwieriger sind diejenigen Fälle, in denen man die Existenz des uneigentlichen Integrals nicht dadurch nachweisen kann, daß man seinen Wert über den Hauptsatz einfach ausrechnet, sondern sog. *Vergleichsintegrale* benutzen muß, wie etwa in Beispiel 6.40 geschehen.

**Beispiel 6.42**

(i) Für welche reellen Zahlen  $\gamma$  existiert  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma}$  ?

Für  $0 < \alpha < 1$  ist

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \begin{cases} -\ln \alpha & , \quad \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(1 - \alpha^{1-\gamma}) & , \quad \gamma \neq 1 \end{cases}$$

Daraus folgt, daß  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^\gamma}$  genau dann existiert, wenn  $\gamma < 1$  ist;  
 in diesem Fall erhält man

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{1}{1-\gamma}.$$

(ii) Für welche reellen Zahlen  $\gamma$  existiert  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\gamma}$  ?

Für  $\beta > 1$  ist

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x^\gamma} = \begin{cases} \ln \beta & , \quad \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(\beta^{1-\gamma} - 1) & , \quad \gamma \neq 1 \end{cases}$$

Daraus folgt, daß  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^\gamma}$  genau dann existiert, wenn  $\gamma > 1$  ist;  
 in diesem Fall erhält man

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{1}{\gamma-1}.$$

**6.6.2 Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale**

Wenn man eine Stammfunktion des Integranden kennt, so lassen sich uneigentliche Integrale im Prinzip wie eigentliche Integrale berechnen: auf einem abgeschlossenen und beschränkten Teilintervall des Integrationsintervalles benutzt man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.11), setzt die Grenzen ein und rechnet die entsprechenden Grenzwerte aus, falls sie existieren. So wurde in den Beispielen 6.38 und 6.39 verfahren.

Häufig läßt sich die Konvergenz oder Divergenz eines uneigentlichen Integrals auch ohne explizite Kenntnis einer Stammfunktion nachweisen (Beispiel 6.40).

Dazu benötigt man aber Kriterien, welche nicht auf die Definition zurückgreifen. Die wichtigsten sind Vergleichskriterien, die analog zu Majoranten- und Minorantenkriterium bei unendlichen Reihen gebildet sind.

Wenn im folgenden aus der Konvergenz oder Divergenz eines uneigentlichen Integrals auf die Konvergenz oder Divergenz eines anderen uneigentlichen Integrals geschlossen wird, dann ist das selbstverständlich bei beiden Integralen auf die gleiche(n) Grenze(n) bezogen:

- beide Male auf die untere Grenze oder
- beide Male auf die obere Grenze oder
- beide Male auf beide Grenzen.

**Satz 6.20** (Vergleichskriterien)

Seien  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf jedem abgeschlossenen und beschränkten Teilintervall  $[\alpha, \beta]$  von  $(a, b)$  R-integrierbar:

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \left[ [\alpha, \beta] \subseteq (a, b) \implies f, g \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]) \right]$$

Dann gilt:

(i) *Majorantenkriterium*

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq g(x) \quad (x \in (a, b)) \quad \wedge \quad \int_a^b g(x) \, dx \text{ konvergent} \\ \implies \int_a^b |f(x)| \, dx \text{ konvergent} \end{aligned}$$

(ii) *Minorantenkriterium*

$$\begin{aligned} f(x) \geq g(x) \quad (x \in (a, b)) \quad \wedge \quad \int_a^b g(x) \, dx \text{ divergent} \\ \implies \int_a^b f(x) \, dx \text{ divergent} \end{aligned}$$

**Definition 6.13**

$$\int_a^b f(x) \, dx \text{ heißt absolut konvergent} \quad :\iff \quad \int_a^b |f(x)| \, dx \text{ ist konvergent}$$

Wie bei unendlichen Reihen auch impliziert die absolute Konvergenz die gewöhnliche Konvergenz:

**Satz 6.21**

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ konvergent} \implies \int_a^b f(x) dx \text{ konvergent}$$

**Bemerkung**

Für eigentlich integrierbare, also insbesondere beschränkte Funktionen  $f$  gilt auch die Umkehrung dieses Satzes, d.h. eine (eigentlich) integrierbare Funktion ist genau dann integrierbar, wenn ihr Absolutbetrag integrierbar ist.

Für die Richtung „ $\implies$ “ siehe Satz 6.6 (vii), die Richtung „ $\impliedby$ “ folgt aus

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad (x \in (a, b))$$

und der Monotonie des Integrals (Satz 6.6 (vi)).

Für uneigentliche Integrale gilt die Umkehrung dieses Satzes jedoch *nicht*; ein Gegenbeispiel dazu wird im nächsten Abschnitt untersucht (Satz 6.23 und das daran anschließende Beispiel).

Um die Vergleichskriterien (Satz 6.20) verwenden zu können, benötigt man einige „Vergleichsintegrale“: das sind solche, deren Konvergenz oder Divergenz man kennt und mit deren Hilfe man dann auf die Konvergenz oder Divergenz anderer, unbekannter Integrale schließen kann.

**Satz 6.22** (Vergleichsintegrale)

Seien  $x_0, \gamma \in \mathbb{R}$ .

$$(i) \quad \int_{x_0}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\gamma} \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \gamma < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \gamma \geq 1 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \int_{x_0+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^\gamma} \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \gamma > 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \gamma \leq 1 \end{cases}$$

$$(iii) \quad \int_0^1 x^\gamma \cdot e^{-x} dx \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \gamma > -1 \\ \text{divergent} & \text{für } \gamma \leq -1 \end{cases}$$

$$(iv) \quad \int_1^{\infty} x^\gamma \cdot e^{-x} dx \text{ ist konvergent für alle } \gamma \in \mathbb{R}.$$

*Beweis*

(i) und (ii) lassen sich durch Aufsuchen einer Stammfunktion direkt nachweisen; in Beispiel 6.42 ist das für den Spezialfall  $x_0 = 0$  bereits ausgeführt. Der Beweis von (iii) entspricht im wesentlichen dem Beweis von (i) für  $x_0 = 0$  und Ersetzen von  $\gamma$  durch  $-\gamma$  (warum?).

Der Beweis von (iv) benutzt (ii) und Beispiel 6.42 (ii). Es ist

$$x^\gamma \cdot e^{-x} = x^{\gamma+2} e^{-x} \cdot x^{-2} \leq \max_{x \geq 1} (x^{\gamma+2} e^{-x}) \cdot \frac{1}{x^2} =: g(x),$$

und das Integral  $\int_1^\infty g(x) dx$  existiert nach (ii) und einem Grenzwert, der im ersten Semester untersucht worden ist. Also existiert  $\int_1^\infty x^\gamma \cdot e^{-x} dx$  nach dem Majorantenkriterium.

### Aufgabe

Man führe die Ideen der obigen Beweisskizze explizit aus und vergewissere sich bei jedem Schritt, auf welcher Argumentation dieser basiert.

Die nächsten beiden Beispiele zur Anwendung der Vergleichskriterien sind insofern schwierig, als daß vor der eigentlichen Bearbeitung eine Entscheidung zu treffen ist, welche Vermutung man denn zu beweisen sucht:

- Vermutet man die Konvergenz des vorgelegten Integrals, so muß diese Vermutung mit Hilfe des Majorantenkriteriums (Satz 6.20 (i)) bewiesen werden;
- vermutet man hingegen die Divergenz des vorgelegten Integrals, so muß diese Vermutung mit Hilfe des Minorantenkriteriums (Satz 6.20 (ii)) bewiesen werden.

Dabei hilft Satz 6.22.

### Beispiel 6.43

$$\int_2^\infty \frac{x^2}{x^4 + \cos x} dx \quad \text{ist absolut konvergent.}$$

Idee:

Der Integrand „verhält“ sich im Intervall  $[2, \infty)$  wie  $1/x^2$ , und das ist nach Satz 6.22 (ii) bei  $\infty$  integrierbar.

Für alle  $x \geq 2$  gilt

$$\frac{x^2}{x^4 + \cos x} \leq \frac{x^2}{x^4 - 1} \quad \left( x^4 - 1 \geq \frac{x^4}{2} \quad (x \geq 2) \right) \quad \frac{x^2}{x^4/2} = \frac{2}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \int_2^b \frac{x^2}{x^4 + \cos x} dx &\leq \int_2^b \left| \frac{2}{x^2} \right| dx = \int_2^b \frac{2}{x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{2}{x} \right]_2^b = \left( 1 - \frac{2}{b} \right) \xrightarrow{(b \rightarrow \infty)} 1 \end{aligned}$$

**Beispiel 6.44**

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sin x} \quad \text{ist divergent an der unteren Grenze.}$$

Idee:

Der Integrand „verhält“ sich im Intervall  $(0, 1]$  wie  $1/x$ , und das ist nach Satz 6.22 (i) bei 0 nicht integrierbar.

Für alle  $x \geq 0$  gilt  $\sin x + x \leq x + x = 2x$ , damit folgt für  $x > 0$ :

$$\frac{1}{x + \sin x} \geq \frac{1}{2x}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \int_a^1 \frac{dx}{x + \sin x} &\geq \int_a^1 \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} [\ln x]_a^1 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln a) = -\frac{1}{2} \ln a \xrightarrow{(a \rightarrow 0)} \infty \end{aligned}$$

**Beispiel 6.45** (Gabriels Horn)

*Gabriels Horn* (auch *Torricellis Trompete*) ist ein von dem italienischen Mathematiker Evangelista Torricelli (1608-1647; einem Schüler Galileis, Freund Cavalieris und Erfinder des Barometers) entdeckter Körper, der eine unendliche Oberfläche, aber ein endliches Volumen besitzt, s. Abb. 6.51.<sup>2</sup>

Gabriels Horn entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \geq 1).$$

<sup>2</sup>Der Name leitet sich zum einen aus der einem Blasinstrument ähnelnden Form, zum anderen aus der Tradition her, den Erzengel Gabriel als denjenigen Engel anzusehen, welcher das Horn bläst, um das Jüngste Gericht anzukündigen. Dabei wird die Unendlichkeit des Horns mit der Göttlichkeit an sich assoziiert.

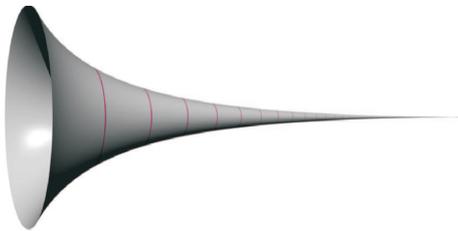


Abbildung 6.51: Gabriels Horn als Posaune, mit welcher der Erzengel Gabriel das Jüngste Gericht ankündigt

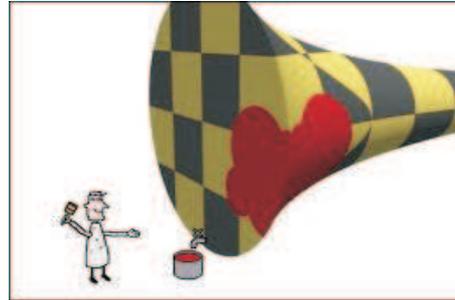


Abbildung 6.52: Füllen von Gabriels Horn mit Farbe

Das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $A$  des Horns berechnen sich wie folgt:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \pi$$

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi [\ln x]_1^{\infty} = \infty$$

Dieses Ergebnis erscheint paradox:

Einerseits braucht man unendlich viel Farbe, um etwa die Innenfläche des Horns vollständig bedecken zu können; andererseits könnte man das Innere des Horns mit einer endlichen Menge Farbe füllen, s. Abb. 6.52.

### Aufgabe

Man überlege sich die Abmessungen jeweils eines Zylinders, der

- (i) ein endliches Volumen und eine beliebig große Oberfläche hat;
- (ii) ein beliebig kleines Volumen und eine endliche Oberfläche hat;
- (iii) ein beliebig kleines Volumen und eine beliebig große Oberfläche hat.

### Lösung

- (i) Länge:  $R^2$  , Radius:  $1/R$  ( $R > 0$  geeignet)
- (ii) Länge: ? , Radius: ?
- (iii) Länge: ? , Radius: ?

### 6.6.3 Uneigentliche Integrale und unendliche Reihen

Die Konvergenzkriterien des letzten Abschnittes deuten auf einen Zusammenhang zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen hin. Dieser Zusammenhang ist tatsächlich gegeben, und manche Konvergenzuntersuchungen unendlicher Reihen lassen sich mit Hilfe uneigentlicher Integrale durchführen und umgekehrt.

**Definition 6.14** (charakteristische Funktion)

Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ . Die *charakteristische Funktion*  $\chi_{\mathcal{M}}$  von  $\mathcal{M}$  ist definiert durch

$$\chi_{\mathcal{M}}(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathcal{M} \\ 1 & , \quad x \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Satz 6.23**

Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Zahlenfolge.

Sei  $f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \chi_{[n-1, n)}$ , also  $f(x) = a_n$  für  $x \in [n-1, n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Dann gilt:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \text{ ist konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent,}$$

und im Falle der Konvergenz gilt  $\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

*Beweisidee*

Für alle  $b \in \mathbb{N}$  ist  $\int_0^b f(x) dx = \sum_{n=1}^b f(n) \cdot 1 = \sum_{n=1}^b a_n$  (Abb. 6.53).

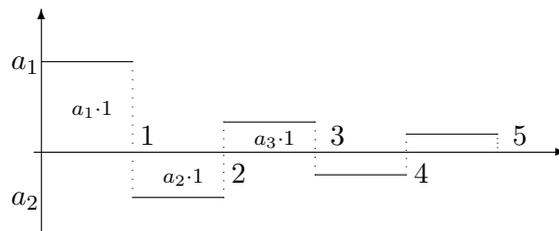


Abbildung 6.53: Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale

(i) „ $\implies$ :“

Konvergiert  $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} f(x) dx$ , dann gilt auch

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(ii) „ $\Leftarrow$ :“

Ist umgekehrt die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, dann existiert der *spezielle* Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) dx.$$

Es bleibt zu zeigen, daß Grenzwerte mit anderen Folgen zum selben Ergebnis führen.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man beispielsweise die Kenntnis uneigentlicher Integrale zur Konvergenzuntersuchung unendlicher Reihen heranziehen:

### Beispiel 6.46

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}} \quad \text{ist} \quad \begin{cases} \text{konvergent, falls } \gamma > 1 \\ \text{divergent, falls } \gamma \leq 1 \end{cases}$$

*Beweis*

Für  $\gamma \leq 0$  gilt  $\neg \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\gamma}} = 0 \right)$ , also ist das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen verletzt.

Sei also  $\gamma > 0$ . Seien weiter (Abb. 6.54)

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}} \cdot \chi_{[n-1, n)}$$

$$g(x) := \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^{\gamma}} & , \quad 1 < x \end{cases}$$

$$h(x) := \frac{1}{(x+1)^{\gamma}} \quad (x \in (0, \infty))$$

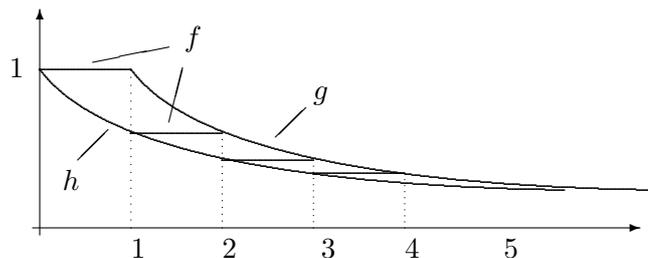


Abbildung 6.54: Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale

Dann ist  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  ( $x \in (0, \infty)$ ). Mit den Vergleichsintegralen des letzten Abschnittes (Satz 6.22) folgt:

$$\int_0^{\infty} g(x) dx \text{ konvergent} \iff \gamma > 1,$$

$$\int_0^{\infty} h(x) dx \text{ divergent} \iff 0 < \gamma \leq 1.$$

Somit ist  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  und damit  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$

$$\text{konvergent} \iff \gamma > 1$$

$$\text{divergent} \iff 0 < \gamma \leq 1.$$

### Aufgabe

Mit Hilfe von Satz 6.23 zeige man die Divergenz

(i) der unendlichen Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ .

(ii) des uneigentlichen Integrals  $\int_0^{\infty} \ln \frac{x}{1+x} dx$ .

### 6.6.4 Euler'sche Gammafunktion

Die *Euler'sche Gammafunktion* stellt eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie der uneigentlichen Integrale dar. Sie ist die Lösung des folgenden Problems:

Gibt es eine auf  $(0, \infty)$  definierte reellwertige Funktion  $f$ , welche die Fakultäten interpoliert, d.h. eine Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $f(n) = n!$  ( $n \in \mathbb{N}$ )?

#### Lemma

Für jedes  $x > 0$  existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt.$$

*Beweis*

(i) Nach Satz 6.22 (iii) existiert  $\int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$  für  $x - 1 > -1 \iff x > 0$ .

(ii) Nach Satz 6.22 (iv) existiert  $\int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) Also existiert

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

für alle  $x > 0$ .

### Definition 6.15

Die Funktion  $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \quad (x \in (0, \infty))$$

heißt *Euler'sche Gammafunktion*.

Der folgende Satz beinhaltet die charakteristische Funktionalgleichung der Gammafunktion und löst damit die Interpolationsaufgabe für die Fakultäten:

### Satz 6.24

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

*Beweis*

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a \leq 1 < b$ . Dann ergibt sich mit partieller Integration für  $x > 0$

$$\int_a^b e^{-t} \cdot t^x dt = -\left[e^{-t} \cdot t^x\right]_a^b + x \cdot \int_a^b e^{-t} \cdot t^{x-1} dt,$$

also gilt für solche  $x$

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^x dt}_{\Gamma(x+1)} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b e^{-t} \cdot t^x dt = 0 + x \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt}_{\Gamma(x)},$$

also  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ , d.h. die Behauptung.

**Folgerung**

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

*Beweis* (mit vollständiger Induktion)

1. Für  $n = 0$  ist  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$ .

2. Für eine Zahl  $n \geq 0$  gelte  $\Gamma(n+1) = n!$ .

3. Dann folgt aus der Funktionalgleichung die Beziehung

$$\Gamma(n+2) = (n+1) \cdot \Gamma(n+1) = (n+1) \cdot n! = (n+1)! .$$

Aus der Funktionalgleichung folgt ferner für alle  $x > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= (x+n-1) \cdot \Gamma(x+n-1) \\ &= (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \Gamma(x+n-2) \\ &\vdots \\ &= (x+n-1) \cdot \dots \cdot (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x) \end{aligned}$$

Diese Beziehung läßt sich zur Definition von  $\Gamma(x)$  für  $x < 0$  verwenden:

**Definition 6.16**

Zu  $x < 0$ ,  $x \notin \mathbb{Z}$ , bestimme man die Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 < x+n < 1$  und setze

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+n)}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} ;$$

damit ist dann  $D(\Gamma) = \{x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}\}$  (Abb. 6.55).

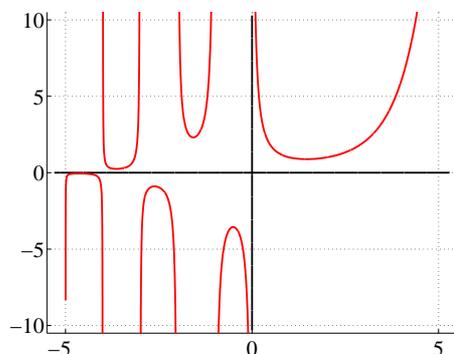


Abbildung 6.55: Euler'sche Gamma-Funktion

## 6.7 Numerische Integration

Sind  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ , so besitzt  $f$  dort eine Stammfunktion, etwa für  $a \in \mathcal{I}$ :

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

Es kann nun allerdings sein – und ist geradezu der Regelfall –, daß die explizite Angabe einer Stammfunktion durch unbestimmte Integration nicht ausgeführt werden kann, genauer: zu einem stetigen Integranden läßt sich nicht immer eine Stammfunktion im Bereich der „elementaren“ Funktionen (rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen oder deren Umkehrungen sowie aus diesen Funktionen zusammengesetzte Funktionen) finden.

Schon so unverfänglich anmutende Integrale wie

$$\int e^{-t^2} dt, \quad \int \frac{e^t}{t} dt, \quad \int \frac{\sin t}{t} dt, \quad \int \frac{1}{\ln t} dt$$

lassen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken. Eine Möglichkeit, solchen Integralen beizukommen, ist eine Potenzreihenentwicklung des Integranden mit anschließender gliedweiser Integration. So erhält man z.B.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ist eine Potenzreihenentwicklung des Integranden nicht möglich, so muß das Integral anders ausgewertet werden.

Im folgenden sollen dazu zwei Verfahren der *numerischen Integration* qualitativ vorgestellt werden. Grundsätzlich gehen sie zurück auf die schon bekannte Flächenberechnung durch geeignete Ober- oder Untersummen bzw. Riemann'sche Summen.

### 6.7.1 Rechtecks- und Trapezregeln

Die Riemann'schen Summen bieten ein einfaches, aber bereits sehr brauchbares Mittel zur numerischen Approximation von  $\int_a^b f(x) dx$  mit  $a < b$ . Die Zerlegung

des Intervalles  $\mathcal{I}$  werde äquidistant ( $(n + 1)$  Teilungspunkte  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ) gewählt. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$f_k := f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \quad (k \in \{0, \dots, n\}).$$

Von den vielen Möglichkeiten der Bildung Riemann'scher Summen seien 3+1 notiert (Abb. 6.56 - 6.59):

$$L_n := \frac{b-a}{n} (f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1})$$

$$R_n := \frac{b-a}{n} (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

$$T_n := \frac{b-a}{n} (f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{n-(1/2)})$$

$$\begin{aligned} S_n &:= \frac{1}{2}(L_n + R_n) \\ &= \frac{b-a}{n} \left( \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \dots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n \right) \end{aligned}$$

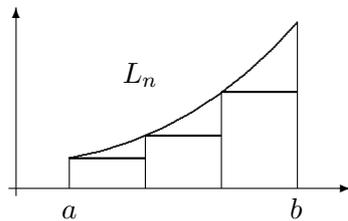


Abbildung 6.56: Approximation einer Fläche durch eine Untersumme

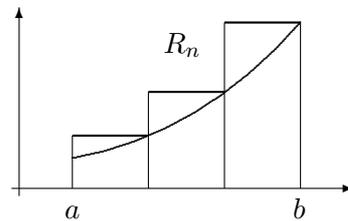


Abbildung 6.57: Approximation einer Fläche durch eine Obersumme

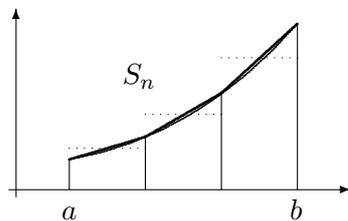


Abbildung 6.58: Approximation einer Fläche durch Trapeze aus Sehnen

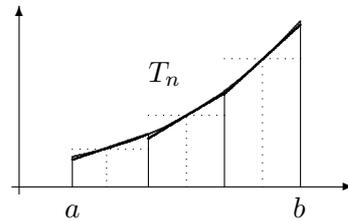


Abbildung 6.59: Approximation einer Fläche durch Trapeze aus Tangenten

Durchweg gilt

$$L_n, R_n, S_n, T_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_a^b f(x) dx.$$

Die ersten beiden dieser Aussagen heißen *Rechtecks-*, die letzten beiden *Trapezregeln*. Die Rechtecksregeln verwenden zur Approximation des Integrals Polynome 0. Grades (Treppenfunktionen), die Trapezregeln verwenden Polynome 1. Grades (lineare Funktionen).

Man erhält die Fehlerabschätzungen

$$\int_a^b f(x) dx - S_n = -f''(\eta_1) \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \quad (\eta_1 \in [a, b] \text{ geeignet}),$$

$$\int_a^b f(x) dx - T_n = f''(\eta_2) \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (\eta_2 \in [a, b] \text{ geeignet}).$$

### 6.7.2 Simpson'sche Regel

Nimmt man zur Approximation der zu integrierenden Funktion Polynome höheren Grades, so lassen sich bessere Resultate erwarten, allerdings unter Inkaufnahme eines größeren Rechenaufwandes.

In einem Teilintervall  $[\alpha, \beta]$  von  $[a, b]$  wird als approximierendes Polynom ein solches höchstens zweiten Grades gewählt, welches an den Stellen

$$x_0 := \alpha \quad , \quad x_1 := \frac{\alpha + \beta}{2} \quad , \quad x_2 := \beta$$

dieselben Werte wie  $f$  hat, nämlich

$$y_0 := f(\alpha) \quad , \quad y_1 := f(x_1) \quad , \quad y_2 := f(\beta).$$

Nach der Newton'schen Interpolationsformel ist ein solches Polynom eindeutig bestimmt. Es ist

$$p_2(x) = y_0 + \frac{2}{\beta - \alpha}(y_1 - y_0)(x - \alpha) + \frac{2}{(\beta - \alpha)^2}(y_2 - 2y_1 + y_0)(x - \alpha)(x - x_1)$$

Infolgedessen ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} p_2(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[ f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right]$$

ein Näherungswert für  $\int_a^b f(x) dx$ .

Diese Regel zur näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals heißt *Kepler'sche Faßregel*<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Johannes Kepler (1571 - 1630) entwickelte diese Regel anlässlich des Problems, den Rauminhalt von Weinfässern zu berechnen.

Sind  $f \in \mathcal{C}^3([a, b])$ ,  $M_3 := \sup_{[\alpha, \beta]} |f'''(x)|$ , so erhält man die Abschätzungsformel

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \frac{\beta - \alpha}{6} \left[ f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right] \right| \leq \frac{M_3}{24^2} (\beta - \alpha)^4.$$

Unter Benutzung der Existenz der vierten Ableitung von  $f$  läßt sich die Fehlerschranke auf

$$f^{(4)}(\eta) \cdot \frac{(\beta - \alpha)^5}{5 \cdot 24^2} \quad (\eta \in [\alpha, \beta] \text{ geeignet})$$

drücken. Diese Abschätzung hat zudem den Vorteil, daß sie auch über das Vorzeichen des Fehlers Auskunft gibt.

Trivialerweise ist der Fehler Null, wenn  $f$  ein Polynom zweiten Grades ist. Das Bemerkenswerte an der letzten Abschätzung ist, daß der Fehler auch dann Null ist, wenn  $f$  ein Polynom dritten Grades ist.

Die Kepler'sche Faßregel wird nun dadurch verfeinert, daß das Intervall  $[a, b]$  in  $n$  äquidistante Teilintervalle  $[\alpha_k, \beta_k]$  unterteilt und auf jedes der Teilintervalle einzeln die Faßregel angewandt wird:

$$\alpha_k = a + \frac{k-1}{n} (b-a) \quad , \quad \beta_k = a + \frac{k}{n} (b-a) \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

Unter Zugrundelegung der nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an  $f$  erhält man die sog. *Simpson'sche Regel*

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{6}(2S_n + 4T_n) = -f^{(4)}(\eta) \cdot \frac{(\beta - \alpha)^5}{2880 \cdot n^4} \quad (\eta \in [a, b] \text{ geeignet}).$$

Dabei wurde von der folgenden Beziehung Gebrauch gemacht:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f_{k-1} + 4f_{k-(1/2)} + f_k) = 2S_n + 4T_n.$$

### Bemerkung

Sowohl bei den Trapezregeln ( $n^2$  im Nenner der Abschätzung) als auch bei der Simpson-Regel ( $n^4$  im Nenner der Abschätzung) läßt sich durch eine hinreichend feine Intervallunterteilung die Approximationsgenauigkeit beliebig weit treiben. Allerdings steigt dabei auch der Rechenaufwand erheblich an.

# Kapitel 7

## Fourier-Analyse

### 7.1 Fourier-Reihen

#### 7.1.1 Begriff der Fourier-Reihe

##### 7.1.1.1 Einführung

Bei einer lokalen Störung des Gleichgewichtes in einem elastischen Medium entstehen periodische Schwingungen der Mediumteilchen um ihre Ruhelage. Die Übertragung dieser Störung infolge Kopplung auf benachbarte Teilchen bewirkt eine periodische Zustandsänderung, welche sich im Raum oder in Materie fortpflanzt. Solch eine Zustandsänderung bezeichnet man als eine *Welle*. Befindet sich die Frequenz dieser Zustandsänderung im hörbaren Bereich (20 Hz - 20 kHz), so spricht man von einer *akustischen Welle* oder einer *Schallwelle*. Ausgehend von der Schwingungsquelle, breitet sich eine Schallwelle in einem Medium (etwa: Luft oder Wasser) aus; diese versetzt unser Trommelfell in Schwingungen, und wir können einen Ton hören.

Ein (*reiner*) *Ton* besteht aus harmonischen, d.h. sinusförmigen Druck- oder Dichteänderungen eines Mediums, welche etwa durch eine harmonische Schwingung hervorgerufen werden; insbesondere stellt ein Ton also eine periodische Dichteänderung des Mediums dar. Die Frequenz eines Tones wird als seine *Tonhöhe* -, seine Amplitude auch als *Intensität* bezeichnet.

Ein *Klang* besteht aus mehreren Tönen verschiedener Intensität, wobei die Frequenzen der einzelnen Teiltöne oder *Obertöne* ganzzahlige Vielfache der Frequenz des tiefsten Tones (*Grundton*) sind. Die meisten Musikinstrumente liefern Klänge, z.B. das Anschlagen von nur einer Klaviersaite. In diesem Sinne ist also ein Dur-Dreiklang keine Superposition dreier Töne, sondern schon eine Superposition dreier Klänge. Die Obertöne und ihre jeweiligen Intensitäten bestimmen dabei die *Klangfarbe* eines Instrumentes.

Ein aus Frequenz und zugehöriger Intensität eines Klanges bestehendes Diagramm nennt man ein *akustisches Spektrum* oder *Klangspektrum*. Demnach liefert ein Klang ein *Linienspektrum*.

Das Analysieren eines Klangspektrums bedeutet das Zerlegen eines Klanges in seine einzelnen Teiltöne. Mathematisch bedeutet es die Zerlegung der den Klang erzeugenden Funktion in harmonische Teilschwingungen. Die Entwicklung einer periodischen Funktion in eine (i.a. unendliche) Reihe harmonischer Schwingungen bezeichnet man als *Fourier-Analyse*.

**Bemerkung** (Bedeutung der Fourier-Analyse für die Nachrichtentechnik)

Fundamental für die Nachrichtentechnik ist das sog. *Fourier-Prinzip*:

Jede Schwingung (Signal) kann so aufgefaßt werden, als sei sie aus lauter Sinus-Schwingungen verschiedener Frequenzen und Stärken (Amplituden) zusammengesetzt.

Das gilt auch für nichtperiodische Schwingungen oder einmalige Signale. Aufgrund dieses Prinzips werden alle Schwingungen bzw. Signale zweckmäßigerweise aus zwei Perspektiven betrachtet, und zwar dem

- *Zeitbereich*                    sowie dem
- *Frequenzbereich*.

Im *Zeitbereich* wird angegeben, welche Momentanwerte ein Signal innerhalb einer bestimmten Zeitspanne besitzt (Zeitverlauf der Momentanwerte). Im *Frequenzbereich* wird das Signal durch diejenigen Sinus-Schwingungen beschrieben, aus denen es zusammengesetzt ist.

Stark vereinfachend läßt sich sagen: Unsere Augen sehen das Signal im Zeitbereich auf dem Bildschirm eines Oszilloskopes, unsere Ohren dagegen arbeiten im Frequenzbereich.

Die Bedeutung des Fourier-Prinzips für die Nachrichtentechnik beruht dabei auf dessen Umkehrung:

Will man wissen, wie beliebiges (Übertragungs-) System auf irgendein Signal reagiert, so muß man nur wissen, wie es auf Sinus-Schwingungen reagiert, weil ja jedes Signal aus lauter Sinus-Schwingungen aufgebaut ist.

### Definition 7.1

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $T \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

$f$  heißt *periodisch mit der Periode  $T$*  oder  *$T$ -periodisch*, wenn gilt:

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{G}} \left[ x + T \in \mathcal{G} \implies f(x + T) = f(x) \right].$$

**Beispiele 7.1**

(i) 
$$f(x) := |\sin x| \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  periodisch mit der Periode  $\pi$  (*kommutierte - oder gleichgerichtete Sinusschwingung*).

(ii) Seien  $T > 0$  und  $\omega := \frac{2\pi}{T}$ . Dann gilt:

$$f_1(x) := \sin n\omega x \quad \text{und} \quad f_2(x) := \cos n\omega x \quad (x \in \mathbb{R})$$

sind für  $T > 0, n \neq 0$  auf ganz  $\mathbb{R}$  periodisch mit der Periode  $p := \frac{T}{n}$  – insbesondere natürlich für  $n \in \mathbb{N}$  –, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin n\omega x = \sin n \frac{2\pi}{T} x = \sin \left( n \frac{2\pi}{T} x + 2\pi \right) \\ &= \sin n \frac{2\pi}{T} \left( x + \frac{T}{n} \right) = f_1(x + p); \end{aligned}$$

analog für die Funktion  $f_2$ .

**Bemerkung**

- (i) Ist eine Funktion  $T$ -periodisch, so ist sie auch periodisch mit der Periode  $k \cdot T$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); Beweis etwa mit vollständiger Induktion.
- (ii) Die kleinste positive Periode einer periodischen Funktion heißt ihre *Elementarperiode*.
- (iii) Haben  $f$  und  $g$  die Periode  $T$ , dann auch

$$\lambda \cdot f \quad , \quad f + g \quad , \quad f - g \quad , \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g}.$$

**7.1.1.2 Euler-Fourier'sche Formeln im Reellen****Definition 7.2**(i) Seien  $N \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ . Ein Ausdruck der Form

$$Tr(N, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

heißt ein (reelles) *trigonometrisches Polynom*. Die in der Formel auftretende Zahl  $N$  heißt *Ordnung* oder *Grad* des trigonometrischen Polynoms.

(ii) Seien  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zwei reelle Zahlenfolgen. Ein Ausdruck der Form

$$Tr(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

heißt eine (reelle) *trigonometrische Reihe*.

In diesem Abschnitt werden einige *notwendige* Bedingungen hergeleitet, welche sich aus der Konvergenz einer trigonometrischen Reihe ergeben. Dazu wird angenommen, die obige trigonometrische Reihe konvergiere im Intervall  $[-\pi, \pi]$ , ihr Wert werde mit  $f(x)$  bezeichnet:

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in [-\pi, \pi]). \quad (7.1)$$

### Frage

Gibt es eine Formel, mit welcher sich die Koeffizienten  $a_n, b_n$  in Abhängigkeit von der Summenfunktion  $f$  ausdrücken lassen?

Erinnert werde an die folgenden sog. *Orthogonalitätsrelationen* der trigonometrischen Funktionen (diese Bezeichnung wird später verständlich werden):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx &= 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}_0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 0 & , \quad m = n = 0 \\ \pi & , \quad m = n \geq 1 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 2\pi & , \quad m = n = 0 \\ \pi & , \quad m = n \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Reihendarstellung (7.1) von  $f$  wird jetzt einmal mit  $\sin mx$ , einmal mit  $\cos mx$  multipliziert ( $x \in [-\pi, \pi]$ ):

$$f(x) \sin mx = \frac{a_0}{2} \sin mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) \quad (7.3)$$

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$$

Weitere Voraussetzungen

- (a) Die Funktionen  $f(\cdot) \cdot \sin(\cdot)$  und  $f(\cdot) \cdot \cos(\cdot)$  seien auf  $[-\pi, \pi]$  integrierbar; das ist z.B. dann gesichert, wenn  $f$  selbst dort integrierbar ist (warum?).
- (b) die beiden Reihen (7.3) können gliedweise integriert werden (etwa, weil sie auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergent sind).

Unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen (7.2) erhält man dann die Beziehungen ( $m \in \mathbb{N}_0$ ):

$$(i) \quad m = 0 : \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi$$

$$(ii) \quad m \neq 0 : \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin mx dx = b_m \cdot \pi$$

$$(iii) \quad m \neq 0 : \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx dx = a_m \cdot \pi$$

Das bisher erzielte Ergebnis wird im folgenden Satz festgehalten:

**Satz 7.1**

Die trigonometrische Reihe

$$Tr(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

sei auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergent und habe dort den Wert  $f(x)$  (die Funktion  $f$  ist dann stetig!). Dann gelten für die Koeffizienten die sog. *Euler-Fourier'schen Formeln*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx & (n \in \mathbb{N}_0) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx & (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Man erkennt jetzt auch, warum das Anfangsglied  $a_0$  der trigonometrischen Reihe mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  versehen wurde: bei dieser Schreibweise gelten die Formeln (7.4) für  $a_n$  auch noch für  $n = 0$ .

Zur Herleitung der Euler-Fourier'schen Formeln ist man von einer (gegen eine stetige Grenzfunktion  $f$ ) gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe

$$Tr(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ausgegangen, welche, nach Multiplikation mit den Größen  $\sin mx$  bzw.  $\cos mx$ , gliedweise integriert wurde.

Dieser Prozeß wird jetzt umgekehrt. Sei dazu  $f$  eine auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  integrierbare Funktion, d.h.  $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$ .

**Beh.**  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$  und  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx$  existieren für  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Bew.** Produkte integrierbarer Funktionen sind integrierbar.

Es lassen sich also für Funktionen  $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$  die Koeffizienten  $a_n, b_n$  mit Hilfe der Integralformeln (7.4) *definieren*. Diese Zahlen heißen die *Fourier-Koeffizienten der Funktion  $f$* . Mit ihnen bildet man nun die formale trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

welche man die *Fourier-Reihe von  $f$*  nennt.

Die so gebildete Reihe braucht selbstverständlich nicht zu konvergieren, und selbst wenn sie für gewisse Werte von  $x$  konvergiert, so braucht ihre Summe nicht gleich  $f(x)$  zu sein. Eines der wichtigsten Probleme der Theorie der Fourier-Reihen besteht gerade darin, Bedingungen zu finden, unter denen

- die Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert;
- der Wert der Fourier-Reihe von  $f$  gleich  $f(x)$  ist.

Um kurz auszudrücken, daß eine trigonometrische Reihe die Fourier-Reihe der Funktion  $f$  ist, schreibt man

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Hierdurch wird jedoch in gar keiner Weise eine Aussage über die Konvergenz und den evtl. vorhandenen Wert der rechts stehenden Reihe gemacht! Es wird damit lediglich ausgedrückt, daß die Zahlen  $a_n, b_n$  die Fourier-Koeffizienten von  $f$  sind.

Die formale Entwicklung der obigen Reihe bezeichnet man als die *Entwicklung* einer Funktion in ihre Fourier-Reihe.

**Aufgabe**

- (i) Sind  $f, g \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$  und gilt  $f(x) = g(x)$  an allen bis auf höchstens endlich vielen Stellen des Intervalles, so haben  $f$  und  $g$  dieselben Fourier-Reihen.
- (ii) Ist  $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$  und  $f$  periodisch mit der Periode  $2\pi$ , so läßt sich zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten von  $f$  irgendein Intervall der Länge  $2\pi$  verwenden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

Hinweis: Für jede Funktion  $g \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$  und jede Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^a g(x) \, dx + \int_a^{a+2\pi} g(x) \, dx + \int_{a+2\pi}^{\pi} g(x) \, dx ,$$

danach verwende man eine Substitution für das letzte Integral.

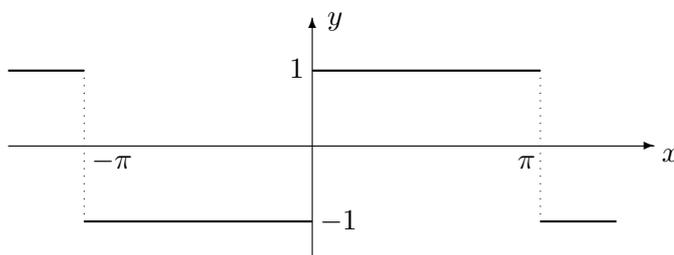
**Beispiel 7.2** (Rechteckspannung)

Abbildung 7.1: Rechteckspannung

$$f(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x \in [-\pi, 0) \\ 1 & , \quad x \in [0, \pi) \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(a) Berechnung der Koeffizienten  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} dx \right) = \frac{1}{\pi} ((-1)\pi + \pi) = 0 \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} \\
 &= 0 \quad (n \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

(b) Berechnung der Koeffizienten  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos(-n\pi) - \frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \\
 &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \quad \text{gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & , \quad n = 2k - 1 \quad \text{ungerade} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe der Rechteckspannung (Abb. 7.2 - 7.5):

$$\begin{aligned}
 f &\sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x \\
 &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)
 \end{aligned}$$

**Beispiel 7.3** (kommutierte Sinusschwingung)

$$f(x) := |\sin x| \quad (x \in [-\pi, \pi)) \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

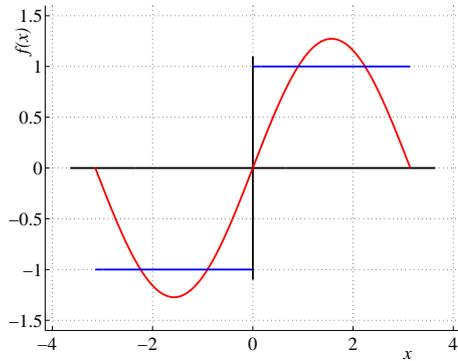
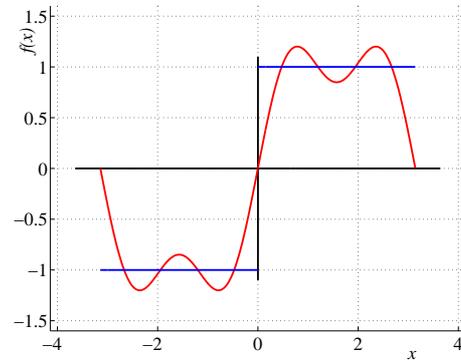
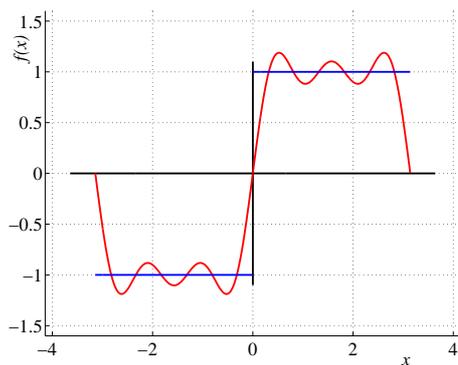
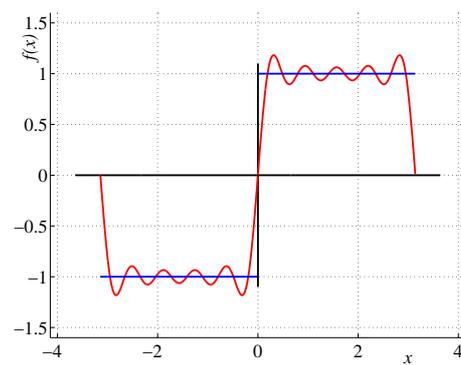
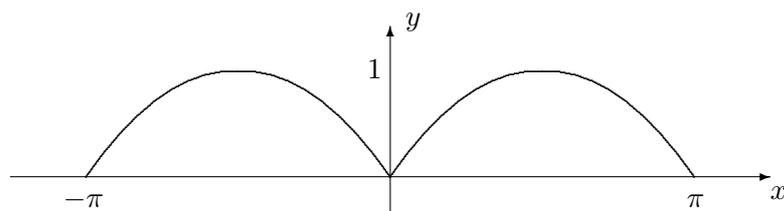
Abbildung 7.2: Rechteckspannung:  
GrundschiwingungAbbildung 7.3: Rechteckspannung:  
Grundschiwingung mit 1. OberschiwingungAbbildung 7.4: Rechteckspannung:  
Grundschiwingung mit 1. und 2. OberschiwingungAbbildung 7.5: Rechteckspannung:  
Grundschiwingung mit 1. bis 4. Oberschiwingung

Abbildung 7.6: Kommutierte Sinusschiwingung

(a) Berechnung der Koeffizienten  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-\sin x) \cdot \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin nx \, dx \right)$$

Auf das erste Integral wird die Substitution

$$x := g(t) = -t \quad , \quad dx = -dt$$

angewandt, und man erhält

$$\begin{aligned} - \int_{-\pi}^0 \sin x \cdot \sin nx \, dx &= - \int_{\pi}^0 \sin(-t) \cdot \sin(-nt) (-dt) \\ &= \int_{\pi}^0 \sin t \cdot \sin nt \, dt = - \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin nt \, dt, \end{aligned}$$

also das negative des zweiten Integrals. Insgesamt folgt somit

$$b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Berechnung der Koeffizienten  $a_n$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-\sin x) \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( [\cos x]_{-\pi}^0 + [-\cos x]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 1 - (-1) - ((-1) - 1) \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-\sin x) \cdot \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx \, dx \right) \\
&\qquad\qquad\qquad \left[ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -(\sin(1-n)x + \sin(1+n)x) \, dx \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \int_0^{\pi} (\sin(1-n)x + \sin(1+n)x) \, dx \right] \\
&\stackrel{(n \neq 1)}{=} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-n} \cos(1-n)x + \frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \right]_{-\pi}^0 \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{1-n} \cos(1-n)x - \frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \cos(1-n)\pi - \frac{1}{1+n} \cos(1+n)\pi \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{1}{1-n} \cos(1-n)\pi - \frac{1}{1+n} \cos(1+n)\pi + \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] + \frac{1}{1-n} [1 - (-1)^{n-1}] \right) \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k+1 \quad \text{ungerade, } n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{n+1} + \frac{2}{1-n} \right) & , \quad n = 2k \quad \text{gerade} \end{cases} \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) \quad \text{für gerades } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\
&= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2-1} \quad \text{für gerades } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Es bleibt der oben noch ausgelassene Fall  $n = 1$  zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-\sin 2x) \, dx + \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left( \left[ \cos 2x \right]_{-\pi}^0 + \left[ -\cos 2x \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} [(1-1) - (1-1)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Bei der Berechnung der Koeffizienten  $a_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ergab sich sowieso schon  $a_n = 0$  für ungerade Indices  $n$ . Warum muß der Fall  $n = 1$  dennoch separat untersucht werden?

Damit lautet die Fourier-Reihe der kommutierten Sinusschwingung (Abb. 7.7 - 7.10):

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi} + \left(-\frac{4}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2kx \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right) \end{aligned}$$

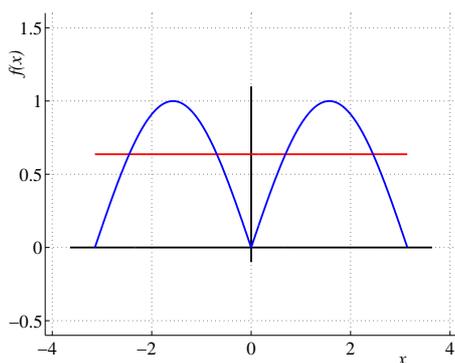


Abbildung 7.7: Kommutierte Sinusschwingung: Grundschwingung

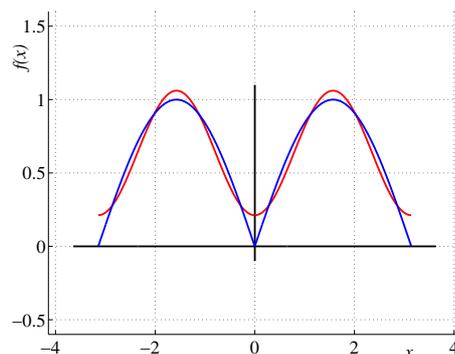


Abbildung 7.8: Kommutierte Sinusschwingung: Grundschwingung mit 1. Oberschwingung

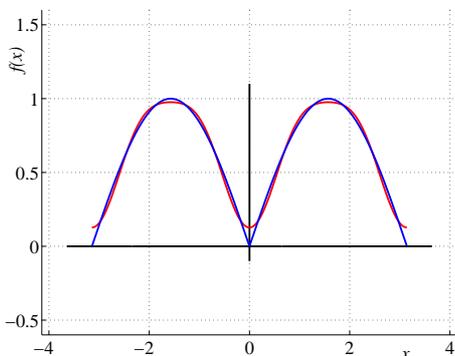


Abbildung 7.9: Kommutierte Sinusschwingung: Grundschwingung mit 1. und 2. Oberschwingung

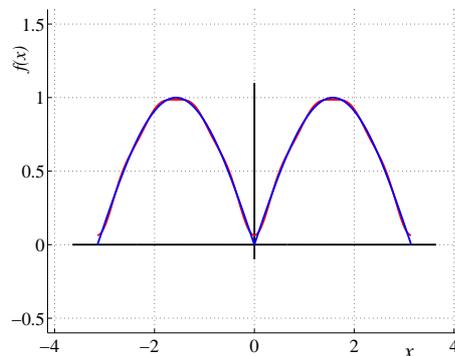


Abbildung 7.10: Kommutierte Sinusschwingung: Grundschwingung mit 1. bis 4. Oberschwingung

**Bemerkung**

- (i) Die Rechteckschwingung (Beispiel 7.2) enthält Sprünge in „unendlich kurzer Zeit“, etwa von  $-1$  bis  $1$  oder umgekehrt. Um „unendlich schnelle“ Übergänge mit Hilfe von Sinus-Schwingungen modellieren zu können, müssen auch Sinus-Schwingungen beliebig hoher Frequenz vorhanden sein:

Schwingungen oder Signale mit Sprüngen (= Übergänge in „unendlich kurzer Zeit“) enthalten (theoretisch) auch Sinus-Schwingungen beliebig hoher Frequenz.

- (ii) Physikalisch betrachtet, gibt es nun keine Sinus-Schwingungen beliebig hoher Frequenz. Daher kann es in der Natur auch keine Schwingungen oder Signale mit „unendlich“ schnellen Übergängen geben:

In der Natur braucht alles seine Zeit, auch Sprünge bzw. Übergänge, denn sie sind stets mit einem Energiefluß verbunden. Alle realen Schwingungen oder Signale sind deshalb frequenzmäßig beschränkt.

- (iii) Wie Abb. 7.5 zeigt, ist die Differenz zwischen dem idealen (periodischen) Signal und der Summenkurve dort am größten, wo die schnellsten Übergänge bzw. Sprünge sind:

Die im Spektrum enthaltenen Sinus-Schwingungen hoher Frequenz dienen in der Regel dazu, schnelle Änderungen oder Übergänge zu modellieren.

- (iv) Hieraus folgt natürlich auch:

Schwingungen oder Signale, die keine schnellen Änderungen oder keine schnellen Übergänge aufweisen, enthalten auch keine hohen Frequenzen.

- (v) Die Koeffizienten der Fourier-Reihe der kommutierten Sinusschwingung (Beispiel 7.3) gehen „schneller“ gegen Null als die Koeffizienten der Reihe der Rechteckspannung (Beispiel 7.2), d.h. die entsprechende Fourier-Reihe konvergiert „besser“. Das hat mit der Güte der jeweiligen Funktionen zu tun und wird in Abschnitt 7.1.3 untersucht werden.

**Bemerkung**

- (i) In der Schwingungslehre bedeutet die Variable  $x$  oft die Zeit  $t$  und  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  die Kreisfrequenz zur Periode  $T$ . Betrachtet man das Periodizitätsintervall  $[0, T]$  oder  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , so lautet die Fourier-Reihe einer Funktion  $f$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{T/2} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{T/2} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt$$

In diesem Zusammenhang nennt man die graphische Darstellung, in welcher die Koeffizienten  $a_n$  oder  $b_n$  über  $n$  aufgetragen werden, *diskretes Spektrum* oder *Linienspektrum* von  $f$ . So ist das Linienspektrum der Rechteckspannung von Beispiel 7.2 gegeben durch die Abbildung 7.11.

- (ii) Alle periodischen Schwingungen/Signale enthalten als Sinus-Komponenten nur die ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz, da nur diese in das Zeitraster der Periodendauer  $T$  passen. Bei periodischen Schwingungen müssen sich ja alle in ihnen enthaltenen Sinus-Schwingungen nach einer Periodendauer  $T$  in gleicher Weise wiederholen. Daher gilt:

Periodische Signale besitzen ein Linienspektrum.

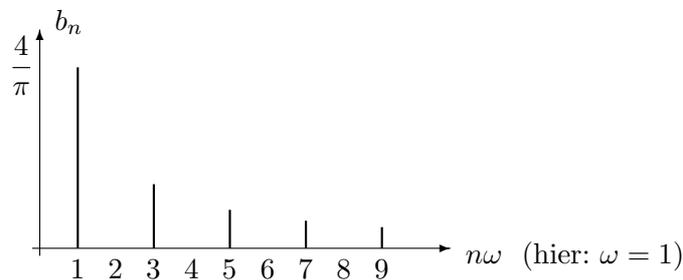


Abbildung 7.11: Linienspektrum der Rechteckspannung

### Bemerkung

In Beispiel 7.2 sind die Koeffizienten  $a_n = 0$ , in Beispiel 7.3 sind die Koeffizienten  $b_n = 0$ . Weiterhin treten von den nichttrivialen Koeffizienten auch nicht alle auf: in Beispiel 7.2 sind die Koeffizienten  $b_n = 0$  für gerade Indices  $n$ , in Beispiel 7.3 sind die Koeffizienten  $a_n = 0$  für ungerade Indices  $n$ .

Das liegt an Symmetrieeigenschaften der untersuchten Funktionen, welche sich in „ihren“ Fourier-Reihen widerspiegeln. Diese Korrespondenz wird im folgenden Abschnitt untersucht.

### 7.1.2 Symmetrieeigenschaften bei Fourier-Reihen

Die beiden Beispiele des letzten Abschnittes – Beispiele 7.2 und 7.3 – sind Beispiele für eine ungerade - und eine gerade Funktion. Die Fourier-Reihe der

ersten Funktion besteht nur aus ungeraden Funktionen („reine Sinusreihe“), die der zweiten nur aus geraden Funktionen („reine Kosinusreihe“).

Das ist kein Zufall, das Symmetrieverhalten einer Funktion pflanzt sich auf ihre Fourier-Reihe fort. Man beachte ein analoges Resultat bei der Entwicklung einer Funktion in ihre Taylor-Reihe

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ungerade (gerade) Funktionen haben in ihrer Taylor-Reihe nur Potenzen mit ungeraden (geraden) Exponenten.

### Satz 7.2

Sei  $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$  und  $f$  periodisch mit der Periode  $2\pi$ . Abhängig von  $f$  besitzt die Fourier-Reihe von  $f$  das folgende Symmetrieverhalten ( $x \in [-\pi, \pi]$ ):

(i)  $f$  ist eine *gerade* Funktion, d.h.  $f(-x) = f(x)$   $\implies$

$$\begin{aligned} b_n &= 0 & (n \in \mathbb{N}) \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx & (n \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

(ii)  $f$  ist eine *ungerade* Funktion, d.h.  $f(-x) = -f(x)$   $\implies$

$$\begin{aligned} a_n &= 0 & (n \in \mathbb{N}_0) \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx & (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

(iii)  $f$  hat die Periode  $\pi$ , d.h.  $f(x + \pi) = f(x)$   $\implies$

$$\begin{aligned} a_n &= b_n = 0 & (n = 2k + 1 \text{ ungerade}) \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx & (n = 2k \text{ gerade}) \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx & (n = 2k \text{ gerade}) \end{aligned}$$

(iv)  $f$  ist alternierend, d.h.  $f(x + \pi) = -f(x) \implies$

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 2k \text{ gerade})$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad (n = 2k + 1 \text{ ungerade})$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad (n = 2k + 1 \text{ ungerade})$$

*Beweis*

(i) und (ii) : Substitution  $x := g(t) := -t$ . Für eine gerade Funktion folgt beispielsweise

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ (x=-t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \cos(-nt) (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ (f \text{ gerade}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
(x=-t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \sin(-nt) (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(-t) \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
(f \text{ gerade}) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
&= 0 \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

(iii) und (iv) : Substitution  $x := g(t) := t - \pi$ .

#### Beispiele 7.4

(i) Die Rechteckspannung (Beispiel 7.2) ist ungerade und alternierend, darum gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\
b_n &= 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n = 2k \text{ gerade}) \\
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}, n = 2k + 1 \text{ ungerade})
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck läßt sich noch weiter vereinfachen:

Sowohl  $f$  als auch  $\sin(2k + 1)x$  sind gerade Funktionen bzgl. der Achse  $x = \frac{\pi}{2}$ . Damit erhält man

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx \, dx$$

für ungerade Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ .

- (ii) Die kommutierte Sinusschwingung (Beispiel 7.3) ist gerade und  $\pi$ -periodisch, daher sind alle  $b_n$  und alle  $a_n$  mit ungeraden Indices gleich Null. Sowohl  $f$  als auch  $\cos 2kx$  sind gerade Funktionen bzgl. der Achse  $x = \frac{\pi}{2}$ , daher gilt auch

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos nx \, dx$$

für gerade Zahlen  $n \in \mathbb{N}_0$ .

In den folgenden zwei Beispielen werden zu den angegebenen Funktionen ihre Fourier-Reihen berechnet. Wo möglich, soll zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten der Symmetrie-Satz (Satz 7.2) dieses Abschnittes verwendet werden.

Ausdrücklich sei noch einmal darauf hingewiesen, daß über die Konvergenz der berechneten Fourier-Reihe damit noch gar nichts ausgesagt ist, weder ob sie konvergiert noch, wenn ja, wogegen. Bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten handelt es sich um ein reines Integrationsproblem.

### Beispiel 7.5

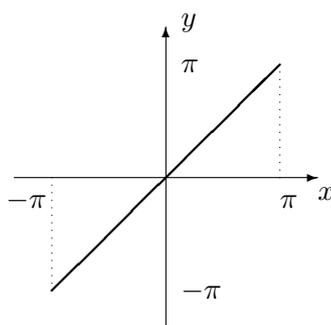


Abbildung 7.12: Sägezahnfunktion

$$f(x) := x \quad (x \in [-\pi, \pi)) \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Die Funktion  $f$  ist ungerade. Nach Satz 7.2 sind alle Koeffizienten  $a_n$  gleich

Null. Für die  $b_n$  ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ -x \cdot \frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \left[ \sin nx \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= -2 \frac{\cos n\pi}{n} = -2 \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

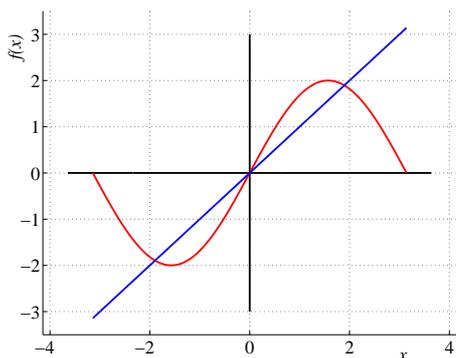


Abbildung 7.13: Sägezahnspannung: Grundschwingung

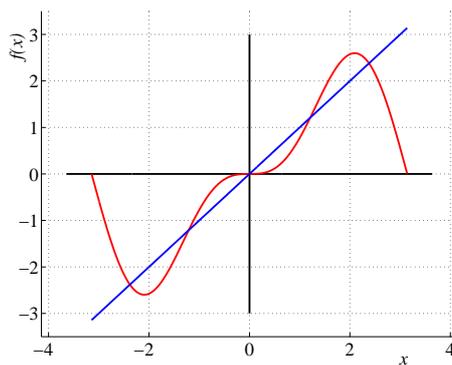


Abbildung 7.14: Sägezahnspannung: Grundschwingung mit 1. Oberschwingung

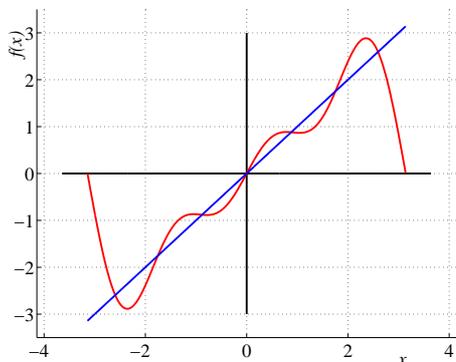


Abbildung 7.15: Sägezahnspannung: Grundschwingung mit 1. und 2. Oberschwingung

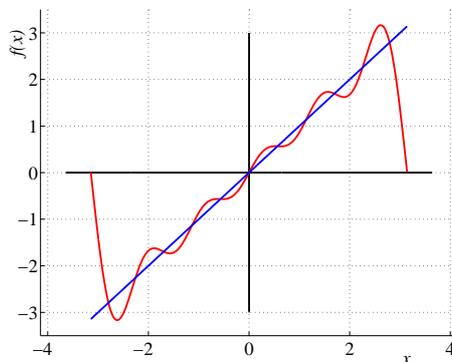


Abbildung 7.16: Sägezahnspannung: Grundschwingung mit 1. bis 4. Oberschwingung

Damit lautet die Fourier-Reihe der Sägezahnspannung (Abb. 7.13 - 7.16):

$$\begin{aligned} f &\sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \\ &= 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right) \end{aligned}$$

### Beispiel 7.6

Sei  $A > 0$ .

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < -\frac{2\pi}{3} \\ A & , \quad -\frac{2\pi}{3} \leq x < -\frac{\pi}{3} \\ 0 & , \quad -\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{3} \\ A & , \quad \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{2\pi}{3} \\ 0 & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq x < \pi \end{cases} \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

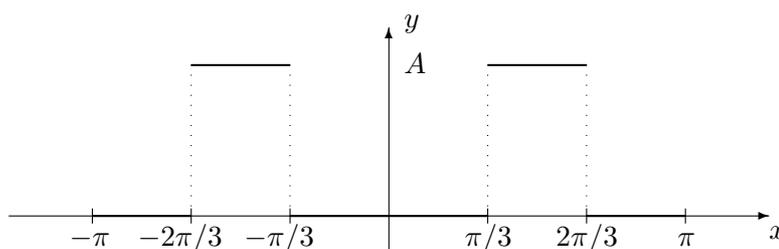


Abbildung 7.17: Rechteckimpuls

Die Funktion  $f$  ist gerade und hat die Periode  $\pi$ . Nach Satz 7.2 sind alle Koeffizienten  $b_n$  gleich Null, und von den Koeffizienten  $a_n$  sind nur diejenigen mit geraden Indices  $n = 2k$  nichttrivial. Für diese ergibt sich

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} A dx = \frac{2}{3} A,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} A \cdot \cos nx \, dx \\
&= \frac{2A}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin nx \right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{2A}{n\pi} \left( \sin n \frac{2\pi}{3} - \sin n \frac{\pi}{3} \right) \\
&\stackrel{(n=2k)}{=} \frac{2A}{(2k)\pi} \left( \sin k \frac{4\pi}{3} - \sin k \frac{2\pi}{3} \right) \quad (k \in \mathbb{N}) \\
&= \frac{2A}{2k\pi} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} & , \quad k = 3m + 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} & , \quad k = 3m + 2 \\ 0 - 0 = 0 & , \quad k = 3m + 3 \end{array} \right\} \quad (m \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe des Rechteckimpulses (Abb. 7.18 - 7.21):

$$\begin{aligned}
f &\sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} A - \frac{2\sqrt{3}A}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 10x}{10} + - \dots \right) \\
&= \frac{A}{3} - \frac{2\sqrt{3}A}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos 2(3k-2)x}{2(3k-2)} - \frac{\cos 2(3k-1)x}{2(3k-1)} \right)
\end{aligned}$$

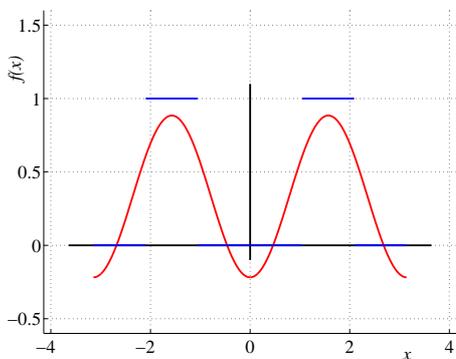


Abbildung 7.18: Rechteckimpuls: Grundschwingung

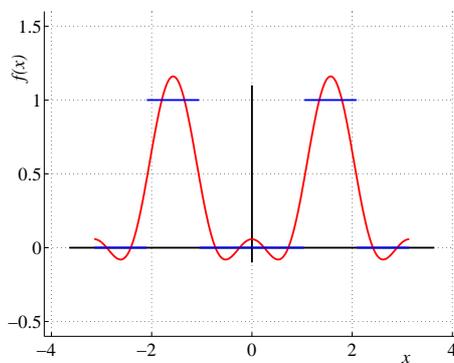


Abbildung 7.19: Rechteckimpuls: Grundschwingung mit 1. Oberschwingung

### Aufgabe

Man berechne die Fourier-Reihen zu den in Abb. 7.22 und 7.23 dargestellten Funktionen. Welche Symmetrien weisen diese Funktionen auf?

#### 7.1.2.1 Fourier-Reihen von fortgesetzten Funktionen

Häufig steht man vor der Aufgabe, eine Funktion  $f$  in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, welche nicht auf  $[-\pi, \pi]$ , sondern nur auf  $[0, \pi]$  oder nur

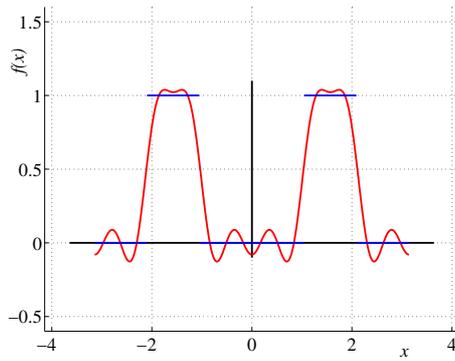


Abbildung 7.20: Rechteckimpuls: Grundschwingung mit 1. und 2. Oberschwingung

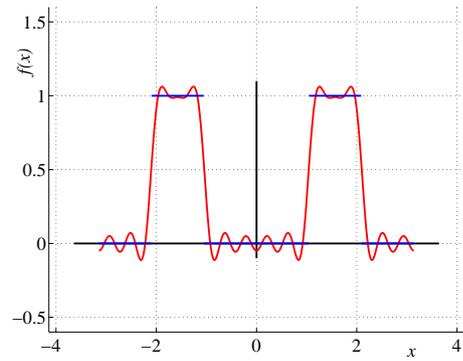


Abbildung 7.21: Rechteckimpuls: Grundschwingung mit 1. bis 4. Oberschwingung

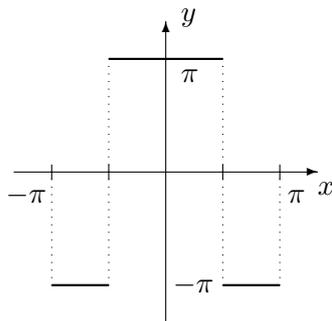


Abbildung 7.22: Rechteckspannung

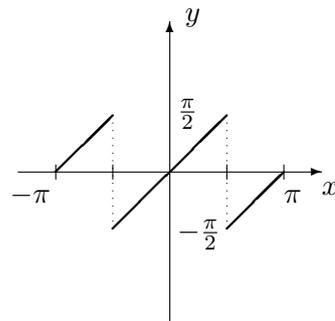


Abbildung 7.23: Sägezahnspannung

auf  $(0, \pi)$  definiert ist. In diesem Fall kann man  $f$  zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen (was stets möglich ist) und dann versuchen, die fortgesetzte Funktion in eine Fourier-Reihe zu entwickeln.

Prinzipiell läßt sich eine auf  $[0, \pi]$  definierte Funktion natürlich ganz beliebig auf das Intervall  $(-\pi, 0)$  fortsetzen. Wichtig sind hier vor allem zwei ausgezeichnete Fortsetzungen:

- (i) Gerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung von  $f$  (Abb. 7.24):

$$G_f(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in [0, \pi] \\ f(-x) & , x \in [-\pi, 0) \end{cases} , \quad G_f(x+2\pi) = G_f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

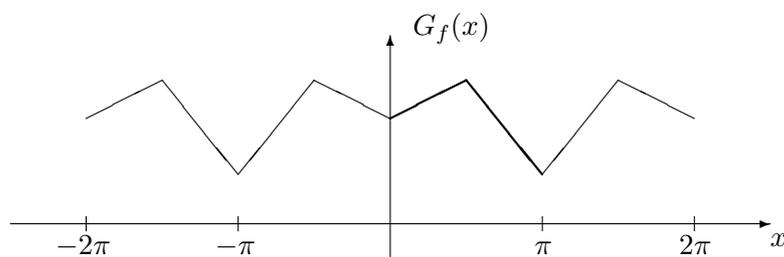


Abbildung 7.24: Gerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung

- (ii) Ungerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung von  $f$  (Abb. 7.25):

$$U_f(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in [0, \pi] \\ -f(-x) & , x \in [-\pi, 0) \end{cases} , \quad U_f(x+2\pi) = U_f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

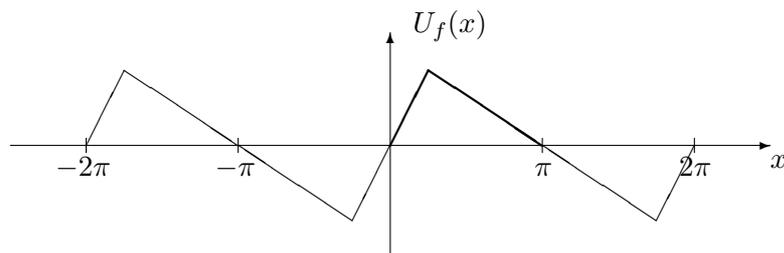


Abbildung 7.25: Ungerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung

### Lemma

- (i) Ohne die Bedingung  $f(0) = 0$  läßt sich  $f$  nicht zu einer ungeraden Funktion  $F$  auf  $[-\pi, \pi]$  fortsetzen.

*Beweis* klar

- (ii) Ohne die Bedingung  $f(\pi) = 0$  läßt sich  $F$  nicht zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion auf  $\mathbb{R}$  erweitern.

*Beweis*

$$\begin{aligned} F \text{ ungerade} &\implies F(-\pi) = -F(\pi) \\ F \text{ } 2\pi\text{-periodisch} &\implies F(-\pi) = F(\pi) \\ \longrightarrow & F(\pi) = f(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Ist die Funktion  $f$  nur auf dem *offenen* Intervall  $(0, \pi)$  definiert, so kann man sie stets sowohl gerade als auch ungerade fortsetzen. Man braucht nämlich nur bei gerader Fortsetzung:

$f(0)$  und  $f(\pi)$  beliebig zu definieren;

bei ungerader Fortsetzung:

$f(0) := f(\pi) := 0$  zu definieren.

Anschließend bildet man zu der nunmehr auf  $[0, \pi]$  fortgesetzten Funktion  $f$  die Fortsetzungen  $G_f$  bzw.  $U_f$ .

Eine hinreichend „vernünftige“ Funktion  $f$  läßt sich auf dem Intervall  $(0, \pi)$  daher sowohl in eine reine Sinusreihe als auch in eine reine Kosinusreihe entwickeln. Man vergleiche dazu Beispiel 7.3 und eine Hausaufgabe.

### 7.1.3 Konvergenz einer Fourier-Reihe

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob und wenn ja, wogegen, die Fourier-Reihe einer Funktion  $f$  konvergiert, wenn schließlich immer mehr Glieder verwendet werden, d.h. wenn der Grad  $N$  des trigonometrischen Polynoms

$$Tr(N, f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

gegen  $\infty$  geht.

Bei Konvergenzuntersuchungen sind Abstände zu messen, die sich mit wachsendem  $N$  verkleinern sollen; man könnte etwa fragen, ob  $|Tr(N, f)(x) - f(x)|$  mit wachsendem  $N$  gegen 0 geht (für welche  $x$ ?). Dazu werden in den nächsten drei Unterabschnitten die folgenden „Abstände“ untersucht, welche zu drei verschiedenen Konvergenzuntersuchungen führen:

#### (1) Punktweise Konvergenz

Konvergiert  $Tr(N, f)(x)$  für  $N \rightarrow \infty$  für alle  $x \in [-\pi, \pi]$  *punktweise* gegen die Funktion  $f$  im Sinne von

$$\left| f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right| \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0 ? \quad (7.5)$$

**(2) Gleichmäßige Konvergenz**

Konvergiert  $Tr(N, f)(x)$  für  $N \rightarrow \infty$  *gleichmäßig* gegen die Funktion  $f$  im Sinne von

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right| \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0? \quad (7.6)$$

**(3) Konvergenz im quadratischen Mittel**

Konvergiert  $Tr(N, f)(x)$  für  $N \rightarrow \infty$  *im quadratischen Mittel* gegen die Funktion  $f$  im Sinne von

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right|^2 dx \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0? \quad (7.7)$$

Daß diese Konvergenzfragen nicht trivial, für die Praxis aber von großer Bedeutung sind, zeigen schon die beiden Demonstrationsbeispiele des ersten Abschnittes.

- (i) Die Fourier-Reihe der kommutierten Sinusschwingung (Beispiel 7.3) konvergiert gleichmäßig für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Der Beweis ist erbracht, wenn eine gleichmäßige (d.h. von  $x$  unabhängige) Majorante für die Fourier-Reihe angegeben wird:

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2kx$$

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left| \frac{\cos 2kx}{(2k)^2 - 1} \right| \leq \frac{1}{(2k)^2 - 1} \leq \frac{1}{(2k)^2 - k^2} = \frac{1}{3k^2},$$

und die numerische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{18}$$

ist konvergent.

Hiermit ist noch nicht bewiesen, *wogegen* diese Fourier-Reihe gleichmäßig konvergiert! Es wird sich aber herausstellen, daß sie gegen „ihre“ Funktion konvergiert, also gegen  $f(x) = |\sin x|$ .

- (ii) Die Fourier-Reihe der Rechteckspannung (Beispiel 7.2) konvergiert nicht gleichmäßig gegen „ihre“ Funktion  $f$ :

Würde die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren, so müßte  $f$  stetig sein, was nicht der Fall ist.

Hiermit ist noch nicht bewiesen, daß die Fourier-Reihe von  $f$  nicht trotzdem gleichmäßig konvergiert, etwa gegen eine andere stetige Funktion  $g$ . Daß das nicht der Fall ist, wird sich später aus einem allgemeinen Satz ableiten lassen (Satz 7.4).

- (iii) Gibt es eine Funktion, gegen welche die Fourier-Reihe der Rechteckspannung punktweise konvergiert?

### 7.1.3.1 Punktweise Konvergenz einer Fourier-Reihe

#### Definiton 7.3

Eine Funktion  $f$  heißt auf dem Intervall  $[a, b]$  *stückweise monoton*, wenn es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und dazu eine Zerlegung

$$Z := \{x_0, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

von  $[a, b]$  gibt, so daß  $f$  auf jedem der Teilintervalle  $(x_0, x_1), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  monoton ist.

Fast alle praktisch vorkommenden Funktionen sind stückweise monoton (man studiere hier noch einmal die bisher behandelten Beispiele). Man kann zeigen, daß eine beschränkte stückweise monotone Funktion stetig ist bis auf (möglicherweise unendlich viele) Sprungstellen endlicher Höhe.

#### Satz 7.3 (Satz von Dirichlet)

Sei  $f$  beschränkt, stückweise monoton und  $2\pi$ -periodisch. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]. \quad (7.8)$$

#### In Worten

Die Fourier-Reihe von  $f$  ist an den Stetigkeitspunkten gleich dem Funktionswert  $f(x)$  und an den Sprungstellen gleich dem arithmetischen Mittel von links- und rechtsseitigem Grenzwert.

#### Bemerkung

An den Sprungstellen einer Funktion  $f$  verhält sich die Fourier-Reihe von  $f$  neutral: sie bevorzugt keinen der Grenzwerte  $f(x-0)$ ,  $f(x+0)$ , sondern konvergiert gegen deren arithmetisches Mittel. Insofern ist es für die Konvergenz der Fourier-Reihe auch egal, welchen Funktionswert eine Funktion an einer Sprungstelle aufweist; vgl in diesem Zusammenhang das Verhalten der Fourier-Reihe der Rechteckspannung (Beispiel 7.2) sowie Teil (i) der Aufgabe auf p. 115.

Wenn an einer Stelle  $x$  linksseitiger - und rechtsseitiger Grenzwert von  $f$  übereinstimmen ( $f(x-0) = f(x+0)$ ) und gleich dem Funktionswert  $f(x)$

sind, so ist  $f$  in  $x$  stetig, und die Fourier-Reihe konvergiert gegen  $f(x)$ .

### Aufgabe

Man zeige, daß die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

nicht stückweise monoton im Sinne obiger Definition ist.

#### 7.1.3.2 Gleichmäßige Konvergenz einer Fourier-Reihe

Die gleichmäßige Konvergenz erfordert stärkere Bedingungen an die Funktion  $f$ . Das sieht man schon daran, daß eine auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  gleichmäßig konvergente Funktionenreihe auf diesem Intervall eine stetige Grenzfunktion hat. Weiterhin gilt, daß die gleichmäßige Konvergenz einer Fourier-Reihe gegen  $f$  auch die punktweise Konvergenz gegen  $f$  in jedem Punkt  $x \in \mathcal{I}$  nach sich zieht (warum?).

Daher konvergiert die Fourier-Reihe der Rechteckspannung (Beispiel 7.2) nicht gleichmäßig gegen  $f$  ( $f$  ist nicht stetig) und auch nicht gleichmäßig gegen eine andere (stetige) Funktion  $g$ , denn diese Funktion  $g$  müßte dann auch der punktweise Grenzwert sein, was nach dem Satz von Dirichlet (Satz 7.3) nicht möglich ist.

#### Definition 7.4

Sei  $f$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  definierte Funktion.

- (i)  $f$  heißt auf dem Intervall  $[a, b]$  *stückweise stetig*, wenn es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und dazu eine Zerlegung

$$Z := \{x_0, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

von  $[a, b]$  gibt, so daß  $f$  auf jedem der Teilintervalle  $(x_0, x_1), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  stetig ist und in den Punkten  $x_k$  alle einseitigen Grenzwerte besitzt, die dort vorhanden sein können (in  $x_0 = a$  wird also nur die Existenz des rechtsseitigen -, in  $x_n = b$  nur die des linksseitigen Grenzwertes verlangt).

Eine stückweise stetige Funktion ist also beschränkt und hat höchstens endlich viele Unstetigkeiten, die höchstens Sprungstellen mit endlicher Sprunghöhe sein können.

- (ii)  $f$  heißt auf dem Intervall  $[a, b]$  *stückweise glatt*, wenn, grob gesprochen,  $f$  stückweise differenzierbar und  $f'$  stückweise stetig ist.

Die Ableitung einer stückweise glatten Funktion hat also höchstens endlich viele Sprungstellen endlicher Sprunghöhe.

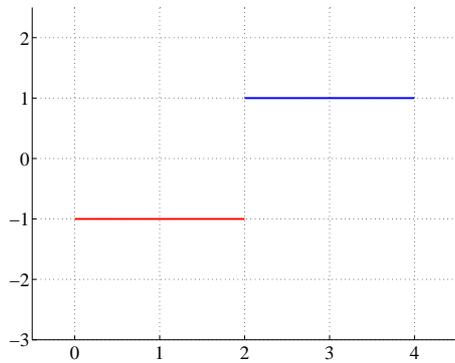


Abbildung 7.26: Stückweise glatte Funktion

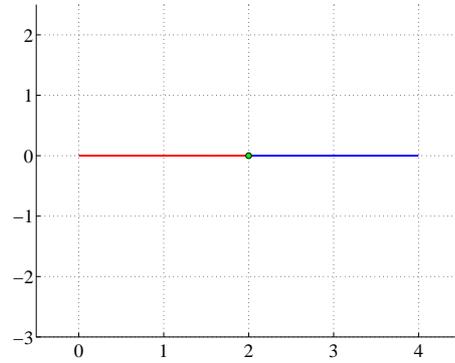


Abbildung 7.27: Ableitung einer stückweise glatten Funktion

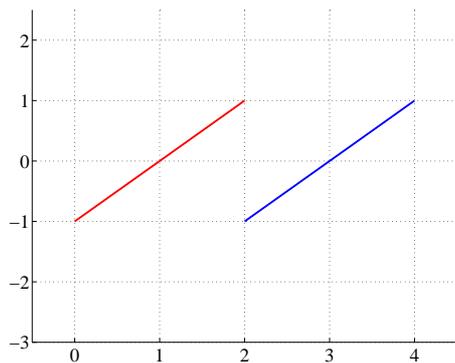


Abbildung 7.28: Stückweise glatte Funktion

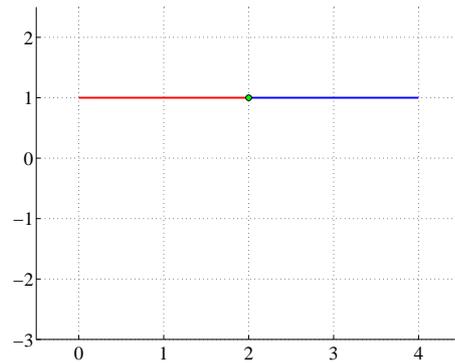


Abbildung 7.29: Ableitung einer stückweise glatten Funktion

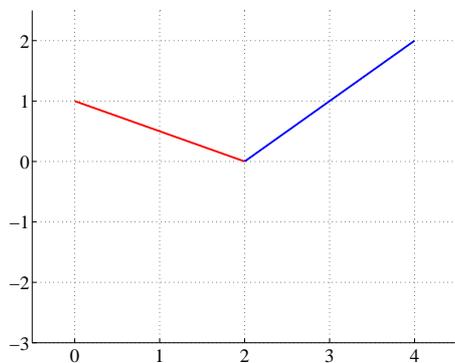


Abbildung 7.30: Stückweise glatte Funktion

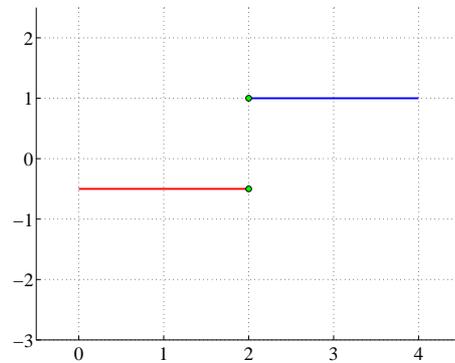


Abbildung 7.31: Ableitung einer stückweise glatten Funktion

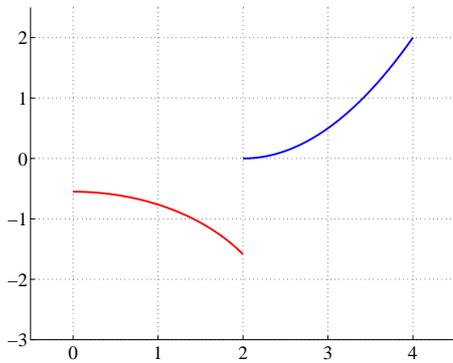


Abbildung 7.32: Stückweise glatte Funktion

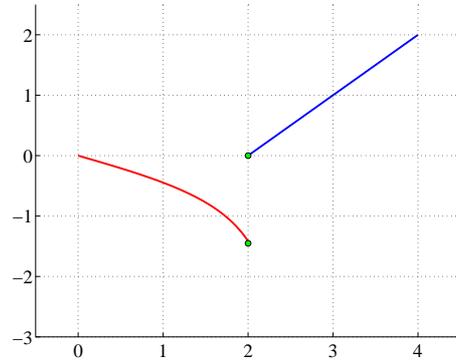


Abbildung 7.33: Ableitung einer stückweise glatten Funktion

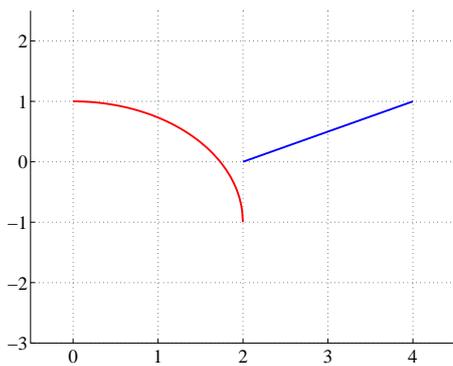


Abbildung 7.34: Stückweise stetige Funktion, die nicht stückweise glatt ist

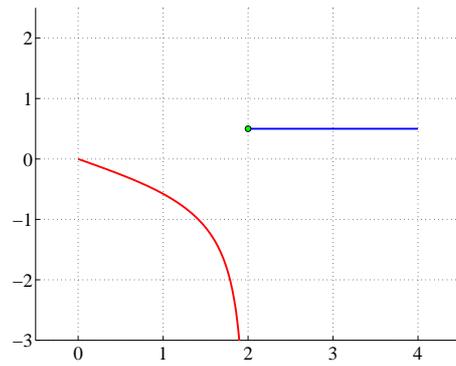


Abbildung 7.35: Ableitung einer stückweise stetigen, aber nicht stückweise glatten Funktion

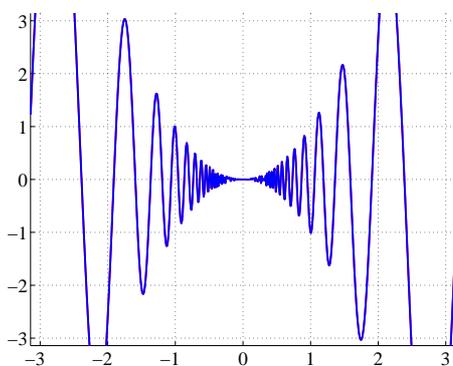


Abbildung 7.36: Stückweise stetige Funktion, die nicht stückweise glatt ist

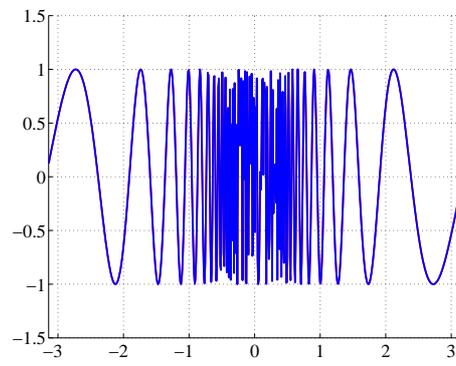


Abbildung 7.37: Ableitung einer stückweise stetigen, aber nicht stückweise glatten Funktion

**Aufgabe**

Die folgende Funktion  $g$  (Abb.7.38) ist auf dem Intervall  $[0, 1]$  nicht stückweise stetig und nicht stückweise glatt im Sinne obiger Definition (warum nicht?):

$$g(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{1}{2} & , \quad x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{3} & , \quad x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \\ \vdots & \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

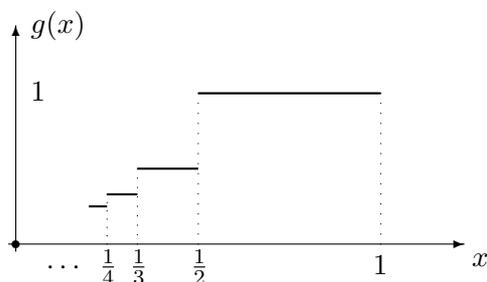


Abbildung 7.38: Nicht stückweise glatte Funktion

**Satz 7.4**

(i) Sei  $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ .

Falls die Fourier-Reihe von  $f$  in  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig gegen  $f$ , und es gilt

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{und} \\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Die Funktion ist demnach  $2\pi$ -periodisch, und die Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert für jedes  $x \in [-\pi, \pi]$  insbesondere auch punktweise gegen  $f(x)$ .

(ii) Sei  $f$  stückweise glatt und  $2\pi$ -periodisch, d.h.  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

In jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[-\pi, \pi]$ , in dem  $f$  stetig ist, konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .

(iii) Sei stückweise glatt und  $2\pi$ -periodisch, d.h.  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Ist  $f$  zusätzlich stetig, so ist die Fourier-Reihe von  $f$  auf ganz  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergent gegen  $f$ . Insbesondere gilt also die folgende punktweise Aussage

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Man vergleiche in diesem Zusammenhang das Verhalten der Fourier-Reihe der kommutierten Sinusschwingung (Beispiel 7.3) im Hinblick auf Satz 7.4 (i) und (iii) sowie das Verhalten der Fourier-Reihe der Rechteckspannung (Beispiel 7.2) im Hinblick auf Satz 7.4 (ii).

### Bemerkung<sup>1</sup>

Die Theorie der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz einer Fourier-Reihe ist trotz der Sätze 7.3 und 7.4 ein steiniger Acker. Die im folgenden aufgeführten Fragen mögen dies beleuchten:

- (i) Kann man genaue, d.h. hinreichende *und* notwendige Bedingungen dafür angeben, daß eine Funktion durch ihre Fourier-Reihe dargestellt wird?

Man kann es bisher noch nicht, und da lange und intensiv an der Lösung dieses Problems gearbeitet worden ist, neigt man heute zu der Auffassung, daß die Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Fourier-Reihe eine *Fundamentaleigenschaft* ist, die sich nicht mehr durch andere Fundamenteigenschaften (wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) charakterisieren läßt.

- (ii) Kann man wenigstens Eigenschaften einer Funktion angeben, die hinreichend *und* notwendig für die bloße Konvergenz ihrer Fourier-Reihe sind, ohne zu spezifizieren, gegen welche Funktion die Fourier-Reihe konvergiert?

Auch das ist bisher noch nicht gelungen. Immerhin hat L. Carleson im Jahre 1966 das außerordentlich tiefliegende Resultat gewonnen, daß die Fourier-Reihe einer quadratintegrablen Funktion<sup>2</sup> „fast überall“ konvergiert, d.h. bis auf eine Menge vom *Lebesgue-Maß* Null überall konvergiert.

- (iii) Die Fourier-Reihe einer stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktion ist nach dem Carleson'schen Satz fast überall konvergent. Konvergiert sie vielleicht sogar in jedem Punkt?

Das ist *nicht* der Fall, es gibt Gegenbeispiele.

- (iv) Wenn die Fourier-Reihe einer stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktion an der Stelle  $x_0$  nun aber doch konvergiert, ist dann ihre Summe gleich  $f(x_0)$ ?

Das ist jetzt der Fall.

- (v) Wenn man sich jedoch nicht auf die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz einer Fourier-Reihe versteift, sondern geeignete andere Konvergenzbegriffe zuläßt, wie etwa den der *Konvergenz im quadratischen Mittel*, so fällt auf diese Problematik ein überraschend helles Licht.

<sup>1</sup>Heuser: Lehrbuch der Analysis Band 2, 139, p. 154

<sup>2</sup>Eine Funktion  $f$  heißt auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  *quadratintegrabel*, wenn das Integral  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$  existiert.

### 7.1.3.3 Konvergenz einer Fourier-Reihe im quadratischen Mittel

Was heißt „gut“ approximieren?<sup>3</sup> Das Ziel, eine (komplizierte) periodische Funktion durch (einfache) harmonische Schwingungen darzustellen, wurde in den letzten Abschnitten als erreicht angesehen, wenn die Fourier-Reihe überall gegen die Funktion konvergiert – wenigstens an den Stetigkeitsstellen (Satz 7.3). Für stetige und stückweise glatte Funktionen wurde darüberhinaus die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe gegen  $f$  etabliert (Satz 7.4).

In der Praxis verwendet man allerdings nur endliche Summen, die *Partialsummen* der Fourier-Reihen, also trigonometrische Polynome. Man kann dann der Ansicht sein, daß solch ein trigonometrisches Polynom die untersuchte Funktion gut darstellt, wenn es sich überall nur sehr wenig von ihr unterscheidet. So wie man der Ansicht sein kann, daß eine Meßreihe eine gegebene Funktion sehr gut bestätigt, wenn sie sich überall nur sehr wenig von ihr unterscheidet.

Beim Messen gibt es aber Meßfehler und insbesondere „Ausreißer“, die man gern ignorieren würde. Deshalb kann man nicht nur zwangsläufig, sondern mit voller Überzeugung zufrieden sein, wenn die Meßwerte „insgesamt“, d.h. im Mittel über den ganzen Bereich, nahe bei der Kurve liegen. Als Maß für diese mittlere Abweichung könnte man den *arithmetischen Mittelwert*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(x_n) - y_n|$$

nehmen, wobei die  $y_k$  die Meßwerte an den Stellen  $x_k$  sind. Vielfach verwendet man aber einen anderen Mittelwert, den *quadratischen Mittelwert* oder *Effektivwert*, s. Definition 6.8:

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2 \frac{T}{N}}$$

oder einfacher

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2 \frac{T}{N}.$$

Daß die Quadrate rechnerisch bequemer sind als die Absolutbeträge (Differenzierbarkeit!), ist ein (oberflächlicher) Vorzug der zweiten Formel.

Bei der Fourier-Approximation soll nun nicht ein Funktionsverlauf durch diskrete Messungen ermittelt, sondern eine gegebene periodische Funktion  $f$  durch ein trigonometrisches Polynom  $\phi_N$  möglichst gut approximiert werden. An die Stelle der (endlichen) Summe tritt dann ein Integral, und die Zielvorstellung könnte so präzisiert werden:

<sup>3</sup>Die Darstellung dieses Abschnittes bis einschließlich Beispiel 7.9 folgt weitgehend einem Abschnitt im Skript „Höhere Mathematik II für Elektrotechnik“ von Prof. Dr. D. Ferus, TU Berlin.

Zu einer gegebenen periodischen Funktion  $f$  auf dem Intervall<sup>4</sup>  $[0, T]$  soll ein trigonometrisches Polynom  $\phi_N$  – etwa mit einer vorgegebenen Schranke für die Ordnung  $N$  – so gefunden werden, daß das quadratische Mittel der Abweichung

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (f(t) - \phi_N(t))^2 dt}$$

möglichst klein wird.

Dann sagt man, man habe  $f$  im *quadratischen Mittel* durch ein trigonometrisches Polynom einer vorgegebenen Ordnung optimal approximiert. Hier kann man sowohl die Wurzel wie den Faktor  $\frac{1}{T}$  dabei auch weglassen, man ändert damit nur die Skala der Fehlerbewertung, das optimale  $\phi_N$ , wenn es denn ein solches gibt, bleibt dasselbe.

**Beispiel 7.7** (Wechselstrom-Energie, harmonisch)

Man betrachte die zeitlich variable harmonische Spannung  $u(t) := u_1 \sin \omega t$  an einem Ohm'schen Widerstand  $R$ . Es fließt der Strom  $i(t) = \frac{1}{R} u(t)$ , und in dem (kurzen) Zeitabschnitt  $[t, t + \Delta t]$  wird dann annähernd die Energie (Leistung mal Zeiteinheit)

$$i(t) u(t) \Delta t = \frac{1}{R} u(t)^2 \Delta t$$

umgesetzt. In der Gesamtzeit  $[a, b]$  ist das (Riemann'sche Summe und Grenzübergang zum Integral)

$$E := \frac{1}{R} \int_a^b u(t)^2 dt.$$

Die Spannung  $u$  ist periodisch mit der Periode  $T := \frac{2\pi}{\omega}$ , daher ist die in einer Periode umgesetzte Energie gegeben durch

$$E_1 := \frac{u_1^2}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{u_1^2}{R} \cdot \frac{T}{2} = \frac{T}{R} \left( \frac{u_1}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (7.9)$$

Eine konstante Spannung (Gleichspannung)  $u(t) := u_0$  hingegen führt auf die Energie

$$E_0 := \frac{u_0^2}{R} \int_0^T dt = \frac{u_0^2}{R} T = \frac{T}{R} u_0^2. \quad (7.10)$$

Deshalb nennt man

$$u_{\text{eff}} := \frac{u_1}{\sqrt{2}}$$

---

<sup>4</sup>In diesem Abschnitt wird ein beliebiges Periodizitätsintervall  $[0, T]$  zugrundegelegt. Die Formeln für die Fourier-Integrale ändern sich dadurch etwas; s. die Bemerkung auf p. 121.

auch die *effektive Spannung* der Wechselspannung  $u(t) = u_1 \sin \omega t$ : Sie ist diejenige Gleichspannung, welche in einer Periode dieselbe Energie freisetzt wie die Wechselspannung  $u$ .

Approximiert man eine periodische Spannung  $u$  durch eine Spannung  $\tilde{u}$  und benutzt als Maß für die Abweichung das quadratische Mittel, so mißt man nach (7.9) und (7.10) mit dem Ausdruck  $\int |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 dt$  die Energie der Differenzspannung, was ein vernünftiges Maß für die Abweichung zu sein scheint. Dagegen hat  $\int |u(t) - \tilde{u}(t)| dt$  keine so vernünftige physikalische Interpretation.

Nach diesen Vorbemerkungen allgemeiner Art sollen jetzt periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome im quadratischen Mittel approximiert werden. Einstweilen beschränke ich mich auf ungerade Funktionen, weil das den Schreibaufwand reduziert und die Argumentation übersichtlicher macht.

Sei also  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine ungerade  $(T = \frac{2\pi}{\omega})$ -periodische, über  $[0, T]$  integrierbare Funktion. Man fixiere eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  und suche unter allen ungeraden trigonometrischen Polynomen vom Grade  $N$ ,

$$\phi_N(t) = \sum_{n=1}^N \beta_n \sin n\omega t$$

dasjenige trigonometrische Polynom, für welches

$$\int_0^T (f(t) - \phi_N(t))^2 dt$$

minimiert wird. Nun ist<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (f(t) - \phi_N(t))^2 dt &= \int_0^T \left( f(t) - \sum_{n=1}^N \beta_n \sin n\omega t \right)^2 dt \\
 &= \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \int_0^T f(t) \sum_{n=1}^N \beta_n \sin n\omega t dt + \int_0^T \left( \sum_{n=1}^N \beta_n \sin n\omega t \right)^2 dt \\
 &= \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \sum_{n=1}^N \beta_n \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt + \int_0^T \left( \sum_{n=1}^N \beta_n \sin n\omega t \right)^2 dt \\
 &= \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N \beta_n b_n + \int_0^T \left( \sum_{m,n=1}^N \beta_m \beta_n \sin m\omega t \sin n\omega t \right) dt \\
 &= \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N \beta_n b_n + \underbrace{\sum_{m,n=1}^N \beta_m \beta_n \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt}_{\frac{T}{2} \delta_{mn}} \\
 &= \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N \beta_n b_n + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N \beta_n^2,
 \end{aligned}$$

wobei neben der Definition der Fourier-Koeffizienten zum Schluß noch die Substitution  $\omega t \mapsto x$  und die Orthogonalitätsrelationen (7.2) zur Auswertung des Integrals benutzt wurden.

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man daraus

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi_N(t))^2 dt &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \sum_{n=1}^N \beta_n b_n + \sum_{n=1}^N \beta_n^2 \quad (7.11) \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt + \sum_{n=1}^N (\beta_n - b_n)^2 - \sum_{n=1}^N b_n^2.
 \end{aligned}$$

Hieraus kann man sofort erkennen, wann die rechte Seite am kleinsten wird, nämlich wenn  $\beta_n = b_n$  für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$  gilt, d.h. wenn

$$\phi_N(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

<sup>5</sup>Für eine beliebige Periode  $T$  sind

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad \text{und} \quad \frac{2}{T} \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt = \delta_{mn}.$$

Ein analoges Resultat erhält man auch ohne die Voraussetzung, daß  $f$  ungerade ist:

**Satz 7.5** (Approximation im quadratischen Mittel)

Unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grade  $N$  liefert die  $N$ -te Partialsumme der Fourier-Reihe von  $f$ ,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

die beste Approximation im quadratischen Mittel. Dabei ist (cf. (7.11))

$$\min_{\phi_N} \frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi_N(t))^2 dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

Man kann beweisen, daß die rechte Seite für  $N \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert. Das mag nicht überraschen, weil ja schon bekannt ist, daß die Fourier-Reihe einer stückweise monotonen Funktion an allen Stetigkeitsstellen gegen die Funktion konvergiert. Aber das Argument für diese Aussage beruht auf einem anderen Sachverhalt, und man benötigt auch keine stückweise Monotonie.

**Satz 7.6** (Parseval'sche Gleichung)

Für jede beschränkte über  $[0, T]$  integrierbare und  $T$ -periodische Funktion  $f$  gilt

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Physikalisch sagt die Parseval'sche Gleichung aus, daß sich die Energie eines Signals aus den Energien der einzelnen Oberwellen zusammensetzt; diese sind nach (7.9) und (7.10) bis auf den Faktor  $\frac{T}{2R}$  gleich den Amplitudenquadraten.

**Folgerung**

Für jede beschränkte über  $[0, T]$  integrierbare und  $T$ -periodische Funktion  $f$  und ihre Fourier-Reihe

$$\phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

gilt:

$$\frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi(t))^2 dt = 0.$$

**Bemerkung**

Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz der Fourier-Reihe (Satz 7.3) und der gleichmäßigen Konvergenz (Satz 7.4) braucht man bei der Konvergenz im quadratischen Mittel neben der Beschränktheit, Riemann-Integrierbarkeit und  $T$ -Periodizität keine zusätzlichen Voraussetzungen an die Funktion  $f$ , um die Konvergenz der Fourier-Reihe gegen  $f$  sicherzustellen.

**Beispiel 7.8** (Wechselstrom-Energie, nicht harmonisch)

Für eine  $T$ -periodische, nicht notwendig harmonische Spannung der Form

$$u(t) := u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

ist die an einem Ohm'schen Widerstand pro Periode freigesetzte Energie nach Beispiel 7.7 und der Parseval'schen Gleichung gegeben durch

$$E = \frac{1}{R} \int_0^T u(t)^2 dt = \frac{T}{R} u_0^2 + \frac{T}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \frac{T}{R} \left( u_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{u_n}{\sqrt{2}} \right)^2 \right).$$

Das erste Glied ist der Gleichspannungsanteil  $u_0$ , dazu addieren sich die Energien der effektiven Sinus-Oberspannungen  $\frac{u_n}{\sqrt{2}}$ .

**Beispiel 7.9** (Klirrfaktor)

Man betrachte die Verstärkung einer reinen sinusförmigen Eingangsspannung  $u_E(t) := u_1 \sin \omega t$ . Ein idealer Verstärker hat eine lineare Kennlinie der Steilheit  $\lambda$ , und die Ausgangsspannung ist dann

$$u_A(t) = f(u_E(t)) = \lambda \cdot u_E(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Technisch sind lineare Kennlinien nur näherungsweise zu realisieren. Bei nicht-linearem  $f$  wird eine Fourier-Analyse des Ausgangssignals durchgeführt, um zu sehen, wie weit es von der angestrebten linearen Verstärkung abweicht; m.a.W., die Ausgangsspannung wird in eine Fourier-Reihe entwickelt:

$$u_A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Jetzt wird für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{R}$  die folgende Identität benutzt:

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega t \right) \\ &=: \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\sin \phi_n \cos n\omega t + \cos \phi_n \sin n\omega t) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\omega t + \phi_n). \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Fourier-Reihe der Ausgangsspannung schreiben als

$$u_A(t) = \frac{a_0}{2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\omega t + \phi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\omega t + \phi_n)$$

und wie folgt interpretieren: Der erste Term ist eine Hintergrund-Gleichspannung, die man ignorieren kann. Der zweite, separat aufgeführte Term ist die gewünschte Verstärkung

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\omega t + \phi_1) = \lambda \cdot u_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

der Eingangsspannung um den Faktor  $\lambda = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{u_1}$ , allerdings mit einer Phasenverschiebung  $\phi_1$ . Die restliche Reihe liefert unerwünschte Oberschwingungen. Ein Maß für ihre Größe ist ihre Energie nach der Parseval'schen Gleichung relativ zur Gesamtenergie nach Abzug der Hintergrund-Gleichspannung, also

$$k^2 := \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} .$$

Die Wurzel  $k$  aus diesem Ausdruck heißt der *Klirrfaktor*. Man beachte, daß mit der Ausgangsspannung  $u_A(\cdot)$  auch die Fourier-Koeffizienten  $a_n, b_n$  und damit der Klirrfaktor auf nichtlineare Weise von der Aussteuerung der Eingangsspannung  $u_E(\cdot)$  abhängen.

**Zusammenhang mit der Linearen Algebra** Im Vektorraum  $V := \mathcal{C}([-\pi, \pi])$  ist durch die Abbildung

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \times \mathcal{C}([-\pi, \pi]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle f, g \rangle &\longmapsto (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt definiert (s. Lineare Algebra). Damit ist dann durch

$$\|f\|_2 := \sqrt{(f, f)} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

auch eine Norm definiert.

In einem Euklidischen Raum  $V$  (endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt) der Dimension  $N$  gilt für jede Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_N\}$  und jeden Vektor  $x \in V$  die Entwicklung

$$x = \sum_{n=1}^N (x, b_n) b_n .$$

Als Elemente einer Orthonormalbasis in  $V$  erfüllen die Vektoren  $b_n$  die sog. *Orthogonalitätsrelation*

$$(b_i, b_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \quad (i, j \in \{1, \dots, N\})$$

sowie die Parseval'sche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N (x, b_n)^2 \quad (x \in V).$$

Nach (7.2) erfüllen aber auch die harmonischen Basisschwingungen  $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$  diese Beziehung, wenn man sie wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ u_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x & , & & u_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \\ u_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x & , & & u_4(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \\ u_5(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x & , & & u_6(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x \\ u_7(x) &= \dots \end{aligned} \quad (7.12)$$

Satz 7.5 zusammen mit der Parseval'schen Gleichung (Satz 7.6) liefert dann für jede beschränkte über  $[-\pi, \pi]$  integrierbare und  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  die Aussage

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right) \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0. \end{aligned}$$

Die Entwicklung einer Funktion  $f$  in eine Fourier-Reihe ist somit die Darstellung des „Vektors“  $f$  bzgl. des Orthonormalsystems (7.12) im Vektorraum  $V = \mathcal{C}([- \pi, \pi])$ . Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion sind dann die „Projektionen“ (= Anteile) der entwickelten Funktion an den Basisschwingungen, und die Parseval'sche Gleichung ist die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Das einzige, was sich von der Linearen Algebra unterscheidet, ist die nicht mehr endliche Raumdimension: aus der Summe  $\sum_{n=1}^N \dots$  der Linearen Algebra wird hier eine unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$ .

Das quadratische Mittel (Effektivwert) der Abweichungen ist dann die Verallgemeinerung des Euklidischen Abstandes im  $\mathbb{V}^n$ , s. Tabelle 7.1.

Im nächsten Abschnitt wird die Entwicklung nach einem anderen Orthonormalsystem betrachtet.

Objekt	$\mathbb{V}^N$ oder $\mathbb{C}^N$	$\mathcal{C}([-\pi, \pi])$
Vektor	$x$	$f$
Skalarprodukt	$(x, y) = \sum_{n=1}^N x_n y_n$	$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$
Norm	$\ x\  = \sqrt{\sum_{k=1}^N  x_k ^2}$	$\ f\  = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}  f(x) ^2 dx}$
Euklidischer Abstand	$\ x - y\  = \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2}$	$\ f - g\  = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}  f(x) - g(x) ^2 dx}$
Orthonormalbasis	$\{b_1, \dots, b_N\}$	$\{u_1, \dots\}$
Entwicklung	$x = \sum_{n=1}^N (x, b_n) b_n$	$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) u_n$
Parseval'sche Gleichung	$\ x\ ^2 = \sum_{n=1}^N (x, b_n)^2$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Tabelle 7.1: Vergleich von Fourier-Reihen mit dem Skalarprodukt in der Linearen Algebra

### 7.1.4 Fourier-Reihen in komplexer Form

Die bisher besprochenen Fourier-Reihen sind Fourier-Reihen in der sog. *reellen Darstellung*; das sind solche, in denen die Koeffizienten  $a_0, a_n, b_n$  reell und die Basisfunktionen  $\cos nx, \sin nx$  ( $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ) reellwertig sind.

Häufig ist es vorteilhaft, Fourier-Reihen in der *komplexen Darstellung* zu benutzen. Von der Theorie her ist das nichts Neues, handelt es sich doch lediglich um einen Übergang zu einer anderen Entwicklungsbasis. Abgesehen von dem involvierten Grenzprozeß (unendliche Reihe), ist diese Problematik schon aus der Linearen Algebra bekannt: wird ein Vektor bzgl. einer neuen Basis entwickelt, so ändern sich seine Entwicklungskoeffizienten.

Im folgenden wird beschrieben, wie man, ausgehend von der reellen Fourier-Reihe einer Funktion  $f$ , deren komplexe Darstellung und ihre neuen Entwicklungskoeffizienten gewinnt.

$$\begin{aligned}
 f &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left( a_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[ (a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Definiert man nun

$$\begin{aligned}
 c_0 &:= \frac{1}{2} a_0 \\
 c_n &:= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \\
 c_{-n} &:= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad (n \in \mathbb{N}),
 \end{aligned}$$

so erhält man das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 f &\sim c_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \\
 &=: \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Das ist die *komplexe Darstellung der Fourier-Reihe* einer Funktion  $f$ .

### Aufgabe

Man zeige, daß gilt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad c_{-n} = \bar{c}_n.$$

### Bemerkung

- (i) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  bedeutet der Übergang von der reellen - zur komplexen Form der Fourier-Reihe eine Basistransformation in dem zweidimensionalen Funktionenraum, der einmal von den Funktionen  $\{\sin nx, \cos nx\}$ , das andere Mal von den Funktionen  $\{e^{inx}, e^{-inx}\}$  aufgespannt wird, s. Abb. 7.39.

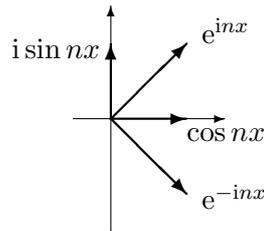


Abbildung 7.39: Basistransformation in einem zweidimensionalen Funktionenraum

- (ii) In Abschnitt 7.1.3.3 wurde gezeigt, daß die Fourier-Reihe einer auf dem Intervall  $[0, T]$  beschränkten, dort integrierbaren  $T$ -periodischen Funktion  $f$  Grenzwert im Sinne der sog.  $\mathcal{L}_2$ -Norm: ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right|^2 dx \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0.$$

Die komplexe Fourier-Reihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  einer Funktion  $f$  ist dann der symmetrische Grenzwert  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$  im Sinne dieser Norm:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right\|_2 := \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right|^2 dx \right)^{1/2} = 0$$

Andere Grenzwertbildungen sind denkbar, werden aber nicht betrachtet.

(iii) Die komplexe Form der Parseval'schen Gleichung lautet hier (cf. Satz 7.6)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Mit Hilfe der Umrechnungsformeln (7.13) soll nun die komplexe Form der Fourier-Reihe der beiden Demonstrationsbeispiele 7.2 und 7.3 angegeben werden.

### Beispiel 7.10

Für die Rechteckspannung

$$f(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x \in [-\pi, 0) \\ 1 & , \quad x \in [0, \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

gilt

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \end{aligned}$$

Bei dieser Fourier-Reihe treten nur Koeffizienten mit einem ungeraden Index auf, also nur Glieder der Form  $c_{2n-1}$  und  $c_{-(2n-1)}$ :

$$\begin{aligned} c_{2n-1} &= -\frac{i}{2} b_{2n-1} = -\frac{2i}{\pi} \frac{1}{2n-1} & (n \in \mathbb{N}) \\ c_{-(2n-1)} &= \frac{i}{2} b_{2n-1} = \frac{2i}{\pi} \frac{1}{2n-1} & (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $2n-1 \geq 1$  und ungerade. Damit sind „beide“ Koeffizienten  $c_{2n-1}$  und  $c_{-(2n-1)}$  der komplexen Form der Fourier-Reihe ermittelt. Man möchte nun gern *eine* Formel haben, in der dafür  $n \in \mathbb{Z}$  ist.

Wenn  $n$  die natürlichen Zahlen durchläuft, so durchläuft  $2n-1$  die ungeraden natürlichen Zahlen (= positive ungerade ganze Zahlen) und  $-(2n-1)$  durchläuft die negativen ungeraden ganzen Zahlen. In summa werden also alle ungeraden ganzen Zahlen durchlaufen. Damit folgt insgesamt

$$c_{2n-1} = -\frac{2i}{\pi} \frac{1}{2n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

und damit die komplexe Form der Fourier-Reihe der Rechteckspannung

$$\begin{aligned} f &\sim -\frac{2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{i(2n-1)x} \\ &= -\frac{2i}{\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-3ix} - \frac{1}{1} e^{-ix} + \frac{1}{1} e^{ix} + \frac{1}{3} e^{3ix} + \dots \right). \end{aligned}$$

**Beispiel 7.11**

Für die kommutierte Sinusschwingung

$$f(x) := |\sin x| \quad (x \in [-\pi, \pi]) \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \cos(2nx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right) \end{aligned}$$

Hier darf man „ $\sim$ “ sogar durch „ $=$ “ ersetzen, da die Reihe in  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig und damit insbesondere punktweise gegen  $f$  konvergiert. Die bekannten Umrechnungsformeln (7.13) liefern

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} a_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \\ c_{2n} &= \frac{1}{2} a_{2n} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ c_{-2n} &= \frac{1}{2} a_{2n} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

also

$$c_{2n} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

also

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1} e^{i2nx} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left( \dots \frac{1}{4^2 - 1} e^{-4ix} + \frac{1}{2^2 - 1} e^{-2ix} - \frac{1}{1} e^0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^2 - 1} e^{2ix} + \frac{1}{4^2 - 1} e^{4ix} + \dots \right). \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Im Periodizitätsintervall  $[0, T]$  sind die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  einer Funktion  $f$  gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \text{oder} \int_{-T/2}^{T/2} \right\} f(x) e^{-in \frac{2\pi}{T} x} dx \\ &\stackrel{(T=2\pi)}{=} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \text{oder} \int_{-\pi}^{\pi} \right\} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

**Beispiel 7.12**

Man berechne die komplexe Form der Fourier-Reihe der Funktion (Abb. 7.40)

$$f(x) := e^{-|x|} \quad (x \in [-\pi, \pi)) \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

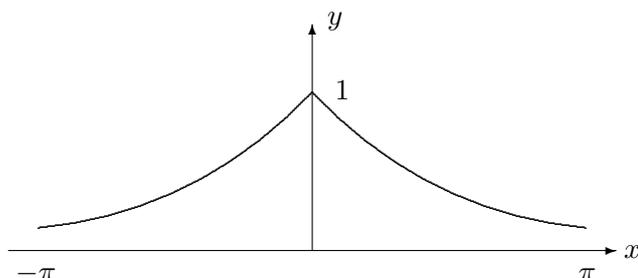


Abbildung 7.40: Fourier-Reihe einer e-Funktion

Es ist  $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ , wobei sich die Koeffizienten  $c_n$  nach der oben angegebenen Formel berechnen lassen.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 e^{(1-in)x} dx + \int_0^{\pi} e^{-(1+in)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-in} [1 - e^{-(1-in)\pi}] - \frac{1}{1+in} [e^{-(1+in)\pi} - 1] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(1+n^2)} \left( (1+in)[1 - e^{-(1-in)\pi}] + (1-in)[1 - e^{-(1+in)\pi}] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(1+n^2)} \left( 2 - (1+in)e^{-(1-in)\pi} + (1-in)e^{-(1+in)\pi} \right) \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned} e^{-(1-in)x} &= e^{-\pi} \cdot e^{in\pi} = e^{-\pi} \cdot (\cos n\pi + i \sin n\pi) = (-1)^n e^{-\pi} \\ e^{-(1+in)x} &= e^{-\pi} \cdot e^{-in\pi} = e^{-\pi} \cdot (\cos n\pi - i \sin n\pi) = (-1)^n e^{-\pi} \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi(1+n^2)} \left( 2 + (-1)^n e^{-\pi} [-(1+in) - (1-in)] \right) \\ &= \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Im Intervall  $[-\pi, \pi]$  konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ , da  $f$  stetig und stückweise glatt ist. Somit gilt

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{(1 + n^2)} e^{inx} \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

## 7.2 Fourier-Transformation

### 7.2.1 Einführung

Nach den Ausführungen im Abschnitt „Zusammenhang mit der Linearen Algebra“ (p. 146 f.) ist die Entwicklung einer  $T$ -periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe eine (unendliche) Entwicklung in ein orthonormales Funktionensystem. Man hat damit eine Funktion  $f$  nicht nach ihren Funktionswerten  $f(t)$  (im Zeitbereich), sondern nach ihren Frequenzamplituden  $c_n$  (im Frequenzbereich) aufgebaut:

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in \frac{2\pi}{T} t} \quad , \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Dabei beinhalten diese Frequenzamplituden – die Fourier-Koeffizienten – genauso viele Informationen über die Funktion wie die Funktionswerte selbst; die Parseval'sche Gleichung (Satz 7.6) etwa sagt aus, daß die an einem Ohm'schen Widerstand pro Periode freigesetzte Gesamtenergie sich auch dadurch berechnen läßt, daß die Einzelenergien der Frequenzanteile von  $f$  aufsummiert werden:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

m.a.W.

man kennt die Funktion  $f$ , wenn man die Amplituden  $c_n$  aller ihrer Oberwellen kennt.

Das funktioniert so allerdings nur für periodische Funktionen, nicht für nicht-periodische:

- Klänge sind durch eine Superposition reiner Töne darstellbar, Geräusche nicht mehr.
- Periodische Spannungen sind durch eine Superposition von Wechselspannungen der Frequenzen  $\omega_n := n\omega$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  geeignet) darstellbar, beliebige Wechselspannungen nicht mehr.
- Licht mit diskreten Wellenlängenanteilen  $\lambda/n$ , d.h. mit diskreten Farben, läßt sich durch eine Fourier-Reihe darstellen, beliebiges Licht nicht mehr.

Um auch (nicht-periodische) Geräusche durch ihre Frequenzanteile darstellen zu können, reichen diskrete Frequenzen  $\omega_n := n\omega$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  geeignet) allein nicht mehr aus, man benötigt alle Frequenzen  $\omega \in \mathbb{R}$ . Das ergibt dann ein sog. *kontinuierliches Spektrum*, die Fourier-Reihe wird zum Fourier-Integral.

**Beispiel 7.13** (Periodische Rechteckschwingung)

Zu berechnen sind die Fourier-Koeffizienten der (periodischen) Rechteckschwingung der Höhe  $A$  und der Breite  $\tau$ , s. Abb. 7.41.

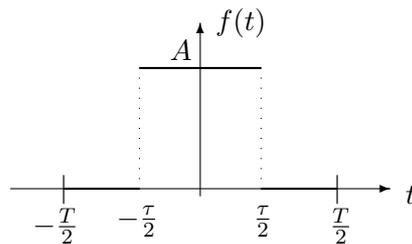


Abbildung 7.41: Periodische Rechteckschwingung

Die Rechteckschwingung ist eine gerade Funktion, also sind alle „ungeraden“ Koeffizienten  $b_n = 0$ . Für die „geraden“ Koeffizienten  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} A dt = 2A \cdot \frac{\tau}{T} \\
 a_n &= 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} A \cdot \cos n\omega t dt = \frac{4A}{T \cdot n\omega} \cdot \sin n\omega t \Big|_0^{\tau/2} \\
 &= \frac{4A}{T \cdot n\omega} \cdot \sin\left(n\omega \frac{\tau}{2}\right) \stackrel{(\omega T=2\pi)}{=} \frac{2A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau}{T}\right) \\
 &= 2A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \cdot \frac{\tau}{T}}
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

In den Abb. 7.42 und 7.43 sind die periodische Rechteckschwingung und ihr Liniendiagramm dargestellt.

**Bemerkung** <sup>6</sup>

- (i) Wie man erkennen kann, ist für das Frequenzspektrum von (periodischen) Rechteckimpulsen das sog. *Tastverhältnis* entscheidend, das ist der Quotient aus Impulsdauer  $\tau$  und Periodendauer  $T$ . Bei der symmetrischen

<sup>6</sup>Diese Bemerkung entstammt im Wesentlichen dem Buch „Signale, Prozesse, Systeme“ von Ulrich Karrenberg aus dem Springer-Verlag, 2. Auflage 2004.

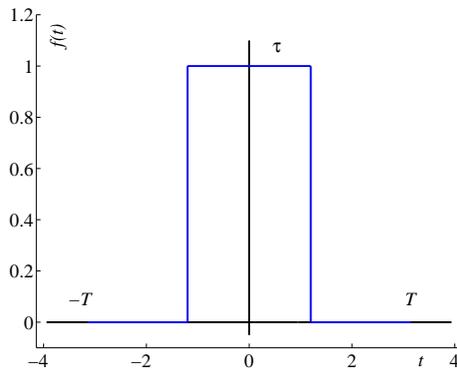


Abbildung 7.42: Zeitbereich:  
Periodischer Rechteckimpuls

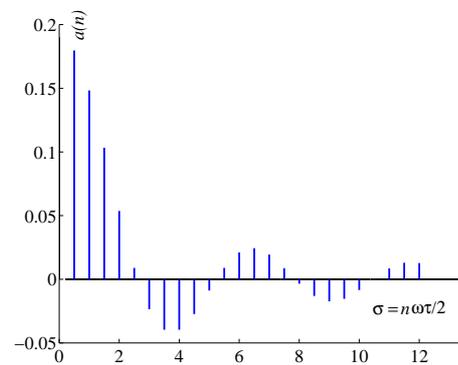


Abbildung 7.43: Frequenzbereich:  
Spektrum des Rechteckimpulses

Rechteckschwingung beträgt das Tastverhältnis  $\tau : T = 1 : 2$ . Man entnimmt (7.14), daß in diesem Falle nur die ungeradzahigen Harmonischen ( $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ ) auftreten.

Beim Tastverhältnis  $1 : 4$  fehlen genau die 4., die 8., die 12. etc. Harmonische, beim Tastverhältnis  $1 : 5$  die 5., die 10., die 15. usw. Harmonische, etc. Diese „Fehlstellen“ werden *Nullstellen des Spektrums* genannt, weil die Amplituden an diesen Stellen formal den Wert Null besitzen. Folgerichtig fehlen bei der symmetrischen Rechteckschwingung mit dem Tastverhältnis  $1 : 2$  alle geradzahigen Harmonischen.

(ii) Weiterhin läßt sich ablesen, wie die Kenngrößen des Zeitbereichs im Frequenzbereich „versteckt“ sind:

- Der Kehrwert der Periodendauer  $T$ , also die Kreisfrequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$ , entspricht dem Abstand der Spektrallinien im Spektrum: je größer  $T$ , desto mehr Spektrallinien „passen“ zwischen zwei Nullstellen;
- Der Kehrwert der Impulsdauer  $\tau$  entspricht dem Abstand der Nullstellen im Spektrum: je größer  $\tau$ , desto kleiner ist deren Abstand voneinander;
- Alle *großen* zeitlichen Kenngrößen erscheinen im Frequenzbereich *klein*, alle *kleinen* zeitlichen Kenngrößen erscheinen im Spektrum *groß* und umgekehrt.

(iii) Wenn man die Fourier-Koeffizienten  $a_n$  des (periodischen) Rechteckimpulses aus Beispiel 7.13 über der Frequenz

$$\sigma := n\omega \cdot \tau/2 = n\pi \cdot \frac{\tau}{T}$$

abträgt, so sieht man:

- in einem endlichen Frequenzband  $[0, \sigma_0]$  haben bei größer werdender Periode  $T$ , also kleiner werdender Frequenz  $\omega = 2\pi/T$ , immer mehr Spektrallinien Platz, sie verdichten sich; Abb. 7.44 - 7.51.

- ihre Amplituden werden kleiner, s. (7.14):

$$a_n = 2A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \cdot \frac{\tau}{T}} \xrightarrow{(T \rightarrow \infty)} 0 \cdot 1 = 0$$

- Wird – wie in Abb. 7.44 - 7.51 geschehen – die Pulsfrequenz  $\sigma$  jeweils halbiert, die Pulsbreite  $\tau$  aber konstant gelassen, so verändert sich die Lage der Nullstellen, also die Lage der Fehlstellen des Spektrums nicht.

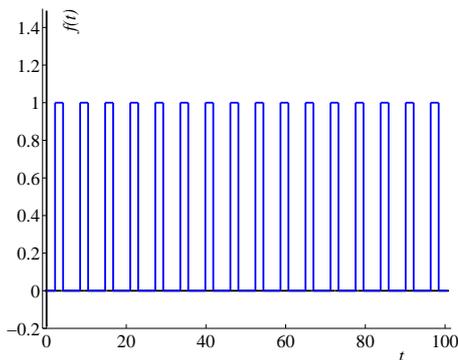


Abbildung 7.44: Zeitbereich:  
Periodischer Rechteckimpuls

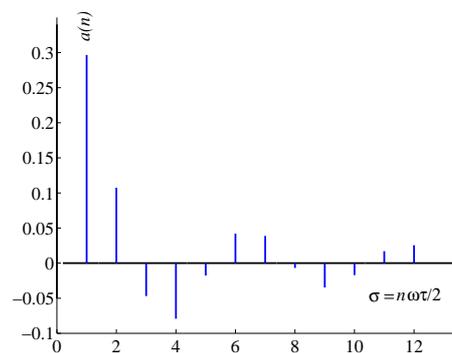


Abbildung 7.45: Frequenzbereich:  
Spektrum des Rechteckimpulses

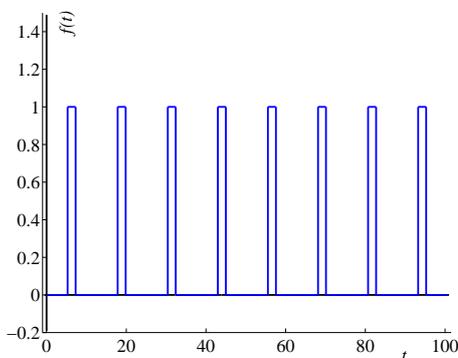


Abbildung 7.46: Zeitbereich:  
Periodischer Rechteckimpuls

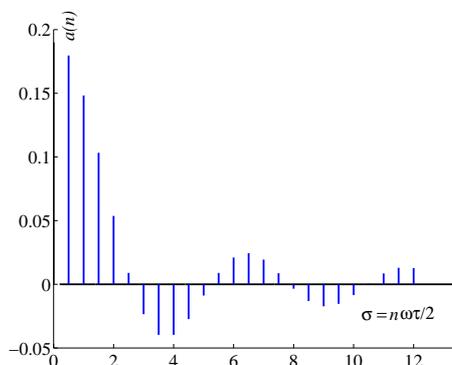


Abbildung 7.47: Frequenzbereich:  
Spektrum des Rechteckimpulses

Eigentlich läßt sich eine periodische Schwingung gar nicht auf einem Bildschirm darstellen. Um über ihre Periodizität absolut sicher zu sein, müßte ihr Verhalten in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft beobachtet werden. Da sich eine (idealisierte) periodische Schwingung immer auf die gleiche Art wiederholt, zeigt man im Zeitbereich deshalb nur eine oder wenige Perioden auf dem Bildschirm.

Im Frequenzbereich ist das anders. Besteht das Spektrum aus (sich in regelmäßigen Abständen befindlichen) Linien, so signalisiert das sofort eine periodische Schwingung. Extremfall: Es gibt nur eine (periodische) Schwingung, deren Spektrum genau eine Linie enthält, die Sinus-Schwingung eben dieser Frequenz.

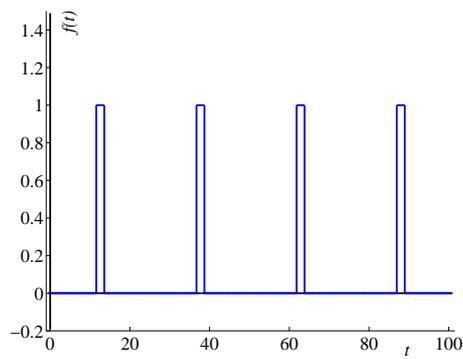


Abbildung 7.48: Zeitbereich:  
Periodischer Rechteckimpuls

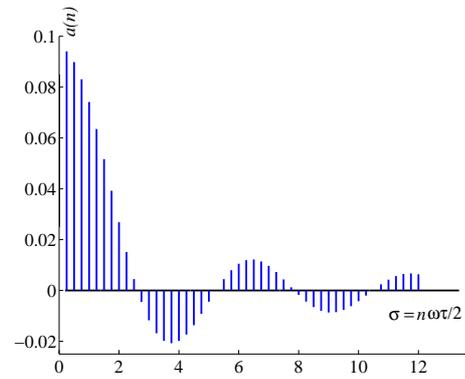


Abbildung 7.49: Frequenzbereich:  
Spektrum des Rechteckimpulses

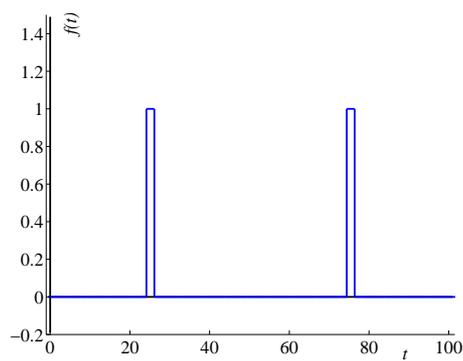


Abbildung 7.50: Zeitbereich:  
Periodischer Rechteckimpuls

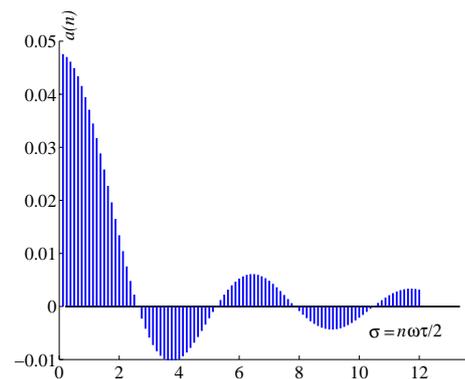


Abbildung 7.51: Frequenzbereich:  
Spektrum des Rechteckimpulses

Nachrichtentechnisch sind jedoch die nicht-periodischen Schwingungen die interessanteren, die periodischen Schwingungen stellen keine typischen zu übertragenden Signale dar. Das liegt daran, daß sie bis auf den Momentanwert keine *neue* Information liefern, da ihr weiterer Verlauf genau vorhergesagt werden kann. Je größer also die Ungewißheit über den Verlauf des Signals im nächsten Augenblick, desto größer *kann* die in ihm enthaltene Information sein. Je mehr man darüber weiß, welche Nachricht die Quelle übermitteln wird, desto geringer sind Unsicherheit und Informationswert. In der Alltagssprache demgegenüber wird „Information“ eher mit „Kenntnis“ verbunden als mit der Vorstellung von Unsicherheit.

Im folgenden Abschnitt soll daher auch das Spektrum eines nicht-periodischen Signals untersucht werden, also die Frequenzanteile, aus denen es aufgebaut ist. Ein nicht-periodisches Signal wird dabei aufgefaßt als ein periodisches Signal mit einer „gegen Unendlich“ strebenden Periode, s, Abb. 7.44 - 7.51.

### 7.2.2 Komplexe Form des Fourier-Integrals

In Abb. 7.52 wird eine periodische Impulsfolge gezeigt, bei der die Periode  $T$  groß gegen die Impulsbreite  $\tau$  ist:  $T \gg \tau$ .

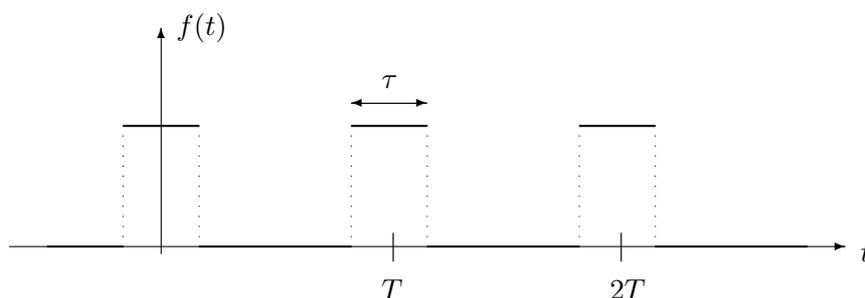


Abbildung 7.52: Periodische Impulsfolge mit großer Periode

Durch Vergrößern der Periode  $T$  erhält man so in einem „kleinen“ Intervall die Darstellung eines Einzelimpulses. Eine nicht-periodische Funktion wird somit aufgefaßt als eine periodische Funktion mit einer „großen“ Periode.

Mathematisch bedeutet das einen geeigneten Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$ . Zur Vorbereitung dieses Grenzüberganges wird die Fourier-Reihe als Riemann'sche Summe eines Integrals gedeutet.

Seien  $T > 0$  und  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , s. Abb. 7.53.

$f$  ist also auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, aber höchstens innerhalb des offenen Intervalles  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  von Null verschieden. Insbesondere ist  $f$  auf dem Intervall  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  periodisch mit der Periode  $T$ :

$$f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right) = 0.$$

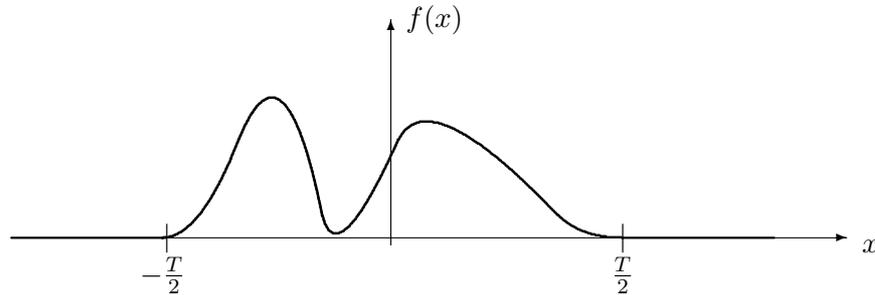


Abbildung 7.53: Funktion mit kompaktem Träger

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von  $f$  konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  im Intervall  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  gleichmäßig gegen  $f$ . In diesem Intervall gilt daher

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Die Koeffizienten  $c_n$  werden in die Fourier-Reihe von  $f$  eingesetzt, und man erhält nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \right) e^{in\frac{2\pi}{T}x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \right) e^{in\frac{2\pi}{T}x} \cdot \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Sei  $\text{supp } f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$  (support, Träger von  $f$ ). Wegen  $\text{supp } f \subseteq [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  kann das Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$  erstreckt werden. Setzt man außerdem

$$k_n := n \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\Delta k_n := k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{T} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

so läßt sich  $f(x)$  schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ik_n t} dt \right) e^{ik_n x} \cdot \Delta k_n.$$

Nun wird definiert:

$$g(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Dieses uneigentliche Integral existiert für alle  $k \in \mathbb{R}$  wegen

$$|g(k)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \leq M \cdot 2 \cdot \frac{T}{2}$$

mit

$$M := \sup_{\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]} |f(t)| = \max_{\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]} |f(t)|.$$

### Aufgabe

Warum existiert das Maximum von  $f$  auf dem Intervall  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  ?

Damit läßt sich die Fourier-Reihe von  $f$  schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \cdot e^{ik_n x} \cdot \Delta k_n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Läßt man jetzt  $T \rightarrow \infty$  gehen, so geht  $\Delta k_n = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ , und die Stützstellen  $k_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$  rücken enger zusammen. Die obige Darstellung ist somit eine Riemann'sche Summe für das Integral

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ik(x-t)} dt \right) dk \\ g(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned} \tag{7.15}$$

**Bemerkung**

- (i) Diese Darstellung heißt die (*komplexe*) *Fourier'sche Integraldarstellung* von  $f$  oder auch *Fourier-Transformation* und *inverse Fourier-Transformation* von  $f$ . Eine übliche Schreibweise für die Fourier-Transformierte und inverse Fourier-Transformierte von  $f$  sind

$$\hat{f}(k) := (Ff)(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (7.16)$$

$$\check{f}(x) := (F^{-1}f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk \quad (7.17)$$

Die Schreibweise für  $\check{f}$  kommt dabei folgendermaßen zustande: in der Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dx$$

wird für  $g$  die Funktion  $f$  eingesetzt und das Ergebnis  $\check{f}$  genannt.

- (ii)  $\hat{f} = F(f)$  heißt *Spektralfunktion* von  $f$ . Die Fourier-Transformation bildet ab:

(a) Elektrotechnik den Zeitbereich auf den Frequenzbereich,

(b) Physik den Ortsraum auf den Impulsraum.

Das diskrete Spektrum (die Fourier-Koeffizienten als Amplituden (Intensitäten) der diskreten Obertöne) geht über in eine kontinuierliche Spektralfunktion, die sog. *Frequenzdichtefunktion*<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Eine *Dichtefunktion* für eine Größe  $X$  ist eine absolut-integrierbare Funktion, deren *Verteilung*, d.h. deren Integral über ein Intervall  $[a, b]$ , die entsprechende Gesamtgröße in diesem Intervall liefert. So ist die Frequenzdichtefunktion  $\hat{f}$  der Funktion  $f$  eine in  $\mathbb{R}$  absolut-integrierbare Funktion, deren Integral in einem Intervall den Frequenzanteil von  $f$  liefert:

$$\text{Frequenzanteil von } f \text{ in } [a, b] = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \hat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Ist das Intervall hinreichend klein, etwa  $[a, b] = [k_0, k_0 + \Delta k]$  mit einem kleinen Wert für  $\Delta k$ , so gilt approximativ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{k_0}^{k_0 + \Delta k} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \approx \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_0) e^{ik_0 x} \cdot \Delta k = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_0) \Delta k}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot e^{ik_0 x}.$$

mit der komplexen Amplitude  $\frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_0) \Delta k$  der Schwingung  $e^{ik_0 x}$  zur Frequenz  $k_0$ .

Die Darstellung einer Funktion als Gesamtheit ihrer Schwingungen  $e^{ikx}$  und zugehörigen Amplituden ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(k_n) e^{ik_n x} \Delta k_n,$$

daher ist die komplexe Amplitude der (einzelnen) Schwingung  $e^{ik_0 x}$  im (kleinen) Intervall  $[k_0, k_0 + \Delta k]$  gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{k_0}^{k_0 + \Delta k} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \approx \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_0) e^{ik_0 x} \cdot \Delta k = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_0) \Delta k}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot e^{ik_0 x}.$$

- (iii) Die Parseval'sche Gleichung für Fourier-Reihen (Satz 7.6), welche aussagt, daß sich die Energie eines Signals aus den Energien (= Amplitudenquadraten) der einzelnen Oberwellen zusammensetzt, lautet im kontinuierlichen Fall

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

und läuft auch unter dem Namen *Satz von Plancherel*. Die an einem Widerstand freigesetzte Energie ist gleich der Energie der Spektralanteile.

- (iv) Das Fourier-Integral läßt sich als uneigentliches Integral sinnvoll definieren für alle Funktionen  $f$ , welche der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

genügen. Funktionen, deren Absolutbetrag über dem Intervall  $\mathcal{I}$  integrierbar ist, werden künftig mit dem Symbol  $\mathcal{L}^1(\mathcal{I})$  bezeichnet.

- (v) Wenn man eine symmetrische Schreibweise von Fourier-Transformation und inverser Fourier-Transformation bevorzugt:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (7.18)$$

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk, \quad (7.19)$$

so ist das auch korrekt und wird beispielsweise in der Physik bevorzugt, ist in der Elektrotechnik allerdings unüblich. Das läuft darauf hinaus, in der komplexen Fourier-Reihe für  $f$  ( $\omega T = 2\pi$ ),

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega x}$$

zu einer Entwicklung der Form

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2T} c_n \frac{1}{\sqrt{2T}} e^{in\omega x} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \frac{1}{\sqrt{2T}} e^{in\omega x}$$

mit den Koeffizienten  $\gamma_n := \sqrt{2T} c_n$  überzugehen ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

- (vi) Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation sind zueinander inverse lineare Abbildungen (*Operatoren*) auf geeigneten Funktionenräumen.
- (vii) Das Fourier-Integral existiert für alle Funktionen, welche über  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar sind, also für Funktionen aus  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Ist  $f$  darüberhinaus auf jedem beschränkten Teilintervall von  $\mathbb{R}$  beschränkt und stückweise monoton, so stellt  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$
- (a)  $f(x)$  in den Stetigkeitspunkten,  
 (b)  $\frac{1}{2} [f(x_d + 0) + f(x_d - 0)]$  in den Unstetigkeitspunkten  $x = x_d$
- dar.
- (viii) Wie in der Elektrotechnik üblich, wird der Fourier'sche Integralsatz mit den Variablen  $t$  und  $\omega$  anstelle von  $x$  und  $k$  geschrieben, also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega \quad (7.20)$$

für eine beschränkte und stückweise monotone Funktion, welche über  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar ist.

**Beispiel 7.14** (Abklingvorgang)

Sei  $\delta > 0$ . Man betrachte den Abklingvorgang (Abb. 7.54)

$$f(t) := \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ e^{-\delta t} & , t \geq 0 \end{cases}$$

Die (komplexe) Fourier-Transformierte von  $f$  lautet

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\delta+i\omega)t} dt = \left[ -\frac{1}{\delta+i\omega} e^{-(\delta+i\omega)t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= 0 + \frac{1}{\delta+i\omega} = \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (7.21)$$

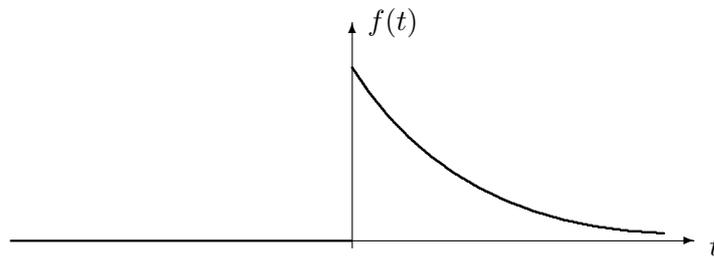


Abbildung 7.54: Exponentieller Abklingvorgang

Als Bild in der komplexen Ebene erhält man die Inversion der Geraden

$$z(\omega) := \delta + i\omega \quad (\omega \in \mathbb{R}),$$

also einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $\langle x_M, y_M \rangle = \langle \frac{1}{2\delta}, 0 \rangle$  und dem Radius  $r = (2\delta)^{-1}$ , denn es gilt (Abb 7.55):

$$\begin{aligned} (\Re \hat{f}(\omega) - x_M)^2 + (\Im \hat{f}(\omega) - y_M)^2 &= r^2 \\ \left( \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} - \frac{1}{2\delta} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2} - 0 \right)^2 &= \left( \frac{1}{2\delta} \right)^2 \end{aligned}$$

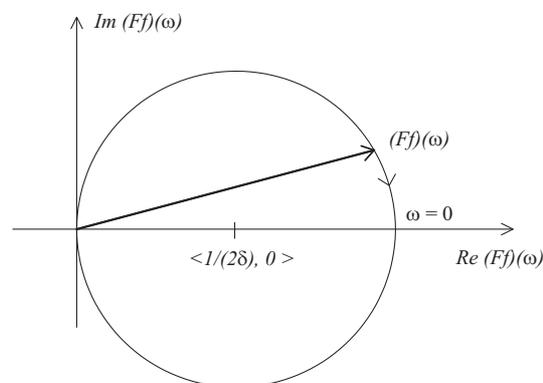


Abbildung 7.55: Inversion am Einheitskreis

Man beachte, daß  $|\hat{f}(\omega)|$  mit wachsendem  $|\omega|$  gegen Null konvergiert.

### 7.2.3 Interpretation des Fourier-Integrals

An Hand des Dreiecksimpulses sollen im folgenden noch einmal die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion einerseits und die Fourier-Transformation der (zugehörigen) nicht-periodischen Funktion andererseits gegenübergestellt werden.

## I Fourier-Reihe

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad , \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Die Fourier-Reihe ist eine Zerlegung der  $T$ -periodischen Zeitfunktion  $f$  in harmonische Schwingungen mit den *diskreten* Frequenzen  $\omega_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$  und den zugehörigen komplexen Frequenzamplituden  $c_n$  bzw. den reellen Frequenzamplituden  $a_n = c_n + c_{-n}$  und  $b_n = i(c_n - c_{-n})$ .

### Beispiel 7.15 (Periodischer Dreieckimpuls)

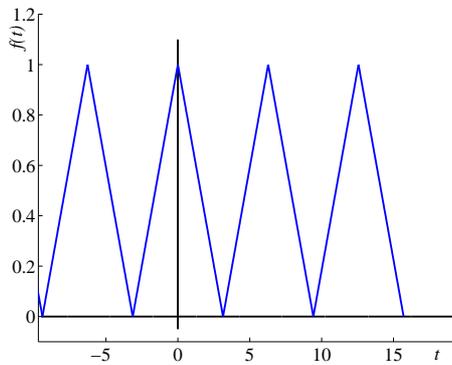


Abbildung 7.56: Zeitbereich:  
Periodischer Dreieckimpuls

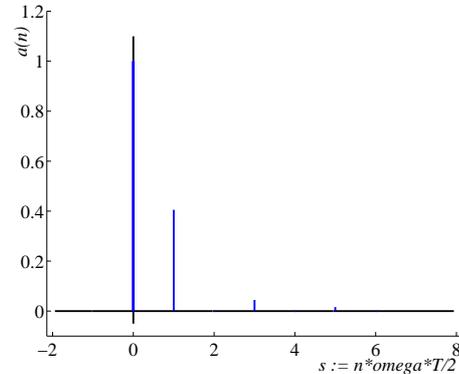


Abbildung 7.57: Frequenzbereich:  
Spektrum des Dreieckimpulses

### Fourier-Koeffizienten

$$b_n = 0 \quad , \quad a_0 = A \quad , \quad a_n = 2A \frac{1 - \cos n\pi}{(n\pi)^2} \underset{(\omega T = 2\pi)}{=} 2A \frac{1 - \cos\left(n \cdot \frac{\omega T}{2}\right)}{\left(n \frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

## II Fourier-Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Das Fourier-Integral stellt die spektrale Zerlegung (= Zerlegung in alle Frequenzanteile) der nicht-periodischen Zeitfunktion  $f$  in ein *kontinuierliches* Spektrum  $\hat{f}$  dar, wobei die Schwingung  $e^{i\omega t}$  im (kleinen) Intervall  $[\omega, \omega + \Delta\omega]$  gegeben ist durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \approx \underbrace{\frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) \Delta\omega}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot e^{i\omega t}.$$

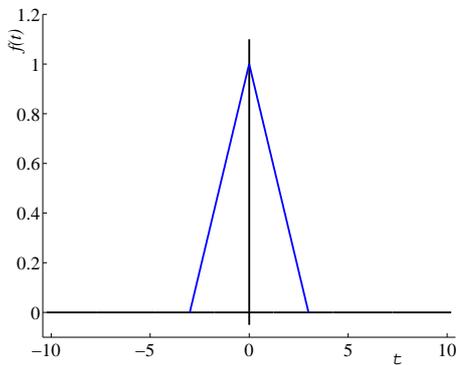


Abbildung 7.58: Zeitbereich:  
Nicht-periodischer Dreieckimpuls

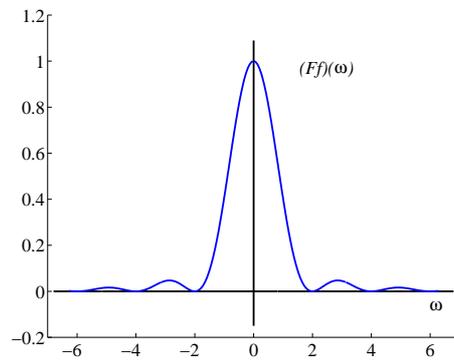


Abbildung 7.59: Frequenzbereich:  
Spektrum des nicht-periodischen  
Dreieckimpulses

**Beispiel 7.16** (Nicht-periodischer Dreieckimpuls)

**Fourier-Transformierte**

$$\hat{f}(\omega) = 2A \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

Auch hierfür gibt es reelle Analoga: die reellen Schwingungen  $\cos \omega t$  und  $\sin \omega t$  haben die Amplituden

$$a(\omega) \cdot \Delta\omega = [\hat{f}(\omega) + \hat{f}(-\omega)] \cdot \Delta\omega$$

$$b(\omega) \cdot \Delta\omega = i [\hat{f}(\omega) - \hat{f}(-\omega)] \cdot \Delta\omega$$

### 7.2.4 Reelle Form des Fourier-Integrals

So wie es für die Fourier-Reihe einer in einem Intervall periodischen Funktion eine reelle und eine komplexe Darstellung gibt, so gibt es auch eine reelle und eine komplexe Form des Fourier-Integrals; in (7.15) ist die komplexe Form notiert. Die reelle Form ergibt sich daraus durch Übergang zu Real- und Imaginärteil mit Hilfe der Euler'schen Formel wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\ &=: a(\omega) - i \cdot b(\omega) \end{aligned}$$

mit den beiden reellen Spektralfunktionen

$$a(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad (7.22)$$

$$b(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt; \quad (7.23)$$

$a(\cdot)$  ist eine gerade -,  $b(\cdot)$  eine ungerade Funktion.

Aus dieser „Normalform“ des komplexen Fourier-Integrals läßt sich natürlich auch die „Exponentialform“ herstellen:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \\ &= a(\omega) - i \cdot b(\omega) \\ &=: A(\omega) \cdot e^{i\phi(\omega)} \quad (\omega \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

### Definition 7.5

- (i)  $A(\omega) := |\hat{f}(\omega)| = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}$   
 heißt (kontinuierliches) *Amplitudenspektrum* der Zeitfunktion  $f$ .
- (ii)  $\phi(\omega) := \arg \hat{f}(\omega)$   
 heißt (kontinuierliches) *Phasenspektrum* der Zeitfunktion  $f$ .

### Bemerkung

- (i) Die Spektralfunktionen  $a(\cdot)$  und  $b(\cdot)$  sind die kontinuierlichen Analoga der diskreten Zerlegung einer in einem Intervall periodischen Funktion in gerade - und ungerade Obertöne.
- (ii) Ein Grenzprozeß, angewandt auf die komplexe Form der Fourier-Reihe, hat zu der (komplexen) Fouriertransformation (7.15) geführt. Zu den reellen Integraldarstellungen könnte man nun auch über einen analogen Grenzprozeß gelangen, dieses Mal jedoch ausgehend von der reellen Form der Fourier-Reihe (Abb. 7.60).

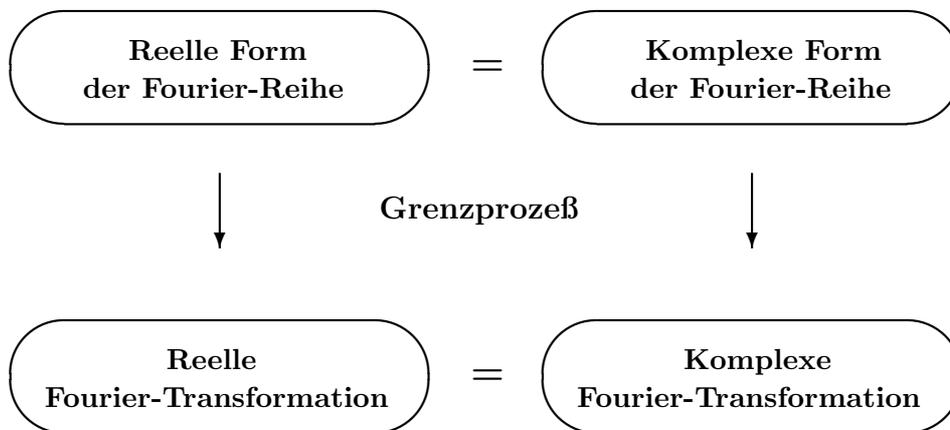


Abbildung 7.60: Grenzprozeß beim Übergang zur Fourier-Transformation

**Beispiel 7.17** (s. Beispiel 7.14)

Es soll noch einmal das Beispiel des Abklingvorganges

$$f(t) := \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ e^{-\delta t} & , t \geq 0 \end{cases}$$

aufgegriffen und dessen reelle Fourier-Transformierte berechnet werden. Die

reellen Spektralgrößen von  $f$  lauten (s. Abb. 7.61)

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cos \omega t \, dt \\ &= \left[ \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega^2} (-\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \\ &= \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sin \omega t \, dt \\ &= \left[ \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega^2} (-\delta \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \\ &= \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = \arctan \left( -\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right) = -\arctan \left( \frac{\omega}{\delta} \right)$$

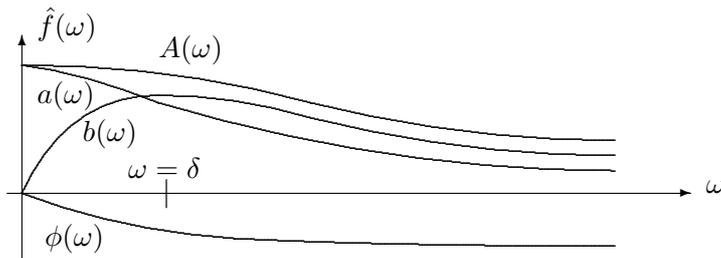


Abbildung 7.61: Reelle Spektralgrößen des exponentiellen Abklingvorganges

Der Übersichtlichkeit und der Interpretation halber sind diese Funktionen in Abb. 7.61 nur für  $\omega \geq 0$  dargestellt; natürlich sind sie für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  definiert. In diesem Beispiel führte die Berechnung der komplexen Form der Fourier-Transformation gemäß p. 164 auf ein leichter zu lösendes Integral: die zweimalige partielle Integration wurde vermieden. Natürlich hätte man schon dort die reellen Spektralgrößen als Real- und Imaginärteil von  $\hat{f}(\omega)$  bestimmen können:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\delta + i\omega} = \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2} = a(\omega) - i \cdot b(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

Als Bild in der komplexen Ebene erhält man wieder die Inversion der Geraden

$$z(\omega) := \delta + i\omega \quad (\omega \in \mathbb{R}),$$

also einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $\langle x_M, y_M \rangle = \langle \frac{1}{2\delta}, 0 \rangle$  und dem Radius  $r = (2\delta)^{-1}$  (Abb 7.55).

Auch eine reelle Version des Fourier'schen Integralsatzes (7.15) kann man erhalten, also eine reelle Version der Identität

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (7.24)$$

Man erhält sie durch die Beziehung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

angewandt auf  $x := \omega(t-s)$ .

Das äußere Integral von (7.24) wird jetzt umgeformt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega + \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega \right] \\ &\quad \text{(Variablensubstitution } \omega \rightarrow -\omega \text{ im ersten Integral)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(t-s)} ds \right) d\omega + \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{e^{i\omega(t-s)} + e^{-i\omega(t-s)}}{2} ds \right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \omega(t-s) ds \right) d\omega. \end{aligned}$$

Wird auf  $\cos \omega(t-s)$  das Additionstheorem angewandt, so gewinnt man hieraus

eine andere Form des Fourier'schen Integralsatzes:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) [\cos \omega t \cos \omega s + \sin \omega t \sin \omega s] ds \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \omega s ds \right) \cos \omega t d\omega \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin \omega s ds \right) \sin \omega t d\omega \\
 &=: \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega
 \end{aligned}$$

mit den beiden reellen Spektralfunktionen

$$\begin{aligned}
 a(\omega) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \\
 b(\omega) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (\omega \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

**Beispiel 7.18** (Nicht-periodischer Rechteckimpuls)

Sei  $T > 0$ . Berechnet werden sollen die reellen Spektralfunktionen für den (nicht-periodischen) Rechteckimpuls

$$f(t) := \begin{cases} A & , |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

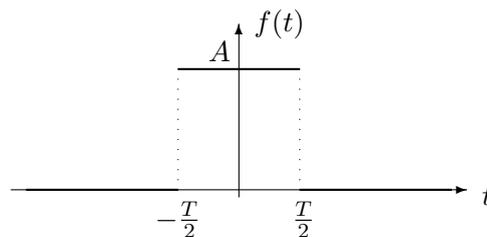


Abbildung 7.62: Nicht-periodischer Rechteckimpuls

$$\begin{aligned}
a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = A \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \, dt \\
&= \frac{A}{\omega} \left[ \sin \omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin \omega \frac{T}{2} \\
b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = A \int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega t \, dt = 0 \\
A(\omega) &= \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2} = \frac{2A}{\omega} \left| \sin \omega \frac{T}{2} \right| \\
\phi(\omega) &= \arctan \left( -\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right) = 0
\end{aligned}$$

Die Spektralzerlegung von  $f$  für  $t \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t \right] d\omega = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} \cos \omega t \, d\omega.$$

Wegen  $f(0) = A$  folgt hieraus für  $t = 0$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

In den beiden Beispielen 7.14 und 7.18 sind die Spektralfunktionen stetig und konvergieren gegen Null für  $\omega \rightarrow \infty$ . Das ist kein Zufall, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 7.7** (Riemann-Lebesgue'sches Lemma)

Sei  $f$  über  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar, beschränkt und auf jedem Teilintervall  $[a, b]$  von  $\mathbb{R}$  stückweise monoton. Dann gilt:

- (i)  $\hat{f}(\cdot)$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

*Teilbeweis*

Es wird Teil (ii) des Satzes bewiesen unter der Zusatzannahme  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  (diese Zusatzannahme ermöglicht eine partielle Integration).

Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Man betrachte dann eine Zerlegung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt = \int_{-\infty}^a |f(t)| \, dt + \int_a^b |f(t)| \, dt + \int_b^{\infty} |f(t)| \, dt$$

mit reellen Zahlen  $a, b$ . Dann ist zu zeigen, daß ein  $\omega_0$  existiert, so daß für alle  $\omega$  mit  $\omega > \omega_0$  gilt:  $|\hat{f}(\omega)| < \varepsilon$ . Nun gilt:

$$(a) \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \implies \quad \bigvee_{a,b \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^a |f(t)| dt + \int_b^{\infty} |f(t)| dt < \frac{2\varepsilon}{3}$$

(b) Für das „mittlere“ Integral erhält man die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{i\omega t} dt \right| &= \left| \frac{1}{i\omega} \left( [f(t)e^{i\omega t}]_a^b - \int_a^b f'(t) e^{i\omega t} dt \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\omega|} \left( |f(b)| + |f(a)| + \sup_{[a,b]} f'(t) \cdot (b-a) \right) \\ &=: \frac{1}{|\omega|} \cdot C \end{aligned}$$

(c) Sei nun  $\omega_0 := \frac{3C}{\varepsilon}$ , also  $\frac{C}{\omega_0} = \frac{\varepsilon}{3}$ , dann erhält man für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  mit  $|\omega| > \omega_0$ :

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^a \dots dt + \int_a^b \dots dt + \int_b^{\infty} \dots dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C}{|\omega_0|} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

### Bemerkung

Die Analogie zum diskreten Fall wurde im Abschnitt über die punktweise Konvergenz einer Fourier-Reihe formuliert:

Die Fourier-Reihe einer beschränkten und stückweise monotonen Funktion konvergiert gleichmäßig in denjenigen Teilintervallen, in denen  $f$  die Güte  $\mathcal{C}^1$  hat und konvergiert in den Sprungstellen gegen das arithmetische Mittel der Funktionswerte der Sprungstellen.

In jedem Fall ist die Fourier-Reihe überall konvergent, und das bedeutet, daß ihre Koeffizienten eine Nullfolge bilden (warum?)

### 7.2.5 Fourier-Sinus- und Fourier-Kosinus-Transformierte

Fourier-Reihen gerader Funktionen besitzen nur Kosinus-Glieder, Fourier-Reihen ungerader Funktionen nur Sinus-Glieder. Diese Symmetrieeigenschaft von Funktionen überträgt sich auch auf die Integraldarstellung, also auf das kontinuierliche Analogon der Fourier-Reihe.

Eine gerade Funktion  $g$  kann man sich dabei vorstellen als Fortsetzung einer Funktion  $f$  mit  $D(f) = [0, \infty)$ , welche symmetrisch zur Ordinate ( $y$ -Achse) vorgenommen worden ist. Entsprechend läßt sich eine ungerade Funktion  $u$  auffassen als ursprungssymmetrische Fortsetzung einer nur für nichtnegative Argumente definierten Funktion  $f$ .

#### Definition 7.6

Sei  $f \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$ , beschränkt und stückweise monoton auf jedem beschränkten Teilintervall von  $[0, \infty)$ . Die *Fourier-Kosinus-Transformierte* und die *Fourier-Sinus-Transformierte* von  $f$  sind definiert durch

$$\hat{f}_C(\omega) := \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad (7.25)$$

$$\hat{f}_S(\omega) := \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \quad (7.26)$$

Im folgenden soll nun der Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformierten  $\hat{f}$  einer Funktion  $f$  einerseits sowie ihren Fourier-Kosinus- und Fourier-Sinus-Transformierten  $\hat{f}_C$  und  $\hat{f}_S$  andererseits aufgezeigt werden.

Jede auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  läßt sich additiv in einen geraden - und einen ungeraden Anteil zerlegen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \\ &=: g(t) + u(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformierte folgt daraus

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) + u(t)] \cdot [\cos \omega t - i \sin \omega t] \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t \, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t \, dt, \end{aligned}$$

da die anderen beiden Integrale ungerade Integranden haben und somit verschwinden. Die Integranden der letzten beiden Integrale hingegen sind gerade Funktionen von  $t$ , also folgt

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= 2 \cdot \int_0^{\infty} g(t) \cos \omega t \, dt - 2i \cdot \int_0^{\infty} u(t) \sin \omega t \, dt \\ &= 2 \hat{g}_C(\omega) - 2i \hat{u}_S(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \times \text{Kosinus-Transformierte des geraden Anteils von } f \\ &\quad - 2i \times \text{Sinus-Transformierte des ungeraden Anteils von } f\end{aligned}$$

### Satz 7.8

Sei  $f \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$ , beschränkt und stückweise monoton auf jedem beschränkten Teilintervall von  $[0, \infty)$ . Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

- (i)  $f$  ist gerade  $\iff \hat{f} = 2 \hat{f}_C$
- (ii)  $f$  ist ungerade  $\iff \hat{f} = -2i \hat{f}_S$

*Beweis*

„ $\implies$ “

$f$  sei gerade, dann verschwindet sein ungerader Anteil  $u$ , und es gilt  $f = g$ . Mit  $u$  ist auch  $\hat{u}_S$  gleich Null, und die Behauptung folgt aus den Ausführungen vor diesem Satz. Analog für ungerades  $f$ .

„ $\impliedby$ “

Wieder wird nur Teil (i) bewiesen, (ii) geht analog. Es gelte also

$$\hat{f}(\omega) = 2 \hat{f}_C(\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt.$$

Beh. 1  $\hat{f}$  ist eine gerade Funktion.

Bew.  $\hat{f}(-\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) \, dt = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \hat{f}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}).$

Nach der Bemerkung auf p. 162, Teil (vii), gilt dann in den Stetigkeitspunkten  $t \in \mathbb{R}$  die folgende Darstellung von  $f$  mit Hilfe der Fourier'schen Integralformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cos \omega t \, d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \sin \omega t \, d\omega \right).$$

Das zweite Integral verschwindet, da der Integrand ungerade ist (s. Beh. 1). Das erste Integral stellt eine gerade Funktion (in  $t$ !) dar, folglich ist  $f$  selbst gerade.

### Folgerung

- (i)  $f$  ist gerade  $\iff \hat{f}$  ist gerade  
(ii)  $f$  ist ungerade  $\iff \hat{f}$  ist ungerade

Ist  $f$  eine Funktion, welche für  $t > 0$  definiert ist, so kann man durch die Konstruktion von geraden und ungeraden Fortsetzungen nach dem letzten Satz Integraldarstellungen gewinnen, welche nur Kosinus- oder nur Sinus-Funktionen enthalten. Es gilt somit der folgende Satz:

### Satz 7.9

Sei  $f \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$ , beschränkt und stückweise monoton. Dann gilt:

- (i) In allen Stetigkeitspunkten  $t > 0$  von  $f$  gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}_C(\omega) \cos \omega t \, d\omega \\ f(t) &= \frac{2i}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(\omega) \sin \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}_S(\omega) \sin \omega t \, d\omega \end{aligned}$$

- (ii) In allen Unstetigkeitspunkten  $t = t_d > 0$  von  $f$  sind die linken Seiten der Gleichungen von (i) jeweils zu ersetzen durch

$$\frac{1}{2} [f(t_d + 0) + f(t_d - 0)].$$

- (iii) Im Nullpunkt konvergiert die rechte Seite der ersten Gleichung von (i) gegen  $f(0 + 0) = f(0)$ , die rechte Seite der zweiten Gleichung gegen Null.

### Bemerkung

Vgl. das analoge Beispiel 7.3 für Fourier-Reihen. Die (periodische) kommutierte Sinus-Schwingung

$$g(t) := |\sin t| \quad (t \in [-\pi, \pi])$$

läßt sich auffassen als gerade Fortsetzung der für  $t \geq 0$  erklärten Funktion

$$f(t) := \sin t \quad (t \in [0, \pi]).$$

Für  $f$  können somit zwei Fourier-Reihen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{Sinus-Reihe} \quad f(t) &= \sin t \\ \text{Kosinus-Reihe} \quad f(t) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Diese beiden „Reihen“ stellen im Intervall  $[0, \pi)$  jeweils die Sinus-Funktion und im Intervall  $[-\pi, 0)$  jeweils eine andere Funktion dar.

Man kann die Sinus-Funktion auf das Intervall  $[-\pi, 0)$  auch anders fortsetzen:

$$h(t) := \begin{cases} \sin t & , \quad t \in [0, \pi) \\ 0 & , \quad t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

oder noch anders. Die Fourier-Reihe einer jeden dieser Fortsetzung hat die Eigenschaft, im Intervall  $[0, \pi)$  die Sinus-Funktion darzustellen.

Für gewöhnlich enthält eine Fourier-Reihe Kosinus- und Sinus-Glieder. Die gerade - bzw. ungerade Fortsetzung einer Funktion ist dadurch ausgezeichnet, daß ihre Fourier-Reihe nur aus Kosinus- bzw. nur aus Sinus-Gliedern besteht.

Dieser Sachverhalt gilt nun auch für die Fourier-Transformation, dem kontinuierlichen Analogon einer Fourier-Reihe (Satz 7.8).

**Beispiel 7.19** (Fourier-Transformation einer gedämpften Schwingung)

Man berechne die Fourier-Kosinus- und die Fourier-Sinus-Transformierte der Funktion

$$f(t) := e^{-t} \cdot \cos t \quad (t \geq 0).$$

**Lösung**

Die beiden Transformierten existieren wegen  $f \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty)) \cap \mathcal{L}^1([0, \infty))$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_C(\omega) &:= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \cos t \cos \omega t \, dt \\ \hat{f}_S(\omega) &:= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \cos t \sin \omega t \, dt, \end{aligned}$$

und diese beiden Integrale müssen nun ausgerechnet werden.

1. Möglichkeit

$$\begin{aligned} \cos t \cdot \cos \omega t &= \frac{1}{2} [\cos(t + \omega t) + \cos(t - \omega t)] \\ \cos t \cdot \sin \omega t &= \frac{1}{2} [\sin(t + \omega t) + \sin(t - \omega t)] \end{aligned}$$

dann: partiell integrieren.

## 2. Möglichkeit

Eine einfache Möglichkeit der Integralberechnung besteht darin, daß man  $\cos \omega t$  und  $\sin \omega t$  als Linearkombinationen von  $e^{i\omega t}$  und  $e^{-i\omega t}$  ausdrückt und  $\cos t$  als Realteil von  $e^{it}$  nimmt:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_C(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cos t \cos \omega t \, dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cos t \cdot \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \, dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-t} (\Re e^{it}) \cdot \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \Re \int_0^{\infty} e^{-t} e^{it} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^{\infty} e^{-t} e^{it} e^{i\omega t} \, dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{it} e^{-i\omega t} \, dt \right] \\
 &=: \frac{1}{2} \Re [G(\omega) + G(-\omega)],
 \end{aligned}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &:= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{it} e^{i\omega t} \, dt = \left[ \frac{e^{-[1-i(1+\omega)]t}}{-[1-i(1+\omega)]} \right]_0^{t \rightarrow \infty} \\
 &= \frac{1}{1-i(\omega+1)} = \frac{1+i(\omega+1)}{\omega^2+2\omega+2}.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_C(\omega) &= \frac{1}{2} \Re[G(\omega) + G(-\omega)] \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left[ \frac{1 + i(\omega + 1)}{\omega^2 + 2\omega + 2} + \frac{1 + i(-\omega + 1)}{\omega^2 - 2\omega + 2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left[ \frac{2\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 2)^2 - 4\omega^2} \right] \\
 &= \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_S(\omega) &= \Re \frac{1}{2i} [G(\omega) - G(-\omega)] \\
 &\quad \left( \Re \frac{1}{z} = \Im z \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Im [G(\omega) - G(-\omega)] \\
 &= \frac{1}{2} \Im \left[ \frac{1 + i(\omega + 1)}{\omega^2 + 2\omega + 2} - \frac{1 + i(-\omega + 1)}{\omega^2 - 2\omega + 2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \Im \left[ \frac{i(\omega^3 - \omega^2 + 2) - i(-\omega^3 - \omega^2 + 2)}{(\omega^2 + 2)^2 - 4\omega^2} \right] \\
 &= \frac{\omega^3}{\omega^4 + 4}.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Ausdrücken und Satz 7.9 erhält man darüberhinaus die Identitäten

$$f(t) = e^{-t} \cos t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{\omega^4 + 4} \sin \omega t \, d\omega \quad (t > 0).$$

**Beispiel 7.20** (Integralgleichung)

Man löse die *Integralgleichung*

$$\int_0^{\infty} g(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

**Lösung**

Nach Satz 7.9 gilt

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}_C(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad (t > 0).$$

Mit der Funktion  $g$  ist somit die Fourier-Kosinus-Transformierte der stückweise monotonen und absolut integrierbaren beschränkten Funktion

$$h(t) := \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

gesucht, jedenfalls bis auf den Faktor  $\frac{2}{\pi}$ :

$$h(t) = \int_0^{\infty} g(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (t > 0)$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{h}_C(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

$$\longrightarrow g := \frac{2}{\pi} \hat{h}_C \quad \text{löst die Integralgleichung.}$$

Berechnung von  $\hat{h}_C$ :

$$\begin{aligned} \hat{h}_C &= \int_0^{\infty} h(t) \cos(\omega t) dt \\ &= \int_0^1 \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\omega} \sin \omega \quad (\omega \neq 0) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow g(\omega) = \frac{2}{\pi \cdot \omega} \sin(\omega) \quad (\omega \neq 0)$$

löst die Integralgleichung für  $\omega \neq 0$ , mit Hilfe stetiger Ergänzung auch noch für  $\omega = 0$ . Deutet man  $\omega$  als Frequenz, so ergeben natürlich negative Frequenzen physikalisch keinen Sinn.

### Beispiel 7.21

Man berechne die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) := e^{-t^2/2} \quad (t \geq 0).$$

Dieser sog. *Gauß-Impuls* enthält nur sanfte Übergänge. Daher kann das Spektrum keine hohen Frequenzen enthalten, jedenfalls keine mit einer nennenswerten Amplitude. Diese Eigenschaft macht Gauß-Impulse für viele modernen Anwendungen so interessant, weil seine Fourier-Transformierte im

wesentlichen eine Funktion mit einem beschränkten Definitionsbereich ist (eine Funktion „endlicher Bandbreite“).

### Lösung

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Das Integral ist gleichmäßig konvergent in  $\omega$ , somit lassen sich – wie bei unendlichen Reihen auch – Differentiation und Integration vertauschen:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} (e^{-t^2/2} e^{-i\omega t}) dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &\hspace{15em} \text{(Partielle Integration nach } t) \\ &= i \left[ e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow \infty} - \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\omega \hat{f}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  von  $f$  erfüllt somit die *gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -\omega \hat{f} \quad (\omega \in \mathbb{R}),$$

und diese besitzt die Lösung

$$\hat{f}(\omega) = A \cdot e^{-\omega^2/2} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

mit dem Anfangswert zur Frequenz  $\omega = 0$

$$A := \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Die Fourier-Transformierte eines Gauß-Impulses ist somit wieder ein Gauß-Impuls.

### 7.3 Diskrete Fourier-Transformation

Die Koeffizienten einer Fourier-Reihe sind die (unendlich vielen) diskreten Spektralwerte einer  $2T$ -periodischen Funktion  $f$ . Zur Berechnung der Koeffizienten  $c_n$  muß die Funktion  $f$  in einem Intervall der Periodenlänge  $T$  (üblicherweise  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  oder  $[0, T]$ ) allerdings vollständig bekannt sein.

Oft ist eine Funktion (ein *Signal*) aber nicht zur Gänze bekannt, sondern nur an  $N$  Punkten  $t_0, \dots, t_{N-1} \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , etwa dann, wenn es an  $N$  äquidistanten Punkten

$$t_k = -\frac{T}{2} + k \cdot \frac{2 \cdot \frac{T}{2}}{N} \quad (k \in \{0, \dots, N-1\})$$

abgetastet wird.

Auch eine solche abgetastete Funktion läßt sich durch ihre Frequenzanteile darstellen und aus ihnen wieder vollständig rekonstruieren, wenn die *Abtastfrequenz* (*Übertragungsrate*)  $f_s$  nur hoch genug ist, genauer: sie muß mindestens doppelt so hoch sein wie die höchste in dem Signal auftretende Grenzfrequenz  $\omega_0$ , die *Nyquistfrequenz*. Das ist der Inhalt von *Shannon's Abtasttheorem*.

#### Beispiel 7.22

Sei  $f$  definiert durch

$$f(t) := \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Es ist  $\omega T = 2\pi$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Periode  $T$ . Die höchste in dieser Funktion auftretende Frequenz ist  $\omega_c = 2$ . Man muß eine solche Funktion dann mit mindestens der Abtastfrequenz  $f_s > 2 \cdot f_c$ , also  $\omega_s > 2 \cdot \omega_c$  abtasten, um das Ausgangssignal aus den abgetasteten Punkten wieder vollständig rekonstruieren zu können.

Damit lautet die Forderung an die Abtastperiode  $T_s$ :

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} < \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\omega_c} \right) \stackrel{(\omega_c=2)}{=} \frac{\pi}{2}$$

Im Periodizitätsintervall  $[0, 2\pi]$  benötigt man also mehr als  $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$  Abtastpunkte, also mindestens 5.

Damit sich das Meßsignal  $f$  vollständig aus den Abtastwerten rekonstruieren läßt, müssen seine Frequenzen also beschränkt sein. Man sagt, das Meßsignal habe eine *endliche Bandbreite*. Der Abtastsatz von Shannon läßt sich daher auch anders formulieren:

#### Satz 7.10 (Shannon's Abtasttheorem)

Sei  $f$  eine Funktion mit der Spektraldichte  $\omega \mapsto \hat{f}(\omega)$ , d.h.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

$f$  sei von endlicher Bandbreite  $\omega_0$ , d.h.

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad (|\omega| > \omega_0 > 0).$$

Dann läßt sich der *gesamte* Funktionsverlauf von  $f$  rekonstruieren, wenn man die Funktion nur an äquidistanten Stellen von mindestens dem Abstand  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0}$  „abtastet“, d.h. wenn man die Werte  $f(k \cdot \frac{\pi}{\omega_0})$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  kennt:

Seien  $f$  und  $\tilde{f}$  zwei Funktionen von endlicher Bandbreite  $\omega_0$ . Wenn für alle ganzen Zahlen  $k$  die Beziehung

$$f\left(k \cdot \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \tilde{f}\left(k \cdot \frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

gilt, so gilt  $f(t) = \tilde{f}(t)$  für alle  $t$ .

#### Beweisidee

Der Beweis dieses für die Übertragung von Signalen fundamentalen Satzes ist überraschend einfach. Für eine Funktion  $f$  und ihre Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  gilt die Integralformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Wegen der endlichen Bandbreite läßt sich die Funktion  $\hat{f}$  zu einer periodischen Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen und in eine diskrete Fourier-Reihe entwickeln; deren Fourier-Koeffizienten bilden dann ein diskretes Spektrum, ein Linienspektrum. Setzt man diese Fourier-Koeffizienten rückwärts in die obige Integralformel ein, so erhält man nach einiger Rechnung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right)}{k\pi + t\omega_0} \sin(k\pi + t\omega_0) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

m.a.W. es sind nur die Funktionswerte  $f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right)$  an den diskreten Abtastpunkten  $\frac{k\pi}{\omega_0}$  zur Darstellung der gesamten Funktion  $f$  notwendig.

Die hierzu benutzte diskrete Version der kontinuierlichen Fourier-Transformation heißt *Diskrete Fourier-Transformation (DFT)* und bedeutet mathematisch im wesentlichen Lineare Algebra im Vektorraum  $V := \mathbb{C}^N$ .

Die Ausnutzung von Symmetrien bei den sich ergebenden Matrix-Vektor-Multiplikationen zur Vermeidung redundanter Berechnungen heißt *Schnelle Fourier-Transformation* (englisch: fast Fourier transform, daher meist FFT abgekürzt). Die Beschleunigung gegenüber der direkten Berechnung beruht darauf, schon berechnete Zwischenergebnisse schnell zusammensetzen, was zu einem enormen Geschwindigkeitsgewinn führt. Dadurch lassen sich große Datenmengen in sehr kurzer Zeit übertragen.

# Kapitel 8

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 8.1 Einleitung und Grundlagen

#### 8.1.1 Grundbegriffe

Bei einer *Differentialgleichung (Dgl)* handelt es sich um eine Gleichung zwischen

- einer gesuchten (reell-, komplex- oder vektorwertigen) Funktion  $y(\cdot)$ ,
- einigen ihrer Ableitungen,
- dem Argument von  $y(\cdot)$ , also der bzw. den unabhängigen Variablen.

#### Beispiel 8.1

$$y' + 2xy = 0 \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3) \quad (8.1)$$

Hier sind  $x$  die unabhängige Variable,  $y = y(\cdot)$  die gesuchte Funktion und  $\mathcal{I}$  ein reelles Intervall, in welchem die gesuchte Funktion definiert ist, für welche die Dgl erfüllt ist.

Eine *Lösung* dieser Dgl ist eine Funktion  $\phi(\cdot)$ , welche die Dgl für alle  $x \in \mathcal{I}$  erfüllt, für die also gilt:

$$\phi'(x) + 2x \cdot \phi(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{I}).$$

#### Beh. 1

Die Funktion

$$y = \phi(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist eine Lösung dieser Differentialgleichung.

*Beweis*

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\phi$  differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-x^2} \right) + 2xe^{-x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

### Bemerkung

Die vorstehende Behauptung allein ist, von der Theorie her gesehen, nicht sehr erhellend, denn:

- (i) Wie kommt man auf diese Lösung?
- (ii) Gibt es außer dieser noch andere Lösungen?

Mit einer kleinen Rechnung (Beh. 2) läßt sich zeigen, daß zumindest (ii) „im wesentlichen“ verneint werden kann, d.h. es gibt keine von der angegebenen Lösung „wesentlich verschiedenen“ Lösungen. Die Antwort zu (i) soll bei diesem einführenden Beispiel hier im Moment noch unterbleiben, denn sie berührt den Kern der ganzen Sache:

- Wie findet man eine Lösung einer Differentialgleichung?
- Gibt es zu jeder Differentialgleichung überhaupt Lösungen?
- Wenn es zu einer Differentialgleichung eine Lösung gibt, ist diese dann eindeutig bestimmt, oder gibt es zu ihr mehrere Lösungen?

Zur Beantwortung der ersten Frage gibt es kein Patentrezept, zu verschiedenen Gleichungen gibt es verschiedene Lösungsverfahren, manche Gleichungen, ja, die meisten sogar, lassen sich überhaupt nicht lösen. Zu den beiden anderen Fragen wird mit dem sog. *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* (Satz 8.1) eine für die meisten Anwendungsfälle befriedigende Antwort gegeben.

### Beh. 2

Jede Lösung  $\psi$  dieser Dgl ist darstellbar in der Form

$$\psi(x; C) := C \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

*Beweis*

Sei  $\psi$  irgendeine (differenzierbare) Lösung der Dgl (8.1) und werde gesetzt

$$h(x) := \psi(x) \cdot e^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann ist  $h$  in ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar (warum?), und es gilt

$$h'(x) = [\psi'(x) + 2x\psi(x)]e^{x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\longrightarrow h(x) = \text{const.} =: C \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\longrightarrow \psi(x) = C \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Bemerkung**

- (i) Die verschiedenen Lösungen der Dgl (8.1) unterscheiden sich also nur um eine (multiplikative) Konstante  $C$ , es gibt keine anderen Lösungen.
- (ii) Gibt man willkürlich zwei Zahlen  $\xi, \eta$  aus  $\mathbb{R}$  vor, so läßt sich eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $y$  angeben, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- (a)  $y$  erfüllt die Dgl auf  $\mathbb{R}$

$$y' + 2xy = 0,$$

- (b)  $y$  erfüllt die *Anfangsbedingung*

$$y(\xi) = \eta.$$

- (iii) Algebraische Gleichungen werden durch *Zahlen* gelöst, welche anstelle der entsprechenden Variablen einzusetzen sind. Im Gegensatz dazu bestehen die Lösungen von Differentialgleichungen aus *Funktionen*. Dazu gehört dann selbstverständlich die Angabe des Definitionsbereiches der Lösungsfunktion.
- (iv) Da die Lösung einer Differentialgleichung insbesondere eine differenzierbare Funktion ist, hat sie keine „Ecken“.
- (v) Es ist üblich, bei der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen das oder die Argument(e) nicht mit aufzuführen, bei den Koeffizientenfunktionen dagegen schon. So ist z. B. die Schreibweise ( $a$  und  $s$  seien stetige Funktionen in einem geeigneten Intervall  $\mathcal{I}$ )

$$y' + a(x)y = s(x) \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^2)$$

üblich, dagegen ist die Schreibweise

$$y'(x) + a(x)y(x) = s(x) \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^2)$$

eher unüblich, obwohl beide Male dasselbe gemeint ist.

**Definition 8.1**

- (i) Die Ordnung der in der Differentialgleichung vorkommenden höchsten Ableitung der gesuchten Funktion heißt *Ordnung der Differentialgleichung*.
- (ii) Läßt sich eine Differentialgleichung als Polynom in der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen schreiben, so nennt man die höchste auftretende Summe der Exponenten der abhängigen Variablen und ihrer Ableitungen in einem Glied den *Grad der Differentialgleichung*.

Differentialgleichungen ersten Grades heißen auch *linear*; in diesen treten die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert auf.

Die Differentialgleichung (8.1) dieses ersten Einführungsbeispiels ist somit eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades, also eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Das nächste Beispiel behandelt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und ersten Grades, also eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

### Beispiel 8.2

$$y'' + y = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (8.2)$$

Hier sind wieder  $x$  die unabhängige Variable und  $y = y(\cdot)$  die gesuchte Funktion. Im Gegensatz zur Dgl aus Beispiel 8.1 taucht in (8.2) die unabhängige Variable  $x$  nicht *explizit* auf, sondern nur *implizit* als Argument der gesuchten Lösungsfunktion  $y = y(\cdot)$ .

#### Beh. 1

Für jede Kombination von Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$y = \phi(x) := a \cdot \cos x + b \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung.

#### Beweis

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\phi$  zweimal differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + \phi(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Sind damit „alle“ Lösungen dieser Dgl gefunden? Die Antwort ist ja, wie im folgenden ausgeführt werden wird.

Seien  $\mathcal{I}$  ein Intervall,  $z$  eine auf  $\mathcal{I}$  definierte und dort zweimal differenzierbare Funktion, welche die Dgl (8.2) erfüllt, und sei  $\xi \in \mathcal{I}$ .

#### Beh. 2

Es existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen  $a_0$  und  $b_0$ , für welche gilt:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot \cos \xi + b_0 \cdot \sin \xi &= z(\xi) \\ -a_0 \cdot \sin \xi + b_0 \cdot \cos \xi &= z'(\xi) \end{aligned}$$

#### Beweis

Dieses quadratische lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn seine Koeffizientendeterminante nicht verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{vmatrix} = (\cos^2 \xi + \sin^2 \xi) = 1 \neq 0$$

Sei die Funktion  $h$  definiert durch

$$h(x) := z(x) - (a_0 \cdot \cos x + b_0 \cdot \sin x) \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Dann ist  $h$  in  $\mathcal{I}$  zweimal differenzierbar und löst die Dgl (warum?). Dann gilt

$$\frac{d}{dx} [h'(x)^2 + h(x)^2] = 2h'(x)[h''(x) + h(x)] = 0 \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Damit ist die Funktion  $h'^2 + h^2$  aber konstant und gleich 0:

$$h'(x)^2 + h(x)^2 = \text{const.} = h'(\xi)^2 + h(\xi)^2 = 0 \quad (x \in \mathcal{I})$$

nach Definition von  $h$ . Somit sind auch  $h$  und  $h'$  *allein* auf  $\mathcal{I}$  gleich der Nullfunktion (warum?), also gilt

$$z(x) = a_0 \cdot \cos x + b_0 \cdot \sin x \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Man erkennt hieraus:

- (i) Jede Lösung der Dgl ist eine Restriktion der Funktion  $\phi$  auf ein evtl. kleineres Intervall.
- (ii) Gibt man willkürlich drei Zahlen  $\xi, \eta_0, \eta_1$  aus  $\mathbb{R}$  vor, so läßt sich eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $y$  angeben, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- (a)  $y$  erfüllt die Dgl auf  $\mathbb{R}$

$$y'' + y = 0,$$

- (b)  $y$  erfüllt die *Anfangsbedingungen*

$$y(\xi) = \eta_0 \quad , \quad y'(\xi) = \eta_1.$$

Geometrisch gesprochen existiert also eine die Dgl erfüllende Lösungskurve, welche mit der vorgeschriebenen Steigung  $\eta_1$  durch den Punkt  $\langle \xi, \eta_0 \rangle$  verläuft; jede weitere Kurve dieser Art ergibt sich wieder durch Verkleinern des Definitionsbereiches.

Im Gegensatz zur Dgl aus Beispiel 8.1 (s. (8.1)) gehen also durch jeden Punkt unendlich viele *wesentlich verschiedene* Kurven der Gesamtheit, und erst die Angabe der Steigung wählt eine bestimmte aus. Die Ursache dafür liegt im Auftreten der zweiten Ableitung  $y''$  von  $y$  in der Differentialgleichung (8.2).

### 8.1.2 Geometrische Deutung einer Differentialgleichung, Richtungsfeld

Betrachtet wird eine Differentialgleichung erster Ordnung in der sog. *expliziten* Form

$$y' = f(x, y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2)$$

und vorausgesetzt, daß die Funktion  $f$  zweier Variablen in dem Gebiet  $\mathcal{G}$  stetig ist. Das ist beispielsweise bei dem Einführungsbeispiel 8.1 der Fall, dort lautet die Funktion  $f$ :

$$f(x, y) := -2xy \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G} := \mathbb{R}^2).$$

Im folgenden wird die (unter Zusatzbedingungen an die Stetigkeit von  $f$  richtige, aber noch nicht bewiesene) Annahme gemacht, daß durch jeden Punkt  $P := \langle x, y \rangle \in \mathcal{G}$  genau eine Lösungskurve  $\phi$  geht. Da die Funktion  $\phi$  die Differentialgleichung erfüllt, d.h. da für ein geeignetes Intervall  $\mathcal{I}$

$$\phi'(x) = f[x, \phi(x)] \quad (x \in \mathcal{I})$$

gilt, hat diese Lösung an jeder Stelle  $x \in \mathcal{I}$  die Steigung  $f[x, \phi(x)]$  (Abb. 8.1).

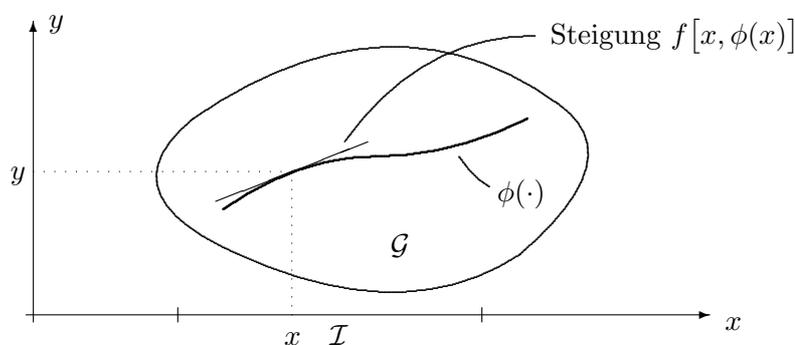


Abbildung 8.1: Steigung der Lösungsfunktion  $\phi$  in einem Punkt  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$

Betrachtet man nun umgekehrt einen Punkt  $P = \langle x, y \rangle \in \mathcal{G}$ , so hat jede Lösung der Dgl, welche durch diesen Punkt geht, dort die Steigung  $f(x, y)$ .

Man kann also Punkten  $\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}$  Richtungen zuordnen, welche durch die Differentialgleichung definiert werden.

### Definition 8.2

- (i) Ein Tripel

$$\langle x, y, f(x, y) \rangle$$

heißt *Linielement* der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ .

- (ii) Die Menge aller Tripel

$$\{ \langle x, y, f(x, y) \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathcal{G} \}$$

heißt *Richtungsfeld* der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ .

- (iii) Kurven, auf denen das Richtungsfeld eine konstante Steigung hat, heißen *Isoklinien*<sup>1</sup> der Differentialgleichung.

Eine Isokline der Dgl zum (Steigungs-) wert  $c$  gewinnt man dadurch, daß man die Gleichung  $f(x, y) = c$  nach  $y$  auflöst (falls das geht!).

<sup>1</sup>gleiche Neigung, gleiche Beugung

**Beispiel 8.3**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = y \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2).$$

Die Isoklinen sind die Kurven

$$y(x) = c,$$

also Parallelen zur  $x$ -Achse. Die Isoklinen und das Richtungsfeld haben das Aussehen wie in Abb. 8.2 skizziert.

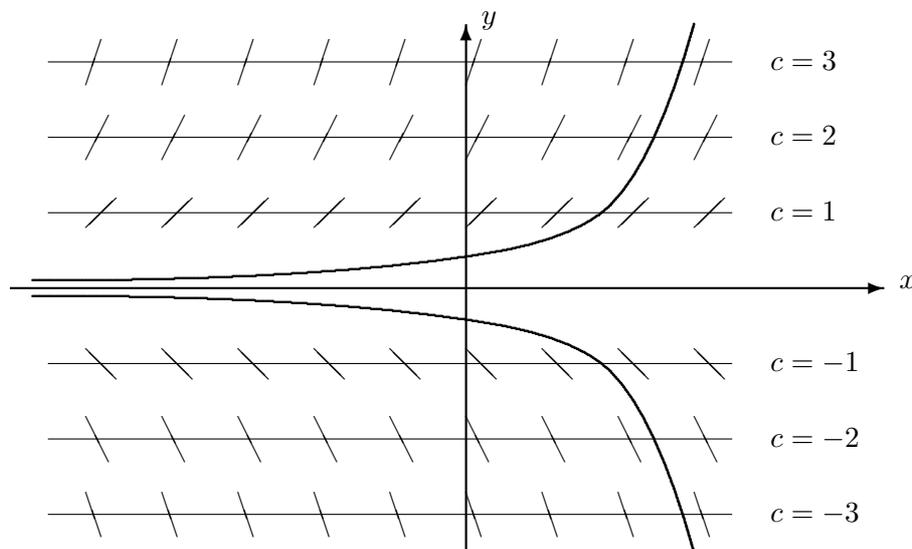


Abbildung 8.2: Isoklinen der Dgl  $y' = y$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind die Funktionen

$$y = \phi(x; K) := K \cdot e^x \quad (x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

**Beispiel 8.4**

Gegeben seien das Gebiet

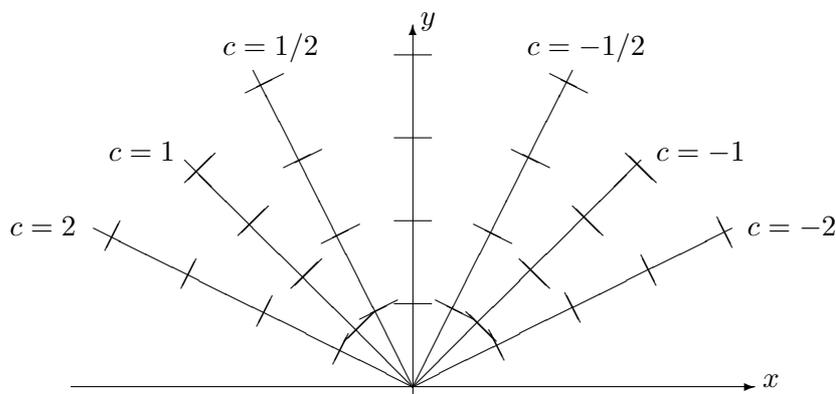
$$\mathcal{G} := \{\langle x, y \rangle : y > 0\} \quad (\text{obere Halbebene})$$

und die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) := -\frac{x}{y} \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}).$$

Bestimmt werden soll das Richtungsfeld dieser Dgl in  $\mathcal{G}$ . Dazu werden wieder die Isoklinen untersucht. Diese sind die Kurven

$$-\frac{x}{y(x)} = c \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{c} x,$$

Abbildung 8.3: Isoklinen der Dgl  $y' = -\frac{x}{y}$ 

also Geraden durch den Ursprung. Die Isoklinen und das Richtungsfeld haben das Aussehen wie in Abb. 8.3 skizziert.

### Lösung der Dgl

Aufgrund des Isoklinenbildes erwartet man eine Schar von Halbkreisen um den Ursprung, und zwar von oberen - wegen  $y > 0$ . Die vorliegende Dgl

$$y' = f(x, y) := -\frac{x}{y} \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G})$$

ist eine sog. *Differentialgleichung mit separierbaren Variablen*, welche im nächsten Abschnitt systematisch untersucht werden. Sie läßt sich wie folgt lösen:

$$\begin{aligned} y' \cdot y &= -x \\ \longrightarrow \int y \cdot y'(x) dx &= \int t dt \Big|_{t=y(x)} = \frac{1}{2} y(x)^2 = \int (-x) dx = -\frac{1}{2} x^2 + C, \\ \longrightarrow y(x)^2 + x^2 &= 2C =: r^2 \quad (r > 0 \text{ geeignet}) \\ \longrightarrow y(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \quad (D(y) = (-r, r)) \end{aligned}$$

Wird dazu ein sog. *Anfangswertproblem (AWP)* formuliert, d.h. wird für den Punkt  $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathcal{G}$  vorgeschrieben, daß die Lösung durch diesen Punkt gehen soll:  $y(\xi) = \eta$ , so wird später (Satz 8.1) gezeigt, daß es dazu genau eine Lösung gibt:

$$y(\xi) = \sqrt{r^2 - \xi^2} \stackrel{!}{=} \eta \quad \longrightarrow \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Damit ist die Funktion  $\phi$ , definiert durch

$$\begin{aligned} D(\phi) &:= (-\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \\ \phi(x) &:= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - x^2} \quad (x \in D(\phi)) \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' = f(x, y) &:= -\frac{x}{y} && (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}) \\ y(\xi) &= \eta. \end{aligned}$$

### Beispiel 8.5

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2).$$

Die Isoklinen ergeben sich durch Auflösung von

$$x^2 + y^2 = c$$

nach  $y$  und sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt mit den Radien  $\sqrt{c}$ , falls  $c > 0$ . Für  $c < 0$  gibt es keine Isoklinen.

Die Isoklinen und das Richtungsfeld haben das Aussehen wie in Abb. 8.4 skizziert.

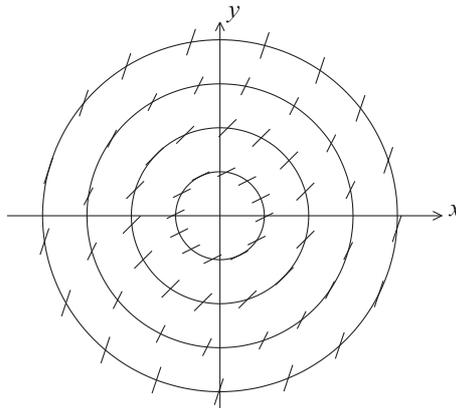


Abbildung 8.4: Isoklinen der Dgl  $y' = x^2 + y^2$

Anhand der Isoklinendarstellung kann man somit einen geometrischen Aufschluß über die Gestalt der Lösungen einer Dgl erhalten, selbst dann, wenn man die Lösung nicht direkt ausrechnen und hinschreiben kann.

### Aufgaben

Man ermittle das Richtungsfeld und die zugehörigen Isoklinen

- (i) zum Einführungsbeispiel 8.1:  $y' = f(x, y) = -2xy \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2)$ ;
- (ii) zu  $y' = f(x, y) = \frac{x}{y} \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, y > 0)$ .

Eine Differentialgleichung zu lösen bedeutet daher geometrisch, eine Funktion aufzusuchen, welche auf das (durch die Dgl definierte) Richtungsfeld „paßt“.

### 8.1.3 GDgl und PDgl

Hängt die in der Differentialgleichung gesuchte Funktion von nur einer unabhängigen Veränderlichen ab, so nennt man die Dgl *gewöhnlich* (GDgl). Treten hingegen mehrere unabhängige Variable – und (partielle) Ableitungen nach ihnen – auf, so spricht man von einer *partiellen Differentialgleichung* (PDgl). Die beiden Beispiele des ersten Abschnittes (Beispiele 8.1 und 8.2) sind Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung.

#### Beispiel 8.6 (PDgl)

$$u_x + u_y = x + y \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2)$$

ist eine *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* für eine gesuchte Funktion  $u$  von zwei unabhängigen Variablen.

#### Beh. 1

$$u(x, y) := x \cdot y \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2)$$

ist eine (spezielle) Lösung der PDgl.

*Beweis* Klar.

#### Hinweis

Die vorgelegte Differentialgleichung ist linear. Man erhält weitere Lösungen, indem man zu der vorhandenen Lösung solche der zugehörigen homogenen Dgl

$$u_x + u_y = 0 \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2)$$

addiert.

#### Lösung

Man kann vielleicht raten, daß die folgenden Funktionen Lösungen der homogenen Differentialgleichung darstellen:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &:= y - x \\ u_2(x, y) &:= \sin(y - x) \\ u_3(x, y) &:= e^{y-x} \end{aligned} \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2)$$

#### Allgemein gilt

Seien  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ . Dann ist die Funktion  $u$ , definiert durch

$$\begin{aligned} D(u) &:= \{\langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, y - x \in \mathcal{I}\} \\ u(x, y) &:= g(y - x) \quad ((y - x) \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

eine Lösung der homogenen (partiellen) Differentialgleichung.

*Beweis*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = g'(y-x) \cdot (-1) + g'(y-x) \cdot 1 = 0 \quad (\langle x, y \rangle \in D(u))$$

Der Definitionsbereich  $D(u)$  ist ein Streifen in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene. Sei etwa  $\mathcal{I} := (a, b)$ . Dann ist  $D(u)$  der offene Streifen (Abb. 8.5)

$$\mathcal{S} := \{\langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, a < y - x < b\}.$$

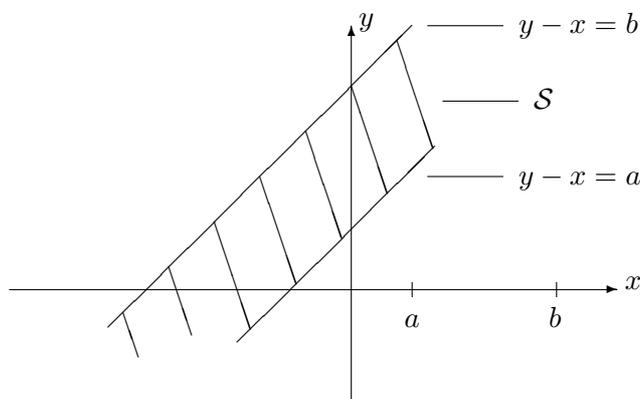


Abbildung 8.5: Offener Streifen  $\mathcal{S}$  in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene

Damit ist dann jede Funktion

$$v(x, y) := g(y-x) + x \cdot y \quad (x-y \in \mathcal{I})$$

eine Lösung der inhomogenen partiellen Dgl.

Verglichen mit einer GDgl ist bei einer PDgl die „Vielfachheit“ der die Dgl befriedigenden Funktionen also bedeutend größer:

Bei einer GDgl erster Ordnung tritt eine - und bei GDgln höherer Ordnung treten mehrere willkürliche *Konstanten* auf, hier tritt eine weitgehend willkürliche *Funktion* auf.

In dieser Vorlesung werden fast ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt.

#### 8.1.4 Lösungen einer Gewöhnlichen Differentialgleichung

Im folgenden soll exakt definiert werden, was man unter den Begriffen

- Gewöhnliche Differentialgleichung (GDgl)

- Anfangswertproblem (AWP)
- Lösung einer GDgl oder eines AWP

versteht.

### Definition 8.3

- (i) Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$  und  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion von  $n + 2$  reellen Variablen. Die Beziehung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\langle x, y, y', \dots, y^{(n)} \rangle \in \mathcal{G})$$

heißt eine *implizite gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*.

**Beispiel** ( $n = 2$ , also  $n + 2 = 4$ )

$$F(x, y, y', y'') := \sin(y - y'') + x \cdot y' = 0$$

- (ii) Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion von  $n + 1$  reellen Variablen. Die Beziehung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\langle x, y, y', \dots, y^{(n-1)} \rangle \in \mathcal{G})$$

heißt eine *explizite gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*.

**Beispiel** ( $n = 1$ , also  $n + 1 = 2$ )

$$y' = f(x, y) := -2xy$$

- (iii) Eine Funktion  $\phi$  heißt eine *Lösung der Dgl* oder *Integral der Dgl*, wenn gilt:

- $\mathcal{I} := D(\phi)$  ist ein nichttriviales Intervall.
- $\phi$  ist auf  $\mathcal{I}$   $n$ -mal differenzierbar.
- $\langle x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x) \rangle \in D(F)$  ( $x \in \mathcal{I}$ )
- $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$  ( $x \in \mathcal{I}$ )

Analog für eine explizite Differentialgleichung.

### Bemerkung

Nach Definition ist die Lösung einer Dgl also durch ein Paar  $\langle \phi, \mathcal{I} \rangle$  erklärt, wobei  $\phi$  eine Funktion ist, welche auf dem Intervall  $\mathcal{I}$  definiert ist.

Formal erhält man manchmal auch Funktionen als Lösungen von Dgln, welche nicht auf einem Intervall definiert sind. So ist beispielsweise die „Funktion“  $\phi(x) := 1/x$  Lösung der Differentialgleichung  $xy' + y = 0$  für *alle*  $x \neq 0$ . Dennoch möchte man – aus Gründen, die später erklärt werden (Stichwort: Anfangsbedingung) – als Definitionsbereich einer Lösungsfunktion gern ein Intervall haben. In diesem Fall sollte man daher als Lösung nur eine der beiden Möglichkeiten

- $\phi(x) := \frac{1}{x} \quad (x < 0) \quad \text{oder}$
- $\phi(x) := \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

angeben.

### Beispiel 8.7

Als ein weiteres Beispiel, welches einmal komplett durchgerechnet werden soll, wird das Einführungsbeispiel 8.1 betrachtet:

$$y' + 2xy = 0 \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

Damals wurde schon gezeigt, daß jede Lösung darstellbar ist in der Form

$$\phi(x; C) := C \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Wie kommt man nun auf diese Lösung? Dazu werden zuerst die Variablen  $x$  und  $y$  getrennt und danach die Dgl formal integriert:

$$\begin{aligned} y'(x) + 2x \cdot y(x) &= 0 \\ y'(x) &= -2x \cdot y(x) \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= -2x \\ \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int (-2x) dx \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung muß  $y(x) \neq 0$  vorausgesetzt werden, und zwar für alle  $x$ , für welche diese Beziehung bestehen soll. Falls für ein oder mehrere  $x$  doch  $y(x) = 0$  sein sollte, so wird dieser Fall auf später verschoben.

Auf die letzte Gleichung läßt sich die Substitutionsregel anwenden, und man erhält

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=y(x)} &= \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int (-2x) dx \\ \ln |y(x)| &= -x^2 + K \\ |y(x)| &= e^{-x^2+K} = e^{-x^2} \cdot e^K =: C \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $C > 0$ . Man kann die Betragsstriche links weglassen, falls man rechts auch negative Konstanten zuläßt:

$$y(x) = C \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, C \neq 0 \text{ geeignet})$$

Was passiert nun, wenn man auch  $C = 0$  noch zuläßt? Zwar ist dann die obige Herleitung dafür nicht mehr gültig ( $C = e^K \neq 0$ ), jedoch ist die Nullfunktion,

wie man leicht sieht, auch eine Lösung der Dgl, so daß man insgesamt alle Lösungen in der Form

$$y(x) = C \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

schreiben kann.

### Bemerkung

Es soll noch einmal analysiert werden, warum dieser Lösungsvorgang funktioniert. Erstens muß es möglich sein, den Prozeß der „Trennung der Variablen“ durchführen zu können, um „links nach  $y$ “ und „rechts nach  $x$ “ integrieren zu können. Das geht nur bei Dgln eines ganz bestimmten Typs, beileibe nicht bei allen!

Zweitens ist zur Anwendung der Substitutionsregel erforderlich, daß der Integrand die Bauart  $g(f(x)) \cdot g'(x)$  besitzt, was durch den Term  $y'(x)$  oben erreicht wird. Wodurch wird das gewährleistet?

### Beispiel 8.8

Man löse die Differentialgleichung

$$x \cdot y \cdot y' = 1 - x^2 \quad ((x, y, y') \in \mathbb{R}^3).$$

Diese Dgl ist in ganz  $\mathbb{R}^3$  definiert. Gemeint ist: man suche ein nichttriviales Intervall  $\mathcal{I}$  und eine Funktion  $\phi$  mit  $D(\phi) = \mathcal{I}$ , so daß gilt:

$$x \cdot \phi(x) \cdot \phi'(x) = 1 - x^2 \quad (x \in \mathcal{I} = D(\phi)).$$

Es gibt keine in ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion, welche diese Dgl löst. Daher müssen sukzessive Einschränkungen des Definitionsbereiches vorgenommen werden, wenn man diese Dgl löst. Beispielsweise sieht man sofort, daß  $x = 0$  für keine Lösungsfunktion in die Dgl eingesetzt werden kann; folglich darf  $x \neq 0$  vorausgesetzt werden.

Daher darf durch  $x$  dividiert werden, und man erhält

$$\begin{aligned} y(x) \cdot y'(x) &= \frac{1 - x^2}{x} = \frac{1}{x} - x, \\ \int y(x) y'(x) dx &= \int \left( \frac{1}{x} - x \right) dx. \end{aligned}$$

Auf die letzte Gleichung läßt sich wieder die Substitutionsregel anwenden, und man erhält

$$\begin{aligned} \int t dt \Big|_{t=y(x)} &= \int y(x) y'(x) dx = \int \left( \frac{1}{x} - x \right) dx \\ \frac{1}{2} y(x)^2 &= \int \left( \frac{1}{x} - x \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} x^2 + K \\ y(x)^2 &= 2 \ln|x| - x^2 + 2K =: \ln x^2 - x^2 + C \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist für alle  $x \neq 0$  definiert. Wieder möchte man für eine Lösungsfunktion  $\phi$  als Definitionsbereich ein Intervall haben. So sollte man sich hier für *eines* der Intervalle  $(-\infty, 0)$  oder  $(0, \infty)$  entscheiden. Man bekommt damit zwei mögliche Lösungsfunktionen

$$\phi_1(x) := \sqrt{\ln x^2 - x^2 + C} \quad (x \in \mathbb{R}, C \neq 0 \text{ geeignet}),$$

$$\phi_2(x) := -\sqrt{\ln x^2 - x^2 + C} \quad (x \in \mathbb{R}, C \neq 0 \text{ geeignet}),$$

und die Definitionsbereiche sind beide Male so zu wählen, daß der Radikand jeweils  $> 0$  ist. Wird beispielsweise  $C := 2$  gewählt, so gilt:

$$D(\phi_1) := D(\phi_2) := \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - \ln x^2 < 2\},$$

und die Definitionsbereiche sehen so aus wie in Abb. 8.6 skizziert.

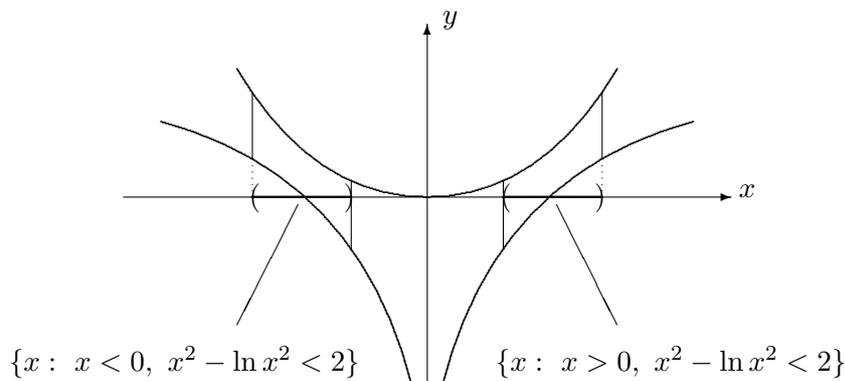


Abbildung 8.6: Definitionsbereiche der zwei möglichen Lösungsfunktionen

### Aufgabe

Oben wurden die Definitionsbereiche der auftretenden Lösungsfunktionen durch

$$D(\phi_1) = D(\phi_2) = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - \ln x^2 < C\}$$

definiert, also für diejenigen  $x$ , für welche der Radikand positiv und damit die Wurzel definiert ist. Die Wurzelfunktion ist jedoch auch für die Menge

$$\mathcal{D} := \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - \ln x^2 \leq C\}$$

definiert. Läßt sich auch diese Menge als Definitionsbereich einer Lösungsfunktion verwenden?

### 8.1.5 Physikalische Beispiele - Auftreten von Differentialgleichungen

Die im folgenden aufgeführten vier Beispiele beschäftigen sich auch mit dem Problem des *Aufstellens von Differentialgleichungen*:

Durch welche Annahmen ergeben sich Differentialgleichungen als mathematische Beschreibung physikalischer oder technischer Probleme?

### Partielle Antwort

Beschreibt eine Funktion den Verlauf eines Prozesses, so beschreiben deren erste und zweite Ableitung die Geschwindigkeit und Beschleunigung, mit denen dieser Prozeß abläuft. Kennt man beispielsweise eine Beziehung zwischen einem Prozeßverlauf und seiner Geschwindigkeit, so kann diese „Beziehung“ in der mathematischen Beschreibung durch eine Differentialgleichung erster Ordnung ausgedrückt werden.

### Beispiel 8.9

Beim radioaktiven Zerfall ist die Zerfallsgeschwindigkeit – die erste Ableitung des Prozesses – proportional zur momentan gerade vorhandenen Stoffmenge – der nullten Ableitung, also der Funktion selbst. In Gleichungsform ausgedrückt:

$$\dot{n}(t) \sim n(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \bigvee_{\lambda > 0} \dot{n}(t) = -\lambda n(t) \quad (t \geq 0).$$

### Beispiel 8.10 RC-Reihenschaltung

Eine RC-Reihenschaltung wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  über einen Schalter an eine Spannungsquelle angeschlossen, s. Abb. 8.7. Zur Zeit  $t = 0$  sei der Kondensator dabei ungeladen.

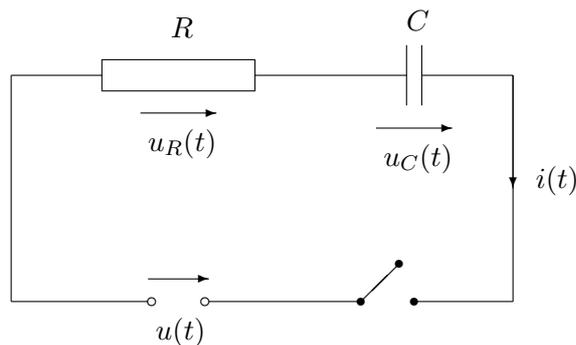


Abbildung 8.7: Elektrische Reihenschaltung mit einem RC-Glied

Es fließt dann ein Strom durch die Masche, welcher den Kondensator auflädt. Gesucht sind nun

- der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung  $u_C(t)$  für  $t \geq 0$ .
- der zeitliche Verlauf des Maschenstromes  $i(t)$  für  $t \geq 0$ .

**Lösung**

$$\begin{array}{ll}
\text{Maschenregel} & : \quad u_R(t) + u_C(t) - u(t) = 0 \\
\text{Ohm'sches Gesetz} & : \quad u_R(t) = R \cdot i(t) \quad (t \geq 0) \\
\text{Kondensatorladung} & : \quad q(t) = C \cdot u_C(t)
\end{array}$$

Der Strom  $i(t)$  ist definiert als Änderung der Ladung mit der Zeit:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad q(t) = q(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Dieses, die Kondensatorentladung und das Ohm'sche Gesetz liefern dann

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt} = RC \frac{du_C(t)}{dt},$$

woraus man nach Einsetzen in die Maschengleichung eine Dgl erster Ordnung für die Kondensatorspannung  $u_C$  erhält:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t) \quad (t \geq 0). \quad (8.3)$$

Diese Dgl ist eine sog. *lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung*. Je nachdem, ob eine

$$\text{Gleichspannungsquelle} \quad : \quad u(t) := U_0 \quad (t \geq 0)$$

oder eine

$$\text{Wechselspannungsquelle} \quad : \quad u(t) := \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0)$$

anliegt, ist die Inhomogenität der Dgl entweder konstant oder eine zeitabhängige periodische Funktion.

Nachdem man diese Dgl gelöst hat, erhält man aus der Lösung  $u_C$  andere interessierende Größen, etwa:

$$\begin{array}{ll}
i(t) & = \quad C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad (t \geq 0), \\
u_R(t) & = \quad R \cdot i(t) \quad (t \geq 0).
\end{array}$$

**Beispiel 8.11** RL-Reihenschaltung

Eine Reihenschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand  $R$  und einer Induktivität  $L$  wird von einer Gleichstromquelle mit dem konstanten Strom  $I_0$  gespeist, welcher zum Zeitpunkt  $t = 0$  ausgeschaltet wird, etwa durch Kurzschließen der Gleichstromquelle über einen Schalter, s. Abb. 8.8.

Zu bestimmen sind:

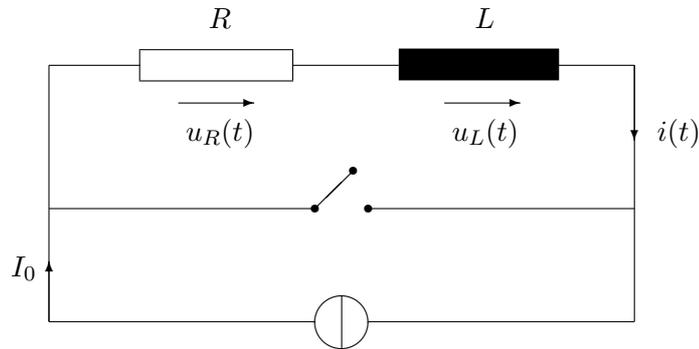


Abbildung 8.8: Elektrische Reihenschaltung mit einem RL-Glied

- der zeitliche Verlauf des Stromes  $i(t)$  für  $t \geq 0$  im RL-Zweig,
- der zeitliche Verlauf der an  $R$  und  $L$  anliegenden Teilspannungen  $u_R(t)$  und  $u_L(t)$  für  $t \geq 0$ .

**Lösung**

Es wird wieder die Maschenregel für die obere Masche benutzt. Darin werden die Größen  $u_R$  und  $u_L$  durch den Strom  $i$  ersetzt<sup>2</sup>

$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = -u_{\text{ind}}(t) = -\left(-L \frac{di}{dt}(t)\right) = L \frac{di}{dt}(t)$$

Somit erhält man eine *lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung* für die Stromfunktion  $i$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (t \geq 0). \quad (8.4)$$

Mit Hilfe der Lösung  $i(\cdot)$  dieser Dgl lassen sich dann die Teilspannungen

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t) \quad \text{und} \quad u_R(t) = Ri(t)$$

für  $t \geq 0$  bestimmen.

**Beispiel 8.12** RL-Reihenschaltung

Die Geometrie des letzten Beispiels wird nun dahingehend abgeändert, daß ein Einschaltvorgang beschrieben wird, s. Abb. 8.9.

<sup>2</sup>Die in der Spule erzeugte Induktionsspannung  $u_{\text{ind}}(t) = -L \frac{di}{dt}(t)$  ist der anliegenden Spannung entgegengerichtet:  $u_L(t) = -u_{\text{ind}}(t)$ .

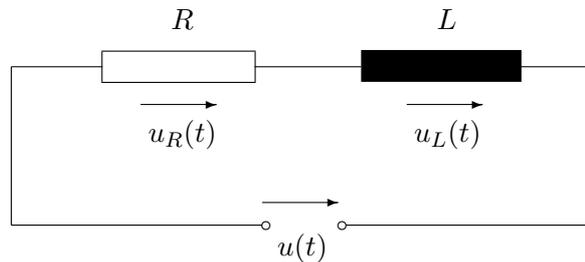


Abbildung 8.9: Elektrische Reihenschaltung mit einem RL-Glied

Hier ergibt die Maschenregel

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \quad (t \geq 0),$$

also die Dgl für den Strom  $i(\cdot)$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t) \quad (t \geq 0). \quad (8.5)$$

In der Praxis untersucht man i.a. zwei Fälle ( $\phi \in [0, 2\pi)$  geeignet):

- (i)  $u(t) = U_0 \quad (t \geq 0)$  Einschaltvorgang
- (ii)  $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0)$  erzwungene Schwingungen

### Beispiel 8.13 Mechanische Schwingung

Eine Kugel der Masse  $m$  hänge an einer Feder mit der Federkonstante  $k$ . Zur Zeit  $t = 0$  werde die Feder um den Wert  $x_0$  gedehnt und dann losgelassen. Die dem Einfluß der Schwerkraft unterliegende Feder führt dann Schwingungen aus, s. Abb. 8.10.

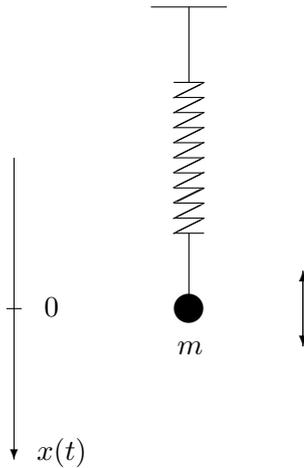
Die Lage des Mittelpunktes der Kugel zur Zeit  $t \geq 0$  werde mit  $x(t)$  bezeichnet. Unter Vernachlässigung der Reibung gilt nach dem Newton'schen Grundgesetz

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(t) = F_{\text{Hooke}}(t) = -k \cdot x(t) \quad (t \geq 0),$$

da die Federkraft proportional zur Auslenkung ist und der Bewegung entgegenwirkt (Hooke'sches Gesetz). Für die Bewegung der Kugel erhält man somit die *lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (t \geq 0). \quad (8.6)$$

Im folgenden werden zu den Beispielen 8.10 und 8.13 Lösungen diskutiert, ohne jedoch im Moment näher darauf einzugehen, wie man denn systematisch

Abbildung 8.10: Schwingungen einer Kugel der Masse  $m$ 

zu diesen Lösungen gelangt.

### Lösung zu Beispiel 8.10

Dieses Beispiel wird für eine Gleichspannungsquelle betrachtet, untersucht wird also die Dgl

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{U_0}{RC} \quad (t \geq 0).$$

#### Beh.1

Die Funktion

$$u_C(t; k) := U_0 - k \cdot RC \cdot e^{-\frac{1}{RC} t} \quad (t \geq 0) \quad (8.7)$$

löst die Differentialgleichung. Hierbei ist  $k \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante.

*Beweis*

Einsetzen und Rechnen!

Es gibt also, bedingt durch die Konstante  $k$ , unendlich viele Lösungen der Dgl. Dadurch erhält man sogar *alle* Lösungen in dem Sinne, daß zu jeder Lösung  $v$  der Dgl eine Konstante  $k \in \mathbb{R}$  existiert derart, daß  $v$  sich darstellen läßt als

$$v(t) = U_0 - k \cdot RC \cdot e^{-\frac{1}{RC} t} \quad (t \geq 0, k \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Da das physikalische Problem jedoch genau eine Lösung hat, muß es möglich sein, die Konstante  $k$  aus Zusatzinformationen – den sog. *Anfangsdaten* – zu bestimmen.

Der Kondensator ist zur Zeit  $t = 0$  ungeladen, d.h.  $u_C(0) = 0$ . Damit folgt aus (8.7)

$$0 = u_C(k; 0) = U_0 - k \cdot RC \cdot 1,$$

also  $k = \frac{U_0}{RC}$ . Damit erhält man die eindeutig bestimmte Lösung (Abb. 8.11):

$$u_C(t) := U_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad (t \geq 0). \quad (8.8)$$

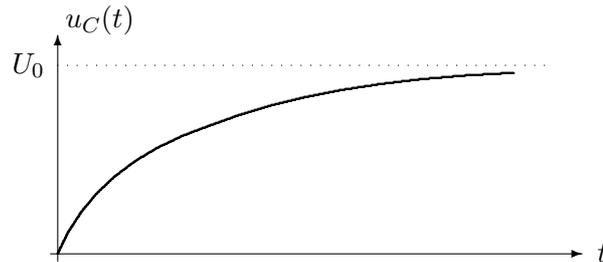


Abbildung 8.11: Spannungsverlauf beim Aufladen eines Kondensators

### Bemerkung

Die Lösungskurve ist eine um eine Konstante verschobene Exponentialfunktion mit einem negativen Exponenten. Das kann man sich wie folgt plausibel machen: abgesehen von der additiven Konstanten  $\frac{U_0}{RC}$  lautet die Differentialgleichung

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{RC} u_C \quad (t \geq 0).$$

Diese Dgl lösen heißt, alle Funktionen aufzufinden, deren Ableitung bis auf den Faktor  $-\frac{1}{RC}$  die Funktion selbst ist. Solch eine Bedingung erfüllt die Funktionschar

$$u_C(k;t) := k \cdot RC \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t \geq 0).$$

Daß es keine anderen Funktionen als diese gibt, wird man später einsehen.

### Lösung zu Beispiel 8.13

#### Beh.1

Folgende Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (t \geq 0):$$

$$(i) \quad x_1(t) := \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$(ii) \quad x_2(t) := \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$(iii) \quad x_3(t) := a \cdot \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

Alle Funktionen sind sogar Lösungen der Dgl auf ganz  $\mathbb{R}$ , wenn man für die Dgl  $t \in \mathbb{R}$  zuläßt.

*Beweis*

Einsetzen und Rechnen!

#### Definition 8.4

Die Menge aller Lösungen einer Differentialgleichung heißt *allgemeine Lösung* oder *allgemeines Integral* der Differentialgleichung.

#### Beispiele 8.14

- (i) Die allgemeine Lösung von Beispiel 8.10 ist die (einparametrische) Funktionenmenge

$$\mathcal{F} := \{u_k : u_k(t) = U_0 - k \cdot RC \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$

- (ii) Die allgemeine Lösung von Beispiel 8.13 ist die (zweiparametrische) Funktionenmenge

$$\mathcal{G} := \left\{ x_{a,b} : x_{a,b}(t) = a \cdot \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t, t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

Der Beweis dieser Aussage folgt später. Es ist üblich, nicht nur die entsprechenden Mengen, sondern auch die einzelnen Funktionen selbst, also etwa

$$x(t) := a \cdot \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

als allgemeine Lösung zu bezeichnen. Das hat den Vorteil, daß man Formulierungen wie „man differenziert die allgemeine Lösung“ treffen kann, etc.

- (iii) Die Differentialgleichung

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

wird von allen Funktionen der Form

$$\phi(x) := a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} + c \cdot \sinh x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

gelöst. Das ist jedoch *nicht* die allgemeine Lösung, da die Differentialgleichung auch noch von der Funktion

$$\psi(x) := x \cdot e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

gelöst wird und man diese Lösung durch keine Wahl der Konstanten  $a, b, c$  aus der ersten Lösung gewinnen kann.

**Definition 8.5**

- (i) Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung enthält Konstanten, welche als *Integrationskonstanten* bezeichnet werden.
- (ii) Jede Lösung einer Differentialgleichung, welche durch eine spezielle Wahl der Konstanten aus der allgemeinen Lösung entsteht, heißt eine *spezielle* oder eine *partikuläre Lösung der Differentialgleichung*.

**8.1.6 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz****Definition 8.6** (Anfangswertproblem, AWP)

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Vorgelegt sei die (explizite) Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\langle x, y, y', \dots, y^{(n-1)} \rangle \in \mathcal{G})$$

sowie  $n + 1$  Zahlen

$$\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}.$$

Als *Anfangswertproblem (AWP)* bezeichnet man die Aufgabe, eine Funktion  $\phi$  und ein Intervall  $\mathcal{I}$  mit  $D(\phi) = \mathcal{I}$  zu finden, welche den folgenden Bedingungen genügen:

- (i)  $\xi \in \mathcal{I}$ , und  $\phi$  ist Lösung der Dgl auf  $\mathcal{I}$ .
- (ii)  $\phi^{(j)}(\xi) = \eta_j \quad (j \in \{0, \dots, n-1\})$

Die Zahl  $\xi$  heißt *Anfangspunkt*, die Zahlen  $\eta_0, \dots, \eta_{n-1}$  heißen *Anfangswerte* und die Bedingungen (ii) heißen *Anfangsbedingungen*.

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktion  $f$  – die rechte Seite der Dgl – hat jedes Anfangswertproblem genau eine Lösung.

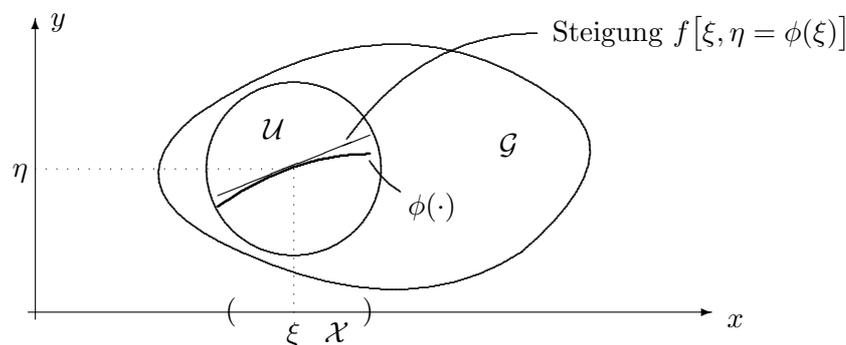
**Satz 8.1**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\langle \xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $\mathcal{U}$  eine  $(n + 1)$ -dimensionale Umgebung dieses Punktes, für die gilt:

- $f \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$
- $f$  besitze stetige partielle Ableitungen nach den letzten  $n$  Variablen<sup>3</sup>.

Dann existiert eine eindimensionale Umgebung  $\mathcal{X}$  des Anfangspunktes  $\xi$ , in der das AWP

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) & (\langle x, y, y', \dots, y^{(n-1)} \rangle \in \mathcal{U}) \\ y^{(j)}(\xi) &= \eta_j & (j \in \{0, \dots, n-1\}) \end{aligned}$$

Abbildung 8.12: Existenz- und Eindeutigkeitsatz im Fall  $n = 1$ 

genau eine Lösung hat. Zur graphischen Illustration im Fall  $n = 1$  s. Abb. 8.12.

### Beispiel 8.15

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Hier sind  $n = 1$ ,  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$ ,

$$y' = -2xy =: f(x, y),$$

und es gilt sogar  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$ . Als eindeutig bestimmte Lösung dieses AWP's ergibt sich nach Beispiel 8.1 die Funktion

$$\phi(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

### Bemerkung

Falls für ein vorliegendes AWP zu einer Dgl der Ordnung  $n$ ,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) && (\langle x, y, y', \dots, y^{(n-1)} \rangle \in \mathcal{U}) \\ y(\xi) &= \eta_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(\xi) &= \eta_{n-1}, \end{aligned}$$

die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes (Satz 8.1) in *jeder*  $(n + 1)$ -dimensionalen Umgebung  $\mathcal{U}$  eines *jeden* Punktes des  $\mathbb{R}^n$  erfüllt sind – damit also auf ganz  $\mathbb{R}^{n+1}$  –, so läßt sich dieser Satz auch zum Nachweis davon benutzen, ob es sich bei einer vorliegenden Menge  $\mathcal{F}$  von Lösungen der Dgl schon um die allgemeine Lösung handelt oder nicht.

<sup>3</sup> $f$  kann – muß aber nicht – auch nach der ersten Variable stetig partiell differenzierbar sein.

Dazu braucht man nur nachzuweisen, daß *jede beliebige* Anfangsbedingung von einem Element aus  $\mathcal{F}$  erfüllt wird.

### Satz 8.2

Die Voraussetzungen von Satz 8.1 mögen in ganz  $\mathbb{R}^{n+1}$  gelten. Sei  $\mathcal{F}$  eine Menge von Funktionen, welche die Dgl erfüllen.

Zu jedem Punkt  $\langle \xi, \eta_0, \dots, \eta_{n-1} \rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$  existiere ein Element  $\phi \in \mathcal{F}$  mit

$$\phi^{(j)}(\xi) = \eta_j \quad (j \in \{0, \dots, n-1\}).$$

Dann ist  $\mathcal{F}$  die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

#### Beweis

Seien  $\psi$  eine beliebige Lösung der Dgl mit  $\xi \in D(\psi)$ . Dann ist der Punkt

$$\langle \xi, \psi(\xi), \dots, \psi^{(n-1)}(\xi) \rangle \in \mathbb{R}^{n+1},$$

und nach Voraussetzung existiert ein Element  $\phi \in \mathcal{F}$  mit

$$\phi^{(j)}(\xi) = \psi^{(j)}(\xi) \quad (j \in \{0, \dots, n-1\}).$$

Jedes Element aus  $\mathcal{F}$ , also insbesondere  $\phi$ , ist eine Lösung der Dgl. Wegen der in Satz 8.1 ausgesprochenen Eindeutigkeit der Lösung eines solchen AWP folgt  $\phi = \psi$ , also  $\psi \in \mathcal{F}$ .

Man braucht in einem solchen Fall also nur nachzuweisen, daß jede beliebige Anfangsbedingung von einem Element der vorliegenden Menge  $\mathcal{F}$  von Lösungen erfüllt wird.

### Beispiel 8.16

Die Differentialgleichung

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{RC} u_C + \frac{U_0}{RC} =: f(t, u_C) \quad (t \in \mathbb{R})$$

erfüllt die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes auf ganz  $\mathbb{R}^{1+1} = \mathbb{R}^2$ , denn:

- (i)  $f$ , definiert durch  $f(t, u) := \frac{1}{RC}(-u + U_0)$ , ist stetig in beiden Variablen auf ganz  $\mathbb{R}^2$ ;
- (ii)  $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u) = -\frac{1}{RC}$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^2$ .

Damit ist jedes AWP zu dieser Dgl eindeutig lösbar.

**Beh.**

Die allgemeine Lösung der Dgl ist gegeben durch

$$\mathcal{F} := \{u_k : u_k(t) = U_0 - k \cdot RC \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$

*Beweis*

Nach dem letzten Satz ist zu zeigen, daß man zu jeder Anfangsbedingung (AB) ein Element aus  $\mathcal{F}$  findet, welches diese erfüllt.

Seien also  $\langle \tau, \eta_0 \rangle \in \mathbb{R}^2$  und  $\phi$  eine Lösung des AWP

$$\begin{aligned} \dot{u}_C &= -\frac{1}{RC} u_C + \frac{U_0}{RC} = f(t, u_C) & (t \in \mathbb{R}) \\ u_C(\tau) &= \eta_0. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\eta_0 = U_0 - k \cdot RC \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} \iff k = \frac{U_0 - \eta_0}{RC} e^{\frac{\tau}{RC}}.$$

Somit erfüllt die Funktion

$$u(t) := U_0 - RC \cdot \underbrace{\left[ \frac{U_0 - \eta_0}{RC} e^{\frac{\tau}{RC}} \right]}_k \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung

$$u(\tau) = \eta_0.$$

Da die Lösung eindeutig bestimmt ist, folgt  $\phi = u$ , also  $\phi = u \in \mathcal{F}$ .

**Bemerkung**

Wie aus dem Beweis ersichtlich, ist eine Lösung dann die allgemeine Lösung, wenn sie

- für jede Wahl des Parameters  $k$  die Differentialgleichung erfüllt;
- durch geeignete Wahl von  $k$  jede Anfangsbedingung erfüllt.

**Beispiel 8.17**

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x =: f(t, x, \dot{x}) \quad (t \geq 0)$$

erfüllt die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeigkeitssatzes auf ganz  $\mathbb{R}^{2+1} = \mathbb{R}^3$ , denn:

- (i)  $f$ , definiert durch  $f(t, x, \dot{x}) := -\frac{k}{m}x$ , ist stetig in allen drei Variablen auf ganz  $\mathbb{R}^3$ ;
- (ii)  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \dot{x}) = -\frac{k}{m}$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^3$ ;
- (iii)  $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^3$ .

Damit ist jedes AWP zu dieser Dgl eindeutig lösbar.

**Beh.**

Die allgemeine Lösung der Dgl ist gegeben durch

$$\mathcal{G} := \left\{ x_{a,b} : x_{a,b}(t) = a \cdot \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t, t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

*Beweis*

Man sieht unmittelbar, daß jedes Element  $x$  von  $\mathcal{G}$  eine Lösung der Dgl ist. Zu zeigen bleibt, daß durch geeignete Wahl der beiden Parameter  $a$  und  $b$  auch jede Anfangsbedingung erfüllt werden kann.

Sei also  $\langle \tau, \eta_0, \eta_1 \rangle \in \mathbb{R}^3$ . Dann folgt mit der Abkürzung  $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ :

$$\begin{aligned} a \cdot \cos \omega \tau + b \cdot \sin \omega \tau &= \eta_0 \\ -\omega a \cdot \sin \omega \tau + \omega b \cdot \cos \omega \tau &= \eta_1 \end{aligned}$$

gilt genau dann, wenn dieses lineare Gleichungssystem eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Das ist jedoch der Fall, da die Koeffizientendeterminante (= Determinante der Koeffizientenmatrix) ungleich Null ist:

$$D(\tau) := \det \begin{pmatrix} \cos \omega \tau & \sin \omega \tau \\ -\omega \sin \omega \tau & \omega \cos \omega \tau \end{pmatrix} = \omega \neq 0.$$

Mit Hilfe der Cramer'schen Regel ergeben sich die eindeutig bestimmten Lösungen zu

$$\begin{aligned} a &= \frac{\det \begin{pmatrix} \eta_0 & \sin \omega \tau \\ \eta_1 & \omega \cos \omega \tau \end{pmatrix}}{\omega} = \eta_0 \cos \omega \tau - \frac{\eta_1}{\omega} \sin \omega \tau, \\ b &= \frac{\det \begin{pmatrix} \cos \omega \tau & \eta_0 \\ -\omega \sin \omega \tau & \eta_1 \end{pmatrix}}{\omega} = \eta_0 \sin \omega \tau + \frac{\eta_1}{\omega} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des AWP lautet daher

$$x(t) = \left( \eta_0 \cos \omega \tau - \frac{\eta_1}{\omega} \sin \omega \tau \right) \cos \omega t + \left( \eta_0 \sin \omega \tau + \frac{\eta_1}{\omega} \cos \omega \tau \right) \sin \omega t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Sie erfüllt auf ganz  $\mathbb{R}$  die Differentialgleichung und genügt den Anfangsbedingungen

$$x(\tau) = \eta_0, \quad \dot{x}(\tau) = \eta_1.$$

**Bemerkung**

Wenn Fälle auftreten, in denen AWP's keine oder keine eindeutigen Lösungen haben, dann müssen in einem solchen Fall natürlich die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes irgendwo verletzt sein; siehe dazu auch das folgende Beispiel.

**Beispiel 8.18**

Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y''' - y'' - y' + y &= 0 \\ \iff \\ y''' &= y'' + y' - y =: f(x, y, y', y'') \end{aligned}$$

erfüllt die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes auf ganz  $\mathbb{R}^{3+1} = \mathbb{R}^4$ , denn:

- (i)  $f$ , definiert durch  $f(x, y, y', y'') := y'' + y' - y$ , ist stetig in allen vier Variablen auf ganz  $\mathbb{R}^4$ ;
- (ii)  $\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y, y', y'') = -1$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^4$ ;
- (iii)  $\frac{\partial f}{\partial y'} f(x, y, y', y'') = 1$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^4$ ;
- (iv)  $\frac{\partial f}{\partial y''} f(x, y, y', y'') = 1$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^4$ .

Damit ist jedes AWP zu dieser Dgl eindeutig lösbar.

**Beh.**

Die Menge

$$\mathcal{H} := \left\{ y_{a,b,c} : y_{a,b,c}(x) = ae^x + be^{-x} + c \sinh x, x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

ist *nicht* die allgemeine Lösung der Dgl.

*Beweis*

Man sieht unmittelbar, daß jedes Element  $y$  von  $\mathcal{H}$  eine Lösung der Dgl ist. Die Frage ist, ob durch geeignete Wahl der drei Parameter  $a, b, c$  jede Anfangsbedingung erfüllt werden kann.

Sei also  $\langle \xi, \eta_0, \eta_1, \eta_2 \rangle \in \mathbb{R}^4$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} a \cdot e^\xi + be^{-\xi} + c \cdot \sinh \xi &= \eta_0 \\ a \cdot e^\xi - be^{-\xi} + c \cdot \cosh \xi &= \eta_1 \\ a \cdot e^\xi + be^{-\xi} + c \cdot \sinh \xi &= \eta_2 \end{aligned}$$

gilt genau dann, wenn dieses lineare Gleichungssystem eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Das ist jedoch nicht der Fall, da die Koeffizientendeterminante zwei identische Zeilen besitzt:

$$\det \begin{pmatrix} e^\xi & e^{-\xi} & \sinh \xi \\ e^\xi & -e^{-\xi} & \cosh \xi \\ e^\xi & e^{-\xi} & \sinh \xi \end{pmatrix} = 0$$

Die linken Seiten der ersten und dritten Gleichung des linearen Gleichungssystems sind identisch. Mit den jeweils rechten Seiten besteht also genau dann Gleichheit, wenn  $\eta_0 = \eta_2$  gilt. Diese Anfangswertprobleme sind lösbar – allerdings nicht eindeutig – andere sind nicht lösbar.

### Bemerkung

Wenn die Voraussetzungen von Satz 8.1 dahingehend abgeschwächt werden, daß man von der rechten Seite  $f$  nur die Stetigkeit verlangt, also nicht mehr unbedingt zusätzlich noch die Stetigkeit der partiellen Ableitungen nach den Variablen  $y^{(k)}$ , dann läßt sich zumindest noch die Existenz einer Lösung des AWP garantieren, allerdings nicht mehr notwendig die Eindeutigkeit. Das ist der Inhalt des *Existenzsatzes von Peano*.

### 8.1.7 Randwertproblem

Ein Anfangswertproblem (AWP) besteht darin, eine Differentialgleichung zu lösen und aus der Menge der Lösungen diejenige auszusondern, welche an einem Punkt – dem Anfangspunkt – einen vorgeschriebenen Funktionswert (und ggfs. vorgeschriebene Ableitungen) aufweist.

Ein *Randwertproblem* (RWP) demgegenüber besteht darin, eine Differentialgleichung zu lösen und aus der Menge der Lösungen diejenigen auszusondern, welche zusätzliche Bedingungen erfüllen, die aber nicht nur an einer einzigen Stelle, sondern an zwei Stellen  $a$  und  $b$  gestellt werden. Gesucht sind dann eine oder mehrere Lösungen, die im ganzen Intervall  $[a, b]$  definiert sind.

Ein AWP ist ein *lokales* Problem und besitzt bei hinreichend gutartiger rechter Seite nach Satz 8.1 stets genau eine lokale Lösung. Ein RWP dagegen ist ein *globales* Problem, und es können schon in sehr einfachen Fällen Beispiele von Unlösbarkeit oder Nicht-Eindeutigkeit auftreten.

### Beispiel 8.19

Gesucht sind Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y = 0 \quad (x \in [0, \pi]),$$

die den folgenden *Randbedingungen* genügen:

$$(i) \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(\pi) = 0$$

$$(ii) \quad y(0) = 1 \quad , \quad y(\pi) = 0$$

$$(iii) \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Dgl lautet

$$\phi(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x \quad (x \in [0, \pi]).$$

Für die drei Fälle erhält man dann jeweils die folgenden speziellen Lösungen:

$$(i) \quad a = 1 \wedge b = 0 \quad : \quad \phi(x) = \cos x$$

$$(ii) \quad a = 1 \wedge a = 0 \quad \quad \quad \zeta$$

$$(iii) \quad a = 0 \wedge b \in \mathbb{R} \quad : \quad \phi(x) = b \cdot \sin x$$

Im ersten Fall ist die Lösung eindeutig bestimmt, im zweiten Fall gibt es keine Lösung, und im dritten Fall gibt es unendlich viele Lösungen. Der dritte Fall beschreibt den Fall der (sich gemäß der Dgl  $y'' + y = 0$  vollziehenden) Schwingungen einer bei 0 und bei  $\pi$  eingespannten Saite.

## 8.2 Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt werden einige spezielle Typen von Gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung untersucht, zu denen eine Lösungstheorie existiert. Oft lassen sich die hier betrachteten Dgln vollständig lösen, manchmal kann man nur unter zusätzlichen Voraussetzungen Aussagen über die Lösungsgesamtheit erhalten; so etwa bei der *Riccati-Differentialgleichung* oder bei manchen *exakten Differentialgleichungen*.

In vielen Fällen wird die Lösungstheorie nicht in voller Allgemeinheit dargestellt, sondern es wird an Hand von ausgesuchten Beispielen gezeigt, wie man zu einer Lösung der entsprechenden Dgl gelangt.

## 8.2.1 Differentialgleichungen mit separierbaren Variablen

**Definition 8.7**

Seien  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  Intervalle und  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}), g \in \mathcal{C}(\mathcal{J})$ . Eine *Differentialgleichung mit separierbaren Variablen* ist eine Dgl der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}).$$

Ein dazugehöriges AWP lautet

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \cdot g(y) & (\langle x, y \rangle \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}) \\ y(\xi) &= \eta & (\langle \xi, \eta \rangle \in \mathcal{I} \times \mathcal{J} \text{ geeignet}) \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Eine Dgl mit separierbaren Variablen ist also eine explizite Dgl erster Ordnung, bei der die rechte Seite, eine Funktion zweier Variablen, sich schreiben läßt als ein Produkt von *zwei* Funktionen von je *einer* Variablen.

Der Name dieser Dgl liefert einen Hinweis darauf, wie sie gelöst wird:

- (i) Sei  $y_0 \in \mathcal{J}$  mit  $g(y_0) = 0$ , also  $y_0$  eine Nullstelle von  $g$ . Dann ist die konstante Funktion

$$\phi(x) := y_0 \quad (x \in \mathcal{I})$$

eine Lösung der Dgl, wie man durch Einsetzen unmittelbar ablesen kann.

- (ii) Sei  $y(\cdot)$  eine Lösung der Dgl mit separablen Variablen und sei  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in \mathcal{J}$ . Dann kann man für alle  $x \in D(y(\cdot))$  durch  $g(y(x))$  dividieren und erhält

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \quad , \quad \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx,$$

und mit Hilfe der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{dt}{g(t)} \Big|_{t=y(x)} = \int \frac{y'(x) dx}{g(y(x))} = \int f(x) dx.$$

Diese Integrationen müssen – wenn möglich – ausgeführt werden, und danach muß die entstehende Gleichung nach  $y$  aufgelöst werden, wenn man die Lösung in expliziter Form haben möchte.

**Beispiel 8.20**

$$y' \cdot \sin x = y \cdot \cos x \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

- (i) Die konstante Funktion

$$\phi(x) := 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist eine Lösung der Dgl.

- (ii) Sei
- $y \neq 0$
- . Für
- $x \in \mathbb{R}$
- mit
- $\sin x \neq 0$
- ist eine Trennung der Variablen möglich, und man erhält

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=y(x)} = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\ln |y(x)| = \ln |\sin x| + C \quad (\text{etwa } x \in (0, \pi))$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\ln |\sin x| + C} \\ &= D \cdot \sin x \quad (x \in (0, \pi)) \end{aligned}$$

mit  $D := e^C > 0$ .

- (iii) Da
- $y = 0$
- nach (i) ebenfalls eine Lösung ist, läßt sich
- $D \geq 0$
- wählen, und da
- $y(x) := -D \cdot \sin x$
- (
- $x \in (0, \pi)$
- ,
- $D > 0$
- geeignet) auch eine Lösung ist, ist in

$$\phi(x) := D \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

die allgemeine Lösung gefunden.

Die zu Anfang von (ii) gemachten Annahmen  $y \neq 0$  und  $\sin x \neq 0$  waren, wie jetzt zu sehen, nur technischer Natur und für den Lösungsweg der Trennung der Variablen erforderlich gewesen. Die allgemeine Lösung erfordert das nicht, sie ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

### Beispiel 8.21

Man löse die beiden Anfangswertprobleme

$$\frac{1}{x} \cdot y \cdot y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2} \quad (x > 0, \langle y, y' \rangle \in \mathbb{R}^2)$$

$$(a) \quad y(1) = 1 \quad \text{bzw.}$$

$$(b) \quad y(1) = 3 .$$

- (i) Die Differentialgleichung ist eine explizite Dgl mit separierbaren Variablen:

$$y' := f(x, y) := \frac{x}{1 + x^2} \cdot \frac{1 + y^2}{y} \quad (x > 0, y > 0, y' \in \mathbb{R}),$$

wobei in dieser Schreibweise zusätzlich  $y > 0$  vorausgesetzt werden muß.

Es existieren jeweils Umgebungen  $\mathcal{U}_1$  und  $\mathcal{U}_2$  des Punktes  $\langle \xi = 1, \eta = 1 \rangle$  bzw.  $\langle \xi = 1, \eta = 3 \rangle$ , in denen die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes (Satz 8.1) erfüllt sind (Beweis?). Daher besitzen beide Anfangswertprobleme jeweils eine lokal eindeutig bestimmte Lösung. Diese läßt sich technisch wieder durch eine Separation der Variablen und anschließende Integration beider Seiten gewinnen.

- (ii) Konstante Funktionen sind diesmal keine Lösungen, da die rechte Seite keine Nullstelle in  $y$  besitzt.
- (iii) Eine Trennung der Variablen liefert

$$\frac{y(x) \cdot y'(x)}{1 + y(x)^2} = \frac{x}{1 + x^2} \quad (x > 0),$$

und man erhält mit anschließender Integration unter Berücksichtigung der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} \Big|_{t=y(x)} &= \frac{1}{2} \int \frac{2y(x)}{1+y(x)^2} y'(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ \frac{1}{2} \ln[1+y(x)^2] &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} C \\ 1+y(x)^2 &= e^C \cdot (1+x^2) =: D(1+x^2) \end{aligned}$$

mit  $D := e^C > 0$ . Eine explizite Auflösung nach  $y(x)$  liefert das Ergebnis, wieder  $\phi$  genannt,

$$\phi(x) = \sqrt{-1 + D(1+x^2)}.$$

Diese Funktion ist natürlich nur dort definiert, wo der Radikand nichtnegativ ist.

- (iv) Jetzt werden die Anfangsbedingungen angepaßt, um die Konstante  $D$  in beiden Fällen explizit zu bestimmen.

(a)  $\phi(1) = 1$ :  $1 = \phi(1) = \sqrt{-1 + D(1+1)} \iff D = 1,$

und man erhält die eindeutig bestimmte Lösung (Abb. 8.13)

$$\phi_a(x) := \sqrt{-1 + (1+x^2)} = x \quad (x > 0).$$

(b)  $\phi(1) = 3$ :  $3 = \phi(1) = \sqrt{-1 + D(1+1)} \iff D = 5,$

und man erhält die eindeutig bestimmte Lösung (Abb. 8.14)

$$\phi_b(x) := \sqrt{-1 + 5(1+x^2)} = \sqrt{4 + 5x^2} \quad (x > 0).$$

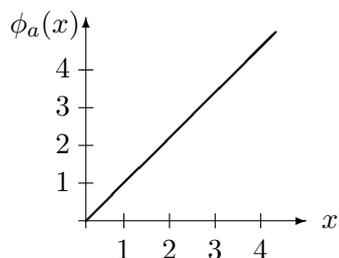


Abbildung 8.13:  
Lösung  $\phi_a(x) = x$  ( $x > 0$ )

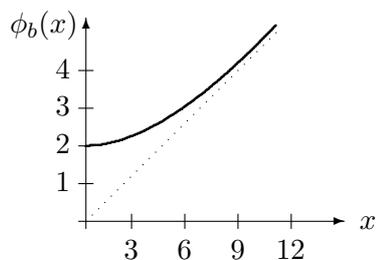


Abbildung 8.14:  
Lösung  $\phi_b(x) = \sqrt{4 + 5x^2}$  ( $x > 0$ )

**Aufgabe**

Warum sind die Funktionen

$$\phi_c(x) := -\sqrt{-1 + (1 + x^2)} = -x \quad (x > 0)$$

bzw.

$$\phi_d(x) := -\sqrt{-1 + 5(1 + x^2)} = -\sqrt{4 + 5x^2} \quad (x > 0)$$

keine Lösungen?

**8.2.1.1 Differentialgleichung der Form  $y' = f(x)$** 

Diese Differentialgleichung ist ein Spezialfall der separablen Dgl  $y' = f(x) \cdot g(x)$  für  $g = 1$ . Das Richtungsfeld ist unabhängig von  $y$ , s. Abb. 8.15.

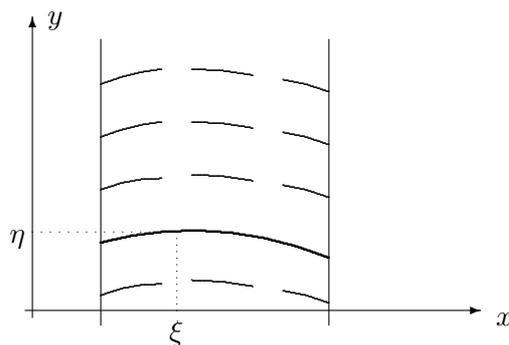


Abbildung 8.15: Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = f(x)$

Das legt die Vermutung nahe, daß man aus einer speziellen Lösung die übrigen durch Parallelverschieben in  $y$ -Richtung gewinnen kann. Die Analysis bestätigt diese Vermutung, denn für festes  $\xi \in \mathcal{I}$  gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daß

$$F(x) := \int_{\xi}^x f(t) dt \quad (x \in \mathcal{I})$$

eine Lösung der Dgl ist und man alle Lösungen in der Form

$$\phi(x; C) = F(x) + C \quad (x \in \mathcal{I})$$

erhält.

Die Grundaufgabe der Integralrechnung, nämlich das Auffinden einer Stammfunktion, besteht in der expliziten Lösung dieser Differentialgleichung!

## 8.2.1.2 Autonome Differentialgleichung

$$y' = g(y)$$

Diese Differentialgleichung ist ein weiterer Spezialfall der separablen Dgl, diesmal für  $f = 1$ . Das Richtungsfeld ist von derselben Art wie das im letzten Abschnitt, nur sind die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht, s. Abb. 8.16.

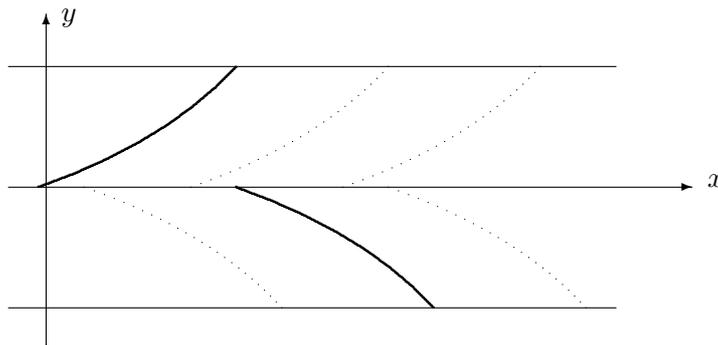


Abbildung 8.16: Richtungsfeld der autonomen Differentialgleichung  $y' = g(y)$

**Beh.**

Ist  $\phi$  eine Lösung einer autonomen Dgl, so auch  $\psi$ , definiert durch

$$\psi(x) := \phi(x + C) \quad (x \in \mathcal{I}, C \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

*Beweis*

$$\psi'(x) = \phi'(x + C) = g[\phi(x + C)] = g[\psi(x)] \quad (x \in \mathcal{I})$$

Lösungen sind also *translationsinvariant* unter Translation der unabhängigen Variablen. Ist die unabhängige Variable die Zeit  $t$ , so sieht man, daß die Lösungen „eigenen Gesetzen“ gehorchen; daher der Name *autonome Differentialgleichung*.

**Beispiel 8.22**

Sei  $a \in \mathbb{R}$ .

$$y' = g(y) := ay \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

(i)  $y = 0$  ist eine Lösung der Dgl.

$$(ii) \ y \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=y(x)} = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int a dx$$

$$\begin{aligned} \ln |y(x)| &= ax + C \\ |y(x)| &= e^{C+ax} =: D \cdot e^{ax} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit  $D := e^C > 0$ .

Damit ist  $D$  auf positive Werte beschränkt. Läßt man auch negative Werte zu, so lautet die allgemeine Lösung

$$\phi(x; D) = D \cdot e^{ax} \quad (x \in \mathbb{R}, D \neq 0 \text{ geeignet}).$$

(iii) (i) und (ii) zusammen liefern die allgemeine Lösung in der Form

$$\phi(x; D) = D \cdot e^{ax} \quad (x \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

### Beispiel 8.23

Beim freien Fall eines Körpers der Masse  $m$  ist der Luftwiderstand bei geringer Geschwindigkeit dieser selbst proportional, bei höheren Geschwindigkeiten dem Quadrat der Geschwindigkeit und bei sehr großen Geschwindigkeiten einer höheren als der zweiten Potenz. Hier soll die Differentialgleichung des freien Falles mit Luftwiderstand unter der Annahme eines quadratischen Widerstandsgesetzes aufgestellt werden.

Das Newton'sche Grundgesetz der Dynamik lautet

$$F(t) = m\ddot{x}(t) = m\dot{v}(t) \quad (t \geq 0).$$

Die beschleunigende Kraft  $F$  setzt sich zusammen aus der gleichgerichteten Gravitationskraft  $F_G$  und der entgegengesetzt gerichteten Kraft  $F_L$  des Luftwiderstandes:

$$F = F_G + F_L,$$

wobei  $F_G = mg$  und  $F_L = -cv^2$  sind ( $c$ : Proportionalitätsfaktor). Also erhält man die Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Geschwindigkeit  $v$  zu:

$$m\dot{v}(t) = mg - cv^2 \quad (t \geq 0)$$

bzw.

$$\frac{m}{c} \dot{v}(t) + v^2 = \frac{mg}{c} \quad (t \geq 0).$$

Es soll die Lösung dieser Dgl für die Anfangsbedingung  $v(t=0) = 0$  bestimmt, also ein Anfangswertproblem (AWP) gelöst werden.

### Lösung des AWP

Diese Dgl ist vom Typ „Dgl mit separierbaren Variablen“. Explizite Form:

$$\dot{v} = g - \frac{c}{m}v^2.$$

(i) Die konstante Funktion

$$v_E := v(t) := \sqrt{\frac{mg}{c}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ist eine Lösung der Dgl („Nullstellen der rechten Seite“).

- (ii) Sei nun  $t \geq 0$  mit  $v(t) \neq \sqrt{\frac{mg}{c}}$ . Dann folgt mit einer Trennung der Variablen:

$$\frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{c}{m}v(t)^2} = 1.$$

Integration mit der Substitutionsregel und Partialbruchzerlegung – unter Auslassung der weiteren Substitution  $x := \sqrt{\frac{c}{m}}u$  – :

$$\begin{aligned} \int \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{c}{m}v(t)^2} dt &= \int \frac{du}{g - \frac{c}{m}u^2} \Big|_{u=v(t)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \left( \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{c}{m}}u} + \frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{c}{m}}u} \right) du \Big|_{u=v(t)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gc}} \left( \ln \left[ \sqrt{g} + \sqrt{\frac{c}{m}} v(t) \right] - \ln \left[ \sqrt{g} - \sqrt{\frac{c}{m}} v(t) \right] \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{gc}} \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{c}{m}} v(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{c}{m}} v(t)} \\ \left[ \left| \sqrt{\frac{c}{mg}} v(t) \right| < 1 \right] &= \sqrt{\frac{m}{gc}} \operatorname{artanh} \left[ \sqrt{\frac{c}{mg}} v(t) \right] \\ &= \int dt = t + C \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung  $v(0) = 0$  liefert die Integrationskonstante  $C = 0$ . Damit erhält man die Lösung

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}} \tanh \left( \sqrt{\frac{gc}{m}} t \right) \quad (t \geq 0)$$

bzw. mit der Abkürzung  $k := \sqrt{\frac{gc}{m}}$ :

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{kt} + e^{-kt}} = \sqrt{\frac{mg}{c}} \frac{1 - e^{-2kt}}{1 + e^{-2kt}} \quad (t \geq 0).$$

Man erkennt, daß  $v$  sich nach langer Zeit der stationären Endgeschwindigkeit

$$v_E := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

nähert, s. Abb. 8.17.

## 8.2.2 Substitutionen

In diesem Abschnitt werden einige Differentialgleichungen behandelt, welche sich auf Dgln mit separierbaren Variablen zurückführen lassen.

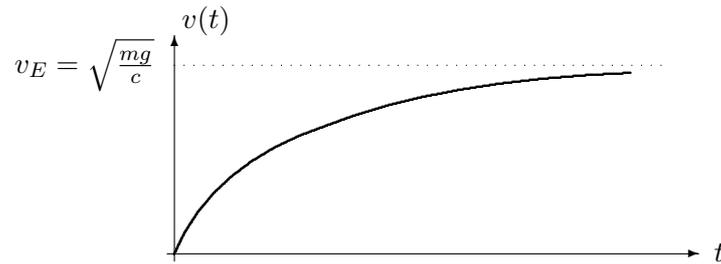


Abbildung 8.17: Freier Fall mit quadratisch ansteigendem Luftwiderstand

### 8.2.2.1 Substitution eines linearen Terms

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = f(ax + by + c)$$

für  $x$  eines geeigneten Intervalles  $\mathcal{J}$ .  $f$  sei stetig in einem Intervall  $\mathcal{I}$ , und es sei  $b \neq 0$ . Sei dann  $u$  definiert durch

$$u(x) := ax + by(x) + c \quad (x \in \mathcal{J})$$

(1.) Ist  $y(\cdot)$  eine Lösung der Dgl, so gilt für  $u$ :

$$u' = a + by' = a + b \cdot f(u),$$

d.h. mit Hilfe der oben definierten Substitution ist die Dgl für  $y$  auf eine autonome Dgl für  $u$  zurückgeführt.

(2.) Ist umgekehrt  $u(\cdot)$  eine Lösung der transformierten Dgl, so ist  $y(\cdot)$  eine Lösung der ursprünglichen Dgl, wenn man  $y(\cdot)$  wie folgt definiert:

$$y(x) := \frac{1}{b}[u(x) - ax - c] \quad (x \in \mathcal{J})$$

*Beweis*

Rechnen!

### Beispiel 8.24

$$y' = (x + y)^2 =: f(x + y)$$

Hier sind  $a = b = 1, c = 0$ , also  $u(x) := x + y(x)$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned} u' &= 1 + y' = 1 + u^2 = 1 + f(u), \\ \arctan u(x) &= x + C \\ u(x) &= \tan(x + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Aufgrund von  $f(u) \geq 0$  ( $u \in \mathbb{R}$ ) hat die rechte Seite der autonomen Dgl

$$u' = 1 + f(u)$$

keine Nullstellen, und durch den oben beschriebenen Lösungsweg hat man alle Lösungen erhalten. Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung lauten

$$y(x) = \frac{1}{1} [u(x) - 1 \cdot x - 0] = \tan(x + C) - x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}\right).$$

### 8.2.2.2 Gleichgradige Differentialgleichung

Seien  $\mathcal{I}$  ein Intervall und  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ . Die Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

heißt *gleichgradige Differentialgleichung*, *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung* oder *homogene Differentialgleichung*. Der Begriff „homogene Dgl“ ist allerdings schon besetzt (s. Abschnitt „Lineare Dgl“), daher soll dieser Begriff *hier*, obwohl durchaus üblich, nicht verwendet werden.

Auch diese Dgl kann durch eine Substitution gelöst werden. Die Substitution

$$u(x) := \frac{y(x)}{x} \quad (x \neq 0)$$

führt wegen

$$y' = f(u) = (xu)' = u + xu'$$

auf die folgende Dgl mit separierbaren Variablen

$$u' = \frac{1}{x} \cdot [f(u) - u].$$

#### Beispiel 8.25

$$(x^2 + y^2) \cdot y' = x \cdot y$$

(i)  $y = 0$  ist eine Lösung der Dgl auf ganz  $\mathbb{R}$ .

(ii) Sei nun  $y \neq 0$ . In Bereichen mit  $x \neq 0$  folgt

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Mit  $u(x) := \frac{y(x)}{x}$  erhält man die Dgl

$$u' = \frac{1}{x} \left( \frac{u}{1 + u^2} - u \right) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{u^3}{1 + u^2}.$$

Aufgrund von  $y \neq 0$  ist im betrachteten Bereich auch  $u \neq 0$ , und man erhält

$$\frac{1+u^2}{u^3} \cdot u' = \left( \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u} \right) u' = -\frac{1}{x}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\int \left( \frac{1}{u(x)^3} + \frac{1}{u(x)} \right) u'(x) dx = \int \left( \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} \right) dt \Big|_{t=u(x)} = -\int \frac{dx}{x},$$

also

$$-\frac{1}{2u(x)^2} + \ln |u(x)| = -\ln |x| + C.$$

Setzt man hier wieder  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$  ein, so folgt

$$-\frac{x^2}{2y(x)^2} + \ln \left| \frac{y(x)}{x} \right| = -\ln |x| + C,$$

d.h.

$$\ln |y(x)| = C + \frac{x^2}{2y(x)^2}, \quad x^2 = 2y(x)^2(\ln |y(x)| - C).$$

Die Lösung erscheint hier in impliziter Form. Beim Übergang zu einer expliziten Form muß man sich noch den entsprechenden Definitionsbereich überlegen.

### 8.2.2.3 Weitere Substitutionen

Als einziges Beispiel werde auf eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f \left( \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \right)$$

hingewiesen.

(i) Ist die Determinante  $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ , so landet man bei einem der bereits besprochenen Typen (bei welchem?)

(ii) Ist die Determinante  $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$ , so hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung  $\langle x_0, y_0 \rangle$ . In einem neuen Koordinatensystem mit dem Nullpunkt  $\langle x_0, y_0 \rangle$  erhält man dann eine gleichgradige Differentialgleichung.

### Bemerkung

Bei den angegebenen oder durchzuführenden Transformationen ändern sich i.a. die Definitionsbereiche der involvierten Funktionen. Die entsprechend anzustellenden Betrachtungen müssen dann in konkreten Fällen genau untersucht werden.

### 8.2.3 Lineare Differentialgleichung

Seien  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, s \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$ . Dann heißen die Differentialgleichungen

$$y' + a(x)y = 0 \quad (8.9)$$

$$y' + a(x)y = s(x) \quad ((x, y, y') \in \mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad (8.10)$$

*homogene bzw. inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.* Die Funktion  $s$  nennt man auch *Störglied*.

„Linear“ bedeutet, daß sowohl die gesuchte Funktion  $y(\cdot)$  als auch ihre erste Ableitung  $y'(\cdot)$  nur in der ersten Potenz auftreten; die Begriffe „homogen“ und „inhomogen“ beziehen sich auf die rechte Seite.

Aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes (Satz 8.1) hat jedes zu einer linearen Dgl gehörende AWP genau eine Lösung.

→ Man prüfe die Voraussetzungen von Satz 8.1 für lineare Dgln nach!

Die Lösungen einer linearen Differentialgleichung verhalten sich wie die Lösungen eines linearen Gleichungssystems:

#### Satz 8.3

Sei  $\mathcal{Y}_h$  die Menge aller Lösungen der homogenen linearen Dgl (8.9), und sei  $y_p$  eine (spezielle) Lösung der inhomogenen linearen Dgl (8.10). Dann ist

$$\mathcal{Y}_a := \{y : y = y_h + y_p, y_h \in \mathcal{Y}_h \text{ geeignet}\}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Dgl (8.10).

*Beweis*

(a)  $\mathcal{Y}_a \subseteq \mathcal{Y}_{\text{allg}}$ :

Jedes Element aus  $\mathcal{Y}_a$  ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung (8.10), also ist  $\mathcal{Y}_a$  enthalten in der allgemeinen Lösung von (8.10) (dabei handelt es sich um eine Menge, s. Definition 8.4).

(b)  $\mathcal{Y}_{\text{allg}} \subseteq \mathcal{Y}_a$ :

Sei  $y_1$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung, also ein Element der allgemeinen Lösung von (8.10). Dann ist  $(y_1 - y_p)$  eine Lösung der homogenen Gleichung (8.9) (warum?). Nun ist

$$y_1 = (y_1 - y_p) + y_p,$$

also  $y_1 \in \mathcal{Y}_a$ .

Im folgenden werden daher – wie bei linearen Gleichungssystemen auch – die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (8.9) und eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (8.10) benötigt.

### 8.2.3.1 Homogene lineare Differentialgleichung

(8.9) ist gleichzeitig eine Dgl mit separierbaren Variablen, läßt sich also mit den Methoden aus Abschnitt 8.2.1 lösen.

- (i) Die Funktion  $y = 0$  ist eine Lösung von (8.9).  
(ii) Ist  $y \neq 0$  und  $y$  eine Lösung von (8.9), so hat  $y$  in  $\mathcal{I}$  keine Nullstelle, denn:

seien im Widerspruch dazu  $y$  eine Lösung von (8.9) und  $\xi \in \mathcal{I}$  mit  $y(\xi) = 0$ . Dann ist  $y$  eine Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= 0 & (\langle x, y, y' \rangle \in \mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ y(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses AWP ist im Intervall  $\mathcal{I}$  eindeutig lösbar, und die Nullfunktion  $y = 0$  ist eine Lösung.  $\zeta$

- (iii) Sei  $y \neq 0$ , dann folgt aus (8.9) durch Trennung der Variablen und anschließende Integration, wieder unter Beachtung der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -a(x) \quad , \quad \ln |y(x)| = -\int a(x) dx + C_1, \\ y(x) &= C \cdot e^{-\int a(x) dx} \quad (x \in \mathcal{I}, C := \pm e^{C_1} \neq 0) \end{aligned}$$

Wird in dieser Formel abschließend auch  $C = 0$  zugelassen, so läßt sich der hier separat betrachtete Fall (i) inkorporieren, und man erhält

#### Satz 8.4

- (i) Sei  $A$  eine Stammfunktion von  $a$  im Intervall  $\mathcal{I}$ , also  $A'(x) = a(x)$  ( $x \in \mathcal{I}$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned} y(\cdot) \text{ ist (maximal fortgesetzte) Lösung von (8.9)} \\ \iff \\ y(x) = C \cdot e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I}, C \in \mathbb{R} \text{ geeignet}) \end{aligned}$$

- (ii) Seien  $\xi \in \mathcal{I}, \eta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  
 $y(\cdot)$  ist (maximal fortgesetzte) Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= 0 \\ y(\xi) &= \eta \\ \iff \\ y(x) &= \eta \cdot e^{-\int_{\xi}^x a(t) dt} \quad (x \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

*Beweis*

„ $\Leftarrow$ “: Jeweils Einsetzen und Rechnen.

„ $\Rightarrow$ “:

(i) Ist  $y(\cdot)$  eine Lösung von (8.9), so erfüllt die Funktion  $z$ , definiert durch

$$z(x) := y(x) \cdot e^{A(x)} \quad (x \in D(y))$$

die Beziehung

$$z'(x) = 0 \quad (x \in D(y)), \quad \text{also} \quad z(x) = C \quad (x \in D(y)).$$

(ii) Ist  $y$  eine Lösung des AWP, so gilt

$$y(x) = C \cdot e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I})$$

mit einem geeigneten  $C$  nach (i). Aus  $y(\xi) = \eta$  ergibt sich  $C = \eta \cdot e^{A(\xi)}$ , somit dann

$$y(x) = \eta \cdot e^{A(\xi) - A(x)} = \eta \cdot e^{-\int_{\xi}^x a(t) dt} \quad (x \in \mathcal{I}).$$

### Beispiel 8.26

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieses AWP ist gegeben durch

$$\phi(x) = 2 \cdot e^{-\int_1^x 2t dt} = 2 \cdot e^{-(x^2-1)} = 2e \cdot e^{-x^2},$$

und sie ist in ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

### Bemerkung

(i) Im besonders einfachen Fall eines linearen AWP mit konstanten Koeffizienten,

$$\begin{aligned} y' + a y &= 0 \\ y(\xi) &= \eta \end{aligned}$$

lautet die Lösung

$$\phi(x) = \eta \cdot e^{-a(x-\xi)} = \eta e^{a\xi} \cdot e^{-ax},$$

sie ist in ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

- (ii) Zur Lösung einer linearen Dgl der Ordnung  $n$  mit konstanten Koeffizienten wird später der sog. *Exponentialansatz* verwendet; hier, im Fall  $n = 1$ , ist er trivial und führt auf eine algebraische Gleichung erster Ordnung (*charakteristische Gleichung*):

$$\text{Ansatz: } y(x) := e^{\lambda x}$$

Eingesetzt in die Dgl erhält man eine Bestimmungsgleichung für  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} y' + a y &= (\lambda + a) \cdot e^{\lambda x} = 0 & (x \in \mathcal{I} := \mathbb{R}) \\ \longrightarrow \lambda &= -a. \end{aligned}$$

- (iii) (Für Kenner und Genießer der Linearen Algebra)

Durch

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{I}) \\ y &\longmapsto y' + a(x)y \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung definiert. Es gilt dann:

$$y(\cdot) \text{ ist Lösung von (8.9)} \iff y \in N(T).$$

Wie eben bewiesen, ist  $\dim N(T) = 1$ ,  $N(T)$  wird also durch *ein* von Null verschiedenes Element aufgespannt, etwa durch

$$e^{-A(x)} = e^{-\int a(x) dx}.$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} &\text{Menge der Lösungen von (8.9)} \\ &= N(T) \\ &= \left\{ y : y \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}), \bigvee_{C \in \mathbb{R}} y(\cdot) = C \cdot e^{-A(\cdot)} \right\}. \end{aligned}$$

### 8.2.3.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Nach Satz 8.3 benötigt man für die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und *eine* (spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung. Möglichkeiten, eine solche zu finden, sollen in diesem Abschnitt untersucht werden.

**Variation der Konstanten** Diese Methode besteht darin, in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (8.9),

$$y(x) = C \cdot e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I}),$$

die *Konstante*  $C$  durch eine *Funktion*  $C(\cdot)$  zu ersetzen und notwendige Bedingungen dafür aufzustellen, daß

$$y_p(x) := C(x) \cdot e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I})$$

eine Lösung von (8.10) ist. Der entsprechende Ansatz lautet also

$$y_p(x) := C(x) \cdot e^{-A(x)} \quad , \quad A(x) = \int_{\xi}^x a(t) dt \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Dgl (8.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} (T(y_p))(x) &= y_p' + a(x) y_p \\ &= \left[ C'(x) - C(x) \cdot a(x) + a(x) \cdot C(x) \right] e^{-A(x)} \\ &= C'(x) \cdot e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I}), \end{aligned}$$

es ist also  $(T(y_p))(x) = s(x)$  genau dann, wenn  $C'(x) = s(x) \cdot e^{A(x)}$  ist, d.h. wenn für  $C(\cdot)$  gilt:

$$C(x) = \int_{\xi}^x s(t) e^{A(t)} dt \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Man erhält somit den folgenden

### Satz 8.5

Seien  $a, s \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ ,  $\xi \in \mathcal{I}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} T(y) = y' + a(x)y &= s(x) & (x \in \mathcal{I}) \\ y(\xi) &= \eta \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$\phi(x) = e^{-A(x)} \cdot \left[ \eta + \int_{\xi}^x s(t) e^{A(t)} dt \right], \quad (8.11)$$

und diese existiert in ganz  $\mathcal{I}$ .

*Beweis*

Die Existenz wurde in den Ausführungen vor diesem Satz bewiesen, und die Eindeutigkeit ergibt sich sowohl aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 8.1) als auch aus Teil (iii) der Bemerkung im Anschluß an das folgende Beispiel.

### Bemerkung

Im Hinblick auf die Verallgemeinerung der Methode der Variation der Konstanten auf den Fall  $n > 1$  wird die spezielle Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung noch etwas anders geschrieben.

$$u_1(x) := e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I})$$

ist ein sog. *Fundamentalsystem* der homogenen Gleichung. Darunter versteht man eine Basis des Lösungsraumes, hier also eine einelementige Basis. Damit folgt aus (8.11) im Falle  $\eta = 0$  die Darstellung

$$y_p(x) = u_1(x) \cdot \int_{\xi}^x \frac{s(t)}{u_1(t)} dt \quad (x \in \mathcal{I}). \quad (8.12)$$

### Beispiel 8.27

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= x \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Die zugehörige homogene Gleichung wurde im letzten Abschnitt gelöst (Beispiel 8.26), es ergab sich

$$y_h(x) = C \cdot e^{-x^2}.$$

Die spezielle Lösung zum Anfangswert  $\eta = 0$  lautet dann nach (8.11)

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_{\xi}^x s(t) \cdot e^{A(t)-A(x)} dt = \int_1^x t \cdot e^{t^2-x^2} dt \\ &= e^{-x^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} e^{t^2} \right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{1-x^2}. \end{aligned}$$

Damit lautet die eindeutig bestimmte Lösung des inhomogenen AWP

$$\begin{aligned} \phi(x) &= y_p(x) + y_h(x) \\ &= y_p(x) + \eta \cdot e^{A(\xi)-A(x)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - e^{1-x^2} \right] + 2 e^{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 3 e^{1-x^2} + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e \cdot e^{-x^2} \quad (x \geq 1) \end{aligned}$$

**Bemerkung**

- (i)  $y_1$  und  $y_2$  seien zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung (8.10), es gelte also

$$T(y_1) = T(y_2) = s.$$

Dann ist deren Differenz  $z := y_1 - y_2$  eine Lösung der homogenen Gleichung (8.9):

$$T(z) = T(y_1 - y_2) = T(y_1) - T(y_2) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} T(y_1) &= T(z) + T(y_2) \\ &= 0 + s \end{aligned}$$

Somit lassen sich alle Lösungen der inhomogenen Gleichung als Summe einer Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung darstellen:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (x \in \mathcal{I}).$$

- (ii) **In der Sprache der Linearen Algebra:**

Sei  $y_p(\cdot)$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung, also  $T(y_p) = s$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Lg(T, s) &= \{y(\cdot) : T(y) = s\} \\ &= \{y_p + y_h : y_h \in N(T) \text{ geeignet}\} \\ &=: y_p + N(T) \end{aligned}$$

Veranschaulicht man sich  $T$  als Abbildung von  $\mathbb{V}^2$  nach  $\mathbb{V}^2$  mit  $\text{rg } T = 1$ , so ist der Nullraum von  $T$  ein eindimensionaler Untervektorraum, also eine Gerade durch den Ursprung. Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung wird durch eine dazu parallele Gerade veranschaulicht, s. Abb. 8.18.

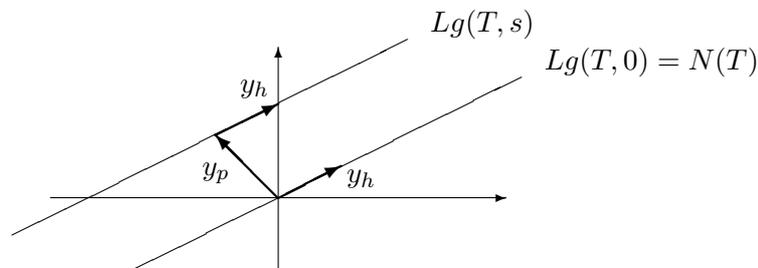


Abbildung 8.18: Zur Lösungsgesamtheit einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

- (iii) Auch aus Teil (i) dieser Bemerkung läßt sich die Eindeutigkeit der Lösung herleiten. Man wähle dazu die spezielle Lösung

$$y_p(x) := \int_{\xi}^x s(t) \cdot e^{A(t)-A(x)} dt \quad (x \in \mathcal{I})$$

der inhomogenen Gleichung, also diejenige Lösung mit  $y_p(\xi) = 0$ . Dann erhält man sämtliche (anderen) Lösungen der inhomogenen Gleichung durch

$$y(x) := y_p(x) + C \cdot e^{-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I}, C \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Aus dieser Menge von Lösungen bestimmt man sich dann durch Wahl von  $C$  die eindeutig bestimmte Lösung des AWP:

$$\begin{aligned} y(\xi) &= y_p(\xi) + C \cdot e^{-A(\xi)} = C \cdot e^{-A(\xi)} \stackrel{!}{=} \eta \\ \longrightarrow C &= \eta \cdot e^{A(\xi)} \\ \longrightarrow y(x) &= y_p(x) + \eta \cdot e^{A(\xi)-A(x)} \quad (x \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

### Beispiel 8.28

Betrachtet wird die Differentialgleichung des Stromes für eine Serienschaltung aus Ohm'schem - und induktivem Widerstand (Beispiel 8.11, Abb. 8.19),

$$L \frac{di}{dt} + R i = u(t),$$

in zwei Fällen:

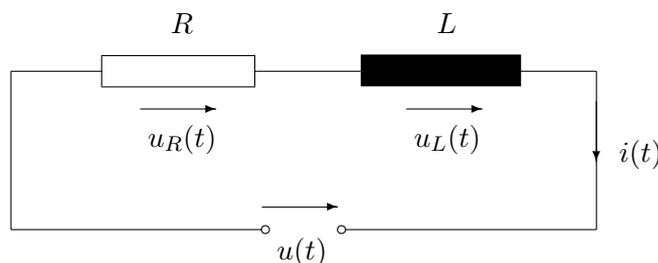


Abbildung 8.19: Elektrische Reihenschaltung mit einem RL-Glied

- (a) Einschaltvorgang: 
$$u(t) := \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ u(t) := U_0 & , t \geq 0 \end{cases} .$$

Die Dgl nimmt dann die folgende Form an:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U_0}{L},$$

und die Lösung durch den Punkt  $\langle 0, \eta \rangle$  erhält man mit der Formel (8.11) zu

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\frac{R}{L}t} \left( \eta + \int_0^t \frac{U_0}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}r} dr \right) \\ &= \frac{U_0}{R} + \left( \eta - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Ist zur Zeit  $t = 0$  auch  $i(0) = \eta = 0$  (Einschaltvorgang), so lautet die Lösung

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (t \geq 0)$$

und wird durch Abb. 8.20 repräsentiert.

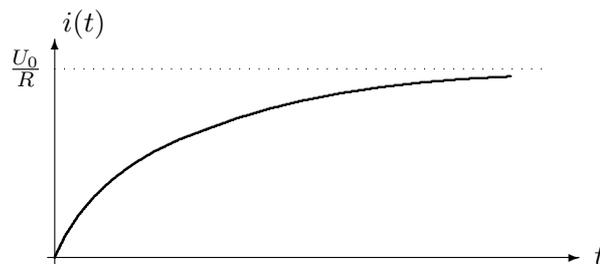


Abbildung 8.20: Stromfluß durch eine Spule (Einschaltvorgang)

- (b) Elektromotorische Kraft:  $u(t) := 0$  ( $t < 0$ ),  $u(t) := \hat{u} \cdot \sin \omega t$  ( $t \geq 0$ ):

Im Falle einer elektromotorischen Kraft

$$u(t) := \hat{u} \cdot \sin \omega t \quad (t \geq 0)$$

kann man die Lösung gemäß Formel (8.11) genauso hinschreiben, lediglich die Auswertung des Integrals ist dann aufwendiger (partielle Integration):

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\frac{R}{L}t} \left( \eta + \int_0^t \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin \omega r \cdot e^{\frac{R}{L}r} dr \right) \\ &= e^{-\frac{R}{L}t} \left( \eta + \frac{\hat{u}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right) + \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left( \frac{R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right). \end{aligned}$$

Der erste Summand löst die homogene -, der zweite die inhomogene Gleichung. Aufgrund von

$$\left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right)^2 + \left( \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right)^2 = 1$$

existiert ein eindeutig bestimmtes  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$  mit der Eigenschaft

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad , \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} .$$

Setzt man das in die Lösung ein, so läßt sich diese auch umschreiben zu

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\frac{R}{L}t} \left( \eta + \frac{\hat{u}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right) + \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \\ &= \left( \eta + \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin \varphi \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Superposition einer abklingenden Funktion – diese heißt auch *flüchtiger Anteil* – mit einer harmonischen Schwingung (*stationärer Anteil*), s. Abb. 8.21.

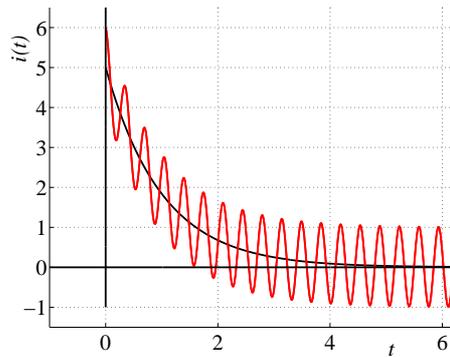


Abbildung 8.21: Superposition des flüchtigen - und des stationären Anteils

Nach dem exponentiellen Abklingen des Einschaltvorganges schwingt der Strom mit derselben Frequenz wie die angelegte elektromotorische Kraft, phasenverschoben um

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

**Störgliedansatz** Zur Bestimmung einer partikulären Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung gibt es ein Verfahren, das in vielen Fällen weniger Aufwand erfordert als das im letzten Abschnitt behandelte Verfahren der Variation der Konstanten. Bei gewissen Störfunktionen (Inhomogenität) läßt sich eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines konstruktiven Ansatzes und nachfolgendem Koeffizientenvergleich ermitteln. Dadurch vermeidet man die bei der Variation der Konstanten durchzuführende Integration. Das hier zu besprechende Verfahren funktioniert allerdings so gut wie ausschließlich im Fall von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Solche Differentialgleichungen, also lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten treten in den Anwendungen häufig auf. *Nur diese* sind auch Gegenstand der im nächsten Kapitel zu besprechenden Laplace-Transformation.

**Beispiel 8.29**

$$y' - 3y = 6 \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y_h(x) = C \cdot e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann man bei diesem einfachen Beispiel sogar raten:

$$y_p(x) := -2 \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Dieses Raten soll nun zu einem konstruktiven Ansatz ausgebaut werden. Es führte hier deshalb zum Ziel, weil man eine spezielle Lösung mit einem Ansatz in der Form des Störgliedes sucht:  $y_p(x) := a$  mit einer noch zu bestimmenden Konstante  $a$ . Setzt man diesen Ansatz in die Dgl ein, so ergibt sich  $a = -2$ .

**Beispiel 8.30**

$$y' - 3y = 3x + 5 \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist wieder

$$y_h(x) = C \cdot e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

und zum Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung macht man hier den Ansatz

$$y_p(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet}),$$

also in Form eines Polynoms vom Grad 1, weil die Inhomogenität ebenfalls ein Polynom vom Grad 1 ist.

Eingesetzt in die Dgl, erhält man

$$\begin{aligned} y_p'(x) - 3y_p(x) &= a - 3(ax + b) = -3ax + (a - 3b) \stackrel{!}{=} 3x + 5 \\ \longrightarrow \quad a &= -1 \quad \wedge \quad a - 3b = 5, \\ \quad \quad \quad 3b &= a - 5 = -1 - 5 = -6, \\ \longrightarrow \quad b &= -2 \end{aligned}$$

Somit erhält man eine partikuläre Lösung zu

$$y_p(x) = -(x + 2) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Beispiel 8.31**

$$y' - 3y = e^{2x} \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

Auch hier setzt man die spezielle Lösung in der Form der rechten Seite an, also

$$y_p(x) := a \cdot e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Man erhält durch Einsetzen in die Dgl

$$\begin{aligned} 2a \cdot e^{2x} - 3a e^{2x} &\stackrel{!}{=} e^{2x} \\ \longrightarrow \quad \underline{a} &= -1 \end{aligned}$$

Somit lautet die hier gefundene partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = -e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

damit also die allgemeine Lösung

$$\phi(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} - e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

### Beispiel 8.32

$$y' - 3y = e^{3x} \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

Setzt man hier die spezielle Lösung in der Form der rechten Seite an, also

$$y_p(x) := a \cdot e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ geeignet}),$$

so kommt man nicht weiter, da diese Funktion schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Infolgedessen muß der Ansatz modifiziert werden, und lautet korrekt:

$$y_p(x) := a \cdot x \cdot e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Man erhält durch Einsetzen in die Dgl

$$\begin{aligned} a \cdot e^{3x} + 3ax e^{3x} - 3ax e^{3x} &\stackrel{!}{=} e^{3x} \\ \longrightarrow \quad \underline{a} &= 1 \end{aligned}$$

Somit lautet die hier gefundene partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = x \cdot e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

damit also die allgemeine Lösung

$$\phi(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C + x) \cdot e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

### Beispiel 8.33

$$y' - 3y = 13 \sin 2x \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

**Ansatz:**

$$y_p(x) := b \cdot \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Man erhält durch Einsetzen in die Dgl

$$\begin{aligned} y_p' - 3y_p &= 2b \cos 2x - 3b \sin 2x \stackrel{!}{=} 13 \sin 2x \\ \longrightarrow & 2b \cos 2x - (13 + 3b) \sin 2x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung enthält links eine Linearkombination von (linear unabhängigen) cos- und sin-Funktionen, deren Koeffizienten müssen also alle verschwinden. Dann ist sie aber für kein  $b \in \mathbb{R}$  erfüllbar, folglich muß der Ansatz zu Anfang schon inkorrekt gewesen sein.

Der Grund ist, daß beim Ableiten aus  $\sin \cos$  und aus  $\cos - \sin$  wird, also sollte der Ansatz korrekt lauten

$$y_p(x) := a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Geht man damit in die Dgl ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -2a \sin 2x + 2b \cos 2x - 3a \cos 2x - 3b \sin 2x &\stackrel{!}{=} 13 \sin 2x \\ \longrightarrow & (-3a + 2b) \cos 2x - (2a + 3b + 13) \sin 2x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -3a + 2b &= 0 \\ 2a + 3b &= -13 \end{aligned}$$

lautet  $a = -2$ ,  $b = -3$ , und damit eine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y_p(x) := -2 \cdot \cos 2x - 3 \cdot \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Welchen Ansatz nimmt man nun bei welcher Inhomogenität? Darüber gibt Tabelle 8.1 Auskunft.

### Bemerkung

Dieser Ansatz funktioniert allerdings nur dann, wenn die Störfunktion selbst *nicht* Lösung der homogenen Gleichung ist. Wenn das der Fall ist, so müssen die betreffenden Lösungsansätze jeweils mit dem Faktor  $x$  multipliziert werden, s. Beispiel 8.32.

### Aufgabe

In welchen Situationen kann dieser Fall auftreten?

## 8.2.4 Exakte Differentialgleichung - Euler'scher Multiplikator

Dieser Abschnitt erfordert einige Vorkenntnisse über Funktionen mehrerer Variablen, insbesondere die Kenntnis partieller Ableitungen einer Funktion mehrerer Variablen, Kenntnis der mehrdimensionalen Kettenregel und einiger Begriffe der mehrdimensionalen Integrationstheorie.

Störfunktion	Ansatz
$s(x) = p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$	$y_p(x) = r_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$
$s(x) = a \cdot e^{\alpha x}$	$y_p(x) = b \cdot e^{\alpha x}$
$s(x) = a \cdot \sin \beta x$ ∨ $s(x) = a \cdot \cos \beta x$	$y_p(x) = b_1 \sin \beta x + b_2 \cos \beta x$
$s(x) = e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$	$y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot r_n(x)$
$s(x) = p_n(x) \cdot \sin \beta x$ ∨ $s(x) = p_n(x) \cdot \cos \beta x$	$y_p(x) = r_n(x) \cdot \sin \beta x + s_n(x) \cdot \cos \beta x$
$s(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ ∨ $s(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$	$y_p(x) = e^{\alpha x} [b_1 \sin \beta x + b_2 \cos \beta x]$
$s(x) = e^{\alpha x} [p_n(x) \cdot \sin \beta x + q_n(x) \cos \beta x]$	$y_p(x) = e^{\alpha x} [r_n(x) \cdot \sin \beta x + s_n(x) \cdot \cos \beta x]$

Tabelle 8.1: Ansatz zum Auffinden einer partikulären Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung

**Definition 8.8**

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ . Die im Gebiet  $\mathcal{G}$  erklärte Differentialgleichung

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) y' = 0 \quad (8.13)$$

heißt *exakt*, wenn es zu  $\langle f_1, f_2 \rangle$  in  $\mathcal{G}$  eine Funktion  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$  gibt mit

$$D_1 F = f_1 \quad , \quad D_2 F = f_2 \quad \text{d.h.} \quad \vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Ist (8.13) exakt, so heißt jede Funktion  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$  mit  $\vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  eine *Stammfunktion* der exakten Differentialgleichung. Zwei Stammfunktionen einer exakten Dgl unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante.

Mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel erhält man sehr einfach den folgenden Satz, welcher den Zusammenhang zwischen einer exakten Dgl, einer ihrer Stammfunktionen und ihrer Lösbarkeit bzw. ihren Lösungen beschreibt.

**Satz 8.6**

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ , und die Dgl (8.13) sei exakt. Seien  $F$  eine zugehörige Stammfunktion und  $y(\cdot)$  eine stetig differenzierbare Funktion, deren Definitionsbereich ein Intervall ist und für die gilt:

$$\langle x, y(x) \rangle \in \mathcal{G} \quad \left( x \in D(y(\cdot)) \right).$$

$y(\cdot)$  ist Lösung der exakten Differentialgleichung (8.13)

$$\iff \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D(y)} F(x, y(x)) = c$$

*Beweis*

„ $\implies$ “ Ist  $y(\cdot)$  eine Lösung, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x, y(x)) + f_2(x, y(x)) y'(x) \\ &= D_1 F(x, y(x)) \cdot 1 + D_2 F(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ &= \frac{d}{dx} F(x, y(x)) \quad (x \in D(y)), \end{aligned}$$

also ist  $F(x, y(x)) = c \quad (x \in D(y(\cdot))), c \in \mathbb{R}$  geeignet).

„ $\impliedby$ “ Ist  $F(x, y(x)) = c \quad (x \in D(y))$ , so folgt durch Differenzieren, daß  $y(\cdot)$  eine Lösung von (8.13) ist.

Ist die Differentialgleichung (8.13) exakt und  $F$  eine Stammfunktion der Dgl, so erhält man die Lösungen von (8.13) in impliziter Form durch die Schar von Kurven  $F(x, y) = \text{constans}$  (Isothermen, Isobaren, Äquipotentiallinien etc., je nach Interpretation von  $F$ ).

Ist  $\langle x_0, y_0 \rangle \in \mathcal{G}$ , so garantiert der Satz über implizite Funktionen die „Auflösbarkeit“ von

$$F(x, y) = c := F(x_0, y_0)$$

nach  $y$  in einer geeigneten Umgebung von  $x_0$ , falls  $D_2F(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) \neq 0$  gilt. D.h. es existieren dann ein offenes Intervall  $\mathcal{I}$  mit  $x_0 \in \mathcal{I}$  und eine Funktion  $y(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$  mit

$$F(x, y(x)) = c \quad (x \in \mathcal{I}) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0.$$

Nach dem letzten Satz ist eine solche Funktion dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) y' = 0 \quad , \quad y(x_0) = y_0.$$

### Beispiel 8.34

In  $\mathcal{G} := \mathbb{R}^2$  wird die Differentialgleichung

$$x + y \cdot y' = 0$$

untersucht. Mit  $F(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ ) ist

$$D_1F(x, y) = x, \quad D_2F(x, y) = y \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2),$$

also ist die Differentialgleichung exakt und  $F$  eine Stammfunktion. Die Lösungen erhält man in impliziter Form durch

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Für  $c \leq 0$  gibt es offensichtlich keine Funktion  $y(\cdot)$  mit einem Intervall als Definitionsbereich, so daß  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = c$  gilt.

Für  $c > 0$  erhält man obere bzw. untere Halbkreisbögen um den Ursprung mit dem Radius  $\sqrt{2c}$  als Lösungen.

### Aufgabe

- (i) Warum sind Vollkreise keine Lösungen des letzten Beispiels?
- (ii) Warum gehören Punkte auf der  $x$ -Achse zu keiner Lösung?
- (iii) Man zeige, daß auf Punkten der  $x$ -Achse die Voraussetzungen des oben zitierten Satzes über implizite Funktionen, welcher die lokale Auflösbarkeit der impliziten Funktion nach  $y$  in einer Umgebung von  $x_0$  garantiert, verletzt sind.

**Bemerkung**

Die Exaktheit der Differentialgleichung (8.13), d.h. die Existenz einer Funktion  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$  mit  $\vec{\nabla}F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  bedeutet in einer anderen Sprechweise, daß das Vektorfeld  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  ein *Potentialfeld* und  $F$  ein *Potential* dieses Feldes ist.

Hinreichend dazu ist im Falle des einfachen Zusammenhanges von  $\mathcal{G}$  und stetig differenzierbarer Funktionen  $f_1, f_2$  die sog. *Integrabilitätsbedingung*

$$D_2f_1(x, y) = D_1f_2(x, y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}), \quad (8.14)$$

eine Bedingung, deren *Notwendigkeit* im Falle  $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$  aus dem Satz von Schwarz unmittelbar folgt:

$$D_2f_1(x, y) = D_2D_1F(x, y) = D_1D_2F(x, y) = D_1f_2(x, y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}).$$

**Aufgabe**

Man zeige, daß  $ye^{xy} + xe^{xy}y' = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) eine exakte Differentialgleichung ist und berechne die (maximal fortgesetzten) Lösungen.

Ist eine Differentialgleichung vom Typ (8.13) nicht exakt, so besteht bisweilen die Möglichkeit, sie durch Multiplizieren mit einer überall von Null verschiedenen Funktion zu einer exakten Dgl zu machen.

**Definition 8.9**

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$  und  $\mu \in \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ .  $\mu$  heißt *integrierender Faktor* oder *Euler'scher Multiplikator* der Dgl  $f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0$ , falls gilt:

- (i)  $\mu(x, y) \neq 0 \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G})$
- (ii)  $\mu(x, y)f_1(x, y) + \mu(x, y)f_2(x, y) \cdot y' = 0$  ist eine exakte Dgl.

Es ist offensichtlich, daß die Lösungsgesamtheit von  $f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0$  invariant bleibt, wenn man durch Multiplizieren der Differentialgleichung mit einer überall von Null verschiedenen Funktion  $\mu$  zu einer neuen Dgl übergeht. Hat man also einen integrierenden Faktor  $\mu$  und löst dann die durch Multiplikation mit  $\mu$  exakt gewordene Dgl, so hat man auch die Lösungen der ursprünglichen.

Sind jetzt zusätzlich  $\mathcal{G}$  einfach zusammenhängend sowie  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$  und  $\mu(x, y) \neq 0$  ( $\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}$ ), so erhält man aus der Integrabilitätsbedingung (8.14) die folgende hinreichende Bedingung für die Exaktheit der Dgl:

$$\begin{aligned} & \mu \text{ ist ein integrierender Faktor} \\ \iff & \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y) \cdot f_2(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y) \cdot f_1(x, y)) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}) \\ \iff & D_1\mu \cdot f_2 + \mu \cdot D_1f_2 = D_2\mu \cdot f_1 + \mu \cdot D_2f_1 \\ \iff & D_1\mu \cdot f_2 - D_2\mu \cdot f_1 = \mu(D_2f_1 - D_1f_2) \\ \iff & \frac{D_1\mu}{\mu} \cdot f_2 - \frac{D_2\mu}{\mu} \cdot f_1 = (D_2f_1 - D_1f_2) \end{aligned}$$

Wollte man jetzt diese Äquivalenz verwenden, um einen Euler'schen Multiplikator zu finden, so müßte man eine *partielle* Differentialgleichung (die letzte Gleichung oben) für  $\mu$  lösen, was wohl mindestens so schwierig ist, wie gleich nach Lösungen der ursprünglichen *gewöhnlichen* Differentialgleichung zu suchen.

Manchmal gelingt es jedoch, Multiplikatoren zu finden, die nur von  $x$  oder nur von  $y$  abhängen, und dann kann eine partikuläre Lösung einer der beiden *gewöhnlichen* Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{D_2\mu}{\mu} &= D_2(\ln \mu) = \frac{(D_1f_2 - D_2f_1)}{f_1} && \text{bzw.} \\ \frac{D_1\mu}{\mu} &= D_1(\ln \mu) = -\frac{(D_1f_2 - D_2f_1)}{f_2} \end{aligned}$$

bestimmt werden, wenn auch die jeweils rechten Seiten nur von  $y$  bzw. nur von  $x$  abhängen.

### Beispiel 8.35

Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$y + (2x^2y - x)y' = 0 \quad (\langle x, y, y' \rangle \in \mathbb{R}^3).$$

Es sind  $f_1(x, y) = y$ ,  $f_2(x, y) = 2x^2y - x$ , damit gilt

$$D_2f_1(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 1 \neq 4xy - 1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = D_1f_2(x, y),$$

also ist die vorgelegte Dgl nicht exakt.

Verwendet man nun (8.15), dann wird die rechte Seite eine nur noch von  $x$  abhängige Funktion:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \mu}{dx}(x) &= \frac{\mu'}{\mu}(x) = -\frac{(4xy - 1) - 1}{2x^2y - x} = -\frac{2}{x}, \\ \ln \mu(x) &= -2 \ln x = -\ln x^2 + C, \\ \mu(x) &= \frac{K}{x^2}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\mu(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x < 0 \text{ oder } x > 0)$$

ein integrierender Faktor. Die (nicht exakte) Dgl wird mit  $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$  multipliziert, und man erhält die dann exakte Differentialgleichung

$$\frac{y}{x^2} + \left(2y - \frac{1}{x}\right)y' = 0.$$

Für die Funktion  $F$ , definiert durch

$$F(x, y) := y^2 - \frac{y}{x} \quad (\langle x, y \rangle \in (0, \infty) \times \mathbb{R})$$

gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2} =: f_1(x, y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{1}{x} =: f_2(x, y),$$

also lautet die allgemeine Lösung  $\phi$  der ursprünglichen Dgl in impliziter Form

$$\phi(x)^2 - \frac{\phi(x)}{x} = C.$$

**Bemerkung**

Eine Differentialgleichung der Form (8.13) wird manchmal in der symmetrischen Form

$$f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy = 0 \tag{8.15}$$

geschrieben, und man nennt die linke Seite eine *Differentialform ersten Grades* oder eine *Pfaff'sche Form*. Diese Schreibweise wird insbesondere in der Thermodynamik angewandt.

### 8.3 Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung

#### 8.3.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Eine Differentialgleichung der Form

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = s(x) \tag{8.16}$$

$$(\langle x, y, y', \dots, y^{(n)} \rangle \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{n+1})$$

für die unbekannte Funktion  $y(\cdot)$  nennt man eine *lineare inhomogene Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*. Dabei wird über die Koeffizientenfunktionen  $a_k(\cdot)$  und die Inhomogenität  $s(\cdot)$  Stetigkeit in einem geeigneten Intervall  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  vorausgesetzt:

$$a_0(\cdot), \dots, a_n(\cdot), s(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathcal{I}).$$

Mit Hilfe eines sog. *linearen Differentialoperators* läßt sich die Schreibweise der Dgl (8.16) technisch abkürzen:

$$L := a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x)$$

$$\longrightarrow \quad L(y) = s \quad \text{bzw.} \quad (L(y))(x) = s(x) \quad (x \in \mathcal{I})$$

Die Bildung von  $L(y)$  – oder, wie man häufig auch schreibt:  $Ly$  – ist dabei so gemeint, daß  $L$  von rechts formal mit  $y$  „multipliziert“ wird; diese „Multiplikation“ ist so zu verstehen, daß der entsprechende Differentiationsausdruck auf die Funktion  $y$  angewandt wird.

$$L : \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$$

$$y \longmapsto L(y) =: Ly$$

ist eine lineare Abbildung. Die Differentialgleichung lösen heißt also, ein Element  $y \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$  anzugeben, welches  $Ly = s$  erfüllt.

**Satz 8.7**

- (i) Die Lösungsmenge der homogenen Dgl  $n$ -ter Ordnung  $Ly = 0$  ist ein Untervektorraum von  $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$  der Dimension  $n$ :

$$\dim N(L) = n.$$

- (ii) Die Lösungsmenge der inhomogenen Dgl  $n$ -ter Ordnung  $Ly = s$  ist ein affiner Teilraum (s. Lineare Algebra) von  $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$  der Dimension  $n$ :

$$Lg(L, s) = y_p + N(L).$$

Hierbei bezeichnet  $y_p$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

- (iii) Jedes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} Ly &= s \\ y^{(k)}(\xi) &= \eta_k \quad (k \in \{0, \dots, n-1\}) \end{aligned}$$

besitzt genau eine auf  $\mathcal{I}$  definierte Lösung.

**Aufgabe**

Man prüfe die Voraussetzungen von Satz 8.1 explizit nach.

**8.3.2 Fundamentalsystem - Wronski-Determinante**

Die Gesamtheit der Lösungen  $y_h(\cdot)$  der homogenen linearen Dgl  $Ly = 0$  bildet einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum. Dieser Vektorraum wird demnach von  $n$  Basis-Vektoren (Lösungen) dieser Dgl erzeugt, d.h. von  $n$  linear unabhängigen Vektoren (Lösungen).

**Definition 8.10**

Eine Menge von  $n$  linear unabhängigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung  $Ly = 0$ , also eine Basis von  $N(L)$ , heißt ein *Fundamentalsystem* der Dgl  $Ly = 0$ .

Im folgenden wird ein handliches Kriterium bereitgestellt, mit dessen Hilfe eine Entscheidung darüber getroffen werden kann, ob es sich bei  $n$  vorliegenden Lösungen der homogenen Dgl  $Ly = 0$  um ein Fundamentalsystem handelt oder nicht. Diese Entscheidung wird mit Hilfe der *Wronski-Determinante* erzielt.

**Definition 8.11**

Seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $y_1, \dots, y_k$  ( $k-1$ ) mal stetig differenzierbare Funktionen auf  $\mathcal{I}$ .

(i) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_k(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(x) & \dots & y_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}$$

heißt *Wronski-Matrix* der Funktionen  $y_1, \dots, y_k$  auf dem Intervall  $\mathcal{I}$ .

(ii) Ihre Determinante

$$W(x) := W(x; y_1, \dots, y_k) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_k(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(x) & \dots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

heißt *Wronski-Determinante* der Funktionen  $y_1, \dots, y_k$  auf  $\mathcal{I}$ .

### Beispiel 8.36

Die Wronski-Determinante der Funktionen

$$y_1(x) := \sin x \quad \text{und} \quad y_2(x) := \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist gegeben durch

$$W(x) = W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mit Hilfe des Begriffes der Wronski-Determinante läßt sich nun ein Kriterium für das Vorliegen eines Fundamentalsystems formulieren.

### Satz 8.8

Seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $y_1, \dots, y_k$  ( $k-1$ ) mal stetig differenzierbare Funktionen auf  $\mathcal{I}$ , und jede dieser Funktionen sei eine Lösung der homogenen Dgl  $Ly = 0$ . Dann gilt:

Die Funktionen  $y_1, \dots, y_k$  sind linear abhängig

$$\iff$$

Es existiert eine Zahl  $x_0 \in \mathcal{I}$  mit  $W(x_0) = 0$ . In diesem Fall gilt sogar  $W(x) = 0$  für alle  $x \in \mathcal{I}$ .

*Beweis*

„ $\implies$ “

Die Funktionen  $y_1, \dots, y_k$  seien linear abhängig. Dann gibt es Konstanten  $c_1, \dots, c_k$ , die nicht alle gleich Null sind, so daß gilt:

$$c_1 \cdot y_1(x) + \dots + c_k \cdot y_k(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Durch Differentiation ergibt sich daraus das folgende homogene lineare Gleichungssystem für die Unbekannten  $c_1, \dots, c_n$ :

$$\begin{aligned} c_1 \cdot y_1(x) + \dots + c_k \cdot y_k(x) &= 0 \\ c_1 \cdot y_1'(x) + \dots + c_k \cdot y_k'(x) &= 0 \\ \dots & \\ c_n \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_k \cdot y_k^{(k-1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung hat dieses lineare Gleichungssystem für jedes  $x \in \mathcal{I}$  eine nichttriviale Lösung, daher muß seine Koeffizientendeterminante verschwinden, d.h. es gilt

$$W(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{I}).$$

„ $\Leftarrow$ “

Sei  $x_0 \in \mathcal{I}$  und gelte  $W(x_0) = 0$ . Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \cdot y_1(x_0) + \dots + c_k \cdot y_k(x_0) &= 0 \\ c_1 \cdot y_1'(x_0) + \dots + c_k \cdot y_k'(x_0) &= 0 \\ \dots & \\ c_n \cdot y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_k \cdot y_k^{(k-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

nicht nur die triviale Lösung. Man definiere nun die (nichttriviale!) Funktion  $\phi$  durch

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^k c_i \cdot y_i(x) \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Dann gilt:

- $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$  (klar);
- $L(\phi) = 0$  (da  $y \in LH(\{y_1, \dots, y_k\})$ ).

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung (Satz 8.7) ist obige Lösung die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems. Da die Nullfunktion das AWP auch löst, folgt wegen der Eindeutigkeit  $\phi = 0$ . Damit ist  $\phi = 0$  nichttriviale Linearkombination der Funktionen  $y_1, \dots, y_k$ , und das bedeutet deren lineare Abhängigkeit.

**Folgerung**

Die  $k$  Lösungen  $y_1, \dots, y_k$  der Dgl  $Ly = 0$  auf  $\mathcal{I}$  sind linear unabhängig, d.h. ein Fundamentalsystem



Es existiert eine Zahl  $x_0 \in \mathcal{I}$  mit  $W(x_0) \neq 0$ . In diesem Fall gilt sogar  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathcal{I}$ .

*Beweis*

Ist jeweils die Kontraposition zu den Aussagen von Satz 8.8.

**Beispiel 8.37**

$$L(y) := y''' - y' = e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Die Funktionen

$$\{y_1(x) := 1, y_2(x) := e^x, y_3(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})\}$$

sind offenbar Lösungen der homogenen Gleichung. Sie bilden auch ein Fundamentalsystem, denn für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$W(x) = W(y_1, y_2, y_3; x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

**Bemerkung**

- (i) Sind die Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  einer linearen homogenen Dgl  $n$ -ter Ordnung linear abhängig, so verschwindet ihre Wronski-Determinante immer. Liegt dagegen ein Fundamentalsystem von in einem Intervall  $\mathcal{I}$  definierten Lösungen vor, so verschwindet deren Wronski-Determinante nirgends.
- (ii) Die Tatsache, daß für  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  der homogenen Dgl  $L(y) = 0$  die Wronski-Determinante entweder überall oder nirgends verschwindet, ist eine triviale Folgerung aus einer für diese Determinante gültigen Dgl

$$W' + a_{n-1}(x)W = 0,$$

welche via Integration unmittelbar zu der folgenden Darstellungsformel führt:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt} \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Aus dieser Darstellungsformel erkennt man weiterhin, daß die Wronski-Determinante konstant ist, also gar nicht von  $x \in \mathcal{I}$  abhängt, wenn der Koeffizient  $a_{n-1}(\cdot)$  der zweithöchsten Ableitung gleich Null ist; s. dazu die beiden vorangegangenen Beispiele.

- (iii) Im Teil „ $\Rightarrow$ “ des Beweises von Satz 8.8, also

$$\{y_1, \dots, y_k\} \text{ linear abhängig} \quad \Longrightarrow \quad \bigwedge_{x \in \mathcal{I}} W(x) = 0$$

ist von der Eigenschaft der  $y_i$ , Lösungen einer homogenen linearen Dgl zu sein, kein Gebrauch gemacht worden. Für beliebige Funktionen  $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq \mathcal{C}^{k-1}(\mathcal{I})$  gilt somit die Aussage (als Kontraposition formuliert):

$$\bigvee_{x_0 \in \mathcal{I}} W(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \{y_1, \dots, y_k\} \text{ linear unabhängig.}$$

- (iv) Die Umkehrung von (iii), also die Richtung „ $\Leftarrow$ “ des Beweises von Satz 8.8, gilt allerdings nur dann, wenn es sich bei der Menge  $\{y_1, \dots, y_k\}$  um Lösungen einer linearen homogenen Dgl handelt. M.a.W., es gibt linear unabhängige Funktionen, deren Wronski-Determinante überall verschwindet:

**Beispiel**

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in (-\infty, -2) \\ -\frac{(x+2)^2}{2} + 1 & , x \in [-2, -1) \\ \frac{x^2}{2} & , x \in [-1, 0) \\ 0 & , x \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} & , x \in [0, 1) \\ -\frac{(x-2)^2}{2} + 1 & , x \in [1, 2) \\ 1 & , x \in [2, \infty) \end{cases}$$

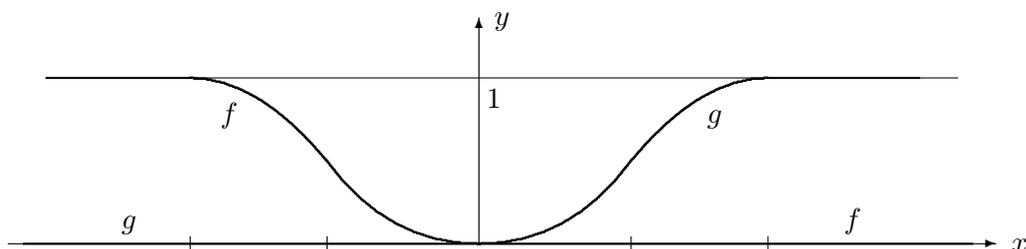


Abbildung 8.22: Linear unabhängige Funktionen mit Wronski-Determinante 0

### 8.3.3 Homogene lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten - Exponentialansatz für ein Fundamentalsystem

Nach Satz 8.7 werden  $n$  linear unabhängige Lösungen der linear homogenen Differentialgleichung

$$L(y) = a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = 0$$

$$(\langle x, y, y', \dots, y^{(n)} \rangle \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{n+1})$$

für ein Fundamentalsystem des Lösungsraumes, also für eine Basis des Untervektorraumes  $N(L) \subseteq \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$  benötigt. Diese zu finden ist einfach und das Problem vollständig lösbar, falls es sich um den Sonderfall einer Dgl mit konstanten Koeffizienten handelt:

Die Koeffizientenfunktionen  $a_j(\cdot)$  sind konstante Funktionen oder kurz, Konstanten. Da im folgenden fast ausschließlich dieser Sonderfall linearer Dgln untersucht wird, werden von nun an diese (konstanten) Funktionen  $a_j(\cdot)$  ebenfalls mit den Symbolen  $a_j$  bezeichnet.

Man sucht also  $n$  linear unabhängige Lösungen der linear homogenen Differentialgleichung

$$L(y) = a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

$$(\langle x, y, y', \dots, y^{(n)} \rangle \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{n+1})$$

mit konstanten Koeffizienten.

Diese versucht man mit einem sog. *Exponentialansatz* zu finden. Dieser geht davon aus, daß  $k$  Lösungen der Form  $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$  ( $x \in \mathcal{I}, j \in \{1, \dots, k\}$ ) existieren und man „nur noch“ die Konstanten  $\lambda_j$  geeignet bestimmen muß.

Wenn man diese Annahme macht, dann kann man die Funktion

$$y(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathcal{I})$$

in die homogene Differentialgleichung einsetzen und nach Bedingungen suchen, denen die Konstante  $\lambda$  genügen muß. Man erhält eine Bestimmungsgleichung für den unbekannt Parameter  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} L(y) &= a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \\ &= (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} \\ &= 0 \quad (x \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

### Definition 8.12

Das Polynom

$$p(\lambda) := \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

heißt *charakteristisches Polynom*,

die Gleichung

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

heißt *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung.

### Bemerkung (Zum Namen „Charakteristische Gleichung“)

Die Bezeichnungen „charakteristisches Polynom“ und „charakteristische Gleichung“ stammen aus der Theorie der *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* linearer Abbildungen, welche im Abschnitt über Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen näher erläutert wird.

Eine Lösung der Dgl in Form einer Exponentialfunktion existiert also dann, wenn der dort auftretende Parameter  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, also eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Der nächste Satz sagt aus, daß die auf diese Weise erzielten Lösungen erschöpfend sind, also ein Fundamentalsystem bilden:

**Satz 8.9**

- (i) Ist  $\lambda$  eine  $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so entsprechen ihr  $k$  (linear unabhängige) Lösungen

$$e^{\lambda x}, \quad x \cdot e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$$

der Dgl  $L(y) = 0$ . Aus den  $n$  Nullstellen des charakteristischen Polynoms (jede ihrer Vielfachheit nach gezählt) ergeben sich auf diese Weise  $n$  linear unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem.

- (ii) Sind die Koeffizienten  $a_j$  reell, so enthält dieses Fundamentalsystem komplexe Lösungen, falls komplexe Nullstellen auftreten. Nun sind Realteil und Imaginärteil dieser Lösungen selbst Lösungen, d.h. man erhält aus den Lösungen ein reelles Fundamentalsystem, indem man zu einer komplexen Nullstelle  $\lambda = \mu + i\nu$   $k$ -ter Ordnung die  $k$  Lösungen in Real- und Imaginärteil aufspaltet,

$$x^j \cdot e^{\mu x} \cdot \cos \nu x, \quad x^j \cdot e^{\mu x} \cdot \sin \nu x \quad (j \in \{0, \dots, k-1\}),$$

und die zu der konjugiert komplexen Nullstelle  $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$  gehörenden Lösungen streicht.

**Beispiel 8.38**

$$y^{(5)} + y^{(3)} + 86y'' + 252y' + 200y = 0$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^5 + \lambda^3 + 86\lambda^2 + 252\lambda + 200 \\ &= (\lambda + 2)^3(\lambda^2 - 6\lambda + 25) \\ &= (\lambda + 2)^3(\lambda - [3 - 4i])(\lambda - [3 + 4i]) \end{aligned}$$

Ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen für diese Dgl lautet

$$\{e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, e^{3x} \sin 4x, e^{3x} \cos 4x\}.$$

### 8.3.4 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Zur allgemeinen Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung (mit nicht notwendig konstanten Koeffizienten) benötigt man die allgemeine Lösung der homogenen Dgl und *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. Zum Auffinden einer solchen gibt es mehrere Verfahren, welche natürlich auch schon im Fall von Dgln erster Ordnung anwendbar sind und z.T. dort schon angewendet wurden.

Dabei gilt, wie bei linearen Dgln erster Ordnung auch, wieder das *Superpositionsprinzip*.

### 8.3.4.1 Superpositionsprinzip

#### Satz 8.10

Für  $i \in \{1, 2\}$  sei  $y_i(\cdot)$  eine (partikuläre) Lösung der Dgl  $L(y) = s_i(x)$ . Dann gilt:

- (i)  $y := y_1 + y_2$  ist eine Lösung von  $L(y) = s_1(x) + s_2(x)$ .
- (ii)  $y := c \cdot y_1$  ist eine Lösung von  $L(y) = c \cdot s_1(x)$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

*Beweis*

Linearität der Ableitung beliebig hoher Ordnung.

#### Anwendung von Satz 8.10

Ist  $s(\cdot)$  in einem Intervall  $\mathcal{I}$  eine Linearkombination

$$s(x) := \sum_{k=1}^m c_k \cdot s_k(x) \quad (x \in \mathcal{I})$$

von Funktionen  $s_k(\cdot)$ , so kann man, statt  $L(y) = s$  zu lösen, auch  $m$  mal die Dgl  $L(y) = s_k$  lösen und erhält die Lösung von  $L(y) = s$  durch Superposition der Einzelergebnisse.

#### Beispiel 8.39

Gesucht ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 9y = 4x^2 + 3e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Diese Dgl hat als Störfunktion eine Linearkombination der beiden Funktionen

$$s_1(x) := x^2, \quad s_2(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (i) Partikuläre Lösung für  $s_1$ :

$$y_{p1}(x) := ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{2}$$

- (ii) Partikuläre Lösung für  $s_2$ :

$$y_{p2}(x) := d \cdot e^{-x} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{1}{3}$$

Eine partikuläre Lösung der Ausgangs-Dgl lautet daher

$$y_p(x) = 4 \cdot y_{p1}(x) + 3 \cdot y_{p2}(x) = 2x^2 + 0x - 2 + e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Im folgenden sollen drei Verfahren zum Auffinden einer partikulären Lösung einer linearen inhomogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung vorgestellt werden. Das *Grundlösungsverfahren* ist auf sehr viele Typen von Inhomogenitäten anwendbar, erfordert aber einen hohen Rechenaufwand und als Voraussetzung auch konstante Koeffizienten der Dgl. Die beiden anderen Verfahren – *Variation der Konstanten* und *Störgliedansatz* – haben einen kleineren Anwendungsbe- reich, der Aufwand ist dafür jedoch weitaus geringer. Dennoch umfassen sie aber fast alle in der Praxis vorkommenden Fälle.

### 8.3.4.2 Grundlösungsverfahren

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $s \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ . Seien  $\xi \in \mathcal{I}$  und  $g$  diejenige Lösung der homogenen Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten)

$$L(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0 \quad (x \in \mathcal{I}, a_k \in \mathcal{C} \text{ geeignet}, a_n = 1),$$

welche den Bedingungen

$$g(\xi) = g'(\xi) = \dots = g^{(n-2)}(\xi) = 0 \quad , \quad g^{(n-1)}(\xi) = 1$$

genügt.

Dann ist die Funktion

$$y_p(x) := \int_{\xi}^x g(x + \xi - t) s(t) dt \quad (x \in \mathcal{I})$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

$$L(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = s(x) \quad (x \in \mathcal{I}, a_k \in \mathcal{C} \text{ geeignet}).$$

#### Bemerkung

Im Fall  $\xi = 0$  lautet die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \int_0^x g(x-t) s(t) dt =: (g * s)(x) \quad (x \in \mathcal{I}),$$

man bezeichnet sie als *Faltung* der beiden Funktionen  $g$  und  $s$ : eine partikuläre Lösung erhält man somit als Faltung der Inhomogenität mit der Grundlösung.

*Beweis*

Nach Satz 8.7 existiert die Funktion  $g$ .  $y_p$  wird nach der Leibniz'schen Regel für die Differentiation von Integralen mit Parametern differenziert, und man erhält

$$\begin{aligned}
 y_p'(x) &= g(\xi)s(x) + \int_{\xi}^x g'(x + \xi - t)s(t) dt \\
 &\stackrel{(g(\xi)=0)}{=} \int_{\xi}^x g'(x + \xi - t)s(t) dt, \\
 y_p''(x) &= g'(\xi)s(x) + \int_{\xi}^x g''(x + \xi - t)s(t) dt \\
 &\stackrel{(g'(\xi)=0)}{=} \int_{\xi}^x g''(x + \xi - t)s(t) dt, \\
 &\vdots \\
 y_p^{(n)}(x) &= g^{(n-1)}(\xi)s(x) + \int_{\xi}^x g^{(n)}(x + \xi - t)s(t) dt \\
 &\stackrel{(g^{(n-1)}(\xi)=1)}{=} s(x) + \int_{\xi}^x g^{(n)}(x + \xi - t)s(t) dt.
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die linke Seite der inhomogenen Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 L(y_p) &= \sum_{k=0}^n a_k y_p^{(k)} \\
 &\stackrel{(a_n=1)}{=} s(x) + \sum_{k=0}^n a_k \int_{\xi}^x g^{(k)}(x + \xi - t)s(t) dt \\
 &= s(x) + \int_{\xi}^x \left( \sum_{k=0}^n a_k g^{(k)}(x + \xi - t) \right) s(t) dt \\
 &= s(x),
 \end{aligned}$$

da  $g$  im Intervall  $\mathcal{I}$  nach Voraussetzung die homogene Dgl löst.

**Beispiel 8.40** Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (\langle x, y, y', y'' \rangle \in (0, \pi) \times \mathbb{R}^3).$$

Diese Dgl zweiter Ordnung hat konstante Koeffizienten. Das charakteristische Polynom  $p$  dieser Dgl,  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , hat die beiden Nullstellen  $i$  und  $-i$ , und daher hat diese Dgl das reelle Fundamentalsystem  $\{\sin x, \cos x\}$ . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = A \cos x + B \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Wahl  $\xi = 0$  ist nicht möglich, da die Störfunktion an dieser Stelle nicht definiert ist. Gewählt werde  $\xi = \frac{\pi}{2}$ .  $A$  und  $B$  sind nun so zu wählen, daß gilt:  $g(\xi) = 0$ ,  $g'(\xi) = 1$ . Das wird erreicht durch  $A = -1$ ,  $B = 0$ :

$$g(x) = -\cos x \quad (x \in (0, \pi)).$$

Damit erhält man die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_{\xi}^x g\left(x + \frac{\pi}{2} - t\right) \frac{1}{\sin t} dt = - \int_{\xi}^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - t\right) \frac{1}{\sin t} dt \\ &= - \int_{\xi}^x \cos\left(x - t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\sin t} dt = \int_{\xi}^x \sin(x - t) \frac{1}{\sin t} dt \\ &= \int_{\xi}^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \frac{1}{\sin t} dt = \sin x \int_{\xi}^x \frac{\cos t}{\sin t} dt - \cos x \int_{\xi}^x dt \\ &= \sin x \cdot \ln |\sin t| \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^x - \cos x \cdot t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^x \\ &= \sin x \cdot \ln |\sin x| - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x \quad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der betrachteten Dgl im Intervall  $\mathcal{I} = (0, \pi)$  ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= A \cos x + B \sin x + \sin x \cdot \ln |\sin x| - x \cos x \quad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$

### 8.3.4.3 Variation der Konstanten

Kennt man ein Fundamentalsystem  $\{u_1, \dots, u_n\}$  des Lösungsraums der homogenen Gleichung, so erhält man eine spezielle Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung  $L(y) = s(x)$  durch den Ansatz (*Variation der Konstanten*)

$$y_p(x) := \sum_{k=1}^n C_k(x) \cdot u_k(x) \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Differenziert man diese Ansatzfunktion, so erhält man für  $x \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}
 y_p'(x) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n C_k'(x) \cdot u_k(x)}_{\stackrel{!}{=} 0} + \sum_{k=1}^n C_k(x) \cdot u_k'(x), \\
 y_p''(x) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n C_k''(x) \cdot u_k(x)}_{\stackrel{!}{=} 0} + \sum_{k=1}^n C_k(x) \cdot u_k''(x), \\
 &\vdots \\
 y_p^{(n)}(x) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n C_k^{(n)}(x) \cdot u_k^{(n-1)}(x)}_{\stackrel{!}{=} \frac{s(x)}{a_n(x)}} + \sum_{k=1}^n C_k(x) \cdot u_k^{(n)}(x).
 \end{aligned}$$

Um obige ( $\stackrel{!}{=} 0$  bzw.  $\stackrel{!}{=} s(x)/a_n(x)$ ) Forderungen zu erfüllen, müssen die „Konstanten“  $C_k'(\cdot)$  im Intervall  $\mathcal{I}$  daher dem folgenden linearen Gleichungssystem genügen:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{s(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante dieses linearen Gleichungssystems die (nicht verschwindende) Wronski-Determinante ist, sind die Funktionen  $C_1', \dots, C_n'$  eindeutig bestimmt, und daraus lassen sich die Funktionen  $C_1, \dots, C_n$  sukzessive durch Integration berechnen. Mit ihnen gilt dann

$$\begin{aligned}
 a_n(x)y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p &= \\
 \sum_{k=1}^n C_k(x) \underbrace{\left[ a_n(x)u_k^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u_k^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)u_k(x) \right]}_0 + a_n(x) \cdot \frac{s(x)}{a_n(x)} &= \\
 &= s(x),
 \end{aligned}$$

da jedes  $u_k$  eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Also ist  $y_p$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

### Beispiel 8.41

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^2 \quad (x > 0).$$

Die beiden Lösungen  $u_1, u_2$  der homogenen Gleichung, definiert durch

$$u_1(x) := x \quad \text{und} \quad u_2(x) := \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

bilden ein Fundamentalsystem, da ihre Wronski-Determinante nirgends verschwindet:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \neq 0 \quad (x > 0).$$

Der durchzuführende Ansatz lautet daher

$$y_p(x) := C_1(x) \cdot x + C_2(x) \cdot \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

er liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cdot x + C_2'(x) \cdot \frac{1}{x} &= 0 \\ C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{x^2}{1} = x^2. \end{aligned}$$

Man erhält daraus (Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\frac{1}{x}$ , danach Addition beider Gleichungen bzw. Multiplikation der zweiten Gleichung mit  $x$ , danach Subtraktion beider Gleichungen)  $C_1'(x) = \frac{x^2}{2}$ ,  $C_2'(x) = -\frac{x^4}{2}$ , und daraus durch Integration

$$C_1(x) = \frac{x^3}{6} \quad \text{und} \quad C_2(x) = -\frac{x^5}{10} \quad (x > 0).$$

Somit ist

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} \cdot x - \frac{x^5}{10} \cdot x^{-1} = \frac{x^4}{15} \quad (x > 0)$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\phi(x) = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{x^4}{15} \quad (x > 0).$$

### Bemerkung

Für die auf diese Weise gefundene spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung läßt sich auch eine Formel angeben (vgl. (8.12) für den Fall  $n = 1$ ):

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) (-1)^{n+k} \cdot \int_{\xi}^x \frac{s(t)}{W(t)} W_k(t) dt \quad (x \in \mathcal{I}). \quad (8.17)$$

Hierbei ist  $W(t)$  die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems und  $W_k(t)$  die Wronski-Determinante der  $(n-1)$  Funktionen  $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n$ , jeweils an der Stelle  $t \in \mathcal{I}$ .

Im Fall  $n = 2$  lautet (8.17):

$$y_p(x) = -u_1(x) \int_{\xi}^x \frac{s(t)}{W(t)} u_2(t) dt + u_2(x) \int_{\xi}^x \frac{s(t)}{W(t)} u_1(t) dt \quad (x \in \mathcal{I}).$$

#### 8.3.4.4 Störgliedansatz

Der *Störgliedansatz* läßt sich genauso durchführen wie im Fall einer Dgl erster Ordnung, die Ansatzfunktion muß lediglich, entsprechend der Ordnung  $n$  der vorliegenden Dgl, häufiger differenziert werden. Auch hier funktioniert dieses Verfahren so gut wie ausschließlich für den Fall einer linearen Dgl mit konstanten Koeffizienten.

Bei diesem Ansatz kann man sich wieder an einer Tabelle (vgl. auch Tabelle 8.1, p. 238) orientieren, welche aussagt, daß der durchzuführende Ansatz für die unbekannte Funktion im wesentlichen dieselbe Gestalt aufzuweisen hat wie diejenige der zugrundeliegenden Störfunktion selbst.

#### Bemerkung

Dieser Ansatz funktioniert allerdings nur dann, wenn die Störfunktion selbst *nicht* Lösung der homogenen Gleichung ist. Wenn das der Fall ist, so müssen die betreffenden Lösungsansätze jeweils mit dem Faktor  $x^r$  multipliziert werden. Dabei gilt eine Fallunterscheidung für den sog. *Resonanzfall*, s. Tabelle 8.2:

Ist die angegebene Zahl  $g$  jeweils eine  $r$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen Dgl, so ist der vorgegebene Ansatz für die partikuläre Lösung mit  $x^r$  zu multiplizieren. Im Resonanzfall enthält also die Störfunktion selbst eine oder mehrere Fundamentallösungen der homogenen Dgl.

#### Beispiel 8.42

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = \sin x + \sinh 2x = \sin x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(i) Homogene Gleichung

Charakteristische Gleichung:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Gleichung hat die zweifache Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$  und damit das reelle Fundamentalsystem

$$\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}.$$

(ii) Inhomogene Gleichung

Mit dem Superpositionsprinzip (Satz 8.10) lassen sich die partikulären Lösungen für die einzelnen Störglieder  $s_i$  suchen und zum Schluß die erhaltenen Einzellösungen linear kombinieren.

Störfunktion $s$	Ansatz $y_p$	Resonanzfall
$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$	$r_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$	$g = 0$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$b \cdot e^{\alpha x}$	$g = \alpha$
$a \cdot \sin \beta x$ ∨ $a \cdot \cos \beta x$	$b_1 \sin \beta x + b_2 \cos \beta x$	$g = \pm i\beta$
$e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$	$e^{\alpha x} \cdot r_n(x)$	$g = 0$
$p_n(x) \cdot \sin \beta x$ ∨ $= p_n(x) \cdot \cos \beta x$	$r_n(x) \cdot \sin \beta x + s_n(x) \cdot \cos \beta x$	$g = 0$
$a \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ ∨ $a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$	$e^{\alpha x} [b_1 \sin \beta x + b_2 \cos \beta x]$	$g = \alpha \pm i\beta$
$e^{\alpha x} [p_n(x) \cdot \sin \beta x + q_n(x) \cos \beta x]$	$e^{\alpha x} [r_n(x) \cdot \sin \beta x + s_n(x) \cdot \cos \beta x]$	$g = 0$

Tabelle 8.2: Störgliedansatz mit Resonanzfall

(a) Partikuläre Lösung für  $s_1(x) = \sin x$ :

$$\begin{aligned} y_{p1}(x) &= a \cdot \cos x + b \cdot \sin x \\ &= -\frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(b) Partikuläre Lösung für  $s_2(x) = e^{2x}$ :

$$y_{p2}(x) = c \cdot e^{2x} = \frac{1}{16} e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(c) Partikuläre Lösung für  $s_3(x) = e^{-2x}$ :

Diese Inhomogenität ist selbst eine Lösung der homogenen Dgl. Nicht nur das, auch  $x \cdot e^{-2x}$  ist eine Lösung der homogenen Dgl, weil  $-2$  eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Daher muß der Ansatz korrekt lauten (Resonanzfall  $g = \alpha = 2$ , Tabelle 8.2):

$$y_{p3}(x) = d \cdot x^2 \cdot e^{-2x} = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Die partikuläre Gesamtlösung ergibt sich sodann als Superposition der Einzellösungen:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{i=1}^3 c_i \cdot y_{p_i}(x) \\ &= -\frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x + \frac{1}{32} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Zusammen mit  $y_h(x) = A \cdot e^{-2x} + B \cdot x e^{-2x}$  erhält man die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl in der Form ( $x \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \phi(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= A \cdot e^{-2x} + B \cdot x e^{-2x} - \frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x + \frac{1}{32} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

### 8.3.5 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (Schwingungen)

In der Physik und Elektrotechnik besitzt eine Differentialgleichung eine übertragende Bedeutung, und zwar die sog. *Schwingungsgleichung*. Dabei handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einer Inhomogenität (*Störfunktion*, *Erregerfunktion*, *Eingangsfunktion*), welche in der Regel zwei Formen annehmen kann:

(a) konstante äußere Erregung,

(b) periodische (harmonische) äußere Erregung.

Von der Lösungstheorie und vom Verfahren her gesehen, sie zu lösen, ist diese Differentialgleichung nichts Neues. Aufgrund ihrer Bedeutung für viele Anwendungen soll sie hier jedoch ausführlich diskutiert werden.

### 8.3.5.1 Mechanische und elektrische Modelle

#### (1) Mechanische Schwingung

Viele mechanische Schwinger lassen sich auf das in Abb. 8.23 dargestellte System zurückführen:

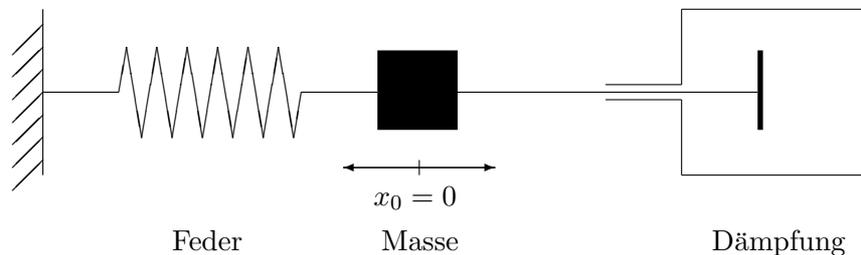


Abbildung 8.23: Modell eines mechanischen Schwingensystems

- Die schwingende Masse ist mit einer gespannten Feder verbunden, deren Rückstellkraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist (*Hooke'sches Gesetz*).
- Die Bewegung wird durch eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft gehemmt (*Flüssigkeits- oder Luftdämpfung; Stoßdämpfer im Kraftfahrzeug*).

Insgesamt wirken in dem System die folgenden Kräfte:

- Trägheitskraft*  $m \frac{d^2x}{dt^2}$  mit der Masse  $m$  und der Beschleunigung  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ;
- Federkraft*  $cx$  mit der Federkonstante  $c$  und der Auslenkung  $x$ ;
- Dämpfungskraft*  $b \frac{dx}{dt}$  mit der Dämpfungskonstante  $b$  und der Geschwindigkeit  $\frac{dx}{dt}$ .

Liegt keine äußere Kraft vor, so ist die Summe aller dieser Kräfte stets Null. Nach dem Newton'schen Grundgesetz

$$m\ddot{x}(t) = F(t) = F_{\text{Hooke}} + F_{\text{Dämpfung}} = -cx(t) - b\dot{x}(t)$$

erhält man die Differentialgleichung der *freien mechanischen Schwingung*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (8.18)$$

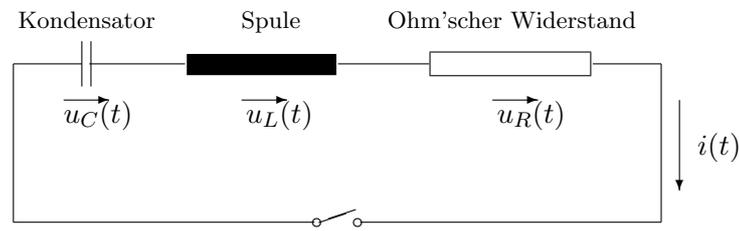


Abbildung 8.24: Elektrischer Reihenschwingkreis

## (2) Elektrischer Reihenschwingkreis

Der Kondensator in Abb. (8.24) sei geladen, und zum Zeitpunkt  $t = 0$  werde der Schalter geschlossen. Dann liegt eine Masche vor, in der nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz die Summe aller Spannungen Null ist. Gesucht ist der Maschenstrom  $i(t)$  zur Zeit  $t \geq 0$ ,  $i(0) = 0$ .

An den einzelnen Maschenelementen liegen folgende zeitabhängige Spannungen an:

- (i) an der Spule:  $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}(t)$
- (ii) am Ohm'schen Widerstand:  $u_R(t) = R \cdot i(t)$
- (iii) am Kondensator:  $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot q(t)$

Aus der Maschenregel

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

erhält man wegen  $q(t) = q(0) + \int_0^t i(s) ds$  eine sog. *Integro-Differentialgleichung* für den Leiterstrom  $i$ :

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \left( q(0) + \int_0^t i(s) ds \right) = 0.$$

Um das Integral zu beseitigen, wird diese Gleichung nach der Zeit  $t$  differenziert, und man erhält die Differentialgleichung des Reihenschwingkreises für den gesuchten Leiterstrom  $i$  ( $i_C = i_R = i_L =: i$ ):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (8.19)$$

## (3) Elektrischer Parallelschwingkreis

Der Kondensator in Abb. (8.25) sei geladen, und zum Zeitpunkt  $t = 0$  werde der Schalter geschlossen. Nach dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz ist am Knoten in der Mitte der waagerechten oberen Leitung die Summe aller Ströme Null. Gesucht ist die Maschenspannung  $u(t)$  zur Zeit  $t \geq 0$ ,  $u(0) = 0$ .

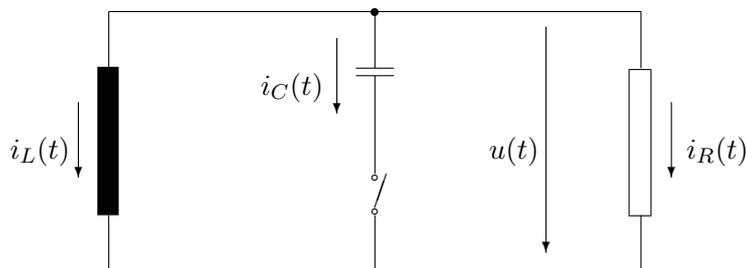


Abbildung 8.25: Elektrischer Parallelschwingkreis

An den einzelnen Maschenelementen haben die Teilströme die folgenden Werte:

- (i) im Kondensator:  $i_C(t) = C \cdot \frac{du}{dt}(t)$
- (ii) im Ohm'schen Widerstand:  $i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u(t)$
- (iii) in der Spule:  $i_L(t) = \frac{1}{L} \left( u(0) + \int_0^t u(s) ds \right)$

Aus der Knotenregel

$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

erhält man mit den oben erhaltenen Werten für die einzelnen Teilströme wieder eine Integro-Differentialgleichung für die Maschenspannung  $u$ :

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u + \frac{1}{L} \left( u(0) + \int_0^t u(s) ds \right) = 0.$$

Wieder wird zur Beseitigung des Integrals diese Gleichung nach der Zeit  $t$  differenziert, und man erhält die Differentialgleichung des Parallelschwingkreises für die gesuchte Maschenspannung  $u$  ( $u_C = u_R = u_L =: u$ ):

$$C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = 0. \quad (8.20)$$

#### (4) Allgemeines Modell

Die drei Gleichungen der drei physikalischen Modelle stimmen formal überein. Mit den reellen Koeffizienten  $a, b, c$  lautet die Differentialgleichung einer beliebigen freien gedämpften Schwingung

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0. \quad (8.21)$$

In Tabelle 8.3 sind die Formelzeichen für die einzelnen Anwendungsgebiete noch einmal übersichtsartig aufgelistet, zusammen mit der später eingeführten *Abklingkonstante* und der *Kennkreisfrequenz*.

	Mathematik	Mechanik	Reihenkreis	Parallelkreis
Koeffizient	$a$	$m$	$L$	$C$
Koeffizient	$b$	$b$	$R$	$1/R$
Koeffizient	$c$	$c$	$1/C$	$1/L$
Lösungsfunktion	$x(\cdot)$	$x(\cdot)$	$i(\cdot)$	$u(\cdot)$
Abklingkonstante $\delta$	$b/(2a)$	$b/(2m)$	$R/(2L)$	$(1/R)/(2C)$
Kennkreisfrequenz $\omega$	$\sqrt{c/a}$	$\sqrt{c/m}$	$\sqrt{1/(LC)}$	$\sqrt{1/(LC)}$

Tabelle 8.3: Tabelle der Konstanten der Schwingungsgleichung

### 8.3.5.2 Freie Schwingung

Die Differentialgleichung

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0 \quad (8.22)$$

ist eine homogene lineare Dgl zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Lösungen von (8.22) sind Elemente des Nullraumes der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto Lx := a \ddot{x} + b \dot{x} + c x \end{aligned}$$

und bilden einen zweidimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  (Satz 8.7). Man kennt damit *jede* Lösung von (8.22), wenn man zwei linear unabhängige Lösungen hat, also ein Fundamentalsystem. Diese findet man mit Hilfe des Exponentialansatzes, welcher auf die bekannte charakteristische Gleichung führt:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz:} \quad x(t) &:= e^{\lambda t} && (t \in \mathbb{R}) \\ \longrightarrow &(a\lambda^2 + b\lambda + c) e^{\lambda t} = 0 && (t \in \mathbb{R}) \\ \longrightarrow &\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} =: -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (8.23)$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\delta &:= \frac{b}{2a} && \text{Abklingkonstante,} \\ \omega_0 &:= \sqrt{\frac{c}{a}} && \text{Kennkreisfrequenz,} \\ d &:= \frac{b}{\sqrt{ac}} && \text{Verlustfaktor.}\end{aligned}$$

Abhängig davon, ob der Radikand in (8.23)

- positiv,
- Null oder
- negativ

ist, erhält man drei voneinander wesentlich verschiedene Lösungen.

**Freie aperiodische Bewegung (Kriechfall)** Wenn bei der mechanischen Schwingung eine große Dämpfung oder im elektrischen Schwingkreis ein entsprechender Ohm'scher Widerstand vorhanden ist, so gilt

$$\delta > \omega_0 \quad \longleftrightarrow \quad b > 2\sqrt{ac} \quad \longleftrightarrow \quad d = \frac{b}{\sqrt{ac}} > 2.$$

Dann sind beide Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  von (8.23) reell und negativ wegen

$$\delta = |\delta| = \sqrt{\delta^2} > \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} > 0.$$

Die Lösung der Dgl ist dann eine Linearkombination zweier Exponentialfunktionen mit reellen Exponenten:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

welche für  $t > 0$  negativ sind. Für große Zeiten  $t$  nähert sich jede Lösungsfunktion asymptotisch der Nullfunktion:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0;$$

man sagt, die Nullfunktion sei *asymptotisch stabil*.

Aus den gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\text{Anfangsamplitude} \quad x_0 &:= x(0) \\ \text{Anfangsgeschwindigkeit} \quad v_0 &:= v(0) = \dot{x}(0)\end{aligned}$$

werden die beiden Integrationskonstanten  $A_1$  und  $A_2$  berechnet:

$$A_1 = -\frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Qualitativ erhält man die folgenden Lösungskurven, s. Abb. 8.26.

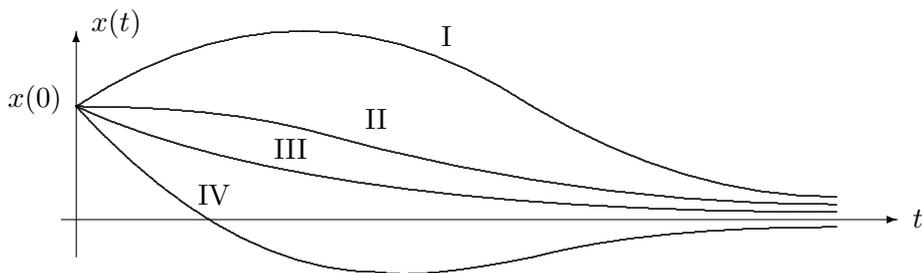


Abbildung 8.26: Qualitativ verschiedene Lösungen der homogenen Schwingungsgleichung im Fall großer Dämpfung

- I  $\dot{x}(0) > 0$
- II  $\dot{x}(0) = 0$
- III  $\dot{x}(0) < 0$  ,  $|\dot{x}(0)| \leq x_0(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})$
- IV  $\dot{x}(0) < 0$  ,  $|\dot{x}(0)| > x_0(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})$

Das Charakteristische an allen diesen Graphen ist, daß die Dämpfung so stark ist, daß keine Schwingungen zustande kommen. Anwendungen in der Praxis: Stoßdämpfer, der besser „Schwingungsdämpfer“ heißen sollte.

**Aperiodischer Grenzfall** Ist  $\delta = \omega_0$ , so fallen beide Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  von (8.23) zusammen:

$$\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta.$$

Die allgemeine Lösung der Dgl lautet dann

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Funktionsgraphen der zugehörigen Lösungsfunktionen sind denjenigen des Falles III ähnlich; für  $t \rightarrow \infty$  gehen sie „optimal“ gegen Null.

Anwendung in der Praxis: Waage

**Freie gedämpfte Schwingung** Wenn  $\delta < \omega_0$  ist, also nur eine schwache mechanische Dämpfung bzw. ein entsprechender Ohm’scher Widerstand vorhanden ist, dann besitzt die charakteristische Gleichung zwei verschiedene zueinander konjugiert komplexe Lösungen, s. (8.23):

$$\delta < \omega_0 \quad \longleftrightarrow \quad b < 2\sqrt{ac} \quad \longleftrightarrow \quad d = \frac{b}{\sqrt{ac}} < 2,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =: -\delta \pm i\omega_d, \quad (8.24)$$

mit

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{Eigenkreisfrequenz.}$$

Die allgemeine Lösung von (8.22) lautet daher

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\
 &= e^{-\delta t} [A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}] \\
 &= e^{-\delta t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \\
 &=: e^{-\delta t} [B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t] \quad (t \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Man kann also wahlweise ein komplexes - oder ein reelles Fundamentalsystem benutzen. Dabei gilt:

**Beh.**

Die Konstanten  $B_1 = A_1 + A_2$  und  $B_2 = i(A_1 - A_2)$  sind genau dann reell, wenn  $A_1$  und  $A_2$  zueinander konjugiert komplex sind.

*Bew.* klar.

**Beh.**

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}} x(t) \in \mathbb{R} \quad \iff \quad A_1 = \overline{A_2}$$

*Bew.*

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\delta t} [A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}] & (t \in \mathbb{R}), \\
 \overline{x(t)} &= e^{-\delta t} [\overline{A_1} e^{-i\omega_d t} + \overline{A_2} e^{i\omega_d t}] & (t \in \mathbb{R}),
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} x(t) = \overline{x(t)} \quad \iff \quad A_1 = \overline{A_2}.$$

### Aufgabe

Warum genau funktioniert der letzte Schluß?

### Bemerkung

Es gibt noch beliebig viele andere Fundamentalsysteme, aber diese sind besonders einfach; vgl. dazu Abb. 8.27 und die entsprechende Argumentation bei komplexen Fourier-Reihen.

Aus den gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 \text{Anfangsamplitude} \quad x_0 &:= x(0) = B_1 \\
 \text{Anfangsgeschwindigkeit} \quad v_0 &:= v(0) = \dot{x}(0) = -\delta B_1 + \omega_d B_2
 \end{aligned}$$

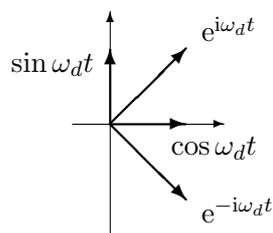


Abbildung 8.27: Basistransformation in einem zweidimensionalen Funktionenraum

erhält man die Lösungsfunktion:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta t} \left[ \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right] \\ &=: A e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi), \end{aligned}$$

wobei für die Polarkoordinaten gilt:

$$A := \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\omega_d^2} (v_0 + \delta x_0)^2}, \quad \tan \phi := \frac{\omega_d x_0}{v_0 + \delta x_0}$$

### Bemerkung

(i) Im Spezialfall  $x(0) = 0$  folgt

$$A = \frac{v_0}{\omega_d}, \quad \phi = 0.$$

(ii) Die Amplitude und der Nullphasenwinkel hängen i.a. sowohl von den Eigenschaften des Schwingkreises als auch von den Anfangsbedingungen ab.

Demgegenüber hängen die Abklingkonstante  $\delta$  und die Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$  *nur* von den Eigenschaften des Schwingkreises selbst ab; sie heißen daher auch *Systemkonstanten*.

Qualitativ erhält man die folgende Lösungskurve einer exponentiell gedämpften Schwingung, s. Abb. 8.28.

Die *Schwingungsdauer*  $T_d$  ergibt sich aus der Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$  nach der Beziehung

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}.$$

Der Quotient zweier Amplituden nach einer vollen Periode,

$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \frac{A e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi)}{A e^{-\delta t} e^{-\delta T_d} \sin(\omega_d t + 2\pi + \phi)} = e^{\delta T_d},$$

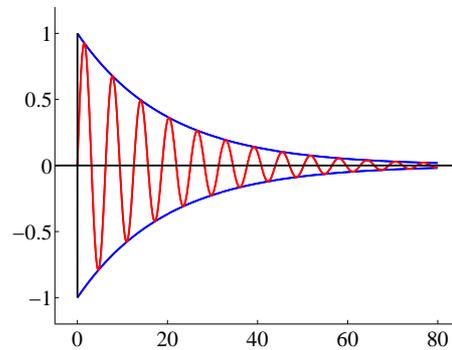


Abbildung 8.28: Exponentiell gedämpfte freie Schwingung

liefert ein Maß für das Abklingverhalten der Schwingung. Das Produkt

$$\Lambda := \delta T_d$$

ist demzufolge ein Maß für die Dämpfung einer Schwingung. Es heißt *logarithmisches Dekrement*.

**Freie ungedämpfte Schwingung** Für  $\delta = 0$  ist keine Dämpfung vorhanden. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} &= 1 & (t \in \mathbb{R}) \\ \omega_d &= \omega_0, \end{aligned}$$

und man erhält man die Gleichung der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{c}{a} x = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

mit der Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

### 8.3.5.3 Erzwungene Schwingung

Wirkt auf die mechanische Schwingung eine äußere Kraft oder wird in die elektrischen Schwingkreise ein Generator geschaltet, so entstehen *erzwungene Schwingungen*:

Die Summe der inneren Kräfte (bzw. Ströme bzw. Spannungen) ist nun nicht mehr gleich Null, sondern gleich der von außen eingeprägten Kraft (bzw. dem von außen eingeprägten Strom bzw. der von außen eingeprägten Spannung).

Daher ist die Dgl der erzwungenen Schwingung eine lineare *inhomogene* Dgl zweiter Ordnung:

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = f(t). \quad (8.25)$$

Die Inhomogenität  $f$  bezeichnet man in der

- Mathematik als *Störfunktion*;
- Physik als *Erregerschwingung*, falls sie periodisch ist;
- Regelungstechnik als *Eingangsfunktion*.

Vorherrschend treten zwei Arten von Störfunktionen auf:

(1) Sprungfunktion: 
$$f(t) := \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \text{const.} & , t \geq 0 \end{cases}$$

(2) Periodische Erregerschwingung

**Konstante äußere Erregung** Die Differentialgleichung

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = F_0$$

hat die partikuläre Lösung  $x_p(t) := \frac{F_0}{c}$  ( $t \geq 0$ ). Für die Lösung der homogenen Gleichung gilt:

(i) bei starker Dämpfung:

$$x_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (t \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 < 0 \text{ geeignet})$$

(ii) bei schwacher Dämpfung:

$$x_h(t) = e^{-\delta t} [A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t] \quad (t \geq 0)$$

Mit den beiden Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 1$$

ergeben sich für den Bewegungsablauf die in Abb. 8.29 und 8.30 gezeichneten Kurven.

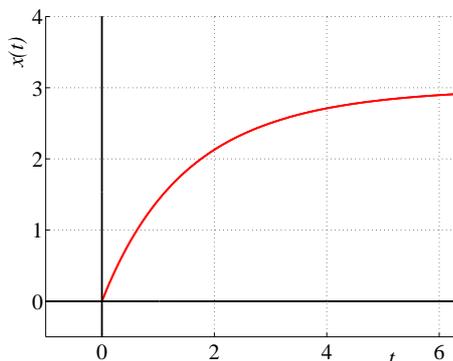


Abbildung 8.29: Stark gedämpfte erzwungene Schwingung mit einer konstanten Erregung

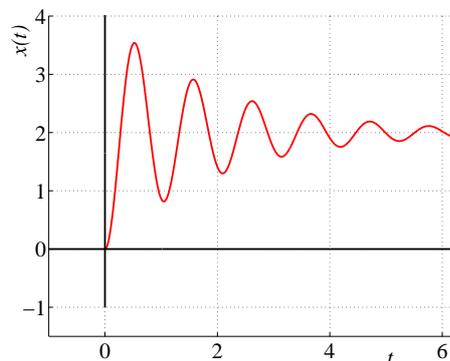


Abbildung 8.30: Schwach gedämpfte erzwungene Schwingung mit einer konstanten Erregung

**Periodische äußere Erregung** Wieder wird eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gesucht, welche zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung addiert werden muß (Superposition). Praktisch ist immer eine gewisse Dämpfung vorhanden, daher wird die Lösung der homogenen Gleichung nach einer Anfangszeit betragsmäßig immer kleiner, und es obliegt dem Benutzer zu entscheiden, ab welchem Zeitpunkt er deren Anteil als „vernachlässigbar“ einstuft.

Solange beide Lösungsanteile „wirksam“ sind, spricht man von einem *Einschwingvorgang*. Nach dem Einschwingen wirkt nur noch die partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl, diese wird als *stationäre Lösung* bezeichnet. Nur diese wird im folgenden untersucht.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Dgl

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = F_0 \sin \omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

erfolgt der Störgliedansatz

$$x_p(t) := A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Durch Einsetzen in die Dgl und Koeffizientenvergleich werden die unbekanntenen Koeffizienten  $A$  und  $B$  bestimmt:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \dot{x}_p(t) &= -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ \ddot{x}_p(t) &= -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl führt auf

$$(-a\omega^2 A + b\omega B + cA) \cos \omega t + (-a\omega^2 B - b\omega A + cB - F_0) \sin \omega t = 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

und ein Koeffizientenvergleich (warum darf dieser durchgeführt werden?) liefert ein lineares Gleichungssystem für  $A$  und  $B$ :

$$\begin{aligned} (c - a\omega^2)A + b\omega B &= 0 \\ -b\omega A + (c - a\omega^2)B &= F_0. \end{aligned}$$

Mit den bekannten Abkürzungen  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ ,  $\delta = \frac{b}{2a}$  erhält man daraus nach Division durch  $a$ :

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\delta\omega B &= 0 \\ -2\delta\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B &= \frac{F_0}{a}.\end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante dieses linearen Gleichungssystems ist gegeben durch

$$\Delta := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2;$$

sie ist strikt positiv für  $\delta, \omega > 0$  und Null für  $\delta = 0$  (keine Dämpfung) und  $\omega = \omega_0$ . Im Falle der eindeutigen Lösbarkeit kann das lineare Gleichungssystem z. B. mit der Cramer'schen Regel gelöst werden:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2\delta\omega \\ F_0/a & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2\delta\omega \\ -2\delta\omega & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix}} = -\frac{2\delta\omega F_0/a}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}, \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 0 \\ -2\delta\omega & F_0/a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2\delta\omega \\ -2\delta\omega & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0/a}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}.\end{aligned}$$

Diese partikuläre Lösung  $x_p$  läßt sich natürlich auch auf die Form

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = X_0 \sin(\omega t + \psi) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (8.26)$$

umrechnen. Hierbei ist (Additionstheorem für  $\sin(\omega t + \psi)$ ,  $\psi \in [0, 2\pi)$  geeignet)

$$\begin{aligned}X_0 &= \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \\ \tan \psi &= \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{X_0 \sin \psi}{X_0 \cos \psi} = \frac{A}{B} = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.\end{aligned}$$

Welches Vorzeichen hat der Winkel  $\psi$  in (8.26)? Dazu die folgende Betrachtung:

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \frac{A}{X_0} = -\frac{1}{X_0} \cdot \frac{2\delta\omega \cdot (F_0/a)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \\ &= -\frac{1}{X_0} \cdot \frac{2\delta\omega}{(F_0/a)} \cdot \frac{(F_0/a)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \\ &= -\frac{2\delta\omega}{(F_0/a)} \cdot X_0 < 0 \\ \cos \psi &= \frac{B}{X_0} = -\frac{1}{X_0} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(F_0/a)} \cdot \frac{(F_0/a)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \\ &= -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(F_0/a)} \cdot X_0 \begin{matrix} < 0 \\ \geq 0 \end{matrix}\end{aligned}$$

je nachdem, ob  $\omega < \omega_0$  oder  $\omega \geq \omega_0$  ist.

Wegen  $\sin \psi < 0$  ist  $\psi \in (\pi, 2\pi)$ , also  $\psi$  ein Winkel im dritten oder vierten Quadranten. Zu Beginn, für kleine Winkel  $\omega < \omega_0$ , ist  $\cos \psi < 0$  und damit  $\psi$  im vierten Quadranten und wechselt für Winkel  $\omega \geq \omega_0 \Leftrightarrow \cos \psi \geq 0$  in den dritten.

Die erzwungene Schwingung bleibt damit um den Winkel  $\psi$  hinter der anregenden Schwingung zurück. Diesem trägt man optisch dadurch Rechnung, daß man für  $\psi$  nicht, wie gewohnt und oben erwähnt,  $\psi \in (\pi, 2\pi)$  wählt sondern  $\psi \in (-\pi, 0)$ , s. Abb. 8.33. Somit gilt

$$\psi = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & , \quad 0 \leq \omega < \omega_0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad \omega = \omega_0 \\ \arctan\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \pi & , \quad \omega > \omega_0 \end{cases}$$

### Definition 8.13

- (i) Die funktionelle Abhängigkeit der Amplitude  $X_0$  und des Phasenwinkels  $\psi$  der erregten Schwingung  $x_p$  von der Erregerfrequenz  $\omega$  bezeichnet man als *Frequenzgang* der betreffenden Größe.
- (ii) Der Frequenzgang der Amplitude heißt auch *Resonanzfunktion* oder *Vergrößerungsfunktion*.

## Diskussion der Lösung einer periodischen Erregerschwingung

### (1) Frequenzgang der Amplitude

Die Amplitude  $X_0$  ist eine Funktion der Erregerfrequenz  $\omega$ , die entsprechende Funktion werde hier ebenfalls mit  $X_0(\cdot)$  bezeichnet. Als Funktion von  $\omega$  ist sie genau dann maximal, wenn das Quadrat ihres Nenners

$$g(\omega^2) := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2$$

als Funktion von  $\omega^2$  ein Minimum hat:

$$\begin{aligned} g'(\omega^2) &= -2(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \\ g''(\omega^2) &= 2 > 0 \quad (\text{globales Minimum}) \end{aligned}$$

$$g'(\omega^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad \omega = \omega_r := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$\omega_r$  ist reell, wenn  $\omega_0^2 - 2\delta^2 \geq 0$  ist; in diesem Fall hat die Resonanzfunktion  $X_0(\cdot)$  bei  $\omega_r$  ein lokales Maximum, s. Abb. 8.31.

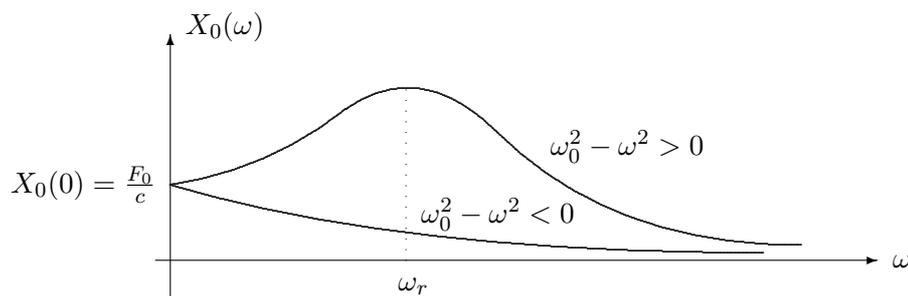


Abbildung 8.31: Resonanzfunktion mit Resonanzfrequenz

**Bemerkung**

- (i) Das System schwingt mit der größtmöglichen Amplitude, wenn die Erregerfrequenz gleich der *Resonanzfrequenz*  $\omega_r$  ist; diesen Sonderfall bezeichnet man als *Resonanzfall*.
- (ii) Bei vorhandener Dämpfung ist die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  stets kleiner als die Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$ :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_d < \omega_0.$$

- (iii) Wann gibt es reelle Resonanzfrequenzen?

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = F_0 \sin \omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad \delta = \frac{b}{2a}$$

Reelle Resonanzfrequenzen treten auf für

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 \geq 0 \quad \iff \quad \sqrt{2ac} \geq b$$

Die Dämpfung  $b$  darf also nicht zu groß werden:

$$\text{mechanisches Modell} \quad : \quad \sqrt{2mc} \geq b$$

$$\text{Reihenschwingkreis} \quad : \quad \sqrt{2\frac{L}{C}} \geq R$$

$$\text{Parallelschwingkreis} \quad : \quad \sqrt{2\frac{C}{L}} \geq \frac{1}{R}$$

- (iv) Komplexe Resonanzfrequenzen, also keine reellen Resonanzphänomene, erhält man für

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 < 0 \quad \iff \quad \sqrt{2ac} < b$$

Dieser Fall bedeutet eine starke Dämpfung  $b$ .

- (v) Für den Fall keiner Dämpfung, also  $\delta = b = 0$ , liegt die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  bei der Kennkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ . Die Amplitude hat bei  $\omega = \omega_r = \omega_0$  einen Pol erster Ordnung, es kommt zur sog. *Resonanzkatastrophe*.

- (vi) In einem schwingenden System liegt die Kennkreisfrequenz  $\omega_0$  und damit die Resonanzfrequenz

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{2ac - b^2}{2a^2}}$$

fest. Die Amplitude wird umso kleiner, je mehr sich die Frequenz  $\omega$  der Erregerschwingung von der Resonanzfrequenz  $\omega_r$  unterscheidet.

### Anwendungen

Frequenzweichen bei elektrodynamischen Lautsprechern, Zahnarztbohrer

### Bemerkung <sup>4</sup>

Ein eindrucksvolles Beispiel für eine Katastrophe, welche anfänglich auch auf das oben beschriebene Resonanzphänomen zurückgeführt worden ist, lieferte der Einsturz der *Tacoma Narrows Bridge* über den Puget Sound bei Tacoma, der Hauptstadt des US-Bundesstaates Washington am 7. November 1940, knapp ein halbes Jahr nach ihrer Fertigstellung im Juli desselben Jahres; s. Abb. 8.32.

Die schlanke Konstruktion der Brücke führte zu einem geringen Gewicht und einer niedrigen Steifigkeit. Zusammen mit einer aerodynamisch ungünstigen Form der Träger und der Fahrbahnverkleidung (Platten anstelle von Stahlträgern) machte das die Brücke sehr windempfindlich: die gesamte Brücke wirkte wie eine Tragfläche, an welcher der Wind oben und unten vorbeiströmte.

Diese Querschnittsform stellt – jedenfalls für ein Bauwerk – ein aerodynamisch ungünstiges Profil dar. Zieht man beispielsweise ein flaches Brett durchs Wasser, so beginnt von einer gewissen Geschwindigkeit an das Brett quer zur Zugrichtung zu schwingen. Wegen der Rückstellkräfte der Aufhängung der Fahrbahn kam es daher zu Ab- und Auftriebskräften, und die Brücke fing an, vertikal zu schwingen.<sup>5</sup>

Schon bei mäßigem Wind bildete sich hinter der Brücke eine sog. *Kármán'sche Wirbelstraße*, deren Wirbelablösungen für diese vertikalen Schwingungen der Brücke verantwortlich gemacht wurden, weshalb sie wegen ihres Auf- und Abschwingens den Spitznamen „Galloping Gertie“ erhielt und zu einem Anziehungspunkt für Touristen wurde. Manche Autofahrer kamen extra zum „Achterbahnfahren“ andere nahmen lieber den zeitaufwendigen Umweg über Olympia im Süden in Kauf, den die Brücke eigentlich ersparen sollte.

Am 7. November 1940 schließlich riß bei nur mäßigem Wind ein Hänge-seil. Dadurch gelangte die Brücke in einen anderen Schwingungsmodus und

<sup>4</sup><http://de.wikipedia.org/Tacoma-Narrows-Brücke>  
<http://www.vibrationdata.com/Tacoma.html>

<sup>5</sup>Das Wehen von Fahnen im Wind oder das „Singen“ von Hochspannungsseilen beruht auf der gleichen Ursache.

fürte jetzt *Torsionsschwingungen* aus, welche darüberhinaus noch *selbst-erregt* waren. Darunter versteht man Schwingungen mit einer kleinen positiven oder sogar negativen Dämpfungskonstante  $b$ , d.h. sie verstärken sich selbst, ohne daß eine periodische äußere Anregung dafür nötig ist. Der kontinuierlich wehende Wind sorgte – ohne eine von außen vorgegebene bestimmte Anregungsfrequenz – dafür, daß sich die Torsionsschwingungen der Brücke immer weiter aufschaukelten. Nach einer dreiviertel Stunde rissen weitere Seile, und die Brücke stürzte ein.

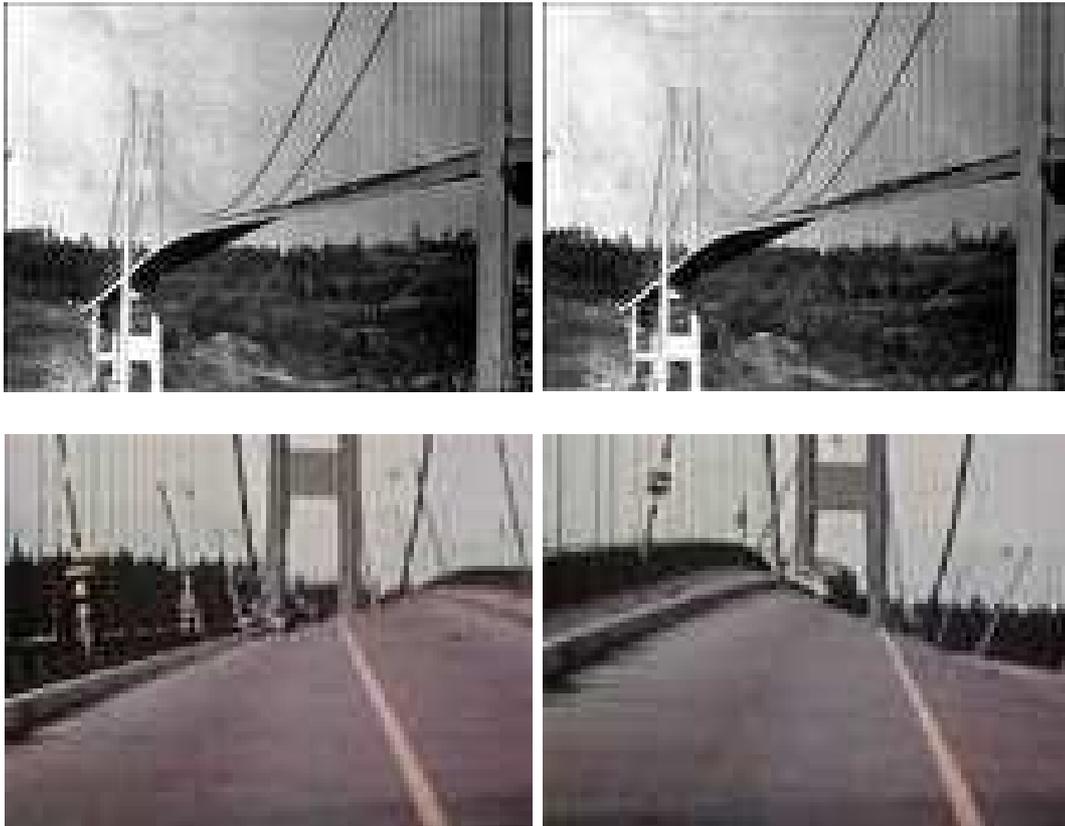


Abbildung 8.32: Tacoma Narrows Bridge Disaster vom 7. November 1940

## (2) Frequenzgang des Phasenwinkels

Die erzwungene Schwingung läuft der Erregerschwingung stets um den Phasenwinkel  $\psi$  hinterher, es wird zum Nullphasenwinkel  $\phi = 0$  der Erregerschwingung also der Winkel  $\psi$  addiert ( $\psi \in (-\pi, 0)$  geeignet).

### Sonderfälle

- (i)  $\omega = 0$  (statischer Fall):  $\psi(\omega) = 0$
- (ii)  $\omega = \omega_0$ :  $\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
- (iii) Bei hohen Erregerfrequenzen ( $\omega \gg \omega_0$ ) schwingen Erreger und Sy-

stem nahezu im Gegentakt (Abb. 8.33):

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi(\omega) = -\pi$$

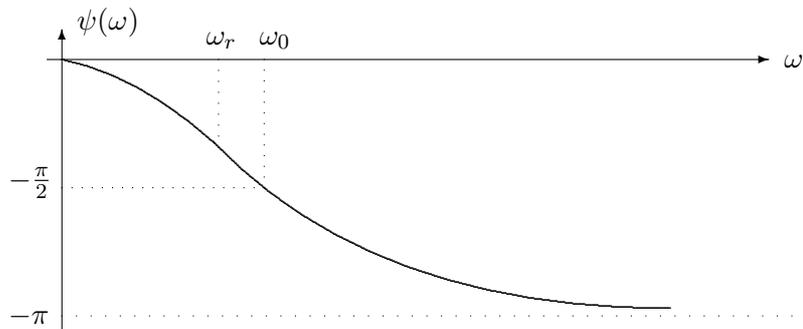


Abbildung 8.33: Resonanzfunktion des Phasenwinkels

### Bemerkung

Eine Kurvendiskussion zeigt, daß  $\omega_0$  kein Wendepunkt des Graphen ist und auch nicht immer ein Wendepunkt vorliegt:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= \arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ \psi'(\omega) &= \frac{-2\delta(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \\ \psi''(\omega) &= \frac{4\delta\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^2} [\omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^2(4\delta^2 - 3\omega_0^2)] \end{aligned}$$

$$\psi''(\omega) \stackrel{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_w = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_w := \omega_0 \sqrt{-1 \pm 2\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}$$

Auf die Berechnung der dritten Ableitung soll hier verzichtet werden.

Hier ist nur das obere Vorzeichen relevant, da die äußere Wurzel keinen negativen Radikanden haben darf. Mit dem Verlustfaktor  $d := \frac{2\delta}{\omega_0} = \frac{b}{\sqrt{ac}}$  wird daraus

$$\omega_w = \omega_0 \sqrt{-1 + \sqrt{4 - d^2}}.$$

Für  $\omega > 0$  liegt nur dann ein Wendepunkt vor, wenn gilt:

$$\sqrt{4 - d^2} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad d < \sqrt{3}.$$

Für diese Werte von  $d$ , d.h. für  $d \in (0, \sqrt{3})$  gilt für den Wendepunkt die Beziehung  $\omega_w < \omega_0$ , s. Abb. 8.34.

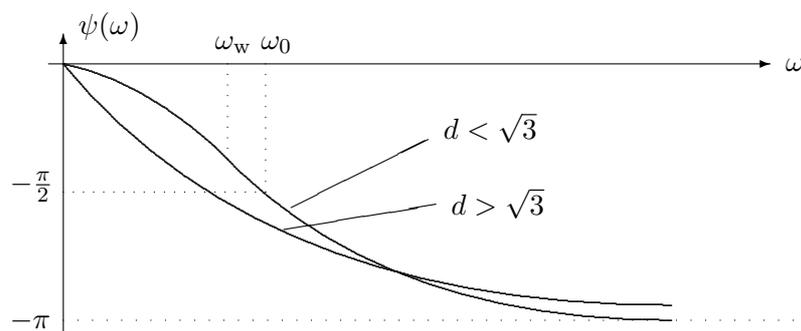


Abbildung 8.34: Wendepunkt der Resonanzfunktion des Phasenwinkels

### 8.3.6 Euler'sche Differentialgleichung

Als *Euler'sche Differentialgleichung* bezeichnet man eine Dgl der Form

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad ((x, y, \dots, y^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n+2})$$

mit konstanten Zahlen  $a_k$ .

Diese lineare Dgl hat zwar keine konstanten Koeffizienten, läßt sich durch eine Substitution aber in eine solche überführen. Man beachte, daß die Potenz eines auftretenden Faktors  $x^k$  genauso groß ist wie die Ableitungsordnung  $k$  derjenigen Funktion, bei welcher sie als Koeffizient auftritt.

Zuerst soll gezeigt werden, daß man sich dabei auf die Betrachtung von positiven Werten  $x$  beschränken kann.

**Beh.**

Ist  $y(\cdot)$  eine Lösung der Euler-Gleichung, so auch  $z(\cdot)$ , definiert durch

$$z(x) := y(-x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

*Beweis*

$$\begin{aligned} & a_n x^n z^{(n)}(x) + \dots + a_1 x z'(x) + a_0 z(x) \\ &= a_n x^n y^{(n)}(-x) \cdot (-1)^n + \dots + a_1 x y'(-x) \cdot (-1) + a_0 y(-x) \\ &= a_n \cdot (-x)^n y^{(n)}(-x) + \dots + a_1 \cdot (-x) y'(-x) + a_0 \cdot y(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Substitution

$$x = s(t) := e^t \quad \Longleftrightarrow \quad t = s^{-1}(x) = \ln x$$

$$u(t) = y(x) = y(e^t) \quad (x > 0)$$

bedeutet nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{dy}{dx}(e^t) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = y'(x) \cdot x \\ \frac{d^2u}{dt^2}(t) &= \frac{d}{dt}(y'(x) \cdot x) = (y'' \cdot x + y') \cdot x = y'' \cdot x^2 + y' \cdot x \\ \frac{d^3u}{dt^3}(t) &= \frac{d}{dt}(y''(x) \cdot x^2 + y'(x) \cdot x) \\ &= (y''' \cdot x^2 + 2y'' \cdot x + y'' \cdot x + y') \cdot x = y''' \cdot x^3 + 3y'' \cdot x^2 + y' \cdot x \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man erhält somit eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die substituierte Funktion  $u$ :

$$b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u = 0 \quad \left( \langle x, u, \dots, \frac{d^n u}{dt^n} \rangle \in \mathbb{R}^{n+2} \right),$$

welche geschlossen lösbar ist.

### Beispiel 8.43

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{13}{x^2}y = 0 \quad \left( \langle x, y, y', y'' \rangle \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \right).$$

Multiplikation mit  $x^2$  liefert die Euler'sche Dgl

$$x^2 \cdot y'' - 3xy' + 13y = 0 \quad \left( \langle x, y, y', y'' \rangle \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \right)$$

woraus mit der Substitution  $x = e^t$ ,  $u(t) = y(x)$  folgt:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot y'' - 3xy' + 13y &= \left( \frac{d^2u}{dt^2} - xy' \right) - 3 \frac{du}{dt} + 13u \\ &= \frac{d^2u}{dt^2} - 4 \frac{du}{dt} + 13u \\ &= 0 \quad \left( \langle t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} \rangle \in \mathbb{R}^4 \right). \end{aligned}$$

Die zur Dgl für die transformierte Funktion  $u$  gehörende charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$\lambda_1 = 2 + 3i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Aus den beiden reellen linear unabhängigen Lösungen der transformierten Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten,

$$\begin{aligned}u_1(t) &= e^{2t} \cdot \cos 3t \\u_2(t) &= e^{2t} \cdot \sin 3t \quad (t \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

ergeben sich die folgenden linear unabhängigen Lösungen der ursprünglichen Euler-Dgl:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= x^2 \cdot \cos(3 \ln x) \\y_2(x) &= x^2 \cdot \sin(3 \ln x) \quad (x > 0).\end{aligned}$$

# Kapitel 9

## Laplace-Transformation

### 9.1 Einführung

Häufig ist es einfacher, ein mathematisches Problem über den Umweg einer Transformation zu lösen, anstatt es direkt anzugehen, s. Abb. 9.1.

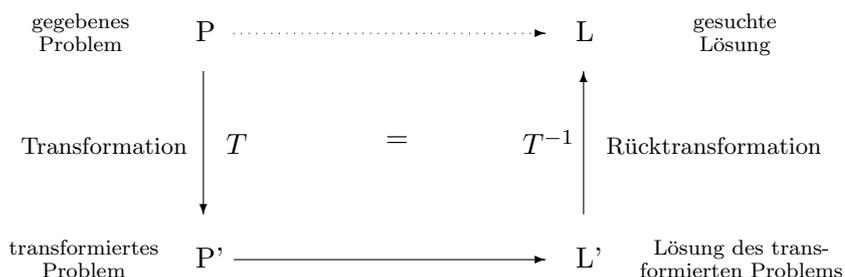


Abbildung 9.1: Transformation zur Lösung eines mathematischen Problems

#### Beispiele 9.1

(i) Mit Hilfe der Beziehung

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad (a, b > 0)$$

kann man die Multiplikation auf die Addition zurückführen:

Statt die beiden Zahlen  $a$  und  $b$  direkt miteinander zu multiplizieren, werden von beiden die Logarithmen aufgesucht – das entspricht der Transformation  $T$  oben – dann werden diese Logarithmen addiert, und das Ergebnis  $\ln(a) + \ln(b)$  stellt die Lösung des transformierten Problems dar. Dieses wird mit Hilfe der Exponentialfunktion – das ist hier die Rücktransformation – zu der gesuchten Lösung

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a \cdot b)} = a \cdot b \quad (a, b > 0)$$

rücktransformiert.

Diese Anfang des 17. Jahrhunderts entdeckte Logarithmenrechnung war eine enorme Erleichterung für Johannes Kepler (1571-1630) bei der Bewältigung seiner außerordentlich umfangreichen Berechnungen zur Erstellung der Planetentafeln. Bis Ende der siebziger Jahre des 20. Jahrhunderts stellte diese *logarithmische Transformation* auch einen unverzichtbaren Teil der Mathematik-Ausbildung in der Schule dar und wurde erst durch die Einführung der Taschenrechner verdrängt.

- (ii) Anwendung der Substitutionsmethode zum Auffinden einer Stammfunktion, s. Abb. 9.2.

$$\begin{array}{ccc}
 \int (x+5)^n dx & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \frac{(x+5)^{n+1}}{n+1} + C \\
 \text{Transformation} \downarrow x := t - 5 & & t = x + 5 \uparrow \text{Rücktransformation} \\
 \int t^n dt & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \frac{t^{n+1}}{n+1} + C
 \end{array}$$

Abbildung 9.2: Substitution zum Auffinden einer Stammfunktion

- (iii) Anwendung einer Transformation zum Auffinden einer Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, s. Abb. 9.3.

$$\begin{array}{ccc}
 y + xy' = 1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & y(x) = 1 + \frac{C}{x} \\
 \text{Transformation} \downarrow y = \frac{u}{x} \ (x \neq 0) & & u = xy \uparrow \text{Rücktransformation} \\
 u' = 1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & u(x) = x + C
 \end{array}$$

Abbildung 9.3: Transformation zum Auffinden einer Lösung einer Dgl

- (iv) Koordinatentransformationen, etwa die Umrechnung auf - und Rückrechnung zu Polarkoordinaten zum Zwecke der Durchführung einer Rechenoperation:

Transformation	Umrechnung komplexer Zahlen auf Polarkoordinaten
Rechenoperation	beispielsweise eine Multiplikation
Rücktransformation	Rückrechnung komplexer Zahlen auf kartesische Koordinaten

- (v) Der Gauß-Algorithmus ist eine Transformation einer Matrix auf Diagonalgestalt mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen, bei der die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems nicht verändert wird.

Eines der Hauptprobleme beim Arbeiten mit Transformationen ist das Auffinden der Umkehr- oder Rücktransformation. Hat man diese einmal gefunden, so stellt sich eine weitere Frage: Ist die Lösung des transformierten Problems immer gleich der transformierten Lösung des ursprünglichen Problems (Abb. 9.1), m.a.W., ist das Diagramm 9.1 kommutativ?

Schwierig ist die Beantwortung dieser Fragen insbesondere bei den sog. *Integraltransformationen*, wie etwa der Fourier- oder der Laplace-Transformation. Eine Integraltransformation transformiert eine gegebene Funktion  $f$  in eine neue Funktion  $F$  gemäß der Beziehung

$$F(s) := \int_a^b f(t) k(s, t) dt.$$

Hierbei ist  $k$  eine von  $f$  unabhängige Funktion zweier Variablen, die sog. *Kernfunktion*. Für die Fourier-Transformation beispielsweise sind

$$\begin{aligned} a &:= -\infty \\ b &:= +\infty \\ k(s, t) &:= e^{-ist} \end{aligned}$$

### 9.1.1 Motivation

Die Fourier-Transformierte  $F = \hat{f}$  einer Funktion  $f$ ,

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbb{R}),$$

existiert dann, wenn das uneigentliche Integral von  $|f|$  über ganz  $\mathbb{R}$  existiert, d.h. wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Schwächere Konvergenzbedingungen als diese sind schwer vorstellbar. Immerhin sichert diese handliche Bedingung sogar die absolute Konvergenz des Fourier-Integrals.

Dennoch ist diese Konvergenzbedingung der Fourier-Transformation bereits zu stark und schon für einfache und praktisch wichtige Zeitfunktionen nicht mehr erfüllt.

**Beispiel 9.2**

Man betrachte die Sprungfunktion  $\sigma$  (auch *Heaviside-Funktion*  $H$  genannt, technisch: ein Einschaltvorgang)

$$\sigma_a(t) := \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , t \geq a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Das uneigentliche Integral ( $\sigma := \sigma_0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} \left[ e^{-i\omega t} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

existiert an der oberen Grenze nicht. Je nach Wahl einer Folge  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $t_n \rightarrow \infty$  konvergiert die Folge  $\{e^{-i\omega t_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen anderen Grenzwert oder überhaupt nicht:

$$(a) \quad t_n := \frac{2\pi n}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad e^{-i\omega t_n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1$$

$$(b) \quad t_n := \frac{(2\pi + \pi/2)n}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad e^{-i\omega t_n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -i$$

$$(c) \quad t_n := \frac{(2\pi + \pi)\omega n}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad e^{-i\omega t_n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -1$$

$$(d) \quad t_n := \frac{(2\pi + 3\pi/2)n}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad e^{-i\omega t_n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} i$$

**Scheinbarer Ausweg**

Bei Zeitfunktionen, welche für  $t < 0$  verschwinden – also etwa der obigen Sprungfunktion  $f = \sigma$  – lassen sich diese Konvergenzschwierigkeiten auf den ersten Blick häufig dadurch beheben, daß man die Funktion  $f$

- zunächst mit einer *exponentiellen Dämpfung*

$$e^{-\delta t} \quad (t \in \mathbb{R}, \delta > 0 \text{ geeignet})$$

multipliziert,

- dann die Fourier-Transformation durchführt
- und danach  $\delta \rightarrow 0$  gehen läßt.

Man erhält dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-(\delta+i\omega)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{\delta+i\omega} e^{-(\delta+i\omega)t} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \\ &= \frac{1}{\delta+i\omega} = \frac{\delta-i\omega}{\delta^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt = -\frac{i}{\omega} \quad (\omega \neq 0).$$

### Bemerkung

Es liegt an der Nicht-Vertauschbarkeit zweier Grenzübergänge, daß diese Vorgehensweise zum Ziel führt, der Grenzwert  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$  darf *nicht* unter das Integral gezogen werden:

$$(a) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt = -\frac{i}{\omega} \quad (\omega \neq 0), \quad \text{aber}$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(t) e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt$$

existiert nicht nach Beispiel 9.2.

Daher sind die beiden Grenzwerte  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt$  nicht vertauschbar, der „Ausweg“ ist also ein scheinbarer! Dennoch:

Die Existenz des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\delta t}| dt$  ( $\delta > 0$  geeignet) ist für eine weit größere Klasse von Funktionen gewährleistet als die Existenz des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ . Da außerdem in den Anwendungen häufig nur solche Zeitfunktionen  $f$  von Interesse sind, welche sowieso für  $t < 0$  verschwinden – sog. *Einschaltvorgänge* –, gelangt man in Anlehnung an Beispiel 9.2 zu einer im folgenden Abschnitt definierten Modifikation der Fourier-Transformation, welche sich an diese Vorgehensweise anlehnt und in der Praxis bewährt hat.

## 9.1.2 Definition und Beispiele

### Definition 9.1

Sei  $f$  eine auf  $[0, \infty)$  definierte reell- oder komplexwertige Funktion.

(i) Die Funktion

$$L[f](s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (s \in \mathbb{C}) \quad (9.1)$$

heißt die *Laplace-Transformierte* von  $f$ , falls das uneigentliche Integral existiert, d.h. falls

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) e^{-st} dt$$

für gewisse  $s \in \mathbb{C}$  existiert.

(ii) Die Zuordnung

$$L : f \longmapsto L[f]$$

heißt *Laplace-Transformation*.

### Beispiel 9.3

Der Sprungfunktion  $\sigma = \sigma_0$  (Beispiel 9.2) wird durch die Laplace-Transformation die Funktion

$$L[\sigma](s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \left[ e^{-st} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{s}$$

zugeordnet. Dieses uneigentliche Integral existiert an der oberen Grenze für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s > 0$ , und man erhält

$$L[\sigma](s) = \frac{1}{s} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > 0).$$

### Beispiel 9.4

Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $f(t) := e^{at} \cdot \sigma(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) mit der oben definierten Sprungfunktion  $\sigma = \sigma_0$ , also

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ e^{at} & , t \geq 0 \end{cases} .$$

Dann ergibt sich für jede Zahl  $b > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(t) e^{-st} dt &= \int_0^b e^{at} e^{-st} dt = \int_0^b e^{(a-s)t} dt \\ &= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^b = \frac{1}{a-s} e^{(a-s) \cdot b} - \frac{1}{a-s} \\ &= \frac{1}{a-s} e^{x \cdot b} \cdot e^{iy \cdot b} + \frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

wobei gesetzt wurde:

$$a - s =: x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R} \text{ geeignet}).$$

Der Grenzwert für  $b \rightarrow \infty$  existiert also genau dann, wenn gilt:

$$x = \Re(a - s) = \Re a - \Re s < 0.$$

**Ergebnis**

$$L[\sigma \cdot e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \Re a).$$

Die Laplace-Transformierte von  $\sigma \cdot e^{at}$  ist also in einer Halbebene definiert. Für  $a = 0$  hat man Beispiel 9.3 reproduziert.

**Beispiel 9.5**

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$L[\sigma \cdot t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > 0).$$

Diese Aussage wird durch vollständige Induktion über  $n$  bewiesen.

(i) Induktionsverankerung:

$$n = 0 \quad \text{s. Beispiel 9.2.}$$

(ii) Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung sei für alle Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \leq n$  bewiesen.

(iii) Induktionsschluß:

Mit Hilfe partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} (m+1)L[\sigma \cdot t^m](s) &= \int_0^{\infty} (m+1)t^m e^{-st} dt \\ &= \left[ t^{m+1} \cdot e^{-st} \right]_0^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} t^{m+1} \cdot (-s) \cdot e^{-st} dt \\ &= 0 - 0^{m+1} + s \cdot \int_0^{\infty} t^{m+1} \cdot e^{-st} dt \\ &= s \cdot L[\sigma \cdot t^{m+1}](s), \end{aligned}$$

also

$$L[\sigma \cdot t^{m+1}](s) = \frac{m+1}{s} L[\sigma \cdot t^m](s).$$

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung folgt aus diesem Ergebnis schließlich

$$L[\sigma \cdot t^{m+1}](s) = \frac{m+1}{s} \cdot \frac{m!}{s^{m+1}} = \frac{(m+1)!}{s^{m+2}} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > 0).$$

**Bemerkung**

Mit Hilfe der Fourier-Transformation läßt sich die Laplace-Transformierte  $L[f]$  von  $f$  auch wie folgt deuten:

Fourier-Transformation:

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbb{R}),$$

hierbei ist  $\hat{f}(\omega)$  der Wert der Spektraldichtefunktion der Funktion  $f(\cdot)$  an der Stelle  $\omega$ ;

Laplace-Transformation:

$$L[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt;$$

sei  $f(t) := 0$  ( $t < 0$ ) und man setze  $s := x + i\omega$ . Dann folgt

$$L[f](x + i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(x+i\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Bei festem  $x \in \mathbb{R}$  läßt sich  $L[f](x + i\omega)$  somit als Spektraldichte der Funktion  $e^{-x\cdot} f(\cdot)$  an der Stelle  $\omega$  auffassen.

### 9.1.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation

Bisher wurde die Laplace-Transformation definiert, und die Laplace-Transformierte einiger Funktionen wurde ausgerechnet. Sinn und Zweck des ganzen Unterfangens ist allerdings noch nicht dargestellt worden, und das soll jetzt geschehen. Man muß also der Frage nachgehen, welchen Vorteil es bringt, sich mit der Laplace-Transformation zu beschäftigen. Dazu sei an das Diagramm 9.1 erinnert: dort wurde die Aufgabe, ein gegebenes Problem zu lösen ersetzt durch die Aufgabe, ein transformiertes Problem zu lösen.

Die Laplace-Transformation bildet eine Menge von Funktionen – den *Originalbereich* – in eine andere Menge von Funktionen – den *Bildbereich* – ab:

$$\begin{array}{ccc} L : & \text{Originalbereich} & \longrightarrow & \text{Bildbereich} \\ & f & \longmapsto & L[f] \end{array}$$

Da es sich beim Original- und Bildbereich jeweils um Vektorräume von Funktionen handelt, spricht man häufig auch von *Originalraum* und *Bildraum*.

Um die Vorteile des Arbeitens mit der Laplace-Transformation zu erkennen, wird die folgende Rechnung durchgeführt, welche eine Verallgemeinerung der partiellen Integration aus Beispiel 9.5 ist:

Seien  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s > 0$ ,  $f \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$  und  $f$  eine beschränkte Funktion, dann ist

$$\begin{aligned}
 L[f'](s) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\
 &= f(t) \cdot e^{-st} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} (-s) dt \\
 &= 0 - f(0) + s \cdot \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\
 &= s \cdot L[f](s) - f(0).
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Bis auf das additive Glied  $f(0)$  entspricht der Differentiation von  $f$  im Bildraum die Multiplikation von  $L[f]$  mit  $s$ : Die Laplace-Transformation verwandelt Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen, das ist das (ein!) Geheimnis ihres Erfolges. Zusätzlich werden, bedingt durch das Auftreten von  $f(0)$  in obiger Rechnung, auch Anfangsbedingungen inkorporiert. Es ergibt sich ein Schema wie in Abb. 9.4 dargestellt.

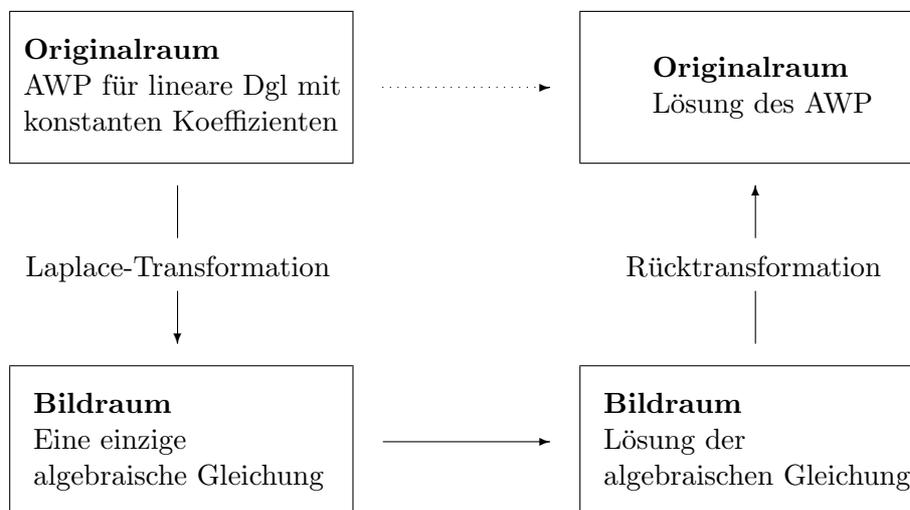


Abbildung 9.4: Die Idee der Laplace-Transformation

### Bemerkung

Die Achilles-Ferse beim Arbeiten mit der Laplace-Transformation ist die Rücktransformation:

Wie lautet zu einer gegebenen Funktion  $F$  im Bildraum eine (die?) Funktion  $f$  im Originalraum, deren Laplace-Transformierte gerade die vorliegende Funktion  $F$  ist?

Hierfür gibt es im wesentlichen zwei Lösungswege:

(a) **Komplexe Umkehrformel**

Die entsprechende Formel gewinnt man mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation. Dabei wird hier vorausgesetzt, daß sämtliche auftretenden Integrale existieren.

Mit  $s := \delta + i\omega$  erhält man

$$\begin{aligned} L[\sigma f](s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\delta+i\omega)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} [f(t) e^{-\delta t}] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(t) f(t) e^{-\delta t}] e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt, daß  $L[\sigma f]$  die Fourier-Transformierte der Funktion  $\sigma(\cdot)f(\cdot)e^{-\delta\cdot}$  ist. Dann ergibt sich mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation

$$\sigma(t)f(t)e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L[\sigma f](s) e^{i\omega t} d\omega,$$

also

$$\sigma(t)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L[\sigma f](s) e^{\delta t} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L[\sigma f](s) e^{st} d\omega.$$

Mit der Substitution

$$s := \delta + i\omega \quad , \quad ds = i d\omega$$

erhält man daraus die komplexe Umkehrformel

$$\sigma(t)f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s=\delta-i\omega}^{s=\delta+i\omega} L[\sigma f](s) e^{st} ds =: \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\delta-i\infty}^{s=\delta+i\infty} L[\sigma f](s) e^{st} ds.$$

Dieses komplexe Kurvenintegral läßt sich mit den mathematischen Mitteln der komplexen Analysis (*Funktionentheorie*) auswerten, etwa mit dem *Residuensatz*. Hier wird diese Umkehrformel, also

$$f(t) = \left[ L^{-1}(L[f]) \right](t) \quad (t \geq 0),$$

jedoch nicht weiter verwendet. Bemerkenswert ist nur, daß die Funktion  $f$  reproduzierbar ist, daß also die Laplace-Transformierte  $L[f]$  die Funktion  $f$  bestimmt und damit die Rücktransformation  $L^{-1}$  „im wesentlichen“ (Satz 9.4) eindeutig verläuft.

**(b) Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen**

In der Praxis wird die Rücktransformation fast ausschließlich mit Hilfe von sog. *Korrespondenztabelle*n durchgeführt. Dazu formt man – wenn nötig – die rückzutransformierende Funktion solange um, bis sie eine Gestalt hat, zu der man die Rücktransformation einer Tabelle entnehmen kann.

**Beispiel 9.6**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y' - 2y &= 6 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Auf die Dgl wird die Laplace-Transformation angewendet. Dann erhält man für die Laplace-Transformierte  $L[y]$  eine algebraische Gleichung.

$$\begin{aligned}L[y' - 2y](s) &= \int_0^{\infty} [y'(t) - 2y(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} y'(t) e^{-st} dt - 2 \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt \\ &= s \cdot L[y](s) - y(0) - 2L[y](s) \\ &= (s - 2) \cdot L[y](s) - 1, \\ L[6\sigma](s) &= \frac{6}{s} \quad (\Re s > 0)\end{aligned}$$

Mit der Überlegung

$$L[\text{linke Seite}] = L[\text{rechte Seite}]$$

überführt die Laplace-Transformation das *gesamte* AWP für die gesuchte Funktion  $y$  in eine algebraische Gleichung für deren Laplace-Transformierte  $L[y]$ . Diese Gleichung kann sofort gelöst werden:

$$\begin{aligned}L[y](s) &= \frac{1}{s-2} + \frac{6}{s(s-2)} \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s-2} - \frac{3}{s} = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s} \quad (\Re s > 2)\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Lösung  $y$  des ursprünglichen AWP muß man nun wissen, von welcher Originalfunktion die rechte Seite der letzten Gleichung die Laplace-Transformierte ist. Nun gilt (Beispiele 9.4 und 9.2)

$$\begin{aligned}L[\sigma e^{2t}](s) &= \frac{1}{s-2} \quad (\Re s > 2), \\ L[\sigma](s) &= \frac{1}{s} \quad (\Re s > 0).\end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = 4 \cdot e^{2t} - 3 \quad (t \geq 0).$$

### Bemerkung

Ein Anfangswertproblem für eine lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten *kann* man auch anders lösen, nämlich mit der Standard-Methode, ohne Laplace-Transformation. Dazu muß man

- (i) die charakteristische Gleichung lösen, um ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung zu erhalten;
- (ii) eine Variation der Konstanten oder einen Störgliedansatz durchführen, um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten;
- (iii) in der Summe von allgemeiner Lösung der homogenen Gleichung und spezieller Lösung der inhomogenen Gleichung die richtige Linearkombination der Lösungen des homogenen Systems ermitteln, um die geforderte Anfangsbedingung zu erfüllen. Dazu ist ein lineares Gleichungssystem der Ordnung  $n$  (hier:  $n = 1$ ) zu lösen.

Im Falle des letzten Beispiels (Dgl erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität) ist die Standardmethode wohl einfacher. Bei Dgln höherer Ordnung oder nichtkonstanter Inhomogenität kann insbesondere die Variation der Konstanten recht aufwendig sein.

Im Gegensatz dazu berücksichtigt die Lösungsmethode mit Hilfe der Laplace-Transformation die Anfangswerte in der Bildgleichung unmittelbar und damit in der Lösung des AWP selbst; darüberhinaus wird bei diesem Vorgehen auch die allgemeine Lösung der homogenen Dgl nicht benötigt.

Später werden kompliziertere Beispiele vorgestellt.

### Bemerkung

Ein AWP für den Anfangspunkt  $\tau$  einer linearen inhomogenen Dgl  $n$ -ter Ordnung (auch mit nichtkonstanten Koeffizienten),

$$\begin{aligned} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y &= f(t) & (t \geq \tau) \\ y(\tau) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(\tau) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

läßt sich in ein dazu äquivalentes AWP für den Anfangspunkt 0 transformieren.

Dazu substituiere man  $t := \psi(x) := x + \tau$  für  $x \geq 0$  und setze

$$\begin{aligned} z(x) &:= y(\psi(x)) = y(t) \\ b_n(x) &:= a_n(\psi(x)) = a_n(t) \\ &\vdots \\ b_0(x) &:= a_0(\psi(x)) = a_0(t) \\ g(x) &:= f(\psi(x)) = f(t), \end{aligned} \quad (x \geq 0)$$

und man erhält dann das folgende AWP für  $z$  und  $g$  mit dem Anfangspunkt 0:

$$\begin{aligned} b_n(x)z^{(n)} + b_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \dots + b_0(x)z &= g(x) & (t \geq 0) \\ z(0) &= y_0 \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Aus diesem Grunde kann man sich darauf beschränken, bei der Laplace-Transformation nur Anfangswertprobleme mit dem Anfangspunkt 0 zu untersuchen.

### Beispiel 9.7

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin 2t & (t \geq \frac{\pi}{2}) \\ y(\frac{\pi}{2}) &= 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) &= 1 \end{aligned}$$

Mit der Transformation

$$z(t) := y(t + \frac{\pi}{2}) \quad (t \geq 0)$$

ist dieses AWP an der Stelle  $\pi$  äquivalent zu dem AWP

$$\begin{aligned} z'' + z &= \sin 2(t + \frac{\pi}{2}) = \sin(2t + \pi) = -\sin 2t & (t \geq 0) \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 1 \end{aligned}$$

an der Stelle 0.

### Beispiel 9.8

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= e^{3t} & (t \geq 0) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Beispiels benötigt man zuerst eine Formel für  $L[y'']$ . Diese gewinnt man aus (9.2) durch wiederholte Anwendung:

$$\begin{aligned} L[y'](s) &= -y(0) + s \cdot L[y](s) \\ &= -1 + s \cdot L[y](s), \\ L[y''](s) &= -y'(0) + s \cdot L[y'](s) \\ &= -y'(0) + s \cdot (-y(0) + s \cdot L[y](s)) \\ &= s^2 \cdot L[y](s) - y'(0) - s \cdot y(0) \\ &= s^2 \cdot L[y](s) - 1 - s. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit Hilfe der Linearität des Operators  $L$

$$\begin{aligned} L[y'' + y' - 6y](s) &= L[y''](s) + L[y'](s) - 6L[y](s) \\ &= s^2 \cdot L[y](s) - 1 - s + s \cdot L[y](s) - 1 - 6 \cdot L[y](s) \\ &= (s^2 + s - 6) \cdot L[y](s) - s - 2 \\ L[e^{3t}](s) &= \frac{1}{s - 3} \quad (\Re s > 3) \end{aligned}$$

Wieder erhält man aus der Überlegung

$$L[\text{linke Seite}] = L[\text{rechte Seite}]$$

die Lösung im Bildraum zu

$$L[y](s) = \frac{1}{s^2 + s - 6} \left( s + 2 + \frac{1}{s - 3} \right) = \frac{s^2 - s - 5}{(s - 2)(s - 3)(s + 3)} \quad (\Re s > 3).$$

Zur weiteren Behandlung des letzten Ausdruckes wird eine Partialbruchzerlegung vorgenommen:

$$\frac{s^2 - s - 5}{(s - 3)(s - 2)(s + 3)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s + 3}.$$

Hieraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich, etwa mit der Grenzwertmethode

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{3}{5}, \quad C = \frac{7}{30}.$$

Damit erhält man nach Einsetzen dieser errechneten Werte die Lösung des AWP zu

$$\begin{aligned} L[y](s) &= L\left[\frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{3}{5} \cdot e^{2t} + \frac{7}{30} \cdot e^{-3t}\right](s) \\ \longrightarrow y(t) &= \frac{1}{6} e^{3t} + \frac{3}{5} e^{2t} + \frac{7}{30} e^{-3t} \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Qualitativ war diese Lösung zu erwarten: das charakteristische Polynom hat die zwei einfachen reellen Nullstellen  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = -3$ , und die Störfunktion selbst ist keine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

## 9.2 Laplace-transformierbare Funktionen

Dieser Abschnitt dient im wesentlichen zwei Zielen. Zum einen werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Laplace-Transformierte einer Funktion existiert und eindeutig bestimmt ist. Zum anderen werden Rechenregeln für den Umgang mit der Laplace-Transformation bereitgestellt.

### 9.2.1 Klassen Laplace-transformierbarer Funktionen

Es sind viele Klassen Laplace-transformierbarer Funktionen bekannt, einfache notwendige *und* hinreichende Bedingungen für die Transformierbarkeit einer Funktion gibt es jedoch nicht. Hinreichend für die Existenz der Laplace-Transformierten  $L[f]$  einer Funktion  $f$  ist natürlich, daß das sie definierende uneigentliche Integral existiert.

Bei den beabsichtigten Anwendungen erfüllen die Originalfunktionen in der Regel die

#### Voraussetzungen I

1. Für jede Zahl  $b > 0$  ist  $|f(\cdot)|$  integrierbar in dem Intervall  $[0, b]$ .

2.  $\int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt$  existiert für mindestens eine komplexe Zahl  $s = s_0$ .

#### Satz 9.1

Jede Funktion  $f$ , die den Voraussetzungen I genügt, ist Laplace-transformierbar. Ihre Bildfunktion existiert mindestens in der Halbebene (Abb. 9.5)

$$\{s : s \in \mathbb{C}, \Re s \geq \Re s_0\}.$$

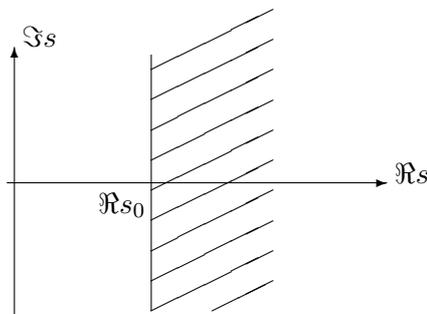


Abbildung 9.5: Rechte Halbebene  $\{s : \Re s \geq \Re s_0\}$  in  $\mathbb{C}$

**Bemerkung**

(i) Die kleinste reelle Zahl  $\sigma_c(f)$ , für welche das Laplace-Integral von  $f$

- konvergiert für  $\Re s > \sigma_c(f)$
- divergiert für  $\Re s < \sigma_c(f)$

bezeichnet man als *Konvergenzabszisse des Laplace-Integrals von  $f$* ; solch eine Zahl gibt es wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

- (ii) Diejenigen Funktionen, welche den Voraussetzungen I genügen, bestimmen die Menge der *absolut konvergenten* Laplace-Integrale.
- (iii) Unter den Voraussetzungen I sind noch weitergehende Konvergenzaussagen möglich, etwa gleichmäßige Konvergenz in einem Winkelraum. Hierzu konsultiere man die mathematische Spezialliteratur.

*Beweis von Satz 9.1*

**Beh. 1**  $\bigwedge_{s \in \mathbb{C}} \bigwedge_{b > 0} \int_0^b |e^{-st} f(t)| dt$  existiert.

*Bew.*

Für jedes  $s \in \mathbb{C}$  und jedes Intervall der Form  $[0, b]$  ist die Funktion  $t \mapsto |e^{-st}|$  ( $t \in [0, b]$ ) stetig, also dort auch beschränkt. Nach Voraussetzung existiert  $\int_0^b |f(t)| dt$ , somit also auch das Integral

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)| dt \leq \max_{t \in [0, b]} |e^{-st}| \cdot \int_0^b |f(t)| dt.$$

Man beachte dabei, daß in der Definition eines uneigentlichen Integrals die eigentliche Integrierbarkeit über jedem kompakten Teilintervall gefordert wird; diese wurde mit Beh. 1 für die Funktion  $t \mapsto e^{-st} f(t)$  damit nachgewiesen.

**Beh. 2**  $L[f]$  existiert in der Menge  $\{s : s \in \mathbb{C}, \Re s \geq \Re s_0\}$ .

*Bew.* Es ist

$$\begin{aligned} |e^{-st}| &= e^{-\Re st} \leq e^{-\Re s_0 t} = |e^{-s_0 t}| \\ \longrightarrow |L[f](s)| &\leq \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^\infty |e^{-s_0 t} f(t)| dt, \end{aligned}$$

und das letzte Integral existiert nach Voraussetzungen I, Teil 2.

Die Voraussetzungen I können ersetzt werden durch handlichere, jedoch einschränkendere Voraussetzungen an die Funktion  $f$ . Dazu werden zunächst zwei Definitionen gebraucht:

**Definition 9.2**

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.  $f$  heißt auf  $[0, \infty)$  von *exponentieller Ordnung*, wenn sie nicht stärker wächst als eine Exponentialfunktion, wenn also gilt:

$$\bigvee_{\alpha > 0} \bigvee_{M \geq 0} \bigwedge_{t \geq 0} |f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t}.$$

**Beispiele**

$$t \longmapsto t^n, \quad e^{at}, \quad t^n e^{at}, \quad t^n \sin \omega t, \quad t^n \cos \omega t$$

( $t \geq 0, a \in \mathbb{C}$  geeignet,  $\omega \in \mathbb{R}$  geeignet,  $n \in \mathbb{N}_0$  geeignet).

Insbesondere alle Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind Funktionen von exponentieller Ordnung auf  $[0, \infty)$ , da sie sich als Linearkombinationen von Funktionen der Form  $t \mapsto t^n e^{at}$  darstellen lassen.

**Definition 9.3**

Seien  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.  $f$  heißt auf  $\mathcal{I}$  *stückweise stetig*, wenn gilt:

- (i) In jedem beschränkten Teilintervall von  $\mathcal{I}$  ist  $f$  bis auf höchstens endlich viele Punkte definiert und stetig.
- (ii) An den (möglichen) Unstetigkeitsstellen hat  $f$  höchstens endliche Sprünge als Unstetigkeiten, also keine Pole und keine Oszillationsstellen. M.a.W., linksseitiger - und rechtsseitiger Grenzwert von  $f$  existieren überall in  $\mathcal{I}$ .

**Beispiel 9.9**

Die Sägezahnspannung auf dem Intervall  $[0, \infty)$  (Abb. 9.6) ist ein Beispiel einer stückweise stetigen Funktion gemäß der letzten Definition.

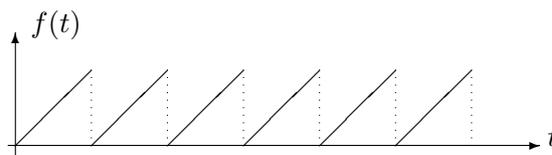


Abbildung 9.6: Stückweise stetige Funktion auf  $[0, \infty)$

**Bemerkung**

Eine Funktion von exponentieller Ordnung kann also höchstens wie die Exponentialfunktion  $t \mapsto e^{at}$  wachsen (welche Funktionen wachsen schneller?), und der Begriff einer stückweise stetigen Funktion ist schon aus Kapitel 7 (Definition 7.4) bekannt. Hier wird er dahingehend erweitert, daß auf einem unbeschränkten Intervall auch unendlich viele Unstetigkeiten zugelassen werden, wenn sie keinen Häufungspunkt haben.

Mit Hilfe dieser beiden Definitionen lassen sich als Ersatz für Voraussetzungen I handlichere Bedingungen formulieren, unter denen die Laplace-Transformierte  $L[f]$  einer Funktion  $f$  existiert.

**Voraussetzungen II**

1.  $f$  ist stückweise stetig auf  $[0, \infty)$ .
2.  $f$  ist von exponentieller Ordnung auf  $[0, \infty)$ .

**Satz 9.2**

$f$  genüge den Voraussetzungen II mit  $\alpha$  als exponentieller Ordnung. Dann existiert  $L[f](s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s > \alpha$ , und es gilt

$$\lim_{\Re s \rightarrow \infty} L[f](s) = 0.$$

*Beweis*

Seien  $M, \alpha > 0$  so gewählt, daß für  $t \geq 0$  gilt:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t}.$$

Dann gilt für  $s := \delta + i\omega$ ,  $\delta, \omega \in \mathbb{R}$  sowie für jedes  $b > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^b |f(t) \cdot e^{-st}| dt &= \int_0^b |f(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-i\omega t}| dt \\ &= \int_0^b \underbrace{|f(t) \cdot e^{-\alpha t}|}_{\leq M} \cdot |e^{\alpha t} \cdot e^{-\delta t}| \cdot |e^{-i\omega t}| dt \\ &\leq M \int_0^b e^{(\alpha-\delta)t} dt \\ &= M \cdot \frac{1}{\alpha - \delta} e^{(\alpha-\delta)t} \Big|_0^b \\ &= \frac{M}{\delta - \alpha} \left( 1 - e^{-(\delta-\alpha)b} \right) \end{aligned}$$

Falls  $\delta > \alpha$  ist, so ist die rechte Seite gleichmäßig beschränkt in  $b \geq 0$ , also auch für  $b \rightarrow \infty$ .

Somit ist die Funktion  $t \mapsto f(t) e^{-st}$  über  $[0, \infty)$  integrierbar, ja sogar absolut integrierbar. Weiterhin gilt

$$|L[f](s)| \leq \frac{M}{\Re s - \alpha} \longrightarrow 0 \quad (\Re s \rightarrow \infty).$$

### 9.2.2 Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Unter der Voraussetzung, daß alle auftretenden Integrale existieren, kann man die folgende formale Rechnung für die Laplace-Transformierte einer höheren als der ersten Ableitung von  $f$  anstellen:

$$\begin{aligned} L[f'](s) &= s \cdot L[f](s) - f(0) && (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha) \\ L[f''](s) &= s \cdot L[f'](s) - f'(0) \\ &= s^2 L[f](s) - s \cdot f(0) - f'(0) \\ &= s^2 L[f](s) - \sum_{k=1}^2 s^{2-k} \cdot f^{(k-1)}(0) && (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha) \\ &\vdots \\ L[f^{(n)}](s) &= s^n \cdot L[f](s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0) && (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha) \end{aligned}$$

Das diesbezüglich korrekte Ergebnis ist in folgendem Satz formuliert:

#### Satz 9.3

- (i) Seien  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$ ,  $f'$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung. Dann ist auch  $f$  von exponentieller Ordnung und, falls  $\Re s$  hinreichend groß ist, gilt

$$L[f'](s) = s \cdot L[f](s) - f(0).$$

- (ii) Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n-1}([0, \infty))$ ,  $f^{(n)}$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung. Dann sind auch alle  $f^{(k)}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ) von exponentieller Ordnung und, falls  $\Re s$  hinreichend groß ist, gilt

$$L[f^{(n)}](s) = s^n \cdot L[f](s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0).$$

*Beweisidee*

Die Aussage über die exponentielle Ordnung erhält man rekursiv aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; s. auch den Beweis von Satz 9.2. Sei dazu  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(t)| &= \left| f^{(k)}(0) + \int_0^t f^{(k+1)}(r) dr \right| \\ &\leq |f^{(k)}(0)| + \int_0^t |f^{(k+1)}(r)| e^{-\alpha r} e^{\alpha r} dr \\ &\leq |f^{(k)}(0)| + M \int_0^t e^{\alpha r} dr \\ &\leq \tilde{M} \cdot e^{\alpha t}, \end{aligned}$$

und die angegebene Formel für die Laplace-Transformierte  $L[f]$  von  $f$  erhält man mittels partieller Integration und vollständiger Induktion, s. Beispiel 9.5.

### Beispiel 9.10

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + y &= e^t \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Anwendung der Laplace-Transformation auf die Dgl liefert

$$L[y'' + y](s) = s^2 \cdot L[y](s) - s \cdot y(0) - y'(0) + L[y](s)$$

$$L[\sigma e^t](s) = \frac{1}{s-1} \quad (\Re s > 1),$$

also wird die algebraische Gleichung im Bildraum zu

$$(s^2 + 1)L[y](s) - 1 = \frac{1}{s-1},$$

$$\begin{aligned} L[y](s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \left[ 1 + \frac{1}{s-1} \right] \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} + \left[ \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1-s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Aufgrund von (s. Hausaufgaben)

$$L[\sin \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R}, \Re s > 0)$$

$$L[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R}, \Re s > 0)$$

lautet die Lösung des AWP

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t) \quad (t \geq 0).$$

### Beispiel 9.11

Das AWP des letzten Beispiels wird geringfügig abgeändert: jetzt wird es mit der Inhomogenität  $\sin t$  anstelle von  $e^t$  betrachtet:

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin t \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Hier ist die Inhomogenität selbst eine Lösung der homogenen Dgl. Ein Ansatz über die Laplace-Transformation führt auf die folgende algebraische Gleichung im Bildraum:

$$\begin{aligned} (s^2 + 1)L[y](s) - 1 &= \frac{1}{s^2 + 1}, \\ L[y](s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \left[ 1 + \frac{1}{s^2 + 1} \right] \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \\ &= L[\sin t](s) + (L[\sin t](s))^2 \end{aligned}$$

Um nun weiterzukommen, benötigt man eine weitere Rechenregel: welcher Funktion im Originalraum entspricht das Produkt zweier Laplace-Transformierten im Bildraum? Daher wird diese Regel – der *Faltungssatz* – zunächst abgeleitet. Aus Gründen der Übersicht werden auch einige andere bis jetzt noch nicht aufgeführte Regeln bereitgestellt. Hierzu benötigt man jeweils die Existenz der auftretenden Laplace-Integrale. Daher wird für das Weitere die folgende Generalvoraussetzung gemacht:

#### Generalvoraussetzung

Alle im folgenden auftretenden Funktionen seien auf dem Intervall  $[0, \infty)$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung  $\alpha$ .

**1. Linearität der Laplace-Transformation**

$$L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g] \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

**2. Differentiationssatz**

$$L[f'](s) = s \cdot L[f](s) - f(0) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha)$$

$$\begin{aligned} L[f''](s) &= s \cdot L[f'](s) - f'(0) \\ &= s^2 L[f](s) - s \cdot f(0) - f'(0) \\ &= s^2 L[f](s) - \sum_{k=1}^2 s^{2-k} \cdot f^{(k-1)}(0) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$L[f^{(n)}](s) = s^n \cdot L[f](s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0) \quad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha)$$

Differentiation im Originalraum wird zur Multiplikation mit der unabhängigen Variablen im Bildraum.

**3. Multiplikationssatz**

$$L[t \cdot f](s) = -\frac{d}{ds} (L[f])(s) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha)$$

$$L[t^n \cdot f](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (L[f])(s) \quad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha)$$

Multiplikation mit der unabhängigen Variablen im Originalraum wird zur Differentiation im Bildraum.

**Beispiel 9.12**

$$L[t \cdot \sin \omega t](s) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

**4. Dämpfungssatz**

$$L[e^{-at} \cdot f](s) = (L[f])(s + a) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha, a \in \mathbb{C})$$

Der Multiplikation einer Originalfunktion mit  $e^{-at}$  (Dämpfung, falls  $\Re a > 0$ ) entspricht im Bildraum eine Substitution von  $s$  durch  $s + a$  (Verschiebung).

**Beispiele 9.13**

$$L[e^{-at} \sin \omega t](s) = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad (\Re(s + a) > 0)$$

$$L[e^{-at} \cos \omega t](s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad (\Re(s + a) > 0)$$

**5. Erster und zweiter Verschiebungssatz**

$$L[f(t-a)](s) = e^{-as} \cdot (L[f])(s) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha, t \geq a)$$

$$L[f(t+a)](s) = e^{as} \cdot \left[ (L[f])(s) - \int_0^a e^{-st} f(t) dt \right] \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha, t \geq -a)$$

jeweils für  $a \geq 0$ .

Der „Verschiebung“ einer Originalfunktion (Substitution von  $t$  durch  $t \pm a$ ) entspricht im Bildraum eine Multiplikation mit  $e^{\pm as}$  (Dämpfung, falls  $\Re(as) < 0$  bzw.  $\Re(-as) < 0$ ).

**Beispiel 9.14**

$$L[\sigma(t-a)](s) = e^{-as} \cdot L[\sigma](s) = \frac{e^{-as}}{s} \quad (\Re s > 0)$$

**6. Ähnlichkeitssatz**

$$L[f(at)](s) = \frac{1}{a} (L[f])\left(\frac{s}{a}\right) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha, a > 0)$$

**Beispiel 9.15**

$$L[\sin \omega t](s) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\Re s > 0)$$

**7. Faltungssatz<sup>1</sup>**

$$L\left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau\right] = L[f] \cdot L[g] \quad (t \geq 0)$$

Das Integral auf der linken Seite heißt die *Faltung* von  $f$  und  $g$  und wird mit  $f * g$  bezeichnet:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (t \geq 0)$$

---

<sup>1</sup>engl.: Convolution Theorem

**Bemerkung**

(i) Faltet man die graphische Darstellung von  $f$  an der Achse  $\tau = \frac{t}{2}$ , so liegen das Argument  $(t-\tau)$  von  $f$  und das Argument  $\tau$  von  $g$  übereinander; daher resultiert der Name „Faltung“.

(ii) Die Faltung ist

$$\begin{array}{ll} \text{assoziativ:} & (f * g) * h = f * (g * h) \\ \text{distributiv:} & f * (g + h) = f * g + f * h \\ \text{kommutativ:} & f * g = g * f \end{array}$$

(iii) Für die konstante Funktion  $g = 1$  erhält man

$$(f * 1)(s) = (1 * f)(s) = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

d.h. die Faltung von  $f$  mit der Funktion 1 ist die spezielle Stammfunktion  $F$  von  $f$  mit  $F(0) = 0$ . Die Faltung hat zu dem gewöhnlichen Produkt von Funktionen analoge Eigenschaften, jedoch ist

$$f * 1 = 1 * f \neq f.$$

(iv) Mit Hilfe der Notation der Faltung schreibt sich der Faltungssatz als

$$L[f * g] = L[f] \cdot L[g].$$

Die Laplace-Transformierte der Faltung zweier Funktionen (im Originalraum) ist gleich dem Produkt der Laplace-Transformierten (im Bildraum).

**Beispiel 9.16**

Es wird noch einmal das Beispiel des bis jetzt ungelösten AWP

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin t \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

aufgegriffen. Die Lösung im Bildraum dazu lautet

$$L[y](s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Mit der Beziehung

$$L[\sin t](s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

und dem Faltungssatz erkennt man nun

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} = (L[\sin t](s))^2 = L[(\sin * \sin)(t)](s),$$

und damit ergibt sich die eindeutig bestimmte Lösung des AWP zu

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sin t + (\sin * \sin)(t) \\
 &= \sin t + \int_0^t \sin(t - \tau) \cdot \sin \tau \, d\tau \\
 &= \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(t - 2\tau) - \cos t] \, d\tau \quad \left[ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \right] \\
 &= \sin t + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \sin(t - 2\tau) - \tau \cdot \cos t \right]_0^t \\
 &= \sin t + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin t - t \cdot \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right] \\
 &= \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cdot \cos t \quad (t \geq 0)
 \end{aligned}$$

### 8. Integrationsatz

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](s) = \frac{1}{s} L[f](s) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha, t \geq 0)$$

*Beweis*

(a) über den Faltungssatz:

Der Faltungssatz mit  $g = \sigma$  lautet

$$\begin{aligned}
 L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](s) &= L\left[\int_0^t \sigma \cdot f(\tau) d\tau\right](s) \\
 &= L[\sigma * f](s) = L[\sigma] \cdot L[f](s) \\
 &= \frac{1}{s} L[f](s) \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha, t \geq 0)
 \end{aligned}$$

(b) über den Differentiationsatz:

Man wende den Differentiationsatz

$$L[g'](s) = s \cdot L[g](s) - g(0)$$

auf die Funktion

$$g(t) := \int_0^t f(\tau) \, d\tau$$

an, dann folgt:

$$\begin{aligned} L[g'](s) &= s \cdot L[g](s) - g(0) \\ L[f](s) &= s \cdot L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](s) - 0. \end{aligned}$$

Abgesehen von der additiven Konstante  $-f(0)$  führt die Laplace-Transformation die Differentiation bzw. Integration der Originalfunktion über in die Multiplikation bzw. Division der Bildfunktion mit bzw. durch  $s$ .

### 9.2.3 Transformation periodischer Funktionen

Eine Funktion mit der Periode  $T$  läßt sich durch Zerlegen des Integrationsintervalles  $[0, \infty)$  in eine unendliche Vereinigung von Intervallen der Periodenlänge  $[(nT, (n+1)T)$  transformieren. Dadurch wird – wie zu erwarten – die Kenntnis der zu transformierenden Funktion  $f$  nur auf einem endlichen Intervall der Länge einer Periode gebraucht. Insbesondere hat man bei der Berechnung des Laplace-Integrals kein uneigentliches Integral mehr auszuwerten:

$$\begin{aligned} L[f](s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-st} dt + \dots \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_0^T f(t+T) e^{-s(t+T)} dt + \dots \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt \left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} \cdot \int_0^T f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

**Beh.**

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}$  ist konvergent für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s > 0$  und hat den Grenzwert  $\frac{1}{1-e^{-sT}}$ .

**Bew.**

Hierbei handelt es sich um eine geometrische Reihe mit dem Progressionsfaktor  $q := e^{-sT}$ . Dafür gilt:

$$|q| = |e^{-sT}| = e^{-\Re s \cdot T} < 1 \quad \iff \quad \Re s > 0$$

Damit erhält man die Transformationsformel für das Laplace-Integral einer mit der Periode  $T$  periodischen Funktion zu

$$L[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt. \quad (9.3)$$

### Bemerkung

Wozu benötigt man eine Formel wie in (9.3) zum Lösen von Gewöhnlichen Differentialgleichungen? Ist die Störfunktion etwa eine (periodische) Sägezahnfunktion, so kann ihre Laplace-Transformierte auf diese Weise leicht berechnet werden.

### Beispiel 9.17

Für die einweg-gleichgerichtete Sinusschwingung

$$f(t) := \begin{cases} \sin \omega t & , \quad \frac{2k\pi}{\omega} \leq t \leq (2k+1)\frac{\pi}{\omega} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

erhält man mit der Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-st} dt &= \int_0^{T/2} \sin \omega t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t e^{-st} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2} (-s \cdot \sin \omega t - \omega \cdot \cos \omega t) \right]_0^{\pi/\omega} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \left( e^{-s \frac{\pi}{\omega}} + 1 \right), \end{aligned}$$

und daraus folgt für das Laplace-Integral aus (9.3):

$$\begin{aligned} L[f](s) &= \frac{1}{1 - e^{-s \frac{2\pi}{\omega}}} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \left( 1 + e^{-s \frac{\pi}{\omega}} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-s \frac{\pi}{\omega}}} \quad (\Re s > 0). \end{aligned}$$

**Beispiel 9.18**

Für die „normale“ Sinusschwingung

$$g(t) := \sin \omega t \quad (t \geq 0)$$

erhält man auch mit dieser Methode natürlich das schon bekannte Ergebnis:

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t) e^{-st} dt &= \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t e^{-st} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2} (-s \cdot \sin \omega t - \omega \cdot \cos \omega t) \right]_0^{2\pi/\omega} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \left( -e^{-s \frac{2\pi}{\omega}} + 1 \right), \end{aligned}$$

und daraus folgt für das Laplace-Integral, wieder aus (9.3):

$$\begin{aligned} L[g](s) &= \frac{1}{1 - e^{-s \cdot \frac{2\pi}{\omega}}} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \left( -e^{-s \frac{2\pi}{\omega}} + 1 \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\Re s > 0). \end{aligned}$$

**9.3 Umkehrung der Laplace-Transformation****9.3.1 Zur Eindeutigkeit der Rücktransformation**

Erinnert werde an das Einführungsbeispiel 9.6 eines AWP auf p. 290, welches mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst wurde:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 6 \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung im Bildraum ist

$$L[y](s) = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s} = L[4e^{2t} - 3](s) \quad (\Re s > 2),$$

und man erhält die gesuchte Lösung des AWP zu

$$y(t) = 4 \cdot e^{2t} - 3 \quad (t \geq 0).$$

**Problem**

Ist damit wirklich die richtige Lösung im Originalraum gefunden? Kann nicht

$$L[y] = L[\tilde{y}]$$

für zwei verschiedene Originalfunktionen  $y$  und  $\tilde{y}$  sein?

Diese Frage berührt die Eindeutigkeit der Laplace-Rücktransformation  $L^{-1}$  oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Injektivität der Laplace-Transformation  $L$  selbst:

Haben verschiedene Originalfunktionen auch verschiedene Bildfunktionen, so daß man, ausgehend von einer Bildfunktion, zu einer (ihrer) eindeutig bestimmten Originalfunktion zurückkommt?

**Satz 9.4** (Satz von Lerch)

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf dem Intervall  $[0, \infty)$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung. Sei  $\alpha$  eine reelle Zahl mit

$$L[f](s) = L[g](s) \quad (\Re s > \alpha).$$

**Beh.**

$$f(t) = g(t)$$

in allen Punkten  $t \geq 0$ , in denen  $f$  und  $g$  stetig sind.

**Folgerung**

Zu einer Bildfunktion existiert höchstens eine stetige Originalfunktion.

Diese Folgerung kann insbesondere auf (differenzierbare) Lösungen einer Dgl angewandt werden: Funktionen im Bildraum, welche als Lösungen eines transformierten Anfangswertproblems auftreten, besitzen höchstens eine stetige – sogar differenzierbare – Originalfunktion. Damit ist die entsprechend rücktransformierte Funktion – die gesuchte Lösung des AWP – eindeutig bestimmt.

### 9.3.2 Rücktransformation rationaler Bildfunktionen

In diesem Abschnitt wird die Rücktransformation rationaler Bildfunktionen behandelt. Unter der Voraussetzung, daß die Nullstellen des auftretenden Nennerpolynoms explizit bestimmt werden können, gestattet dieses Problem eine vollständige Lösung.

Die Funktion  $f$  sei auf  $[0, \infty)$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, etwa von exponentieller Ordnung  $\alpha$ . Ihre Laplace-Transformierte  $L[f]$  sei eine rationale Funktion:

$$L[f](s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re s > \alpha \geq \sigma_c(f))$$

mit geeigneten Polynomen  $p$  und  $q$ ; das Nennerpolynom  $q$  genüge hierbei einer Linearfaktorzerlegung der Form

$$q(s) = B(s - s_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (s - s_k)^{m_k}.$$

Nach Satz 9.2 besitzt die Laplace-Transformierte  $L[f]$  einer solchen Funktion das folgende Abklingverhalten ( $M \geq 0$  geeignet):

$$|L[f](s)| \leq \frac{M}{\Re s - \alpha} \longrightarrow 0 \quad (\Re s \rightarrow \infty).$$

Wegen  $L[f] = \frac{p}{q}$  muß dann aber

$$\text{Grad } p < \text{Grad } q$$

sein, d.h.  $L[f] = \frac{p}{q}$  ist eine echt gebrochen rationale Funktion und ist nach erfolgter Partialbruchzerlegung eine Summe von Termen der Form

$$\frac{a_{il}}{(s - s_i)^l}$$

mit komplexen Zahlen  $a_{il}, s_i$ , wobei gilt:

- $k$  : Anzahl der verschiedenen Nullstellen
- $i$  : Glied in der Partialbruchzerlegung  $(1 \leq i \leq k)$
- $m_l$  : Vielfachheit der Nullstelle  $s_l$   $(1 \leq l \leq k)$ .

Man sagt daher auch, daß  $s_k$  ein *Pol der Ordnung*  $m_k$  von  $L[f]$  sei.

### 9.3.2.1 Bestimmung der Originalfunktion zu einer rationalen Bildfunktion

Bis auf die (wegen der explizit zu bestimmenden Nullstellen des Nennerpolynoms oft nichttriviale) Durchführung der Partialbruchzerlegung ist das Problem der Rücktransformation damit vollständig gelöst, denn es gilt:

#### Satz 9.5

$$L\left[\frac{a_{il}}{(l-1)!} e^{s_i t} t^{l-1}\right](s) = \frac{a_{il}}{(s - s_i)^l} \quad (\Re s > \Re s_i, l \in \mathbb{N}).$$

*Beweis* Der Beweis erfolgt in der folgenden Serie von Einzelschritten:

- (i)  $L[t^{l-1}](s) = \frac{(l-1)!}{s^l}$  (Beispiel 9.5)
- (ii)  $L[e^{s_i t} t^{l-1}](s) = \frac{(l-1)!}{(s - s_i)^l}$  (Dämpfungssatz)
- (iii)  $L\left[\frac{a_{il}}{(l-1)!} e^{s_i t} t^{l-1}\right](s) = \frac{a_{il}}{(l-1)!} \cdot L[e^{s_i t} t^{l-1}](s) \stackrel{(ii)}{=} \frac{(l-1)!}{(s - s_i)^l}$

Daraus ergibt sich als Folgerung:

#### Satz 9.6

Die echt gebrochen rationale Funktion  $r(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$  besitze die Partialbruchzerlegung

$$r(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\alpha_{i1}}{s - s_i} + \frac{\alpha_{i2}}{(s - s_i)^2} + \dots + \frac{\alpha_{im_i}}{(s - s_i)^{m_i}} \right), \quad (9.4)$$

die Zahlen  $s_i$  seien die  $k$  verschiedenen Nullstellen vom Nennerpolynom  $q$  mit den Vielfachheiten  $m_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Dann gilt für die Originalfunktion die Darstellung ( $t \geq 0$ )

$$(L^{-1}[r])(t) = \sum_{i=1}^k \left( \alpha_{i1} + \alpha_{i2}t + \dots + \alpha_{im_i} \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \right) e^{s_i t}. \quad (9.5)$$

Sind Originalfunktionen also Linearkombinationen von Termen der Form

$$t^l e^{at} \quad (t \geq 0, l \in \mathbb{N}_0 \text{ geeignet}, a \in \mathbb{C} \text{ geeignet}),$$

so sind ihre Laplace-Transformierten bekannt. Wegen der Eindeutigkeit der Laplace-Rücktransformation gibt es dann keine anderen stückweise stetigen Funktionen von exponentieller Ordnung mit dieser Bildfunktion.

Nach Satz 9.5 erhält man aber durch Laplace-Transformation der Terme  $t^l \cdot e^{at}$  *genau alle* möglichen rationalen Ausdrücke, die bei der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion überhaupt nur auftreten können. Somit gilt:

Eine Originalfunktion besitzt genau dann eine (echt gebrochen) rationale Bildfunktion, wenn sie eine Linearkombination von Funktionen der Form

$$t \mapsto t^l e^{at} \quad (t \geq 0, l \in \mathbb{N}_0 \text{ geeignet}, a \in \mathbb{C} \text{ geeignet})$$

oder der Form ( $a = \delta + i\omega$ , reelle Schreibweise)

$$t \mapsto t^l e^{\delta t} \sin \omega t, t^l e^{\delta t} \cos \omega t \quad (t \geq 0, \delta, \omega \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

ist. Originalfunktionen dieser Art treten in den Anwendungen als Lösungen von linearen Anfangswertproblemen mit konstanten Koeffizienten auf, s. Tabelle 9.1.

### Bemerkung

Wie bei der Integration rationaler Funktionen ist es auch hier nicht immer nötig, ja nicht einmal wünschenswert, die Partialbruchzerlegung bis hin zu linearen Nennerpolynomen  $(s - s_k)^l$  im Komplexen durchzuführen. Manchmal ist es vorteilhaft, bei quadratischen -, dafür aber reellen Faktoren aufzuhören:

### Beispiel 9.19

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 < b$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{As + B}{s^2 + 2as + b} &= \frac{As + B}{(s + a)^2 + (b - a^2)} \\ &= A \cdot \frac{s + a}{(s + a)^2 + (\sqrt{b - a^2})^2} + \frac{B - Aa}{\sqrt{b - a^2}} \cdot \frac{\sqrt{b - a^2}}{(s + a)^2 + (\sqrt{b - a^2})^2} \\ &= A \cdot L[e^{-at} \cos \sqrt{b - a^2} t](s) + \frac{B - Aa}{\sqrt{b - a^2}} \cdot L[e^{-at} \sin \sqrt{b - a^2} t](s) \\ &= L \left[ A \cdot e^{-at} \cos \sqrt{b - a^2} t + \frac{B - Aa}{\sqrt{b - a^2}} \cdot e^{-at} \sin \sqrt{b - a^2} t \right](s) \\ &\quad (\Re(s + a) > 0) \end{aligned}$$

Originalfunktion	Bildfunktion
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$t^n \cos \omega t = t^n \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}} + \frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}} \right)$
$t^n \sin \omega t = t^n \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$	$\frac{1}{2i} \left( \frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}} - \frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}} \right)$
$t^n e^{at} \cos \omega t = t^n e^{at} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{n!}{(s-(a+i\omega))^{n+1}} + \frac{n!}{(s-(a-i\omega))^{n+1}} \right)$
$t^n e^{at} \sin \omega t = t^n e^{at} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$	$\frac{1}{2i} \left( \frac{n!}{(s-(a+i\omega))^{n+1}} - \frac{n!}{(s-(a-i\omega))^{n+1}} \right)$

Tabelle 9.1: Korrespondenztabelle zur Laplace-Transformation

### 9.3.2.2 Einfache Nullstellen des Nennerpolynoms

Bei einfachen Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  vereinfacht sich die Darstellung (9.4) und damit diejenige der Rücktransformation (9.5). Insbesondere lassen sich die Koeffizienten  $\alpha_{ij}$  mit Hilfe einer aus der Grenzwertmethode entwickelten Formel einfach berechnen, die direkte Anwendung der Grenzwertmethode zu ihrer Bestimmung kann damit entfallen:

#### Satz 9.7

Die Nullstelle  $s_j$  ( $j \in \{1, \dots, k\}$  geeignet) des Nennerpolynoms  $q$  in der Darstellung (9.4) sei einfach, d.h.  $m_j = 1$ . Dann gilt:

$$\alpha_{j1} = \frac{p(s_j)}{q'(s_j)}.$$

#### Beweis

Der Beweis isoliert in der Produktdarstellung des Nennerpolynoms den Linearfaktor  $(s - s_j)$  und wendet dann die Grenzwertmethode an.

(i) Ausgangspunkt ist die Linearfaktorzerlegung

$$q(s) = B \cdot \left[ \prod_{i=1}^k (s - s_i)^{m_i} \right] \quad (s \in \mathbb{C})$$

des Nennerpolynoms  $q$ . Dafür wird zuerst eine Darstellung seiner Ableitung gefunden, bei welcher der Faktor  $(s - s_j) = (s - s_j)^1$  separat betrachtet wird:

$$\begin{aligned} q'(s) &= B \cdot \left[ \prod_{i=1}^k (s - s_i)^{m_i} \right]' \\ &\stackrel{(m_j=1)}{=} B \cdot \left[ (s - s_j) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} \right]' \\ &= B \cdot \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} + (s - s_j) \cdot \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} \right]' \right]. \end{aligned}$$

(ii) Hieraus folgt der Grenzwert (das Polynom  $q'$  ist stetig)

$$\begin{aligned}
 q'(s_j) &= \lim_{s \rightarrow s_j} q'(s) \\
 &= B \cdot \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} + (s - s_j) \cdot \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} \right]' \right] \\
 &= B \cdot \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} \right] \\
 &= B \cdot \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s_j - s_i)^{m_i} \right].
 \end{aligned}$$

(iii) Wegen der Einfachheit der Nullstelle  $s_j$  tritt von den Koeffizienten  $\alpha_{jl}$  nur der erste Koeffizient  $\alpha_j := \alpha_{j1}$  auf. Dann ergibt eine Multiplikation von (9.4) mit dem Glied  $(s - s_j)$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ (s - s_j) \cdot r(s) \right] = \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ (s - s_j) \cdot \frac{p(s)}{q(s)} \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ (s - s_j) \cdot \frac{p(s)}{B \cdot \prod_{i=1}^k (s - s_i)^{m_i}} \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ (s - s_j) \cdot \frac{p(s)}{B \cdot (s - s_j) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i}} \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ \frac{p(s)}{B \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i}} \right] \\
 &= \frac{p(s_j)}{B \cdot \lim_{s \rightarrow s_j} \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s - s_i)^{m_i} \right]} = \frac{p(s_j)}{B \cdot \left[ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (s_j - s_i)^{m_i} \right]} \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \frac{p(s_j)}{q'(s_j)}
 \end{aligned}$$

**Folgerung** (Heaviside'scher Entwicklungssatz)

Die echt gebrochen rationale Funktion  $r(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$  besitze die Partialbruchzerlegung

$$r(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{s - s_i}$$

mit ausschließlich einfachen (möglicherweise auch komplexen) Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$ .

Dann gilt für die Originalfunktion die Darstellung

$$(L^{-1}[r])(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i e^{s_i t} = \sum_{i=1}^k \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} e^{s_i t} \quad (t \geq 0).$$

### Beispiel 9.20

$$\begin{aligned} y'' - y' + y &= 9e^{-t} & (t \geq 0) \\ y(0) &= 5 \\ y'(0) &= 4 \end{aligned}$$

Man erhält daraus im Bildraum die folgende echt gebrochenrationale Funktion als Lösung:

$$L[y](s) = r(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{5s^2 + 4s + 8}{s^3 + 1} = \frac{5s^2 + 4s + 8}{(s+1)(s^2 - s + 1)} \quad (\Re s > -1).$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  sind hier

$$s_1 = -1 \quad , \quad s_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) \quad , \quad s_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) = \bar{s}_2;$$

insbesondere sind also alle Nullstellen des Nennerpolynoms einfach, und damit kann der Heaviside'sche Entwicklungssatz angewendet werden. Aus  $q'(s) = 3s^2$  folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{p(s_1)}{q'(s_1)} &= \frac{9}{3} = 3, \\ \frac{p(s_2)}{q'(s_2)} &= 1 - 2\sqrt{3}i, \\ \frac{p(s_3)}{q'(s_3)} &= 1 + 2\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Originalfunktion

$$\begin{aligned} (L^{-1}[r])(t) &= 3e^{-t} + (1 - 2\sqrt{3}i) e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)t} + (1 + 2\sqrt{3}i) e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)t} \\ &= 3e^{-t} + 2e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 4\sqrt{3}e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

### Bemerkung

Wenn man dieses Beispiel ohne den Heaviside'schen Entwicklungssatz angehen will, so kommt man um eine Partialbruchzerlegung wohl nicht herum. Allerdings

könnte man dann die komplexen Zahlen vermeiden, wenn man so vorgeht wie in Beispiel 9.19 angedeutet:

$$\begin{aligned}
 L[y](s) &= \frac{5s^2 + 4s + 8}{s^3 + 1} \\
 &= \frac{3}{s + 1} + \frac{2s + 5}{s^2 - s + 1} \\
 &= \frac{3}{s + 1} + \frac{2s + 5}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{3}{s - (-1)} + 2 \frac{s - \frac{1}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + 6 \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
 &= L \left[ 3e^{-t} + 2e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 4\sqrt{3} e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] (s) \quad (\Re s > -1)
 \end{aligned}$$

### 9.3.2.3 Pol-Nullstellenplan

Aufgrund von Satz 9.5 wird das *Wachstumsverhalten* der Originalfunktion  $f$  ( $s_j = \Re s_j + i\Im s_j =: x_j + iy_j$ )

$$L^{-1}\left(\frac{a_{jl}}{(s - s_j)^l}\right)(t) = \frac{a_{jl}}{(l-1)!} t^{l-1} e^{s_j t} = \frac{a_{jl}}{(l-1)!} t^{l-1} e^{x_j t} (\cos y_j t + i \sin y_j t)$$

für  $t \rightarrow \infty$  wesentlich von  $x_j = \Re s_j$  bestimmt:

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{exponentiell wachsend} & , & x_j = \Re s_j > 0 \\ \text{ungedämpft} & , & x_j = \Re s_j = 0 \\ \text{exponentiell gedämpft} & , & x_j = \Re s_j < 0 \end{cases}$$

Die Imaginärteile  $y_j = \Im s_j$  hingegen bestimmen das Frequenzverhalten von  $f$ . Die Kenntnis der Pole der Laplace-Transformierten  $L[f]$  von  $f$  erlaubt daher bereits im Bildraum qualitative Rückschlüsse auf das asymptotische Verhalten der Zeitfunktion  $f$  im Originalraum (*Pol-Nullstellenplan*) und damit deren Stabilität.

### Beispiel 9.21

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + x &= 4 \sinh t \\
 x(0) &= 2 \\
 \dot{x}(0) &= -1
 \end{aligned}$$

Laplace-Transformation dieses AWP führt auf:

$$\begin{aligned}
 (s^2 + 1)L[x](s) - sx(0) - \dot{x}(0) &= 4L[\sinh t](s) = 2L[e^t](s) - 2L[e^{-t}](s) \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L[x](s) &= \frac{1}{s^2+1} \left( 2s-1 + \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+1} \right) \\
&= \frac{(2s-1)(s^2-1) + 2(s+1) - 2(s-1)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \\
&= \frac{2s^3 - s^2 - 2s + 5}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

Man entnimmt dem Pol-Nullstellenplan (Abb. 9.7; meistens ergänzt um den Einheitskreis in der komplexen  $s$ -Ebene)), daß die Lösung  $x(\cdot)$  des AWP eine Linearkombination der Funktionen

$$t \longmapsto e^t, e^{-t}, \sin t, \cos t \quad (t \geq 0)$$

sein muß.

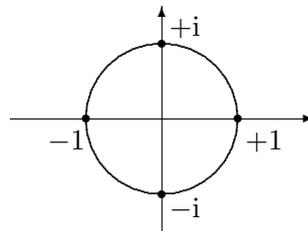


Abbildung 9.7: Pol-Nullstellenplan der Dgl  $\ddot{x} + x = 4 \sinh t$

Dieses AWP soll noch gelöst werden. Dazu wird für die Laplace-Transformierte eine Partialbruchzerlegung durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\frac{2s^3 - s^2 - 2s + 5}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{(-1)}{s+1} + \frac{2s+(-3)}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Die Rücktransformierten der rechts stehenden Partialbrüche sind bekannt, und man erhält die (eindeutig bestimmte) Lösung des AWP zu

$$\begin{aligned}
x(t) &= L^{-1} \left( \frac{1}{s-1} + \frac{(-1)}{s+1} + \frac{2s+(-3)}{s^2+1} \right) (t) \\
&= 1 \cdot L^{-1} \left( \frac{1}{s-1} \right) (t) - 1 \cdot L^{-1} \left( \frac{1}{s+1} \right) (t) \\
&\quad + 2 \cdot L^{-1} \left( \frac{s}{s^2+1} \right) (t) - 3 \cdot L^{-1} \left( \frac{1}{s^2+1} \right) (t) \\
&= 1 \cdot e^t - 1 \cdot e^{-t} + 2 \cdot \cos t - 3 \cdot \sin t \quad (t \geq 0).
\end{aligned}$$

Alternativ könnte hier auch – da die Nullstellen des Nennerpolynoms alle einfach sind – der Heaviside'sche Entwicklungssatz (Satz 9.7) zur Lösung herangezogen werden:

$$L[x](s) = \frac{2s^3 - s^2 - 2s + 5}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = r(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{2s^3 - s^2 - 2s + 5}{s^4 - 1}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  sind hier

$$s_1 = 1 \quad , \quad s_2 = i \quad , \quad s_3 = -1 \quad , \quad s_4 = -i,$$

und aus  $q'(s) = 4s^3$  folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{p(s_1)}{q'(s_1)} &= \frac{4}{4} = 1 \quad , \quad \frac{p(s_2)}{q'(s_2)} = \frac{6 - 4i}{-4i} = 1 + \frac{3}{2}i \quad , \\ \frac{p(s_3)}{q'(s_3)} &= \frac{4}{-4} = -1 \quad , \quad \frac{p(s_4)}{q'(s_4)} = \frac{6 + 4i}{4i} = 1 - \frac{3}{2}i \quad . \end{aligned}$$

Damit erhält man die Originalfunktion

$$\begin{aligned} (L^{-1}[r])(t) &= 1 \cdot e^t + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)e^{it} + (-1) \cdot e^{-t} + \left(1 - \frac{3}{2}i\right)e^{-it} \\ &= 1 \cdot e^t - 1 \cdot e^{-t} + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)}_{\cos t} + 3i \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right)}_{i \sin t} \\ &= 1 \cdot e^t - 1 \cdot e^{-t} + 2 \cdot \cos t - 3 \cdot \sin t \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

### Qualitativer Pol-Nullstellenplan

Anhand des letzten Beispiels soll im folgenden der Frage nachgegangen werden, wodurch die Pole der Bildfunktion  $L[x]$  bestimmt werden. Pole von  $L[x]$  ergeben sich aus

- den Nullstellen des charakteristischen Polynoms, durch welches man zur expliziten Auflösung nach  $L[x]$  im Bildraum dividiert hat,

$$\text{hier:} \quad P(s) = s^2 + 1 \quad ,$$

- eventuell auftretenden Polen der Bildfunktion der Störfunktion der Dgl,

$$\text{hier:} \quad L[e^t](s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{und} \quad L[e^{-t}](s) = \frac{1}{s+1} \quad .$$

Dieser Sachverhalt soll jetzt allgemein untersucht werden. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x &= f(t) \\ x(0) &= x_0 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(0) &= x_{n-1} \end{aligned} \tag{9.6}$$

Die dazugehörige Lösung im Bildraum ist gegeben durch

$$L[x](s) = \frac{R(s) + L[f](s)}{P(s)} = \frac{R(s)}{P(s)} + \frac{1}{P(s)} \cdot L[f](s) \quad (9.7)$$

mit dem charakteristischen Polynom  $P(\cdot)$  vom Grade  $n$  und einem Polynom  $R(\cdot)$  vom Grade  $n - 1$ , welches sich aufgrund des Differentiationsatzes aus den Anfangswerten ergibt.

### Beispiel 9.22

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 30\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = \cosh t \quad (t \geq 0)$$

Eine Linearkombination welcher Zeitfunktionen erwartet man aufgrund des Pol-Nullstellenplans?

### Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} P(s) &= s^4 + 4s^3 + 30s^2 + 4s + 29 \\ &= s^4 + 4s^3 + s^2 + 4s + 29s^2 + 29 \\ &= s^2(s^2 + 1) + 4s(s^2 + 1) + 29(s^2 + 1) \\ &= (s^2 + 4s + 29)(s^2 + 1) \\ &= (s - [-2 + 5i])(s - [-2 - 5i])(s^2 + 1) \end{aligned}$$

Diese Pole liefern die Zeitfunktionen

$$\mathcal{A} := \{t \mapsto e^{-2t} \cos 5t, t \mapsto e^{-2t} \sin 5t, t \mapsto \cos t, t \mapsto \sin t\}.$$

### Pole der Bildfunktion der rechten Seite

$$\begin{aligned} L[\cosh t](s) &= L\left[\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right](s) \\ &= \frac{1}{2}L[e^t](s) + \frac{1}{2}L[e^{-t}](s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \quad (\Re s > 1) \end{aligned}$$

Diese Pole liefern die Zeitfunktionen

$$\mathcal{B} := \{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}\}.$$

### 9.3.3 Rücktransformation nichtrationaler Bildfunktionen

Die Rücktransformation gestaltet sich i.a. schwieriger, wenn die Störfunktion der Dgl – die Inhomogenität oder rechte Seite – keine rationale Bildfunktion besitzt. Die hierbei angewandte Vorgehensweise funktioniert natürlich auch bei rationalen Bildfunktionen, und es stellt sich heraus, daß sie zu einer Lösungsmethode Anlaß gibt, bei welcher man die Laplace-Transformation oft gar nicht

mehr braucht, ja gar nicht anwenden kann, weil eine oder mehrere der auftretenden Funktionen nicht Laplace-transformierbar sind.

Ausgangspunkt ist die Beziehung (9.7) für das inhomogene AWP (9.6), welche wie folgt umgeschrieben wird:

$$\begin{aligned} L[x](s) &= \frac{R(s) + L[f](s)}{P(s)} \\ &= \frac{R(s) + 0}{P(s)} + \frac{0 + L[f](s)}{P(s)} \\ &=: \text{Teilproblem I} + \text{Teilproblem II} \end{aligned}$$

### Teilproblem I

*Homogene* Differentialgleichung mit den vorliegenden (*inhomogenen*) Anfangswerten, welche im Bildraum zum Polynom  $R$  vom Grade  $n - 1$  führen.

### Lösung zu Teilproblem I

Die Lösung  $\frac{R(s)}{P(s)}$  im Bildraum ist eine echt gebrochen rationale Funktion und kann mittels Partialbruchzerlegung – sofern die Nullstellen des Nennerpolynoms explizit ermittelt werden können – in eine Summe von Funktionen zerlegt werden, deren inverse Laplace-Transformierte man sofort ablesen kann; vgl. dazu Satz 9.6. Dieses Vorgehen führt zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und ist im letzten Abschnitt untersucht worden.

### Teilproblem II

*Inhomogene* Differentialgleichung mit *homogenen* Anfangswerten. Hier ist also eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu den Anfangswerten 0 gesucht.

### Lösung zu Teilproblem II

Sei  $x_p$  die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Dgl, für die gilt:

$$x_p(0) = x_p'(0) = \dots = x_p^{(n-1)}(0) = 0.$$

Dann ergibt sich die Lösung im Bildraum zu

$$L[x_p](s) = \frac{L[f](s)}{P(s)} = \frac{1}{P(s)} \cdot L[f](s) =: Q(s) \cdot L[f](s)$$

mit der Abkürzung  $Q$  für das inverse charakteristische Polynom.  $Q$  besitzt als echt gebrochen rationale Funktion die eindeutig bestimmte Originalfunktion  $q$ :

$$q(t) := (L^{-1}[Q])(t) \quad (t \geq 0);$$

$q$  heißt *Gewichtsfunktion* oder *Green'sche Funktion*.

Dann erhält man die gesuchte partikuläre Lösung mit Hilfe des Faltungssatzes aus

$$L[x_p](s) = Q(s) \cdot L[f](s) = L[q](s) \cdot L[f](s) = L[q * f](s)$$

als Faltung der Inhomogenität  $f$  mit der Green'schen Funktion  $q$ :

$$x_p(t) = (q * f)(t) = \int_0^t q(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (t \geq 0).$$

### Lösung des gesamten AWP (9.6)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + (q * f)(t) \quad (t \geq 0) \quad (9.8)$$

Man beachte, daß das letzte Ergebnis keinen Bezug zur Laplace-Transformation – und damit zur Laplace-Transformierbarkeit einer Funktion – mehr nimmt.

Unabhängig davon, ob die in der Dgl auftretenden Funktionen  $x(\cdot), \dots, x^{(n)}(\cdot), f(\cdot)$  Laplace-transformierbar sind oder nicht – etwa, weil sie nicht stückweise stetig oder nicht von exponentieller Ordnung sind –, kann man mit dem nächsten Satz eine Lösung des AWP erhalten, falls  $f(\cdot)$  einer einfachen Voraussetzung in nur einem echten Teilintervall von  $[0, \infty)$  genügt.

### Satz 9.8

$f$  sei in  $(0, \infty)$  stückweise stetig, und  $\int_0^t |f(\tau)| d\tau$  existiere für eine Zahl  $t > 0$ , evtl. uneigentlich; das ist insbesondere für alle Funktionen von exponentieller Ordnung der Fall.

Dann ist die Lösung (9.8) außerhalb der Sprungstellen die eindeutig bestimmte Lösung des AWP

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x &= f(t) \\ x(0) &= 0 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

### Beispiel 9.23

$$\ddot{x} + x = f(t) := \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad 1 \leq t \end{cases}$$

$$x(0) = 2$$

$$\dot{x}(0) = 1.$$

Die Funktion  $f$  ist stetig bis auf die Sprungstelle bei  $t = 1$ , also insbesondere stückweise stetig. Trivialerweise ist sie auch von exponentieller Ordnung, also existiert ihr Laplace-Integral.

### Lösung zu Teilproblem I

Das homogene AWP

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= 0 \\ x(0) &= 2 \\ \dot{x}(0) &= 1.\end{aligned}$$

besitzt wegen

$$\begin{aligned}L[x_h](s) &= \frac{R(s) + 0}{P(s)} \\ &= \frac{2s + 1}{s^2 + 1} = 2 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} \\ &= 2 L[\cos t](s) + L[\sin t](s) = L[2 \cos t + \sin t](s)\end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_h(t) = 2 \cos t + \sin t \quad (t \geq 0).$$

### Lösung zu Teilproblem II

$x_p := q * f$  ist die eindeutig bestimmte Lösung des AWP

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= f(t) := \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < 1 \\ 0 & , 1 \leq t \end{cases} \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0.\end{aligned}$$

$q$  ist dabei die Originalfunktion des inversen charakteristischen Polynoms (Green'sche Funktion):

$$q(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \sin t \quad (t \geq 0).$$

Damit erhält man die Funktion  $x_p$  als (Integration nach  $\tau$ )

$$x_p(t) = \begin{cases} \int_0^t q(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_0^t \sin(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = 1 - \cos t & , 0 \leq t < 1 \\ \int_0^1 q(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_0^1 \sin(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = \cos(t - 1) - \cos t & , 1 \leq t . \end{cases}$$

**Lösung des gesamten AWP**

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \begin{cases} \cos t + \sin t + 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ \cos t + \sin t + \cos(t-1) & , \quad 1 \leq t \end{cases}$$

**Aufgabe**

Man zeige, daß die gesamte Lösung aus der Klasse  $\mathcal{C}^1([0, \infty))$ , bei  $t = 1$  aber nicht mehr aus der Klasse  $\mathcal{C}^2([0, \infty))$  ist. Nach Satz 9.8 ist hier auch nicht mehr zu erwarten, da die rechte Seite der Differentialgleichung des vorliegenden Anfangswertproblems bei  $t = 1$  nicht stetig ist.

**Bemerkung**

Ist die Funktion  $f$  sogar Laplace-transformierbar – dies wird in Satz 9.8 nicht verlangt – und hat sie die Laplace-Transformierte  $L[f]$ , so kann für die Rücktransformation von  $Q(s) \cdot L[f](s)$  statt des Faltungssatzes mitunter auch eine andere Methode zur Bestimmung einer partikulären Lösung  $x_p$  verwendet werden – die direkte Berechnung des Laplace-Integrals – die Berechnung des Faltungsintegrals entfällt dann. Dazu das folgende

**Beispiel 9.24**

Dasselbe AWP wie im letzten Beispiel wird unter Beachtung der letzten Bemerkung gelöst. Das Ganze läuft dann auf die Methode der Partialbruchzerlegung der gesamten rechten Seite hinaus, wie sie im letzten Abschnitt angewendet wurde. Zusätzlich wird bei diesem Beispiel allerdings noch der erste Verschiebungssatz benötigt.

**Lösung zu Teilproblem I**

Wie im letzten Beispiel ergibt sich hier die eindeutig bestimmte Lösung zu

$$x_h(t) = 2 \cos t + \sin t \quad (t \geq 0).$$

**Lösung zu Teilproblem II**

$$L[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^1 = \frac{1}{s} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s}$$

Daraus folgt mit Hilfe des ersten Verschiebungssatzes

$$\begin{aligned}
 \frac{L[f](s)}{P(s)} &= \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - e^{-s} \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \right) \\
 &= L[\sigma_0](s) - L[\sigma_0 \cos](s) - \left( L[\sigma_0(t-1)](s) - L[\sigma_0(t-1)\cos(t-1)](s) \right) \\
 &= L[\sigma_0](s) - L[\sigma_0 \cos](s) - \left( L[\sigma_1(t)](s) - L[\sigma_1(t)\cos(t-1)](s) \right) \\
 &= \begin{cases} L[\sigma_0(1-\cos) - (0-0)](s) = 1 - \cos t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ L[\sigma_0(1-\cos) - \underbrace{\sigma_1}_1(1-\cos(t-1))](s) = \cos(t-1) - \cos t & , \quad 1 \leq t , \end{cases}
 \end{aligned}$$

und daraus folgt die Gesamtlösung wie im letzten Beispiel zu

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \begin{cases} \cos t + \sin t + 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ \cos t + \sin t + \cos(t-1) & , \quad 1 \leq t . \end{cases}$$

### Bemerkung

Die Voraussetzung der Existenz des Integrals  $\int_0^t |f(\tau)| d\tau$  aus Satz 9.8 für eine Zahl  $t > 0$  läßt auch Funktionen zu, die im Nullpunkt sogar eine Singularität haben, wie z.B.

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t > 0);$$

die Funktion muß an der Singularität allerdings absolut integrierbar sein.

### Aufgabe

Man berechne die Laplace-Transformierte der Funktion der letzten Bemerkung.

### Hinweis

Substitution  $\sqrt{st} = u$  im Laplace-Integral und Berücksichtigung von  $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

## 9.4 Anwendungen in der Nachrichten- und Regelungstechnik

### 9.4.1 Übertragungsfunktion eines Netzwerkes

Die *innere Struktur* eines physikalischen oder technischen Systems, das sich durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizi-

enten beschreiben läßt, ist durch die homogene Differentialgleichung mit den gegebenen Anfangswerten bestimmt; die zugehörige Lösung heiße  $x_h$ .

Die *äußeren Einwirkungen* auf das modellierte System werden durch die Funktion  $x_e$  (Erregung, Eingangsfunktion, Steuerfunktion, Störfunktion, Eingangssignal) ausgedrückt. Die bei verschwindenden Anfangswerten zugehörige Lösung der inhomogenen Gleichung (Antwort, Ausgangsfunktion, Ausgangssignal) heiße  $x_a$ . Nach dem letzten Abschnitt gilt dann

$$x_a(t) = (q * x_e)(t) \quad (t \geq 0).$$

mit der Green'schen Funktion  $q$  als Originalfunktion des inversen charakteristischen Polynoms  $Q$ .

In zwei folgenden Abschnitten wird die Antwortfunktion  $x_a$  für zwei wichtige Eingangsfunktionen  $x_e$  untersucht. Vor der eigentlichen Durchführung dieser konkreten Fälle soll die Betrachtung hier allerdings soweit wie möglich allgemein gehalten werden, damit man Einblicke in die Struktur der Lösung gewinnen kann.

Es wird das Anfangswertproblem für ein im Zeitpunkt  $t = 0$  energieloses System gelöst – das System hat also keine Vergangenheit:

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x &= x_e(t) \\ x(0) &= 0 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Im Bildbereich ergibt sich

$$P(s) \cdot L[x_a](s) = L[x_e](s),$$

$$L[x_a](s) = \frac{1}{P(s)} L[x_e](s) = Q(s) L[x_e](s)$$

mit dem inversen charakteristischen Polynom  $Q$ , welches hier *Übertragungsfunktion* heißt. Eine formale Rücktransformation mit Hilfe des Faltungssatzes liefert die Lösung (die *Antwort* des Systems)

$$x_a(t) = (q * x_e)(t)$$

gemäß Diagramm 9.8 mit der *Gewichtsfunktion* oder Green'schen Funktion  $q$ .

Von der Bildgleichung

$$L[x_a](s) = Q(s) L[x_e](s)$$

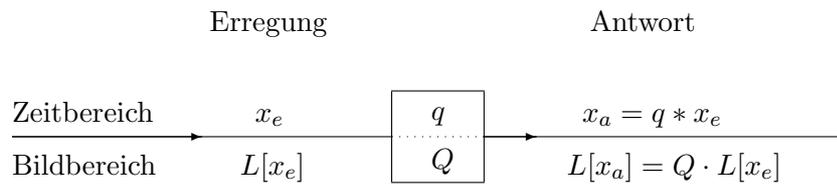


Abbildung 9.8: Übertragungsfunktion eines Systems als „Black Box“

kann bei Laplace-transformierbarem Eingangssignal  $x_e$  die Ausgangsfunktion  $x_a$  in der Regel sehr viel einfacher ermittelt werden als durch die Berechnung des Faltungsintegrals

$$x_a(t) = (q * x_e)(t) \quad (t \geq 0)$$

im Zeitbereich, etwa durch eine Partialbruchzerlegung bei rationalem  $Q$  und anschließender Rücktransformation mit Hilfe einer Tabelle.

Und zwar deshalb, weil die Übertragungsfunktion  $Q$  in sehr einfacher Weise die transformierte Eingangsfunktion  $F := L[x_e]$  mit der transformierten Ausgangsfunktion  $G := L[x_a]$  verknüpft, nämlich multiplikativ:

$$G(s) = Q(s) \cdot F(s) \quad (\Re s > 0).$$

Werden nun mehrere Systeme durch Serien-, Parallel- oder Rückführschaltungen zusammengefügt, so spiegelt sich das in einfachen Rechnungen mit den Übertragungsfunktionen wider; davon wird in der Elektrotechnik, Nachrichtentechnik, Regelungstechnik und Systemtheorie ausgiebig Gebrauch gemacht. Dabei gelten die folgenden Verknüpfungsregeln für Übertragungsglieder:

**Satz 9.9**

Für die Verknüpfung von Übertragungsgliedern gilt bei

- (i) Reihenschaltung:  $Q(s) = Q_1(s) \cdot Q_2(s)$
- (ii) Parallelschaltung:  $Q(s) = Q_1(s) + Q_2(s)$
- (iii) Erste Rückführschaltung:  $Q(s) = \frac{Q_1(s)}{1 \pm Q_1(s)Q_2(s)}$
- (iv) Zweite Rückführschaltung:  $Q(s) = \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{1 \pm Q_1(s)Q_2(s)}$

*Beweis*

Der Nachweis dieser Regeln erfolgt jeweils aus den beiden Beziehungen

$$G_1(s) = Q_1(s) \cdot F_1(s) \quad \text{und} \quad G_2(s) = Q_2(s) \cdot F_2(s) \quad (9.10)$$

für die einzelnen Fälle wie folgt:

(i)  $F(s) = F_1(s)$  ,  $F_2(s) = G_1(s)$  ,  $G_2(s) = G(s)$  ; s. Abb. 9.9.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_2(s) \stackrel{(9.10)}{=} Q_2(s)F_2(s) = Q_2(s)G_1(s) \\ &\stackrel{(9.10)}{=} Q_2(s)Q_1(s)F_1(s) \\ &= Q_2(s)Q_1(s)F(s) \\ \longrightarrow \quad Q(s) &= Q_1(s)Q_2(s) \end{aligned}$$

(ii)  $F(s) = F_1(s) = F_2(s)$  ,  $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$  ; s. Abb. 9.10.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s) + G_2(s) \stackrel{(9.10)}{=} Q_1(s)F_1(s) + Q_2(s)F_2(s) \\ &= (Q_1(s) + Q_2(s))F(s) \\ \longrightarrow \quad Q(s) &= Q_1(s) + Q_2(s) \end{aligned}$$

(iii)  $F_1(s) = F(s) \mp G_2(s)$  ,  $G(s) = G_1(s) = F_2(s)$  ; s. Abb. 9.11<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s) \stackrel{(9.10)}{=} Q_1(s)F_1(s) = Q_1(s)(F(s) \mp G_2(s)) \\ &\stackrel{(9.10)}{=} Q_1(s)(F(s) \mp Q_2(s)F_2(s)) = Q_1(s)(F(s) \mp Q_2(s)G(s)) \\ &= Q_1(s)F(s) \mp Q_1(s)Q_2(s)G(s), \\ G(s) &= \frac{Q_1(s)}{1 \pm Q_1(s)Q_2(s)} F(s) \\ \longrightarrow \quad Q(s) &= \frac{Q_1(s)}{1 \pm Q_1(s)Q_2(s)} \end{aligned}$$

(iv)  $F_1(s) = F(s) \mp G_2(s)$  ,  $G(s) = G_2(s)$  ,  $F_2(s) = G_1(s)$  ; s. Abb. 9.12.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_2(s) \stackrel{(9.10)}{=} Q_2(s)F_2(s) = Q_2(s)G_1(s) \\ &\stackrel{(9.10)}{=} Q_2(s)Q_1(s)F_1(s) \\ &= Q_2(s)Q_1(s)(F(s) \mp G_2(s)) = Q_2(s)Q_1(s)(F(s) \mp G(s)), \\ G(s) &= \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{1 \pm Q_1(s)Q_2(s)} F(s) \\ \longrightarrow \quad Q(s) &= \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{1 \pm Q_1(s)Q_2(s)} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Mit  $D$  in Abb. 9.11 wird die *Diskriminante* der homogenen Gleichung bezeichnet,

$$D := \delta^2 - \omega_0^2 = \frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{LC}.$$

$D$  bestimmt die Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit die Übertragungsfunktion  $Q$ . In technisch wichtigen Fällen ist  $D < 0$ , und damit sind beide Lösungen exponentiell gedämpft.

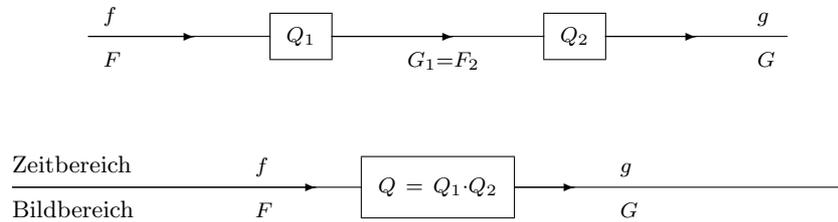


Abbildung 9.9: Übertragungsfunktion einer Serienschaltung

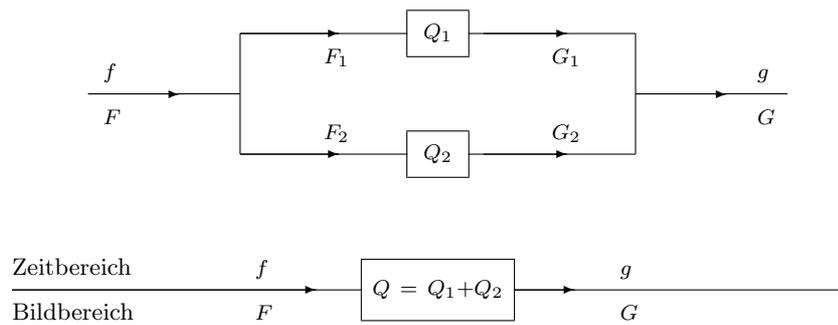


Abbildung 9.10: Übertragungsfunktion einer Parallelschaltung

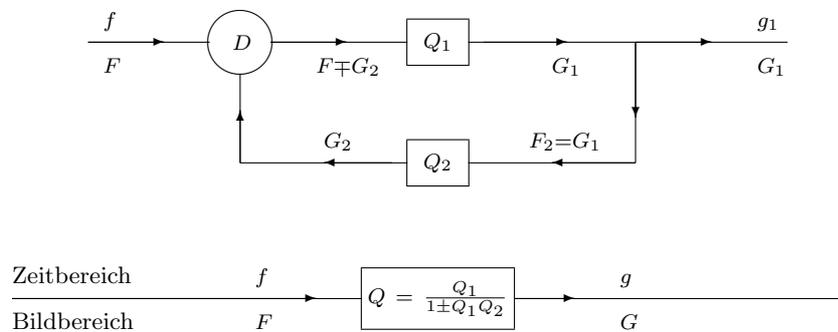


Abbildung 9.11: Übertragungsfunktion der ersten Rückführschaltung

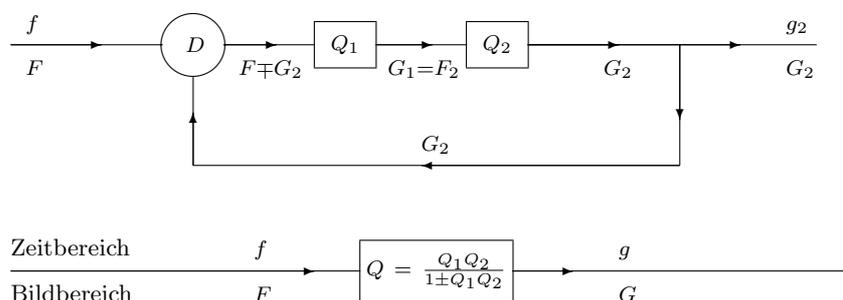


Abbildung 9.12: Übertragungsfunktion der zweiten Rückführschaltung

**Beispiel 9.25**

Man bestimme die Übertragungsfunktion für das in Abb. 9.13 angegebene Schaltbild. Dabei handelt es sich um einen *Hochpaß*: tiefe Frequenzen werden gesperrt, hohe Frequenzen werden durchgelassen, und was dann immer noch an tiefen Frequenzen durchkommt, wird über die Spule kurzgeschlossen.

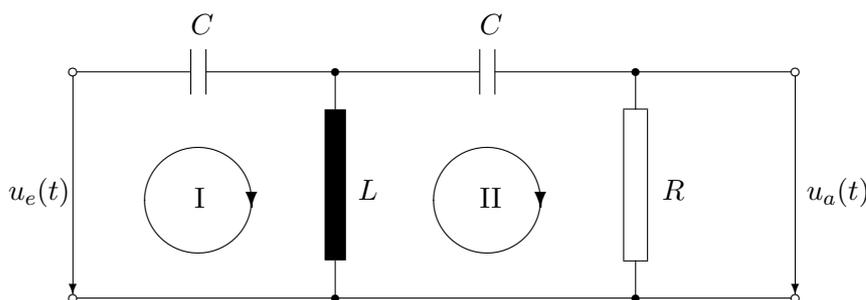


Abbildung 9.13: Hochpaß als Beispiel für ein Produkt zweier Übertragungsfunktionen

**Lösung**

- (i) Methode mit Hilfe der Maschenregeln, s. Abb. 9.13. Ausgehend von den zwei Maschen, erhält man die folgenden beiden Gleichungen im Bildraum:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad L[u_e](s) &= L[i_I](s) \left( \frac{1}{sC} + sL \right) - L[i_{II}](s) sL \\
 \longrightarrow L[i_I](s) &= \frac{(L[u_e](s) + L[i_{II}](s) sL) sC}{1 + s^2 LC} \\
 \text{(II)} \quad 0 &= -L[i_I](s) sL + L[i_{II}](s) \left( sL + \frac{1}{sC} + R \right) \\
 \longrightarrow L[i_I](s) &= L[i_{II}](s) \frac{s^2 LC + sRC + 1}{s^2 LC}
 \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von  $L[i_I](s)$  aus (I) und (II) folgt

$$L[i_{II}](s) = L[u_e](s) \frac{s^3 LC^2}{s^3 RLC^2 + s^2 2LC + sRC + 1} .$$

Nun folgt aus dem Ohm'schen Gesetz  $L[u_a](s) = L[i_{II}](s)R$

$$\frac{L[u_a](s)}{R} = L[i_{II}](s) = L[u_e](s) \frac{s^3 LC^2}{s^3 RLC^2 + s^2 2LC + sRC + 1} ,$$

und damit ist die Übertragungsfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{L[u_a](s)}{L[u_e](s)} = \frac{s^3 RLC^2}{s^3 RLC^2 + s^2 2LC + sRC + 1} .$$

- (ii) Methode mit Hilfe des Produktes von zwei einzelnen Übertragungsfunktionen, s. Abb. 9.14, d.h. der Vierpol 9.13 wird zerlegt in eine Reihenschaltung zweier einfacherer Vierpole<sup>3</sup>

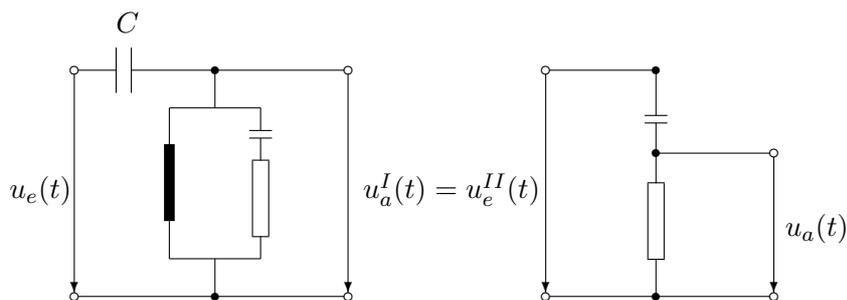


Abbildung 9.14: Hochpaß als Serienschaltung zweier Vierpole

Hier ist die Ausgangsspannung  $u_a^I$  des ersten Vierpols gleich der Eingangsspannung  $u_e^{II}$  des zweiten Vierpols. Die gesamte Übertragungsfunktion ergibt sich dann nach Satz 9.9 (i) als Produkt der Übertragungsfunktionen der einzelnen Vierpole nach der Spannungsteilerregel, angewandt auf jeden der einzelnen Vierpole, zu ( $u_e^I := u_e$ ,  $u_a^{II} := u_a$ )

$$\begin{aligned} G(s) &= G^{II}(s) \cdot G^I(s) \\ &= \frac{L[u_a](s)}{L[u_e](s)} = \frac{L[u_a^{II}](s)}{L[u_e^{II}](s)} \cdot \frac{L[u_a^I](s)}{L[u_e^I](s)} \\ &= \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{\frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{sC}} + \frac{1}{sL}}}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{sC}} + \frac{1}{sL}}} \\ &= \dots \\ &= \frac{s^3 RLC^2}{s^3 RLC^2 + s^2 2LC + sRC + 1} . \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Ein Vierpol ist ein elektrisches Netzwerk mit einem Eingangs- und einem Ausgangsklemmenpaar.

- (iii) Die Berechnung der Gesamtübertragungsfunktion  $G$  als Produkt der Übertragungsfunktionen der Teilkreise  $G^I$  und  $G^{II}$  ist dabei auch eine direkte Folgerung aus der Assoziativität der Faltung im Zeitbereich. Mit

$$u_a^I = q_1 * u_e^I, \quad , \quad u_a^{II} = q_2 * u_e^{II}$$

ergibt sich wegen  $u_a^I = u_e^{II}$  im Zeitbereich nämlich

$$u_a^{II} = q_2 * u_e^{II} = q_2 * u_a^I = q_2 * (q_1 * u_e^I) = (q_2 * q_1) * u_e^I.$$

Daraus folgt im Bildbereich

$$L[u_a^{II}] = L[(q_2 * q_1) * u_e^I] = L[q_2 * q_1] \cdot L[u_e^I],$$

$$G = \frac{L[u_a^{II}]}{L[u_e^I]} = L[q_2 * q_1] = L[q_2] \cdot L[q_1] = G^{II} \cdot G^I$$

Die beiden Ergebnisse von (i) und (ii) sind also identisch, wie zu erwarten.

### Aufgabe

Wie sieht das Schaltbild eines *Tiefpasses* aus, und wie lautet die Übertragungsfunktion dafür?

### 9.4.2 Laplace-Transformation und Symbolische Methode

Liegt am Eingang eines *passiven Vierpols* eine sinusförmige Wechselspannung an, so erhält man am Ausgang ebenfalls eine sinusförmige Wechselspannung derselben Frequenz, vorausgesetzt, der Vierpol besteht nur aus linearen Bausteinen, d.h. solchen, welche die Eingangsfrequenz nicht ändern:

$$\begin{aligned} u_e(t) &= \hat{u}_e \cdot \sin(\omega t + \phi_e) \\ \longrightarrow u_a(t) &= \hat{u}_a \cdot \sin(\omega t + \phi_a) \end{aligned}$$

Der Quotient  $G(t) := \frac{u_a(t)}{u_e(t)}$  heißt *Übertragungsfaktor* des Systems zur Zeit  $t$ .

Verwendet man die symbolische Methode der Netzwerkberechnung, d.h. die komplexe Darstellung von Spannungen und Strömen,

$$\begin{aligned} u_e(t) &\longmapsto \underline{u}_e(t) = u_e \cdot e^{i(\omega t + \phi_e)} = u_e e^{i\phi_e} \cdot e^{i\omega t} =: \underline{u}_e \cdot e^{i\omega t} \\ u_a(t) &\longmapsto \underline{u}_a(t) = u_a \cdot e^{i(\omega t + \phi_a)} = u_a e^{i\phi_a} \cdot e^{i\omega t} =: \underline{u}_a \cdot e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

so läßt sich der Zeitanteil bekanntermaßen separieren, und der (komplexe) Übertragungsfaktor des Systems hängt von der Zeit  $t$  gar nicht mehr ab:

$$G := G(t) = \frac{\underline{u}_a(t)}{\underline{u}_e(t)} = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = \frac{\sqrt{2}U_a}{\sqrt{2}U_e} = \frac{U_a}{U_e}$$

mit den komplexen Effektivwerten  $\underline{U}_e$  und  $\underline{U}_a$ . Diese beinhalten alle Informationen über die Spannungen an den einzelnen Vierpolelementen.

**Beispiel 9.26**

Nach dem Ohm'schen Gesetz der Wechselstromtechnik

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

gelten für die komplexen Widerstände der einzelnen Schaltelemente die folgenden Beziehungen:

$$\underline{Z}_R = R \quad , \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} \quad , \quad \underline{Z}_L = i\omega L.$$

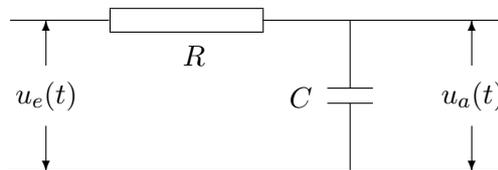


Abbildung 9.15: Passives elektrisches Netzwerk mit einem Kondensator

Für das in Abb. 9.15 gezeichnete Beispiel ergibt sich der Übertragungsfaktor zu

$$G = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \cdot \frac{I}{I} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{i\omega RC + 1} \quad (9.11)$$

Die Übertragungsfunktion des Systems ist definiert als Quotient von Ausgangs- und Eingangsgröße im Bildraum:

$$Q(s) = \frac{L[x_a](s)}{L[x_e](s)} \stackrel{\text{(hier)}}{=} \frac{L[u_a](s)}{L[u_e](s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1} \quad (9.12)$$

Vergleicht man (9.11) mit (9.12), so stellt man fest:

Man gewinnt die Übertragungsfunktion des Systems aus dem Übertragungsfaktor dadurch, daß man letzteren als Funktion der Variable  $r := i\omega$  auffaßt und lediglich  $r$  durch  $s$  ersetzt:

$$H(i\omega) := G = \frac{1}{i\omega RC + 1}$$

$$Q(s) = \frac{1}{sRC + 1}$$

Das Ganze funktioniert wegen der Korrespondenzen aus Tabelle 9.2. Diese Ersetzung muß allerdings vor Rechnungen wie etwa  $i\omega C \cdot i\omega L = -\omega^2 CL$  durchgeführt werden.

	Ohm'scher Widerstand $R$	Induktiver Widerstand $L$	Kapazitiver Widerstand $C$
Zeitbereich	$u = R \cdot i$	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$
Bildbereich	$\frac{L[u](s)}{L[i](s)} = R$	$\frac{L[u](s)}{L[i](s)} = sL$	$\frac{L[u](s)}{L[i](s)} = \frac{1}{sC}$
Symb. Methode	$Z_R = R$	$Z_L = i\omega L$	$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

Tabelle 9.2: Korrespondenz zwischen Übertragungsfunktion und  $-$ faktor

### 9.4.3 Sprungfunktion als Eingangssignal

Als erstes Test-Eingangssignal wird die Sprungfunktion  $\sigma(\cdot)$  oder die Heaviside-Funktion untersucht, s. Abb. 9.17:

$$x_e(t) := x_0 \cdot \sigma(t) \quad (t \in \mathbb{R}, x_0 > 0 \text{ geeignet}).$$

$x_0$  heißt *Sprunghöhe*, und das zugehörige Ausgangssignal heißt *Sprungantwort*; es wird mit  $x_a(\cdot)$  bezeichnet. Der Quotient aus Sprungantwort und Sprunghöhe heißt *Übergangsfunktion* und wird mit  $h$  bezeichnet:

$$h(t) := \frac{x_a(t)}{x_0} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

#### Beispiel 9.27

Man betrachte den elektromagnetischen Reihenschwingkreis aus Abb. 9.16.



Abbildung 9.16: Elektrischer Reihenschwingkreis

Es gilt das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangswerten

$$\begin{aligned} LC\ddot{u}_a + RC\dot{u}_a + u_a &= u_e(t) & (t \geq 0) \\ u_a(0) &= 0 \\ \dot{u}_a(0) &= 0. \end{aligned}$$

Für das Übertragungsverhalten des Systems gilt im Bildraum

$$\begin{aligned}
 L[u_a](s) &= Q(s)L[u_e](s) = \frac{1}{P(s)} L[u_e](s) \\
 &= \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)} L[u_e](s) \\
 &= \frac{1}{LC \left[ s^2 + \frac{R}{L}s + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \right]} L[u_e](s) \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} L[u_e](s) \\
 &=: \frac{\omega_0^2}{(s + \delta)^2 + \omega_1^2} L[u_e](s)
 \end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \delta := \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_1^2 := \omega_0^2 - \delta^2.$$

Für das Eingangssignal

$$u_e(t) := u_0 \cdot \sigma(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ist  $L[u_a]$  eine rationale Funktion, und man erhält nach einer Partialbruchzerlegung die Sprungantwort im Bildraum:

$$\begin{aligned}
 L[u_a](s) &= \frac{\omega_0^2}{(s + \delta)^2 + \omega_1^2} \cdot \frac{u_0}{s} \\
 &= u_0 \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\delta}{(s + \delta)^2 + \omega_1^2} \right].
 \end{aligned}$$

Die Antwort  $u_a(\cdot)$  (Abb. 9.18) im Originalraum ist die inverse Laplace-Transformierte der Sprungantwort  $L[u_a]$ , so daß man für die Übergangsfunktion  $h$  erhält:

$$h(t) = \frac{u_a(t)}{u_0} = \begin{cases} 1 - e^{-\delta t} \left[ \cos \omega_1 t + \frac{\delta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] & , \quad \omega_0 > \delta \\ 1 - e^{-\delta t} (1 + \delta t) & , \quad \omega_0 = \delta \\ 1 - e^{-\delta t} \left[ \cosh \omega_2 t + \frac{\delta}{\omega_2} \sinh \omega_1 t \right] & , \quad \omega_0 < \delta \quad (\omega_2^2 := -\omega_1^2) \end{cases}$$

#### 9.4.4 Dirac'sche Deltafunktion

##### Annahme

Es existiert eine Erregung

$$x_e^\delta(t) := x_e(t) \quad (t \geq 0)$$

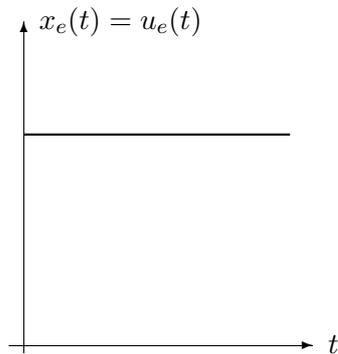


Abbildung 9.17: Sprungerregung

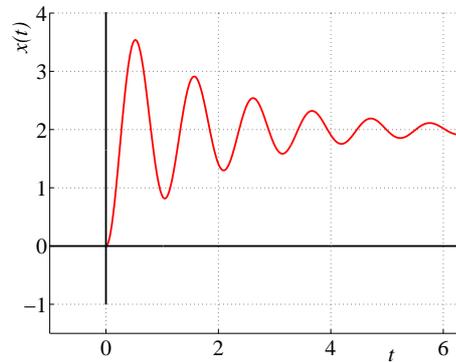


Abbildung 9.18: Sprungantwort

mit der Eigenschaft

$$L[x_e^\delta](s) := 1 \quad (\Re s > 0).$$

Diese Annahme kann für eine „vernünftige“ Funktion nicht richtig sein, denn sie widerspricht Satz 9.2: die Laplace-Transformierte einer stückweise stetigen Funktion von exponentieller Ordnung verschwindet im Unendlichen. Ich mache sie dennoch einmal!

Wegen der verschwindenden Anfangswerte hätte man für die Antwort im Bildraum

$$L[x_a^\delta] = Q \cdot L[x_e^\delta] = Q = \frac{1}{P},$$

und man könnte die Antwort im Originalraum über eine Partialbruchzerlegung sofort hinschreiben:

$$x_a^\delta(t) = (L^{-1}[Q])(t) =: q(t) \quad (t \geq 0);$$

d.h. die Systemantwort  $x_a^\delta$  für diese spezielle Erregung ist die Gewichtsfunktion (Green'sche Funktion)  $q$ .

Sei nun  $x_e$  eine beliebige Erregung des Systems. Unter obigen Voraussetzungen kennt man deren Antwort sofort als Faltung mit der speziellen Antwort  $x_a^\delta$ :

$$L[x_a] = Q \cdot L[x_e] = L[x_a^\delta] \cdot L[x_e] = L[x_a^\delta * x_e]$$

$$\longrightarrow x_a = x_a^\delta * x_e.$$

Wie kommt man nun zu einer Originalfunktion  $x_e^\delta$ , deren Laplace-Transformierte überall gleich 1 ist? Dazu wird zunächst die Laplace-Transformierte  $L[x_T]$  eines Rechteckimpulses  $x_T$  der Fläche 1 berechnet, s. Abb. 9.19.

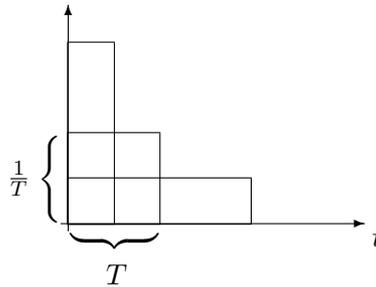


Abbildung 9.19: Rechteckimpuls der Fläche  $\frac{1}{T} \cdot T = 1$

Man erhält

$$\begin{aligned} L[x_T](s) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{T} [\sigma(t) - \sigma(t - T)] e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1}{T} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{Ts} (1 - e^{-Ts}) \quad (\Re s > 0). \end{aligned}$$

Führt man auf der rechten Seite den Grenzübergang  $T \rightarrow 0$  durch, um einen sehr kurzen Impuls als „Grenzwert“ einer Folge von immer kürzer werdenden Impulsen mit gleichbleibender Impulsfläche (Energie) zu kennzeichnen, so existiert dieser Grenzwert, und es gilt mit der l’Hospital’schen Regel (Ableitung nach  $T$ )

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s e^{-Ts}}{s} = 1 \quad (\Re s > 0).$$

### Ergebnis

Die Laplace-Transformierten der Funktionenschar

$$x_T(t) := \frac{1}{T} [\sigma(t) - \sigma(t - T)] \quad (t \geq 0)$$

konvergieren für  $T \rightarrow 0$  im Bildraum gegen die Funktion 1. Gegen welche Funktion konvergiert dann die Funktionenschar  $\{x_T(\cdot)\}_{T \in \mathbb{R}}$  im Urbildraum?

Die „Grenzfunktion“  $\delta(\cdot)$  könnte durch eine Folge von Rechteckimpulsen mit verschwindender Impulsdauer, dafür gegen  $\infty$  strebender Impulshöhe  $\frac{1}{T}$  dargestellt werden, so daß die Impulsfläche (= Energie des Impulses) stets 1 bleibt. Eine Erregung dieser Art, welche für eine sehr kurze Zeit mit einem sehr großen Wert wirkt, ist z.B. bei der Beschreibung eines mechanischen Stoßes, eines Strom- oder Spannungsstoßes notwendig. Die „Grenzfunktion“  $\delta$  hätte dann

für  $t \neq 0$  den Wert 0 und wäre für  $t = 0$  „so stark unendlich“, daß der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

wäre, s. Abb. 9.20.

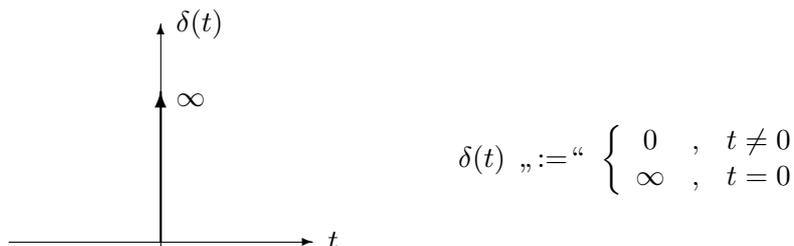


Abbildung 9.20: Naives und suggestives Bild der „Deltafunktion“

Offensichtlich gibt es keine Funktion im herkömmlichen Sinne mit diesen Eigenschaften, ja die oben erwähnte Folge von Funktionen ist im herkömmlichen Sinne nicht einmal konvergent. Es ist aber gelungen, den Funktionsbegriff und mit ihm den Konvergenzbegriff so zu verallgemeinern, daß man von einer *verallgemeinerten Funktion* oder *Distribution* mit den genannten Eigenschaften sprechen kann; s. Abschnitt 9.4.6.

Grob gesprochen, kann eine Distribution durch eine Folge von Funktionen dargestellt werden.

**Aufgabe** (Darstellung der  $\delta$ -Distribution)

Man beweise die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

Sei  $\delta_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) dt = 1$ , z.B.

$$\delta_1(t) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Man definiere dann die Funktionenfolge  $\delta_n$  (Abb. 9.21) durch

$$\delta_n(t) := n \cdot \delta_1(nt) \quad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}),$$

dann gilt:

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

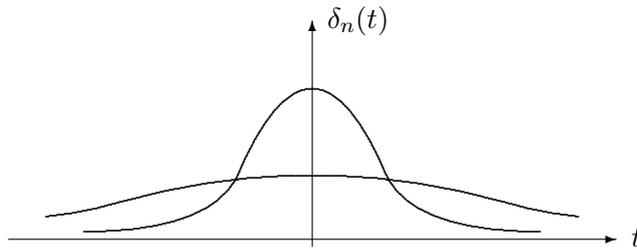


Abbildung 9.21: Gegen die „Deltafunktion“ konvergierende Funktionenfolge

### 9.4.5 Impulsfunktion als Eingangssignal

Als zweites Test-Eingangssignal wird die Dirac'sche Deltafunktion  $\delta(\cdot)$  untersucht:

$$x_e(t) := x_0 \cdot x_e^\delta(t) = x_0 \cdot \delta(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Selbstverständlich ist diese Beziehung nur formal zu verstehen und mathematisch im Sinne der Distributionentheorie (Abschnitt 9.4.6) gemeint: es handelt sich somit um eine Gleichung zwischen verallgemeinerten Funktionen.

#### Beispiel 9.28

Man betrachte den elektromagnetischen Reihenschwingkreis aus Beispiel 9.27.

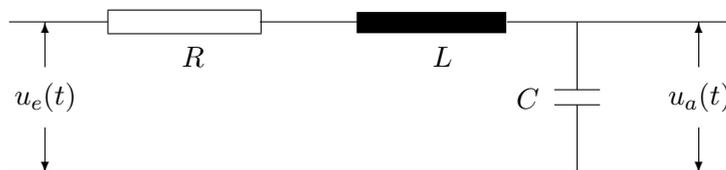


Abbildung 9.22: Elektrischer Reihenschwingkreis

Als Eingangssignal wird die Impulsfunktion (Abb. 9.23)

$$x_e(t) := x_0 \cdot \delta(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

verwendet. Dann ist

$$L[x_e](s) = x_0 \quad (\Re s > 0),$$

und als Lösung der Bildgleichung erhält man gerade die mit  $x_0$  multiplizierte Übertragungsfunktion (für die Übertragungsfunktion s. Beispiel 9.27):

$$L[x_a](s) = Q(s) \cdot L[x_e](s) = x_0 \cdot Q(s) = x_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{(s + \delta)^2 + \omega_1^2}$$

mit den Größen

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \delta := \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_1^2 := \omega_0^2 - \delta^2.$$

Die Antwort  $x_a(\cdot)$  (Abb. 9.24) im Originalraum ist die mit  $x_0$  multiplizierte inverse Laplace-Transformierte der Übertragungsfunktion, also die mit  $x_0$  multiplizierte Gewichtsfunktion  $q(\cdot)$ :

$$x_a(t) = x_0 \cdot q(t) = x_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \begin{cases} \frac{1}{\omega_1} e^{-\delta t} \sin \omega_1 t & , \omega_0 > \delta \\ te^{-\delta t} & , \omega_0 = \delta \\ \frac{1}{\omega_2} e^{-\delta t} \sinh \omega_2 t & , \omega_0 < \delta \end{cases} \quad (\omega_2^2 := -\omega_1^2)$$

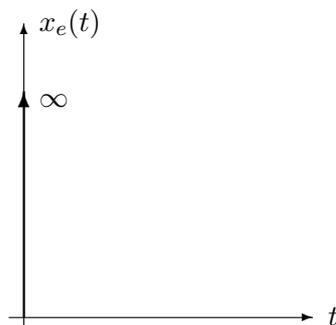


Abbildung 9.23: Impulserregung

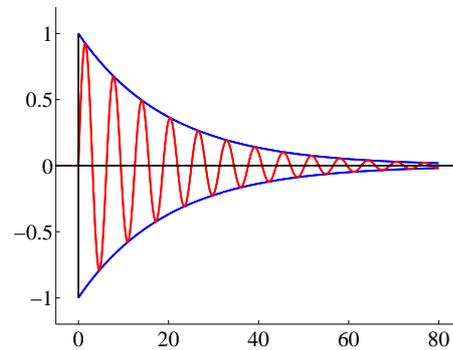


Abbildung 9.24: Impulsantwort

#### 9.4.6 Erweiterung von Funktionen zu Distributionen

Wie funktioniert nun die Erweiterung von Funktionen zu Distributionen oder verallgemeinerten Funktionen? Was ist überhaupt eine Distribution?

In Analogie wird dazu die Erweiterung von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  betrachtet.  $\mathbb{C}$  ist nun nicht irgendeine Menge, sondern eine Erweiterung von  $\mathbb{R}$ , sogar eine Körpererweiterung:

- Die reellen Zahlen finden sich in der Obermenge der komplexen Zahlen wieder: Komplexe Zahlen  $z = x + iy$  mit  $y = \Im z = 0$  werden mit den reellen Zahlen identifiziert:

$$\mathbb{R} \ni x := z = (x + i0) \in \mathbb{C}$$

- Die Körperoperationen  $(+, \cdot)$  von  $\mathbb{C}$  stimmen mit den Körperoperationen von  $\mathbb{R}$  überein, wenn man sie auf komplexe Zahlen mit Imaginärteil 0 anwendet.  $\mathbb{R}$  ist also ein Unterkörper von  $\mathbb{C}$ , nicht bloß eine Teilmenge.

Der Grundraum  $\mathcal{D}$  der sog. Testfunktionen ist definiert durch

$$\mathcal{D} := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } f \text{ kompakt}\}.$$

**Beispiel 9.29** (Testfunktion)

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2-\varepsilon^2}} & , \quad |x| < \varepsilon \\ 0 & , \quad |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , und es gilt:  $\text{supp } f_\varepsilon \subseteq \{x : |x| \leq \varepsilon\}$ , s. Abb. 9.25.

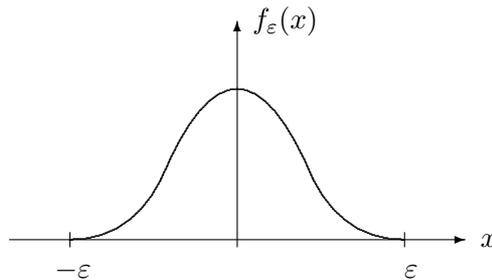


Abbildung 9.25: Funktion  $f_\varepsilon \in \mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

An den Stellen  $x = \pm\varepsilon$  existieren die links- bzw. rechtsseitigen Ableitungen beliebig hoher Ordnung und sind 0; beispielsweise gilt für die erste Ableitung:

$$f'_\varepsilon(x) = -\frac{-2x}{(x^2 - \varepsilon^2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2-\varepsilon^2}} \xrightarrow{(|x| \rightarrow \varepsilon)} 0.$$

Jeder Funktion  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  wird nun ein *lineares Funktional* – das ist eine lineare Abbildung von  $\mathcal{D}$  nach  $\mathbb{C}$  – wie folgt zugeordnet:

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto T_f(\phi) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x) dx \end{aligned}$$

Für diese Zuordnung wird vereinbart oder gilt:

- (i) Wegen  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  macht das uneigentliche Integral Sinn.
- (ii)  $T_f$  ist eine lineare Abbildung.
- (iii)  $\mathcal{D}' := \{T : T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, T \text{ ist linear}\}$
- (iv) Man kann jeder Funktion  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  das so definierte lineare Funktional  $T_f$  zuordnen und erhält eine injektive Abbildung (Einbettung)

$$\begin{aligned} I : \mathcal{C}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{D}' \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

Jede stetige Funktion in  $\mathbb{R}$  läßt sich damit als ein lineares Funktional auffassen, und man gewinnt die Inklusion

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'.$$

- (v) Jedes mit Hilfe eines Integrals gebildete lineare Funktional heißt eine *reguläre Distribution* oder *reguläre verallgemeinerte Funktion*.
- (vi) Aus einer regulären Distribution  $T$  läßt sich die sie erzeugende Funktion  $f$  wieder rekonstruieren:

$$\bigwedge_{T \in \mathcal{D}'} \bigvee_{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})} T = T_f.$$

Es gibt also eine eindeutige Beziehung zwischen stetigen Funktionen und regulären Distributionen.

- (vii) Die  $\delta$ -Distribution („ $\delta$ -Funktion“) ist das lineare Funktional, erklärt durch

$$\begin{array}{ccc} \delta : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \phi & \longmapsto & \delta(\phi) := \phi(0) \end{array}$$

$\delta$  ist trivialerweise linear und damit aus  $\mathcal{D}'$ .  $\delta$  ist der Grenzwert einer Folge regulärer Distributionen

$$\begin{aligned} T_{f_\varepsilon} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_\varepsilon(x) dx \\ &= \phi(x^*) \cdot \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx}_{=1} \quad (x^* \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ geeignet}) \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(0) &= \delta(\phi) \quad (\phi \in \mathcal{D}), \end{aligned}$$

also ist

$$\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{f_\varepsilon}$$

im obigen Sinne.

- (viii) Die  $\delta$ -Distribution ist jedoch *keine* reguläre Distribution, d.h. es existiert *keine* Funktion  $f_\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  mit der Eigenschaft

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_\delta(x) dx.$$

In Analogie zu regulären Distributionen wird diese Schreibweise dennoch manchmal verwendet; man schreibt etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0),$$

obwohl die linke Seite gar keinen Sinn macht. In diesem Sinne redet man dann von der  *$\delta$ -Funktion*  $\delta(\cdot)$ , wenn man die  *$\delta$ -Distribution*  $\delta \in \mathcal{D}'$  meint.

Die *Ableitung*  $T'$  einer Distribution soll so erklärt sein, daß sie im Falle einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$ , welche zu einer regulären Distribution  $T_f$  Anlaß gibt, mit der klassischen Ableitung  $f'$  zusammenfällt:

$$(T_f)' = T_{f'},$$

d.h. ausführlich

$$(T_f)'(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f'(x) dx \quad (\phi \in \mathcal{D}).$$

Mit partieller Integration erhält man daraus, da die Randterme wegen  $\phi \in \mathcal{D}$  verschwinden,

$$\begin{aligned} (T_f)'(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f'(x) dx \\ &= \left[ \phi(x)f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)f(x) dx \\ &= T_f(-\phi') \quad (\phi \in \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Daraus resultiert die

**Definition 9.4**

Ist  $T \in \mathcal{D}'$ , so versteht man unter der *verallgemeinerten Ableitung* oder *Distributionsableitung*  $T'$  von  $T$  das lineare Funktional

$$\phi \longmapsto T(-\phi') \quad (\phi \in \mathcal{D}).$$

**Beispiele 9.30**

(i) Sei  $\sigma_a$  die Sprungfunktion, definiert durch

$$\sigma_a(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \geq a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}.$$

Im gewöhnlichen Sinne ist die Funktion  $\sigma_a$  nicht differenzierbar. Faßt man  $\sigma_a$  jedoch als verallgemeinerte Funktion auf,

$$\phi \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\sigma_a(x) dx =: \Sigma_a(\phi) \quad (\phi \in \mathcal{D}),$$

so läßt sie sich im verallgemeinerten Sinne differenzieren:

$$\begin{aligned}\Sigma'_a(\phi) &= \Sigma_a(-\phi') = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \sigma_a(x) dx \\ &= - \int_a^{\infty} \phi'(x) dx \stackrel{(\phi \in \mathcal{D})}{=} \phi(a) = \delta_a(\phi) \\ \longrightarrow \quad (\Sigma_a)' &= \delta_a\end{aligned}$$

### Bemerkung

$\Sigma_a$  selbst ist keine reguläre Distribution, da die sie erzeugende Funktion  $\sigma_a$  nicht stetig ist. Diese ist aber lokal-integrierbar, so daß obige Integraldarstellung einen Sinn ergibt.

- (ii) Die verallgemeinerte Funktion  $\Sigma_a$  läßt sich als verallgemeinerte Ableitung einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion  $h_a$  darstellen, nämlich der Funktion

$$h_a(x) := \begin{cases} x - a & , \quad x \geq a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases}.$$

In der Tat ist für  $\phi \in \mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned}H'_a(\phi) &= H_a(-\phi') = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) h_a(x) dx \\ &= - \int_a^{\infty} \phi'(x) (x - a) dx \\ &= - \left[ \phi(x) (x - a) \right]_a^{\infty} + \int_a^{\infty} \phi(x) dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \sigma_a(x) dx \\ &= \Sigma_a(\phi)\end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) zusammen ergibt sich (Abb. 9.26)

$$\boxed{\delta_a = (\Sigma_a)' = (H_a)''} \quad (9.13)$$

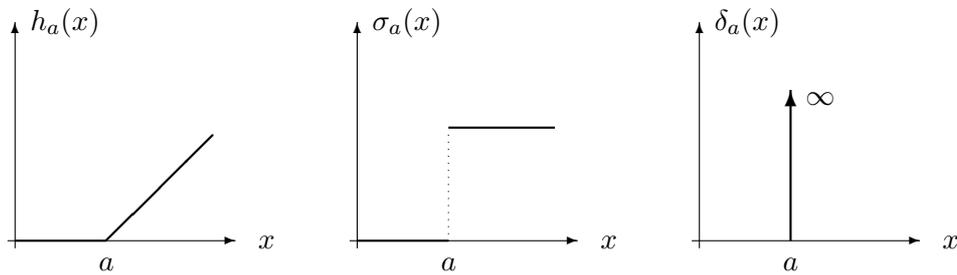


Abbildung 9.26: Verallgemeinerte erste und zweite Ableitung

**Bemerkung**

Im Distributionensinne ist die  $\delta$ -Distribution somit ein mathematisch exakter Ersatz für den im gewöhnlichen Sinne als Funktion im Originalraum nicht existierenden Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow 0} L^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right] (t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - T)}{T},$$

welcher eben oft als „ $\delta$ -Funktion“ bezeichnet wird.

# Stichwortverzeichnis

- $A(\omega)$ , 170  
 $Tr(N, f)(x)$ , 132  
 $[F(x)]_a^b$ , 24  
 $\delta(\cdot)$ , 337  
 $\gg$ , 159  
 $\int f(x) dx$ , 18  
 $\int_b^a f(x) dx$ , 6  
 $\mathcal{L}^1(\mathcal{I})$ , 163  
 $\phi(\omega)$ , 170  
 $\sigma(\cdot)$ , 332  
 $\sigma_c(f)$ , 295  
 $a(\omega)$ , 170  
 $b(\omega)$ , 170
- Abklingkonstante, 264  
Ableitung  
    verallgemeinerte, 341  
absolut konvergent, 95  
Abtastfrequenz, 183  
Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, 223  
Ähnlichkeitssatz, 302  
Äquivalenzrelation, 19  
allgemeine Lösung, 206  
allgemeines Integral, 206  
alternierend, 124  
Amplitude, 267  
Amplitudenspektrum, 168  
Anfangsbedingung, 25, 187, 189, 207  
Anfangspunkt, 207  
Anfangswert, 207  
Anfangswertproblem, 192, 207  
Antwort, 324  
    des Systems, 324  
Approximation im quadratischen Mittel, 144  
Ausgangsfunktion, 324  
Ausgangssignal, 324  
ausgezeichnete Zerlegungsfolge, 3
- AWP, 192, 207
- Bandbreite, 183  
Besetzung, 4  
Bildbereich, 287  
Bildraum, 287  
Bogenlänge  
    einer ebenen Kurve, 85
- charakteristische Funktion, 100  
charakteristische Gleichung, 249  
charakteristisches Polynom, 249
- Dämpfungskraft, 260  
Dämpfungssatz, 301  
Dekrement, *siehe* logarithmisches Dekrement  
DFT, 184  
Dgl, 185  
Dichtefunktion, 162  
Differentialform ersten Grades, 243  
Differentialgleichung, 18, 182, 185  
    autonome, 219  
    exakte, 239  
    explizite, 196  
    gleichgradige, 223  
    Grad, 187  
    homogene, 223, 225  
    implizite, 196  
    inhomogene, 225  
    Integral, 196  
    Lösung, 185, 196  
    lineare, 225  
    mit separierbaren Variablen, 215  
    Ordnung, 187  
    partikuläre Lösung, 207  
    spezielle Lösung, 207  
Differentialoperator, 243  
Differentiationssatz, 301  
Dirichlet-Funktion, 8

- diskretes Spektrum, 122
- Distribution, 336
  - reguläre, 340
- Distributionsableitung, 341
- effektive Spannung, 142
- Effektivwert, 31, 140
- Eigenkreisfrequenz, 266
- Eingangsfunktion, 269, 324
- Eingangssignal, 324
- Einschwingvorgang, 270
- Elementarperiode, 111
- Erregerschwingung, 269
- Erregung, 324
- Euler'scher Multiplikator, 241
- Euler-Fourier'schen Formeln, 113
- explizit berechenbar, 27
- Exponentialansatz, 249
- exponentielle Dämpfung, 283
- exponentielle Ordnung, 296
- Faltung, 252, 302
- Faltungssatz, 302
- Federkraft, 260
- FFT, 184
- flüchtiger Anteil, 234
- Fortsetzung
  - periodische, 131
- Fourier-Analyse, 110
- Fourier-Koeffizienten, 114
- Fourier-Kosinus-Transformierte, 175
- Fourier-Prinzip, 110
- Fourier-Reihe, 114
- Fourier-Sinus-Transformierte, 175
- Fourier-Transformation, 162
- Frequenzbereich, 110
- Frequenzdichtefunktion, 162
- Frequenzgang, 272
- Fundamentalsystem, 230, 244
- Funktion
  - monotone, 11
  - reguläre verallgemeinerte, 340
  - verallgemeinerte, 336
- Gabriels Horn, 98
- Gammafunktion, 102, 103
- Gauß-Impuls, 181
- gerade Funktion, 123
- Gewichtsfunktion, 319, 324
- gleichmäßige Konvergenz, 133
- Grad
  - eines trigonometrisches Polynoms, 111
- Gravitationsgesetz, 90
- Gravitationskraft, 90
- Green'sche Funktion, 319, 324, 334
- Grundfrequenz, 122
- Grundraum, 338
- Grundton, 109
- Guldin'sche Regel, 78
  - erste, 83
  - zweite, 85
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 23
- Heaviside-Funktion, 283
- Hooke'sches Gesetz, 260
- Integral, 6
  - oberes, 6
  - unbestimmtes, 18
  - uneigentliches, 91
  - unteres, 6
- Integralgleichung, 180
- Integraltransformation, 282
- Integrand, 7
- Integrationsgrenzen, 7
- Integrationsintervall, 7
- Integrationskonstante, 207
- Integrationsatz, 304
- Integrationsvariable, 7
- integrierbar, 6
- integrierender Faktor, 241
- Isoklinen, 190
- Kennkreisfrequenz, 264
- Kepler'sche Faßregel, 107
- Klang, 109
- Klangfarbe, 109
- Klangspektrum, 109
- Klirrfaktor, 145
- Konvergenz im quadratischen Mittel, 133
- Konvergenzabszisse, 295
- $L_2$ -Norm, 150

- Laplace-Transformation, 285  
 Laplace-Transformierte, 285  
 Leistung, 34  
 Leistungsfaktor, 35  
 lineares Funktional, 339  
 Linienelement, 190  
 Linienspektrum, 109, 122  
 logarithmisches Dekrement, 268  
  
 Majorantenkriterium, 95  
 Mantelfläche  
     eines Rotationskörpers, 86  
 Massenträgheitsmoment, 87  
 Meßfehler, 140  
 Minorantenkriterium, 95  
 Mittelwert  
     arithmetischer, 140  
     linearer, 30, 31  
     quadratischer, 31, 140  
 Momentanleistung, 34  
 Multiplikationssatz, 301  
  
 nicht-periodischer Rechteckimpuls,  
     172  
 Normalbereich, 76  
 Nullphasenwinkel, 267  
 Nullstellen des Spektrums, 156  
 Numerische Integration, 105  
 Nyquistfrequenz, 183  
  
 Obersumme, 4  
 Oberton, 109  
 Ordnung  
     eines trigonometrisches Polynoms,  
     111  
 Originalbereich, 287  
 Originalraum, 287  
 Orthogonalitätsrelation, 147  
 Orthogonalitätsrelation, 112  
  
 Parallelschwingkreis, 262  
 Parseval'sche Gleichung, 144, 151, 154,  
     163  
 Partialbruch, 57  
 Partialbruchzerlegung, 293  
 Partialsumme, 140  
 Partielle Integration, 35  
 Partition, 3  
  
 Peano  
     Existenzsatz von, 213  
 periodisch, 110  
 Pfaff'sche Form, 243  
 Phasenspektrum, 168  
 Plancherel  
     Satz von, 163  
 Polordnung, 309  
 Produktintegration, 35  
 punktweise Konvergenz, 132  
  
 Randbedingung, 213  
 Randwertproblem, 213  
 Rechteckimpuls  
     nicht-periodischer, 172  
     periodischer, 155  
 Rechtecksregel, 107  
 reguläre Distribution, 340  
 reguläre verallgemeinerte Funktion,  
     *siehe* Funktion  
 Reihenschwingkreis, 261  
 Rekursionsformel, 64  
 Resonanzfall, 257, 273  
 Resonanzfrequenz, 273  
 Resonanzfunktion, 272  
 Resonanzkatastrophe, 273  
 Richtungsfeld, 190  
 Riemann'sche Summe, 4  
 Riemann'sche Zwischensumme, 7  
 Rotationskörper  
     Mantelfläche, 65  
     Volumen, 69  
 Rotationsparaboloid, 68  
 RWP, 213  
  
 Schallwelle, 109  
 Schwerpunkt  
     einer ebenen Fläche, 78, 86  
     einer ebenen Kurve, 86  
     eines Rotationskörpers, 86  
 Schwingung  
     erzwungene, 268  
     freie gedämpfte, 267  
     freie ungedämpfte, 268  
     gedämpfte, 178  
     selbsterregte, 275  
 Schwingungsdauer, 267

- Schwingungsgleichung, 259  
Simpson'sche Regel, 108  
Spektraldichte, 183, 287  
Spektralfunktion, 162  
Spektrum  
    diskretes, 122, 162  
    kontinuierliches, 155  
Sprungantwort, 332  
Sprunghöhe, 332  
Störfunktion, 269, 324  
Störglied, 225  
Störgliedansatz, 234, 257  
stückweise glatt, 135  
stückweise monoton, 134  
stückweise stetig, 135, 296  
Stammfunktion, 18, 239  
stationäre Lösung, 270  
stationärer Anteil, 234  
Statisches Moment, 79  
Steuerfunktion, 324  
Superpositionsprinzip, 250  
 $\text{supp } f$ , 160, 338  
Systemkonstanten, 267
- Tastverhältnis, 155  
Teilintervall, 3  
Testfunktion, 338  
Tiefpaß, 330  
Ton, 109  
    Intensität, 109  
    Tonhöhe, 109  
Torus, 77  
Träger von  $f$ , 160  
Trägheitskraft, 260  
Trägheitsmoment  
    einer ebenen Fläche, 87  
    einer ebenen Kurve, 86  
Trapezregel, 107  
trigonometrische Reihe, 112  
trigonometrisches Polynom, 111, 132
- Übergangsfunktion, 332  
Übertragungsfaktor, 330  
Übertragungsfunktion, 324  
Übertragungsrage, 183  
unbestimmtes Integral, 18  
uneigentliches Integral, 91
- ungerade Funktion, 123  
Untersumme, 4
- Variation der Konstanten, 229, 254  
verallgemeinerte Ableitung, *siehe* Ableitung  
verallgemeinerte Funktion, 336, *siehe* Funktion  
Verfeinerung, 5  
Vergleichsintegrale, 96  
Vergrößerungsfunktion, 272  
Verlustfaktor, 264  
Verschiebungssatz, 302  
Vierpol, 329, 330  
Volumen  
    eines Rotationskörpers, 86
- Wachstumsverhalten, 315  
Welle, 109  
Wronski-Determinante, 245  
Wronski-Matrix, 245
- Zeitbereich, 110  
Zerlegung, 3  
    äquidistante, 9  
    Feinheit, 3  
    Norm, 3  
Zerlegungsfolge  
    ausgezeichnete, 3  
Zwischenpunktsystem, 4  
Zwischensumme, 4