

# Analysis III

Prof. Dr. A. Raphaélian  
Fachbereich 1 - Ingenieurwissenschaften I  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

# Inhaltsverzeichnis

<b>10 Abbildungen aus dem <math>\mathbb{R}^n</math> in den <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>1</b>
10.1 Einführung . . . . .	1
10.2 Topologie und Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
10.2.1 Topologie des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
10.2.2 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	12
10.3 Grenzwerte und Stetigkeit . . . . .	14
<b>11 Differentiation von Abbildungen aus dem <math>\mathbb{R}^n</math> in den <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>25</b>
11.1 Problemstellung . . . . .	25
11.2 Richtungsableitungen . . . . .	27
11.2.1 Partielle Ableitungen . . . . .	27
11.2.2 Gradient, Nabla-Operator, Potentialfeld . . . . .	32
11.2.3 Richtungsableitung in beliebiger Richtung . . . . .	35
11.3 Differenzierbarkeit von Abbildungen . . . . .	41
11.3.1 Einführung und Definition . . . . .	41
11.3.2 Funktionalmatrix . . . . .	46
11.3.3 Tangentialebene, Linearisierung einer Funktion . . . . .	49
11.3.4 Totales Differential, Pfaff'sche Form . . . . .	52
11.3.5 Differentiationsregeln . . . . .	55
11.4 Fehlerrechnung . . . . .	67
11.4.1 Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen . . . . .	67
11.4.2 Fehlerschrankensatz . . . . .	69
11.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	74
11.5.1 Satz von Schwarz . . . . .	75
11.6 Taylor'sche Formel (Satz von Taylor) . . . . .	76
11.7 Relative Extrema . . . . .	80
11.8 Ausgleichsrechnung . . . . .	87
11.9 Umkehrabbildungen . . . . .	91
11.10 Koordinatentransformationen . . . . .	95
11.10.1 Ebene Polarkoordinaten . . . . .	96
11.10.2 Zylinderkoordinaten . . . . .	99
11.10.3 Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) . . . . .	100
11.10.4 Krummlinige Koordinatensysteme . . . . .	101

<b>12</b>	<b>Integration von Abbildungen aus dem <math>\mathbb{R}^n</math> in den <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>104</b>
12.1	Das bestimmte Integral . . . . .	105
12.2	Iterierte Integrale . . . . .	112
12.3	Integration über Normalbereiche . . . . .	118
12.4	Maß (Inhalt) von Mengen . . . . .	127
12.4.1	Inhalt von Ordinatenmengen . . . . .	128
12.4.2	Prinzip von Cavalieri . . . . .	132
12.5	Uneigentliche Integrale . . . . .	136
12.6	Substitutionsregel (Transformationsformel für Mehrfachintegrale)	140
12.6.1	Problemstellung . . . . .	140
12.6.2	Heuristische Herleitung der Transformationsformel . . . . .	143
12.6.3	Anwendungen . . . . .	146
12.6.3.1	Ebene Polarkoordinaten . . . . .	146
12.6.3.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	150
12.6.3.3	Kugelkoordinaten . . . . .	154
<b>13</b>	<b>Kurvenintegrale</b>	<b>159</b>
13.1	Kurven . . . . .	160
13.2	Länge von Kurven - Kurvenintegrale erster Art . . . . .	161
13.3	Kurvenintegrale zweiter Art . . . . .	166
13.4	Wegunabhängigkeit - Konservative Vektorfelder . . . . .	176
13.5	Rotation von Vektorfeldern . . . . .	181
13.6	Einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	187
13.7	Berechnung von wegunabhängigen Kurvenintegralen . . . . .	193
<b>14</b>	<b>Oberflächenintegrale</b>	<b>198</b>
14.1	Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ - Tangentialebene . . . . .	198
14.2	Flächeninhalt - Integrale über Flächen . . . . .	206
14.3	Orientierte Flächen - Fluß . . . . .	216
<b>15</b>	<b>Integralsätze</b>	<b>229</b>
15.1	Divergenz und Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	229
15.2	Green'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	247
15.2.1	Flächenberechnung mittels eines Kontourintegrals . . . . .	253
15.2.2	Gauß'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	254
15.2.3	Stokes'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	256
15.3	Stokes'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	257
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>271</b>

# Kapitel 10

## Abbildungen aus dem $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

### 10.1 Einführung

Funktionen, welche physikalische oder technische Größen beschreiben, hängen in der Regel von mehr als einer Variable ab. Beispielsweise hängt der Spannungsabfall einer elektrischen Leitung ab von

- ihrer Länge
- ihrem spezifischen Materialwiderstand
- ihrer Temperatur
- der Frequenz des Stromes
- dem Widerstand des umgebenden Mediums
- ...

Wenn man von allen diesen  $n$  Variablen  $n - 1$  konstant hält und nur eine verändert, so erhält man eine Funktion von einer Variablen. Häufig ändern sich jedoch mehrere oder sogar alle Variablen gleichzeitig. Daher muß man in diesen Fällen eine Funktion von mehreren ( $n$ ) Variablen untersuchen, ein sehr viel komplizierterer Vorgang als die Untersuchung von  $n$  Funktionen, welche jeweils von nur einer Variable abhängen.

#### Beispiel 10.1

Der Gesamtwiderstand der in Abb. 10.1 skizzierten Schaltung beträgt

$$\begin{aligned} R &:= f(R_1, R_2, R_3, R_4) := \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \\ &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

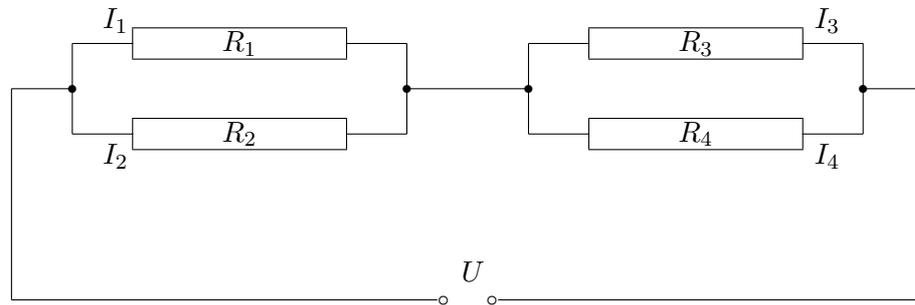


Abbildung 10.1: Schaltung mit vier Widerständen

Der Widerstand wird also durch eine Funktion  $f$  von vier Veränderlichen beschrieben. Ihr maximaler Definitionsbereich ist

$$D(f) := \{\vec{x} : \vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in \mathbb{R}^4, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \neq 0\}.$$

In der Linearen Algebra wurden mit dem Spezialfall linearer Abbildungen von  $\mathbb{V}^n$  in den  $\mathbb{V}^m$  schon einmal Funktionen mehrerer Veränderlicher untersucht. Diese einschränkende Voraussetzung braucht  $f$  nun nicht mehr zu erfüllen; insbesondere braucht  $D(f)$  auch kein Vektorraum mehr zu sein.

Im Falle  $n = m = 1$  wird die Veranschaulichung solcher Funktionen dadurch erreicht, daß man mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems die jeweiligen Funktionswerte über den entsprechenden Urbildern „abträgt“. Damit ist der Funktionsgraph (das Schaubild)  $\Gamma_f$  von  $f$  gegeben durch die Punktmenge:

$$\Gamma_f := \{\langle x, y \rangle : x \in [a, b], y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Analog gelingt noch eine Veranschaulichung im Falle  $n = 2, m = 1$  durch Zeichnung eines Schaubildes im  $\mathbb{R}^3$ : Der Funktionsgraph  $\Gamma_f$  von  $f$  ist gegeben durch die Punktmenge

$$\Gamma_f := \{\langle x, y, z \rangle : \langle x, y \rangle \in D(f), z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

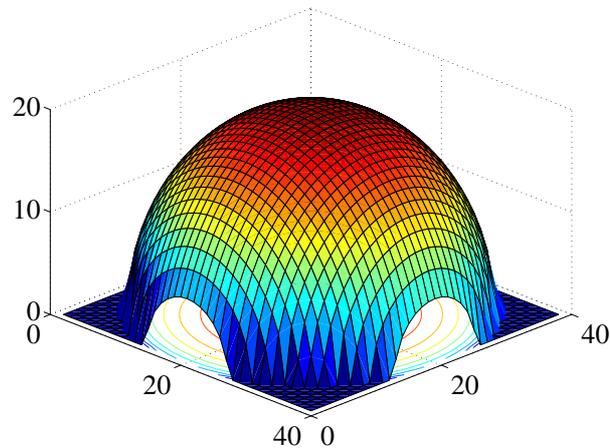
Unter geeigneten Voraussetzungen an  $f$  wird dadurch eine *Fläche* im  $\mathbb{R}^3$  definiert.

### Beispiel 10.2

Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{\langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, (x - 20)^2 + (y - 20)^2 < 20^2 = 400\}, \\ z &:= f(x, y) := \sqrt{400 - ((x - 20)^2 + (y - 20)^2)}. \end{aligned}$$

Das Schaubild von  $f$  ist die obere Halbkugel vom Radius 20 mit dem Mittelpunkt  $M := \langle 20, 20 \rangle$ , s. Abb. 10.2.

Abbildung 10.2: Obere Halbkugel vom Radius 20 um  $M := \langle 20, 20 \rangle$ **Beispiel 10.3**

Seien  $\mathcal{G} := \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$z := f(x, y) := x^2 - y^2 \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{G}).$$

Mit Hilfe welcher Abbildung läßt sich diese Funktion veranschaulichen?

Dazu werden zuerst die *Höhenlinien* gezeichnet; das sind diejenigen Linien (!) in  $\mathcal{G}$ , auf denen  $f$  konstant ist, s. Abb. 10.3.

$$H(z_0) := \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{G} : z_0 = x^2 - y^2\} \quad (z_0 \in \mathbb{R}).$$

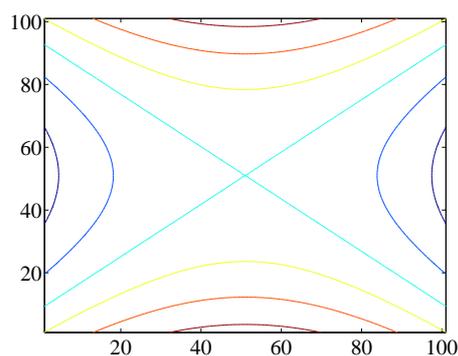


Abbildung 10.3: Höhenlinien gleichseitiger Hyperbeln

Dabei handelt es sich um gleichseitige Hyperbeln mit den Halbachsen  $a = b = \sqrt{z_0}$ . Für  $z_0 > 0$  liegen die Scheitelpunkte der Hyperbel auf der  $x$ -Achse, für  $z_0 < 0$  auf der  $y$ -Achse. Als dreidimensionaler Graph ergibt sich ein *parabolisches Hyperboloid*, s. Abb. 10.4. Der Punkt  $\langle 0, 0 \rangle$  heißt *Sattelpunkt*.

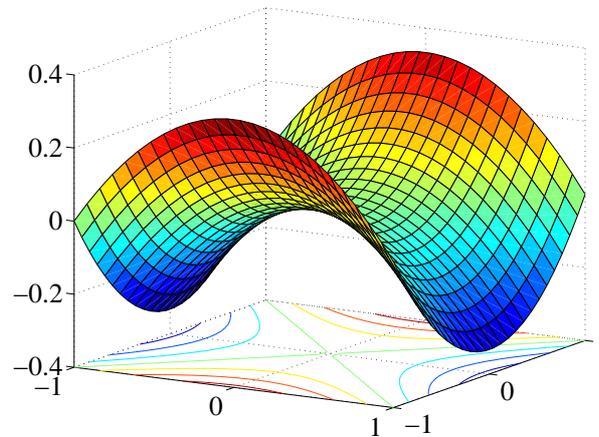


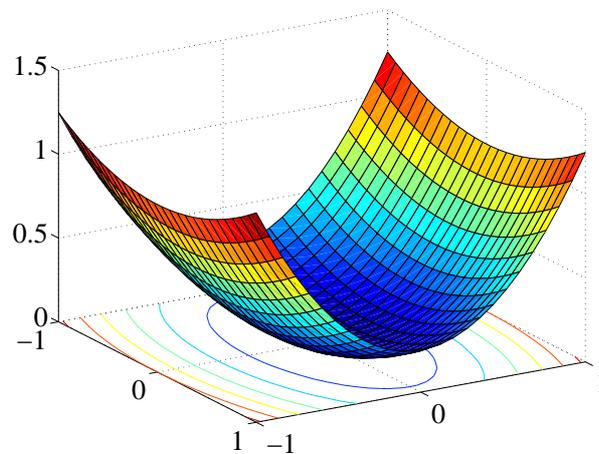
Abbildung 10.4: Parabolische Hyperboloid mit Höhenlinien

**Beispiel 10.4**

Seien  $\mathcal{G} := \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$z := f(x, y) := \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} \quad ((x, y) \in \mathcal{G}).$$

Diese Funktion liefert ein *Ellipsoid* mit den Halbachsen  $a = 2$  und  $b = 1$ , s. Abb. 10.5.

Abbildung 10.5: Graph eines Ellipsoides mit den Halbachsen  $a = 2$  und  $b = 1$

**Beispiel 10.5**

Bei vereinbartem Koordinatensystem sei im Punkt  $\vec{p} := \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  eine Punktladung der Stärke  $Q$ . Auf eine *Probeladung*<sup>1</sup> der Stärke  $q$  im Punkt

$$\vec{x} := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

wirkt die Coulomb-Kraft  $\vec{F}$  „in Richtung auf  $\vec{p}$ “ (evtl. entgegengesetzte Orientierung) und einer zum Quadrat des Abstandes zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$  umgekehrt proportionalen Stärke; als  $\mathbb{V}^3$ -Vektor geschrieben:

$$\frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \cdot \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} = \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|}$$

mit dem Euklidischen Abstand

$$\|\vec{x} - \vec{p}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - p_i)^2} = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2}.$$

Verwendet man die Isomorphie zwischen  $\mathbb{V}^3$  und  $\mathbb{R}^3$ , so ist durch

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \longmapsto \left\langle \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} (x_1 - p_1), \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} (x_2 - p_2), \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} (x_3 - p_3) \right\rangle$$

eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^3$  in den  $\mathbb{R}^3$  definiert, die als die Kraft interpretierbar ist, welche auf eine Ladung der Stärke  $q$  am Ort  $\vec{x}$  durch die Ladung der Stärke  $Q$  am Ort  $\vec{p}$  ausgeübt wird.

**Beispiel 10.6**

Es werden die Bezeichnungen von Beispiel 10.5 benutzt. Die Lage  $\vec{p}$  der Ladung  $Q$  sei nun zeitlich nicht konstant, sei also etwa

$$t \longmapsto \langle p_1(t), p_2(t), p_3(t) \rangle =: \vec{p}(t) \quad (t \geq t_0)$$

die Lage von  $Q$  zur Zeit  $t \geq t_0$  und sei

$$\mathcal{W} := \{\vec{p}(t) : t \geq t_0 \text{ geeignet}\}$$

die *Spur* von  $Q$ , so ist durch

$$\vec{F} : (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{W}) \times [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(\vec{x}, t) := \left\langle \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}(t)\|^3} (x_1 - p_1(t)), \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}(t)\|^3} (x_2 - p_2(t)), \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}(t)\|^3} (x_3 - p_3(t)) \right\rangle$$

<sup>1</sup>Unter einer Probeladung versteht man eine (ideale) Ladung, die so klein ist, daß sie das um sie herum existierende elektrische Feld nicht beeinflusst.

eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^4$  in den  $\mathbb{R}^3$  definiert,<sup>2</sup>

welche die nun zeitlich veränderliche Kraft auf die Probeladung  $q$  an der Stelle  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  beschreibt.

Analog zum eindimensionalen Fall werden nun mathematische Begriffe benötigt, die analytisch ausdrücken,

- daß eine Ladung nicht „sprunghaft“ ihre Lage ändert (dies führt zur Übertragung des Begriffes „stetig“ auf Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ );
- wie sich in Beispiel 10.6 die Kraft  $\vec{F}$  bei „fester Zeit mit dem Ort“ oder
- bei „fester Stelle zeitlich“ ändert (dies führt zum Begriff „partielle Differentiation“).

Die Begriffe „stetig“ und „differenzierbar“, die sich bei der Beschreibung eindimensionaler Fragestellungen bewährt haben, erfordern für ihre Übertragung in den mehrdimensionalen Fall zunächst eine entsprechende Verallgemeinerung der Begriffe „Intervall“, „offen“, „abgeschlossen“, „Betrag“, etc.

## 10.2 Topologie und Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

### 10.2.1 Topologie des $\mathbb{R}^n$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Unter der *Topologie* versteht man, locker formuliert, die Klärung dessen, was offene und abgeschlossene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  sind.

$\langle \mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot) \rangle$  ist ein *Euklidischer Raum*, da durch die Abbildung

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &\longmapsto (\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

auf  $\mathbb{R}^n$  ein *Skalarprodukt* definiert ist. Aus diesem Skalarprodukt leitet sich die *Euklidische Norm* ab:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, \infty) \\ \vec{x} &\longmapsto \|\vec{x}\| := (\vec{x}, \vec{x})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

Für diese Norm gelten die folgenden Eigenschaften (warum?):

<sup>2</sup>Wenn in der Physik- und Elektrotechnik-Literatur von Punkten oder Vektoren die Rede ist, dann sind meistens Punkte oder Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  gemeint. Diese werden häufig in einer anderen Notation geschrieben: für  $\vec{x}$  schreibt man oft  $\mathbf{x}$ . Damit wird die Kraft  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  dann mit  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet.

(i) Positive Definitheit:

$$\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$$

(ii) Homogenität:

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$$

(iii) Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$$

(iv) Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$$

Mit Hilfe dieser Norm hat man nun ein Mittel in der Hand, im  $\mathbb{R}^n$  Abstände zu definieren, also Längenmessungen vorzunehmen.

In Analogie zu  $\mathbb{R}$  sollen die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“ etc. für Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  so definiert werden, daß für  $n = 1$  die alten Definitionen reproduziert werden. Das erreicht man einfach dadurch, daß die für  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  verwendeten Definitionen hergenommen werden und überall dort, wo der Betrag  $|\cdot|$  auftritt, dieser durch die Norm  $\|\cdot\|$  ersetzt wird.

### Beispiel 10.7

(i) Durch

$$\mathcal{B} := B(\vec{\xi}, r) := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < r\}$$

ist für  $r > 0$  das Innere einer Kugel vom Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $\vec{\xi}$  beschrieben. Man nennt die entsprechende Menge auch im  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 3$  eine ( $n$ -dimensionale offene) Kugel. Im Zweidimensionalen ist eine Kugel im Sinne dieser Definition eine (offene) Kreisscheibe.

(ii) Die Menge

$$\mathcal{S} := S(\vec{\xi}, r) := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x} - \vec{\xi}\| = r\}$$

ist die Oberfläche dieser  $n$ -dimensionalen Kugel, auch *Sphäre* genannt.

### Beispiel 10.8

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  und gelte  $a_k < b_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann heißt

$$\mathcal{I} := \{x : x \in \mathbb{R}^n, a_k \leq x_k \leq b_k, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

ein  $n$ -dimensionales Intervall oder ein  $n$ -dimensionaler Quader.

### Definition 10.1

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

(i) Für  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  heißen

$$U_\varepsilon(\vec{\xi}) := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \varepsilon\} \quad (= B(\vec{\xi}, \varepsilon))$$

(*n*-dimensionale)  $\varepsilon$ -Umgebung und

$$\dot{U}_\varepsilon(\vec{\xi}) := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, 0 < \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \varepsilon\} \quad (= U_\varepsilon(\vec{\xi}) \setminus \{\vec{\xi}\})$$

(*n*-dimensionale) punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{\xi}$ .

(ii) Eine Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ , welche eine Kugel  $U_\varepsilon(\vec{\xi})$  enthält, heißt eine *Umgebung* des Punktes  $\vec{\xi}$ .

(iii) Sei  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{G}$  heißt

$$\text{offen} \quad : \iff \bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} \bigvee_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq \mathcal{G}$$

$$\text{abgeschlossen} \quad : \iff \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{G} \text{ ist offen}$$

$$\text{beschränkt} \quad : \iff \bigvee_{r > 0} \bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} \|\vec{x}\| \leq r$$

$$\text{zusammenhängend} \quad : \iff \mathcal{G} \text{ ist nicht in zwei nichtleeren disjunkten offenen Teilmengen des } \mathbb{R}^n \text{ enthalten.}$$

### Bemerkung

- (i) Eine Menge  $\mathcal{G}$  ist also offen, wenn es um jeden ihrer Punkte eine Kugel gibt, die ganz in  $\mathcal{G}$  liegt.
- (ii) Umgekehrt ist eine Menge nicht einfach schon dann abgeschlossen, wenn sie nicht offen ist! Man studiere dazu die folgenden Beispiele.
- (iii) Eine nicht zusammenhängende Menge ist die Vereinigung mehrerer disjunkter<sup>3</sup> Teilmengen, welche einen gewissen „Abstand“  $d \geq 0$  voneinander haben; man spricht in dieser Situation von mehreren *Zusammenhangskomponenten* dieser Menge.

### Beispiele 10.9

(i) Die (offene) Kugel

$$\mathcal{B} := B(\vec{\xi}, r) := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < r\}$$

ist für  $r > 0$  wirklich offen.

### Aufgabe

Man zeige diese Behauptung. Dazu konstruiere man explizit zu jedem Punkt  $\vec{x}$  aus  $\mathcal{B}$  eine offene Menge  $U_\varepsilon(\vec{x})$ , welche noch ganz in  $\mathcal{B}$  liegt.

<sup>3</sup>disjunkt = elementfremd

(ii)

$$\mathcal{M} := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

ist weder offen noch abgeschlossen, denn:

- Zu  $\langle 1, 0 \rangle \in \mathcal{M}$  gibt es kein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(\langle 1, 0 \rangle) \subseteq \mathcal{M}$ , also ist  $\mathcal{M}$  nicht offen.
- Zu  $\langle 0, 0 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$  gibt es kein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(\langle 0, 0 \rangle) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$ , also ist  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$  nicht offen, folglich  $\mathcal{M}$  selbst nicht abgeschlossen; s. Abb. 10.6.

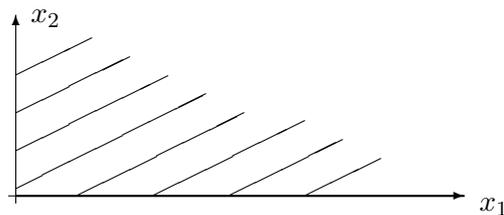


Abbildung 10.6: Weder offene noch abgeschlossene Menge

- (iii)
- $U_\varepsilon(\vec{x})$  ist für jedes  $\varepsilon > 0$  und jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  eine zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}^n$ .
  - $U_{10}(\langle 0, 0 \rangle) \cup U_{10}(\langle 20, 0 \rangle)$  ist keine zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}^2$ ; s. Abb. 10.7.

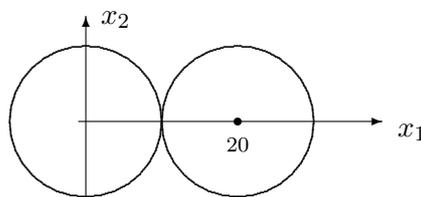


Abbildung 10.7: Zwei Zusammenhangskomponenten einer Menge

- Dagegen ist  $\overline{U_{10}(\langle 0, 0 \rangle)} \cup \overline{U_{10}(\langle 20, 0 \rangle)}$  eine zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}^2$ ; s. Abb. 10.7.

- **Aufgabe**

Ist die Menge

$$\mathcal{D} := \left\{ \langle x_1, x_2 \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, x_1 \in [-1, 1], \right. \\ \left. x_2 = \begin{cases} \sin \frac{1}{x_1} & \text{für } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1 = 0 \end{cases} \right\}$$

zusammenhängend?

### Definition 10.2

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- (i)  $\mathcal{G}$  heißt ein *Gebiet*, wenn  $\mathcal{G}$  offen und zusammenhängend ist.  
(ii)  $\mathcal{G}$  heißt *kompakt*, wenn  $\mathcal{G}$  abgeschlossen und beschränkt ist.  
(iii) Sei  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ .  $\vec{\xi}$  heißt *Häufungspunkt* von  $\mathcal{G}$  :  $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \dot{U}_\varepsilon(\vec{\xi}) \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$$

- (iv)  $\overset{\circ}{\mathcal{G}} := \bigcup_{\substack{L \subseteq \mathcal{G} \\ L \text{ offen}}} L$  heißt *offener Kern* von  $\mathcal{G}$ .  
(v)  $\bar{\mathcal{G}} := \bigcap_{\substack{L \supseteq \mathcal{G} \\ L \text{ abgeschlossen}}} L$  heißt *abgeschlossene Hülle* von  $\mathcal{G}$ .  
(vi)  $\dot{\mathcal{G}} := \bar{\mathcal{G}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{G}}$  heißt *Rand* von  $\mathcal{G}$ .

### Bemerkung

- (i) Trivialerweise gilt  $\overset{\circ}{\mathcal{G}} \subseteq \bar{\mathcal{G}}$ , und der Unterschied zwischen  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$  und  $\bar{\mathcal{G}}$  ist gerade der Rand  $\dot{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$ .  
(ii) Sei  $\vec{\xi} \in \dot{\mathcal{G}}$ . Dann liegen

- in jeder noch so kleinen Umgebung von  $\vec{\xi}$  Punkte aus  $\mathcal{G}$ , da  $\vec{\xi}$  Häufungspunkt von  $\mathcal{G}$  ist;
- in jeder noch so kleinen Umgebung von  $\vec{\xi}$  Punkte aus  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{G}$ , da  $\vec{\xi}$  auch Häufungspunkt von  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{G}$  ist.

Somit gilt für jede kleine Kugel  $\mathcal{U}$  um  $\vec{\xi}$ :

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \mathcal{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{G}) \neq \emptyset.$$

Der Randpunkt  $\vec{\xi}$  selbst kann zu  $\mathcal{G}$  gehören oder auch nicht; s. Abb. 10.8.

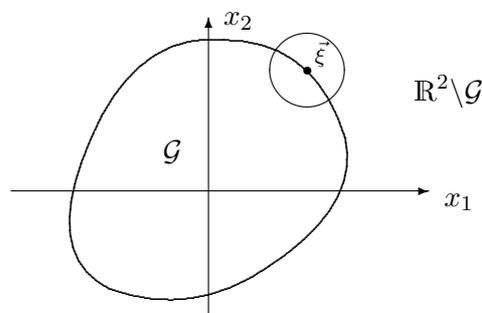


Abbildung 10.8: Randpunkt einer zweidimensionalen Menge

- (iii) Wenn alle Randpunkte von  $\mathcal{G}$  zu  $\mathcal{G}$  gehören, ist  $\mathcal{G}$  abgeschlossen. Wenn keiner dazugehört, ist  $\mathcal{G}$  offen. Gehören manche dazu, andere nicht, so ist  $\mathcal{G}$  weder offen noch abgeschlossen. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \text{ ist abgeschlossen} &\iff \text{jeder Häufungspunkt von } \mathcal{G} \text{ ist Element von } \mathcal{G} \\ &\iff \mathcal{G} = \bar{\mathcal{G}} \\ \mathcal{G} \text{ ist offen} &\iff \mathcal{G} = \overset{\circ}{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

Inbesondere sind  $\bar{\mathcal{G}}$  abgeschlossen und  $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$  offen.

- (iv) Für  $n = 1$ , also  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , gilt für  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend} \iff \mathcal{G} \text{ ist ein Intervall}$$

und damit

$$\mathcal{G} \text{ ist ein Gebiet} \iff \mathcal{G} \text{ ist ein offenes Intervall}$$

Für  $n > 1$  kann also ein Gebiet ein Ersatz für ein offenes Intervall sein.

- (v) Bei der Betrachtung von Funktionen wird daher häufig vorausgesetzt, daß ihr Definitionsbereich ein Gebiet ist. Die Offenheit garantiert dann, daß man bei der Untersuchung von Funktionswerten stets im Definitionsbereich der Funktion bleibt, wenn man ihr Argument nur wenig verändert. Der Zusammenhang wiederum garantiert, daß man im Grunde nicht zwei verschiedene Funktionen untersucht.

### Beispiele 10.10

- (i) In Beispiel 10.9 (ii) sind

$$\overset{\circ}{\mathcal{G}} = \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

- (ii) Seien  $\vec{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und

$$\mathcal{E} := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, (\vec{x}, \vec{n}) - c = 0\}.$$

Dann ist  $\mathcal{E}$  eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$ .  $\mathcal{E}$  ist abgeschlossen, also  $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}$ . Weiterhin ist  $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \emptyset$ .

### 10.2.2 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Will man Funktionen mehrerer Variablen differenzieren und integrieren, so sind dabei Grenzwerte zu bilden. Beispielsweise muß erklärt werden, was es heißen soll, daß eine Folge  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von Punkten bzw. Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert.

#### Definition 10.3

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{a} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\longmapsto \vec{a}(k) =: \vec{a}_k \end{aligned}$$

heißt eine *Folge im  $\mathbb{R}^n$* , geschrieben  $\{\vec{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

#### Bemerkung

(i) Die für (Zahlen-) Folgen in  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  definierten Begriffe

- beschränkt
- konvergent
- Häufungspunkt einer Folge etc.

lassen sich wörtlich übernehmen, wenn  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{R}^n$  und der Abstand  $|\cdot|$  durch die Euklidische Norm  $\|\cdot\|$  ersetzt wird.

(ii) Schreibtechnisch kompliziert wird es, wenn von einem Folgenpunkt die Komponenten gebraucht werden, man benötigt dann einen zweiten Index:

$$\vec{x}_k = \langle x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \rangle \quad \text{oder} \quad \vec{x}_k = \langle x_{k1}, \dots, x_{kn} \rangle.$$

Ich bevorzuge die erste Schreibweise, der obere Index in Klammern ist der Folgenindex, der untere Index bezeichnet – wie gehabt – die jeweilige Komponente. In der vektoriellen Schreibweise wird daraus also, wie üblich,

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Ganz im Sinne von Teil (i) der obigen Bemerkung wird definiert:

#### Definition 10.4

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . Eine Folge  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent gegen  $\vec{a}$* , wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{a}\| = 0.$$

Man beachte, daß  $\{\|\vec{x}_k - \vec{a}\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  einfach eine Folge reeller Zahlen ist, und von dieser ist bekannt, was man unter Konvergenz versteht.

Im Falle der Konvergenz gegen  $\vec{a}$  schreibt man auch

$$\vec{a} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k.$$

Anschaulich bedeutet die Konvergenz der (Punkt-)folge  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $\vec{a}$ , daß von einem bestimmten Index  $k_0$  an der gesamte Rest der Folge in einer (noch so kleinen) Kugel um  $\vec{a}$  liegt. Je kleiner die Kugel gewählt wird, desto größer wird  $k_0$  i.a. sein müssen.

### Beispiel 10.11

Seien  $n = 2$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $\vec{x}_k = \langle \frac{1}{k} \cos \theta k, \frac{1}{k} \sin \theta k \rangle$ . Dann gilt

$$\|\vec{x}_k - \vec{0}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{k} \cos \theta k\right)^2 + \left(\frac{1}{k} \sin \theta k\right)^2} = \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Also ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{0}$ .

In diesem Fall ( $n = 2$ ) lassen sich statt Punkten aus  $\mathbb{R}^2$  bzw. Vektoren auch komplexe Zahlen verwenden: dem Punkt  $\langle x_1, x_2 \rangle$  der Ebene entspricht die komplexe Zahl  $z = x_1 + ix_2$ , und der reellen Folge  $\vec{x}_k = \langle \frac{1}{k} \cos \theta k, \frac{1}{k} \sin \theta k \rangle$  entspricht die komplexe Zahlenfolge  $z_k = \frac{1}{k} (\cos \theta k + i \sin \theta k) = \frac{1}{k} e^{i\theta k}$ .

### Satz 10.1

Eine Folge von Vektoren  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn alle ihre Komponentenfolgen konvergieren:

$$\begin{aligned} \{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} &\iff \{x_j^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergent } (j \in \{1, \dots, n\}) \\ \text{Konvergenz} &\iff \text{Punktweise Konvergenz} \end{aligned}$$

*Beweis*

$$\begin{aligned} |x_j^{(k)} - a_j| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - a_i)^2} = \|\vec{x}_k - \vec{a}\| \\ &\leq \sqrt{n} \cdot \left( \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i^{(k)} - a_i| \right) \quad (j \in \{1, \dots, n\}) \end{aligned}$$

### Beispiel 10.12

Für die durch  $\vec{x}_k := \langle (-1)^k, \frac{1}{k} \rangle$  definierte Folge ist die Folge der ersten Komponenten, also  $\{(-1)^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , nicht konvergent. Damit ist die ganze Folge  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  nicht konvergent.

### Bemerkung

Nicht übertragbar aus dem Eindimensionalen sind Aussagen, die von der Ordnungsstruktur von  $\mathbb{R}$  Gebrauch machen (monotone Folgen in  $\mathbb{R}$  oder limsup- oder liminf-Aussagen. Denn im  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 1$  gibt es keine solche Ordnungsstruktur wie in  $\mathbb{R}$ .

### 10.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Wie am Ende des ersten Abschnittes dieses Kapitel angedeutet, muß analytisch erfaßt werden, was es bedeutet, „eine Ladung ändere ihre Lage nicht sprunghaft“.

Dazu werden zunächst zwei Beispiele betrachtet.

#### Beispiele 10.13

$$(i) \quad f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$(ii) \quad g: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x_1, x_2) := \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Frage:

Wie verhalten sich  $f$  und  $g$  „in der Nähe“ von  $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$  ?

Zu (i):

Für  $\vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  ist

$$|f(x_1, x_2)| = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{(x_1^2 + x_2^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 = \|\langle x_1, x_2 \rangle\|^2 = \|x\|^2$$

Ist also  $\|\langle x_1, x_2 \rangle\|$  - der Abstand des Punktes  $\vec{x}$  vom Ursprung  $\langle 0, 0 \rangle$  - „klein“, dann ist auch  $|f(x_1, x_2)|$  „klein“;  $f$  „geht gegen Null“, wenn  $\langle x_1, x_2 \rangle$  „gegen Null geht“:

$$0 \leq |f(x_1, x_2)| \leq \|x\|^2 \xrightarrow{(\|x\| \rightarrow 0)} 0$$

Vgl. dazu Abb. 10.9.

Zu (ii):

Ist  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  und  $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$ , so hat  $g$  den Wert 0;

Ist  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  und  $x_1 = x_2 \neq 0$ , dann hat  $g$  den Wert 1, s. Abb. 10.10.

Es gibt also in beliebiger Nähe von Null Punkte  $\langle x_1, x_2 \rangle$  mit  $g(x_1, x_2) = 0$  und  $g(x_1, x_2) = 1$ . Es kann daher keine Zahl geben, gegen die „ $g(x_1, x_2)$  geht“, wenn  $|\langle x_1, x_2 \rangle|$  „gegen Null geht“; vgl. dazu Abb. 10.11.

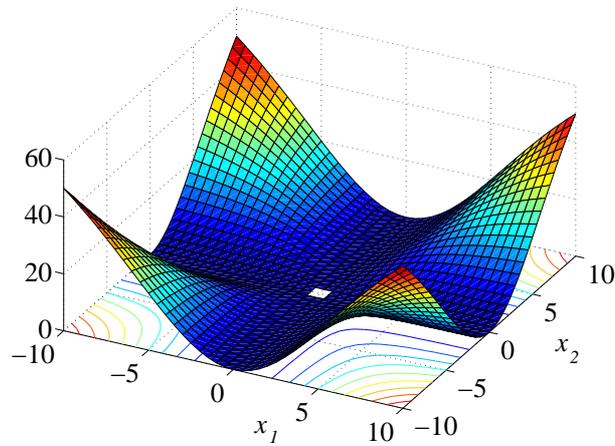


Abbildung 10.9: Graph der Funktion  $f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$  bei  $\langle 0, 0 \rangle$

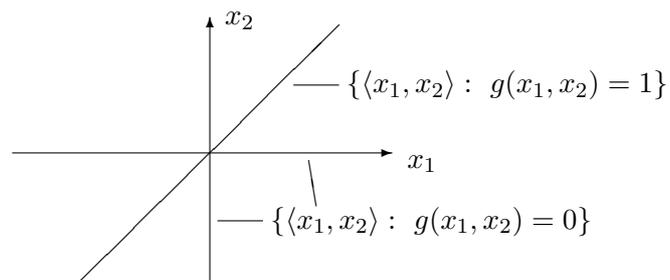


Abbildung 10.10:  $g$  hat keinen Grenzwert bei  $\vec{0}$

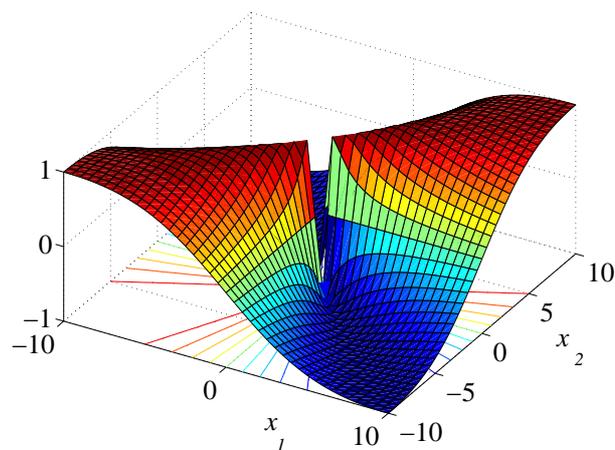


Abbildung 10.11: Graph der Funktion  $g(x_1, x_2) := \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$  bei  $\langle 0, 0 \rangle$

**Bemerkung**

Die Funktion  $f$  von Beispiel 10.13 (i) verhält sich bei  $\vec{0}$  regulär, die Funktion  $g$  von Beispiel 10.13 (ii) dagegen nicht. Das allein ist nun nicht weiter verwunderlich. Was verwundert ist die Tatsache, daß sich  $g$  auch dann noch regulär verhält, wenn man sich dem Nullpunkt auf irgendeiner Geraden  $g_c := \{ \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, x_2 = c \cdot x_1 \}$  ( $c \in \mathbb{R}$  geeignet) nähert.

**Aufgabe**

Welche Werte kann  $g$  in beliebiger Nähe von  $\vec{0}$  annehmen?

Hinweis: Polarkoordinaten

Offenbar ist das Annähern an einen Punkt auf *vorgeschriebenen* Wegen zu wenig, zur Existenz eines vernünftigen Grenzwertes muß man fordern, daß sich das Argument  $\vec{x}$  auch auf *beliebigen* Wegen  $\vec{\xi}$  nähern darf.

Die folgende Definition stimmt formal mit dem entsprechenden eindimensionalen Analogon überein:

**Definition 10.5**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi}$  ein Häufungspunkt von  $D(\vec{f})$  sowie  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^m$ .

Beh.:  $\vec{f}$  besitzt an der Stelle  $\vec{\xi}$  den Grenzwert  $\vec{\eta}$   $\iff$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{\vec{x} \in D(\vec{f})} [ 0 < \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\eta}\| < \varepsilon ]$$

**Bemerkung**

(i) Falls  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$  den Grenzwert  $\vec{\eta}$  hat, so schreibt man kurz

$$\vec{f}(\vec{x}) \longrightarrow \vec{\eta} \quad (\vec{x} \longrightarrow \vec{\xi}).$$

(ii) Wie im Eindimensionalen zeigt man, daß eine Funktion  $\vec{f}$  an einer Stelle  $\vec{\xi}$  höchstens einen Grenzwert hat, dieser also eindeutig bestimmt ist. Er wird dann mit

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}} \vec{f}(\vec{x})$$

bezeichnet.

Für die tatsächliche Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion ist wieder die Charakterisierung über Folgen hilfreich:

**Satz 10.2**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi}$  ein Häufungspunkt von  $D(\vec{f})$  sowie  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^m$ .

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

$$(i) \vec{f}(\vec{x}) \longrightarrow \vec{\eta} \quad (\vec{x} \longrightarrow \vec{\xi}).$$

(ii) Für jede Folge  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\vec{\xi} \neq \vec{x}_k$  aus  $D(\vec{f})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{\xi}$  ist auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{\eta}.$$

**Beispiele 10.14** (Fortsetzung der Beispiele 10.13)

**Beh. 1**

$\vec{0}$  ist ein Häufungspunkt von  $D(f) = D(g) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ .

*Bew.*

Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt:  $\dot{U}_\varepsilon(\vec{0}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}) \neq \emptyset$ .

**Beh. 2**

$f$  hat an der Stelle  $\vec{0}$  den Grenzwert 0.

*Bew.*

Gezeigt ist  $|f(x_1, x_2)| \leq \|\langle x_1, x_2 \rangle\|$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und setze  $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ . Dann gilt für alle  $\vec{x} \in D(f)$ :

$$\begin{aligned} \|\langle x_1, x_2 \rangle - \langle 0, 0 \rangle\| &= \|\langle x_1, x_2 \rangle\| < \delta \\ \implies |f(x_1, x_2) - 0| &\leq \|\langle x_1, x_2 \rangle\|^2 < \delta^2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

**Beh. 3**

$g$  hat an der Stelle  $\vec{0}$  keinen Grenzwert.

*Bew.*

Es wird ein Widerspruchsbeweis geführt und dabei der letzte Satz verwendet. Angenommen also,  $g$  habe bei  $\vec{0}$  einen Grenzwert. Dann betrachte man die beiden Folgen

$$\left\{ \left\langle \frac{1}{k}, 0 \right\rangle \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left\{ \left\langle \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right\rangle \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Für diese gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{k}, 0 \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right\rangle = 0,$$

somit, da  $g$  nach Annahme einen Grenzwert hat:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g\left(\left\langle \frac{1}{k}, 0 \right\rangle\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g\left(\left\langle \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right\rangle\right).$$

Andererseits ist für alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$g\left(\left\langle \frac{1}{k}, 0 \right\rangle\right) = 0 \quad \text{und} \quad g\left(\left\langle \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right\rangle\right) = 1,$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g\left(\left\langle \frac{1}{k}, 0 \right\rangle\right) = 0 \neq 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} g\left(\left\langle \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right\rangle\right). \quad \zeta$$

Definiert man für die Funktion  $f$  aus Beispiel 10.13 (i) eine *Fortsetzung* durch

$$\tilde{f}(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & , \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \\ 0 & , \vec{x} = \vec{0} \end{cases},$$

so ist  $\tilde{f}$  auch bei  $\vec{x} = \vec{0}$  definiert und zwar „vernünftig“ in dem Sinne, daß „ $\tilde{f}(\vec{x})$  gegen  $\tilde{f}(\vec{0})$  strebt“, wenn „ $\vec{x}$  gegen  $\vec{0}$  strebt“, d.h.  $\tilde{f}$  ist bei  $\vec{x} = \vec{0}$  *stetig*.

### Definition 10.6

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi} \in D(\vec{f})$  und  $\vec{\xi}$  ein Häufungspunkt von  $D(\vec{f})$  (das ist beispielsweise dann der Fall, falls  $D(\vec{f})$  ein Gebiet ist).

- (i)  $\vec{f}$  heißt *an der Stelle  $\vec{\xi}$  stetig*, wenn gilt
  - (a) Der Grenzwert  $\vec{\eta} := \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}} \vec{f}(\vec{x})$  existiert.
  - (b)  $\vec{\eta} = \vec{f}(\vec{\xi})$
- (ii)  $\vec{f}$  heißt *stetig*, wenn  $\vec{f}$  an jeder Stelle  $\vec{x} \in D(\vec{f})$  stetig ist.
- (iii)  $\vec{f}$  heißt *stetig in  $\mathcal{G}$* , wenn  $\mathcal{G} \subseteq D(\vec{f})$  und die Funktion  $\vec{f} \upharpoonright \mathcal{G}$  stetig ist.

Der folgende Satz ist eine Charakterisierung der Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertbegriffes und läßt sich wortwörtlich aus dem Eindimensionalen übernehmen:

### Satz 10.3

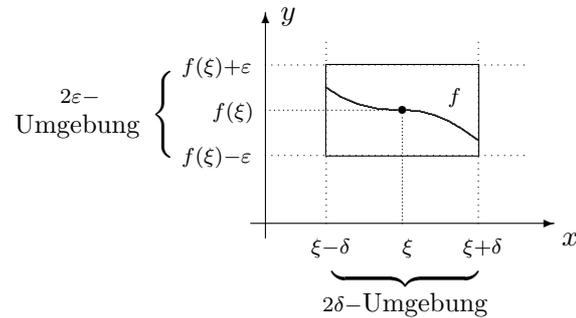
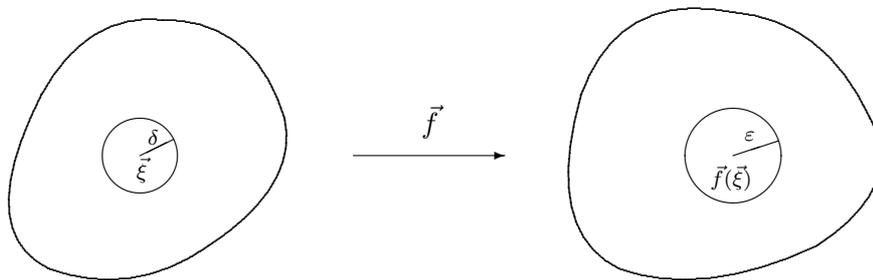
Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi} \in D(\vec{f})$  und  $\vec{\xi}$  ein Häufungspunkt von  $D(\vec{f})$ .

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i)  $\vec{f}$  ist an der Stelle  $\vec{\xi}$  stetig
- (ii) Für jede Folge  $\{\vec{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  aus  $D(\vec{f})$ , die gegen  $\vec{\xi}$  konvergiert, konvergiert stets auch die Folge  $\{\vec{f}(\vec{x}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , und zwar gegen  $\vec{f}(\vec{\xi})$ , d.h. es ist

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}} \vec{x}) = \vec{f}(\vec{\xi}).$$

- (iii)  $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{\vec{x} \in D(\vec{f})} [ \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{\xi})\| < \varepsilon ]$

Abbildung 10.12: Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$ Abbildung 10.13: Stetigkeit von  $\vec{f}$  im Punkt  $\vec{\xi}$ **I Stetigkeit im Eindimensionalen ( $n = 1, m = 1$ )** (Abb. 10.12)

$$|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

**II Stetigkeit im Mehrdimensionalen ( $n = 2, m = 2$ )** (Abb. 10.13)

$$\|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{\xi})\| < \varepsilon$$

**Beispiel 10.15**

Sprunghafte Materialänderungen erzeugen Unstetigkeiten der *Dichtefunktion*  $\varrho$ , welche i.a. eine Funktion der drei Raumvariablen  $\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  ist. So ist die Dichtefunktion eines Gebietes  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$ , in welchem sich außer Luft  $\mathcal{L}$  ein Stein  $\mathcal{S}$  befindet, gegeben durch

$$\varrho(\vec{x}) := \begin{cases} 2,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} & , \vec{x} \in \mathcal{S} \\ 0,001 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} & , \vec{x} \in \mathcal{L} \end{cases} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}),$$

und  $\varrho$  ist unstetig am Rand  $\dot{\mathcal{S}}$ .

**Aufgabe**

Man zeige die Unstetigkeit der Funktion  $\varrho$  des obigen Beispiels an den Punkten des jeweiligen Materialüberganges.

**Beispiel 10.16**

Man betrachte die in ganz  $\mathbb{R}^2$  definierte reellwertige Funktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{2 \sin(x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2} & , \langle x_1, x_2 \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle \\ 0 & , \langle x_1, x_2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \end{cases}$$

- (a) Für  $\vec{x} \neq \vec{0}$  ist  $f$  als Komposition stetiger Funktionen stetig; ein diesbezüglicher Sachverhalt gilt auch im Mehrdimensionalen.
- (b) Entlang der Koordinatenachsen (etwa  $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ ) ist  $f$  stetig:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{0} \\ x_1 \neq 0, x_2 = 0}} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{0} \\ x_1 \neq 0, x_2 = 0}} \frac{0}{x_1^2} = 0 = f(\vec{0}),$$

also ist  $f$  in  $\vec{0}$  stetig.

- (c) Entlang der Geraden  $x_2 = x_1$  ist  $f$  jedoch nicht stetig; ein entsprechender Beweis folgt etwa mit der l'Hospital'schen Regel:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{0} \\ x_1 = x_2 \neq 0}} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{0} \\ x_1 = x_2 \neq 0}} \frac{2 \sin x_1^2}{2 x_1^2} = \lim_{y=x_1^2 \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0 = f(\vec{0})$$

**(d) Aufgabe**

Ist  $f$  entlang der Geraden  $x_2 = -x_1$  ebenfalls nicht stetig?

**Definition 10.7**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi} \in D(\vec{f})$ .

Wenn  $\vec{f}$  bei festgehaltenen  $(n-1)$  Variablen als Funktion der übrigen Variable  $x_k$  in  $\vec{\xi}$  stetig ist, so heißt  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  *partiell stetig bzgl. der Variablen  $x_k$* .

**Bemerkung**

- (i) Die Fortsetzung  $\tilde{f}$  der Funktion  $f$  aus Beispiel 10.13 (i) (s. Beispiele 10.14) ist auch bei  $\vec{0}$  stetig, denn sie ist ja gerade so definiert, daß gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \tilde{f}(\vec{x}) = \tilde{f}(\vec{0}).$$

- (ii) Eine Fortsetzung  $\tilde{g}$  der Funktion  $g$  aus Beispiel 10.13 (ii) in den Nullpunkt  $\vec{0}$  dagegen ist nur partiell stetig; genauso wie die Funktion aus Beispiel 10.16. Wie man sieht, ist die Stetigkeit einer Funktion mehrerer unabhängigen Variablen in einem Punkt *nicht* allein dadurch gewährleistet, daß bzgl. jeder einzelnen Variablen (bei festgehaltenen übrigen Variablen) Stetigkeit vorliegt!

$$\text{Partielle Stetigkeit} \not\Rightarrow \text{Stetigkeit}$$

- (iii) Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit einer Funktion mehrerer unabhängigen Variablen selbstverständlich die Stetigkeit bzgl. jeder einzelnen Variablen:

$$\text{Stetigkeit} \Rightarrow \text{Partielle Stetigkeit}$$

Im folgenden soll ein Zusammenhang hergestellt werden zwischen einer vektorwertigen Funktion  $\vec{f} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  und ihren „Komponentenfunktionen“  $f_i$ .

**Definition 10.8**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi} \in D(\vec{f})$ . Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  sei

$$\begin{aligned} P_i & : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \langle y_1, \dots, y_m \rangle & \longmapsto y_i \end{aligned}$$

die *Projektion auf die  $i$ -te Koordinate*. Die durch

$$\begin{aligned} f_i & : & D(\vec{f}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \longmapsto f_i(\vec{x}) := (P_i \circ \vec{f})(\vec{x}) \end{aligned}$$

definierten Funktionen von  $n$  Variablen heißen die *Koordinatenfunktionen* von  $\vec{f}$ , s. Abb 10.14.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \supseteq D(\vec{f}) & \xrightarrow{\vec{f}} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{R} & \end{array} \quad \begin{array}{c} = \\ f_i \quad P_i \end{array}$$

Abbildung 10.14: Koordinatenfunktionen von  $\vec{f}$

Man schreibt auch

$$\vec{f} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \quad \text{oder} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix},$$

also dann

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in D(\vec{f})).$$

### Beispiel 10.17

Sei  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\vec{f}(\vec{x}) := \langle x_1^2 + x_3^2, e^{x_1} + \cos(x_1 x_2) \rangle,$$

dann sind die Koordinatenfunktionen  $f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= x_1^2 + x_3^2 \\ f_2(\vec{x}) &= e^{x_1} + \cos(x_1 x_2). \end{aligned}$$

Da die Konvergenz einer Folge von Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  äquivalent ist zur Konvergenz aller ihrer Komponenten (Satz 10.1), gilt

### Satz 10.4

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{f}$  eine Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ ,  $\vec{\xi} \in D(\vec{f})$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{f} \text{ ist in } \vec{\xi} \text{ stetig} &\iff \text{alle Koordinatenfunktionen } f_i \text{ sind in } \vec{\xi} \text{ stetig.} \\ \vec{f} \text{ ist stetig} &\iff \text{alle Koordinatenfunktionen } f_i \text{ sind stetig.} \end{aligned}$$

### Beispiel 10.18 (Wurfparabel)

Seien  $a, b, c, T > 0$ . Durch

$$\begin{aligned} \vec{f}: [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \langle at, bt, ct(T-t) \rangle \quad (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

ist eine Abbildung aus  $\mathbb{R}$  in den  $\mathbb{R}^3$  definiert (interpretierbar als Weg eines Teilchens unter dem Einfluß der Schwerkraft; s. Abb. 10.15).

### Satz 10.5 (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Verkettung stetiger Funktionen sind stetig, falls die entsprechende Operation überhaupt definiert ist (Nenner beim (reellwertigen (!)) Quotienten, Einsetzungsprozeß bei der Verkettung, etc.).

Hier muß man nur spezifizieren, was „Produkt“ bedeuten soll. Für reellwertige Funktionen ist das „gewöhnliche“ Produkt gemeint, für vektorwertige das Skalarprodukt, für  $\mathbb{R}^3$ -wertige auch das Vektorprodukt. In allen Fällen bleibt die Stetigkeit erhalten.

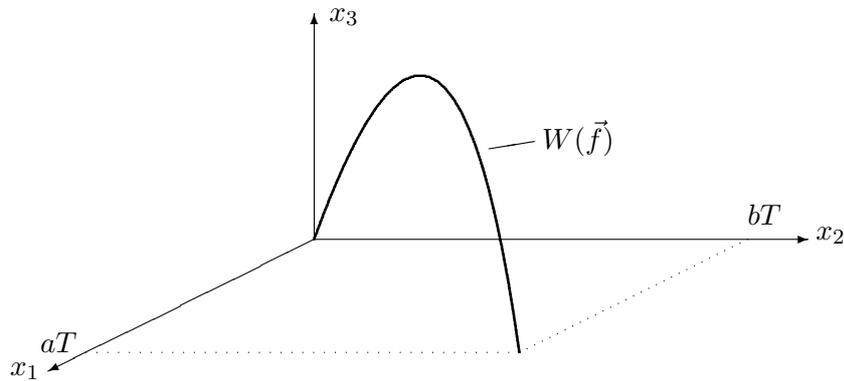


Abbildung 10.15: Wurfparabel

**Beispiele 10.19**(i) (Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ )

Die Stetigkeit folgt direkt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{u})| &\leq \|\vec{x} - \vec{\xi}\| \|\vec{u}\| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } \vec{x} \rightarrow \vec{\xi} \text{ und } \vec{u} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(ii) (Euklidische Norm)

Die Euklidische Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

ist stetig. Das folgt aus der „rückwärtigen“ Dreiecksungleichung:

$$\left| \|\vec{x}\| - \|\vec{\xi}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{\xi}\| \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3).$$

**Aufgabe**Wie folgt die Stetigkeit der Euklidischen Norm aus ihrer Definition  $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$  über das Skalarprodukt?

(iii) (Potenz der Norm)

Für  $\alpha > 0$  ist die durch  $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^\alpha$  definierte Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  stetig, denn es ist

$$\|\vec{x}\|^\alpha = e^{\alpha \cdot \log \|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}),$$

und die folgenden Funktionen sind stetig:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\longmapsto \|\vec{x}\| \\ y &\longmapsto \log(y) \\ z &\longmapsto e^z \end{aligned}$$

(iv) **Aufgabe**

Man beweise die Stetigkeit des Vektorproduktes  $\times$  im  $\mathbb{R}^3$ .

Hinweis:  $\|\vec{x} \times \vec{u}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{u}\| \sin \phi \quad (\vec{x}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3)$

# Kapitel 11

## Differentiation von Abbildungen aus dem $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

### 11.1 Problemstellung

Die (eindimensionale) Stetigkeit von Abbildungen

$$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall})$$

läßt sich auf (mehrdimensionale) Abbildungen

$$f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Gebiet})$$

wortwörtlich übertragen, wenn man die Betragsstriche  $|\cdot|$  durch eine Norm  $\|\cdot\|$  ersetzt, z.B. durch die Euklidische Norm.

Rein anschaulich gestattet der Differenzierbarkeitsbegriff eine ähnlich analoge Übertragung ins Mehrdimensionale, s. Abb. 11.1 und 11.2.

**I Differenzierbarkeit im Eindimensionalen ( $n = 1, m = 1$ )** (Abb. 11.1)

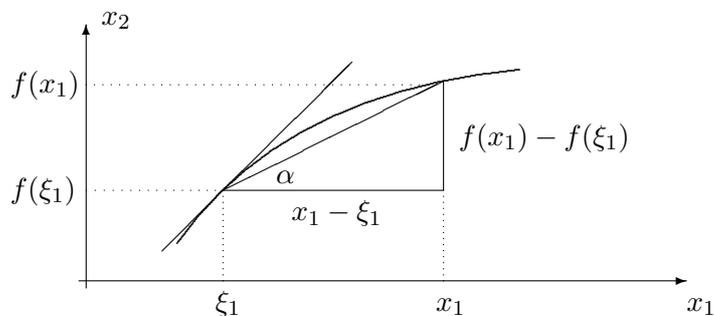


Abbildung 11.1: Differenzierbarkeit von  $f$  im Punkt  $\xi_1$

Analytische Darstellung:

$f$  heißt *an der Stelle  $\xi$  differenzierbar*, wenn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(\xi + t) - f(\xi)}{t}$$

(eigentlich) existiert, d.h. existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird mit  $f'(\xi)$  bezeichnet und heißt *Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\xi$* .

## II Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen ( $n = 2, m = 1$ )

(Abb. 11.2)

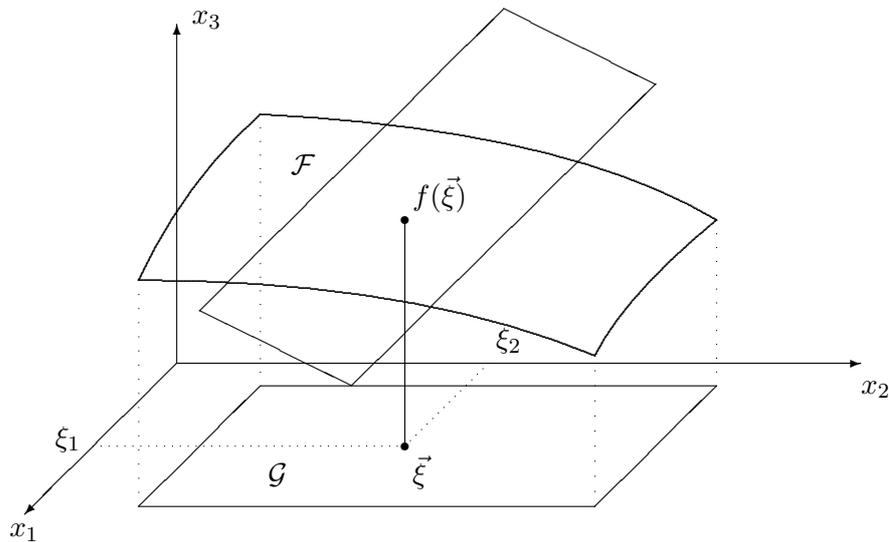


Abbildung 11.2: Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ .

$f$  heißt in  $\vec{\xi}$  *differenzierbar*:  $\iff$

der Graph der Funktion  $f$ , also die durch  $f$  definierte Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , besitzt im Punkt  $\langle \vec{\xi}, f(\vec{\xi}) \rangle$  eine *Tangentialebene*.

Problem mit der analytischen Darstellung:

Eine Verallgemeinerung des Begriffes des Differenzenquotienten scheidet daran, daß man in  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$  nicht dividieren kann. Eine Untersuchung des modifizierten „Differenzenquotienten“

$$\lim_{\substack{\vec{h} \rightarrow \vec{0} \\ \vec{h} \neq \vec{0}}} \frac{f(\vec{\xi} + \vec{h}) - f(\vec{\xi})}{\|\vec{h}\|}$$

dagegen führt auch nicht zum gewünschten Ziel.

### Aufgabe

Man zeige, daß der oben aufgeführte „Grenzwert“ schon im Eindimensionalen ( $\|\vec{h}\| = |h|$ ) bei einer in  $\xi$  differenzierbaren Funktion nicht zu existieren braucht, geschweige denn, das gewünschte Resultat liefert.

### Auswege

1. Man überlegt sich eine verallgemeinerungsfähige Definition des Differenzierbarkeitsbegriffes im  $\mathbb{R}^1$ , welcher ohne Division auskommt und versucht dann, diesen zu übertragen.
2. Man fordert nicht die Existenz einer Tangentialebene im Punkt  $\langle \vec{\xi}, f(\vec{\xi}) \rangle$ , sondern dort nur die Existenz von zwei Tangenten, deren Projektionen in die  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Konzept 1 führt zu einer echten Verallgemeinerung des eindimensionalen Differenzierbarkeitsbegriffes und läuft unter dem Namen „Totales Differential“.

Konzept 2 führt auf den Begriff „Partielle Ableitung“.

## 11.2 Richtungsableitungen

### 11.2.1 Partielle Ableitungen

Zur Motivation wird die folgende *Wheatstone'sche Brückenschaltung* (Abb. 11.3) betrachtet:

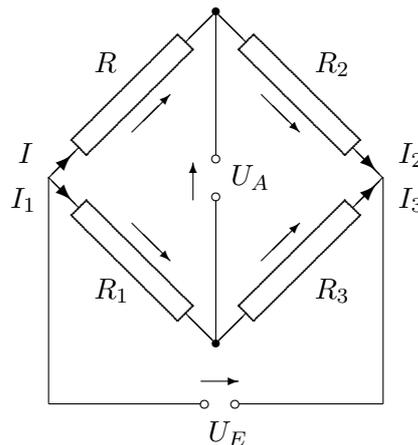


Abbildung 11.3: Wheatstone'sche Brückenschaltung

Bei bekannten Widerständen  $R_2$  und  $R_3$  kann man mit Hilfe eines regelbaren Widerstandes (*Potentiometer*)  $R_1$  die sog. Abgleichbedingung realisieren und die Brücke damit stromlos machen. Daraus läßt sich der unbekannte Widerstand  $R$  bestimmen.

(1.) Spannungsteilerregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz; Knotenpunktregel)

Bei Reihenschaltung mehrerer Widerstände verhalten sich die Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen wie die entsprechenden Widerstände selbst.

Eine Teilspannung verhält sich zur Gesamtspannung wie der zugehörige Teilwiderstand zum Gesamtwiderstand.

$$\begin{aligned} I_3 &= I_{1,3} = I_1 && \longrightarrow \\ \frac{U_3}{R_3} &= \frac{U_E}{R_1 + R_3} && \longrightarrow \quad U_3 = U_E \frac{R_3}{R_1 + R_3} \\ I_2 &= I_{0,2} = I_0 && \longrightarrow \\ \frac{U_2}{R_2} &= \frac{U_E}{R + R_2} && \longrightarrow \quad U_2 = U_E \frac{R_2}{R + R_2} \end{aligned}$$

(2.) 2. Kirchhoff'sches Gesetz

Die Gesamtspannung in einer Masche ist Null.

Angewandt auf die rechte Masche bedeutet das

$$\begin{aligned} -U_3 + U_A + U_2 &= 0 \\ \longrightarrow \quad U_A &= U_3 - U_2 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Bedingungen ergibt sich

$$U_A \stackrel{(2.)}{=} U_3 - U_2 \stackrel{(1.)}{=} U_E \left( \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R + R_2} \right).$$

Die Abgleichbedingung  $U_A \stackrel{!}{=} 0$  macht die Brücke stromlos. Auflösung nach  $R$  ergibt

$$R = R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3}.$$

Sei  $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x_1, R_2, R_3) := x_1 \cdot \frac{R_2}{R_3}.$$

Durch Verändern der ersten Variable  $x_1$  von  $f$  allein, bei gleichzeitigem Konstanthalten von  $R_2$  und  $R_3$ , läßt sich die Abgleichbedingung der Brücke realisieren:

$$f(x_1, R_2, R_3) \Big|_{x_1=R_1} = R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3} = R.$$

Die Brücke ist stromlos für  $x_1 = R_1$ .

Von den auf p. 27 erwähnten zwei Möglichkeiten der Übertragung des eindimensionalen Differenzierbarkeitsbegriffes auf mehrere Dimensionen wird zuerst Konzept 2 näher untersucht.

Dazu werden (nur) diejenigen beiden Tangenten an die Fläche im Punkt  $\langle \vec{\xi}, f(\vec{\xi}) \rangle \in \mathbb{R}^3$  gesucht, welche in denjenigen beiden Ebenen verlaufen, die zu den Koordinatenebenen parallel sind und durch die Punkte  $\langle \vec{\xi}, 0 \rangle$  und  $\langle \vec{\xi}, f(\vec{\xi}) \rangle$  verlaufen, s. Abb. 11.4.

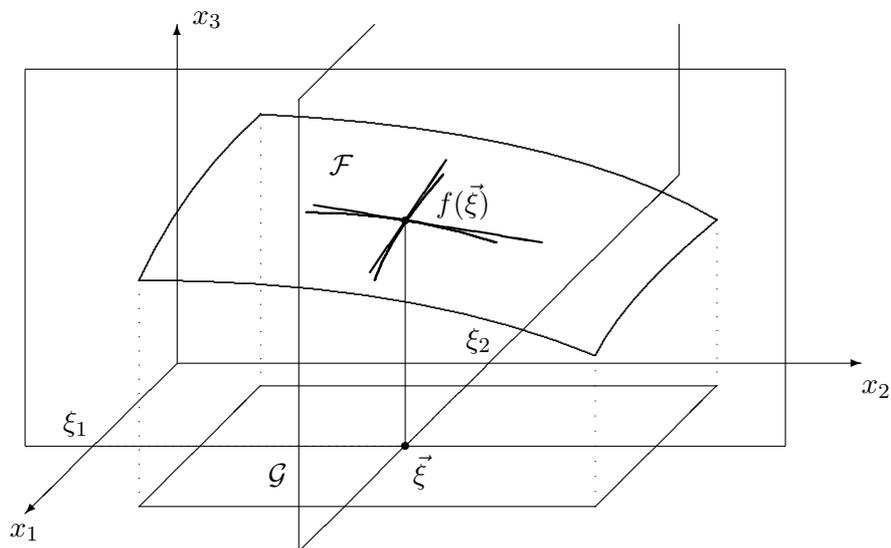


Abbildung 11.4: Zwei Tangenten an einen Flächenpunkt

Es wird also das Verhalten der Funktion  $f$  dadurch untersucht, daß eine Koordinate festgehalten und nur die andere verändert wird. Analytisch:

Es wird bzgl. einer Variablen differenziert, die andere(n) wird (werden) als Konstanten angesehen.

### Definition 11.1

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion;  $f$  ist also eine reellwertige Funktion von  $n$  Variablen. Seien  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

- (i)  $f$  heißt an der Stelle  $\vec{\xi}$  *partiell differenzierbar nach der  $k$ -ten Variablen* (auch: *nach  $x_k$* ) :  $\iff$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_k + t, \dots, \xi_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n)}{t}$$

existiert.

Für diesen Grenzwert gibt es mehrere Schreibweisen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\xi}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{\vec{\xi}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_k} f \right) (\vec{\xi}), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} f \Big|_{\vec{\xi}}, \quad f_{x_k}(\vec{\xi}), \quad D_k f(\vec{\xi}).$$

Manche dieser Schreibweisen können bisweilen zu Schwierigkeiten führen. Sind z.B.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_2, \xi_1) = \begin{cases} D_1 f(\xi_2, \xi_1) & \text{oder} \\ D_2 f(\xi_2, \xi_1) & \end{cases} ;$$

$$f_{x_1}(\xi_2, \xi_1) = \begin{cases} D_1 f(\xi_2, \xi_1) & \text{oder} \\ D_2 f(\xi_2, \xi_1) & \end{cases} ?$$

- (ii)  $f$  heißt *partiell differenzierbar in  $\mathcal{G}$* , wenn  $f$  an jeder Stelle  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  nach jeweils allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  partiell differenzierbar ist.
- (iii)  $f$  heißt *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  an jeder Stelle  $\vec{\xi} \in D(f)$  nach jeweils allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  partiell differenzierbar ist.

### Beispiele 11.1

- (i)  $D(f) := \{ \langle x_1, x_2 \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \quad (\langle x_1, x_2 \rangle \in D(f))$$

$f$  ist in der offenen (!) Kreisscheibe

$$\{ \langle x_1, x_2 \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$$

nach beiden Variablen partiell differenzierbar und hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) = D_1 f(\vec{\xi}) = \frac{-2\xi_1}{2\sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}} = -\frac{\xi_1}{\sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\xi}) = D_2 f(\vec{\xi}) = \frac{-2\xi_2}{2\sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}} = -\frac{\xi_2}{\sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}}$$

### Aufgabe

Man gebe eine graphische Interpretation der beiden partiellen Ableitungen von  $f$ .

- (ii)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch (cf. Beispiel 10.13 (ii))

$$g(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & , \vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \neq \vec{0} \\ 0 & , \vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle = \vec{0} \end{cases}$$

(a)  $D_1g$  für  $\xi_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_2 \neq 0$ :

$$D_1g(\xi_1, \xi_2) = \frac{2\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2\xi_1 \cdot 2\xi_1\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} = 2\xi_2 \frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}$$

(b)  $D_1g$  für  $\xi_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_2 = 0$ :

$$g(\xi_1, 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad D_1g(\xi_1, 0) = 0$$

(c) Analog berechnet man:

$$D_2g(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} 2\xi_1 \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} & , \quad \xi_1 \neq 0 \\ 0 & , \quad \xi_1 = 0 \end{cases} \quad (= D_1g(\xi_2, \xi_1))$$

Die Funktion  $g$  ist somit in ganz  $\mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar, ihre Ableitungen sind aber bei  $\vec{0}$  unstetig. Auf den Koordinatenachsen beispielsweise gilt (vgl. dazu Abb. 10.11)

$$\begin{aligned} D_1g(0, x_2) &= \frac{2}{x_2} \not\rightarrow 0 = D_1g(0, 0), \\ D_2g(x_1, 0) &= \frac{2}{x_1} \not\rightarrow 0 = D_2g(0, 0). \end{aligned}$$

### Bemerkung

In Abschnitt 10.3 wurde gezeigt, daß die Funktion  $g$  bei  $\vec{0}$  unstetig ist. Damit ist hier ein Beispiel dafür geliefert, daß aus der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion nach allen ihren Variablen die Stetigkeit *nicht* folgt:

$$g \text{ ist partiell differenzierbar} \quad \not\Rightarrow \quad g \text{ ist stetig.}$$

Das unterstreicht noch einmal, daß die partielle Differenzierbarkeit einer Funktion offenbar doch nicht das mehrdimensionale Äquivalent der eindimensionalen Differenzierbarkeit ist.

Es gilt jedoch der folgende

### Satz 11.1

Seien  $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ .

Wenn in einer ganzen Umgebung  $U(\vec{\xi}) \subseteq \mathcal{G}$  von  $\vec{\xi}$  die partiellen Ableitungen  $D_1f, \dots, D_nf$  von  $f$  existieren und dort beschränkte Funktionen sind, so ist  $f$  in  $\vec{\xi}$  stetig.

### 11.2.2 Gradient, Nabla-Operator, Potentialfeld

#### Definition 11.2

Seien  $n \in \mathbb{N}, \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $f$  in  $\vec{\xi}$  nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  partiell differenzierbar.

(i) Das  $n$ -Tupel

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\xi}) \right\rangle \in \mathbb{R}^n$$

heißt der *Gradient von  $f$  an der Stelle  $\vec{\xi}$* .

Der Gradient wird häufig als Spaltenvektor geschrieben:

$$(\vec{\nabla} f)(\vec{\xi}) := \text{grad } f(\vec{\xi}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\xi}) \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n$$

(ii) Existieren die partiellen Ableitungen von  $f$  in jedem Punkt  $\vec{x} \in \mathcal{G}$ , so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f := \text{grad } f : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\longmapsto \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right\rangle \end{aligned}$$

der *Gradient von  $f$*  und wird ebenfalls häufig als  $\mathbb{V}^n$ -Vektor geschrieben.

#### Beispiel 11.2

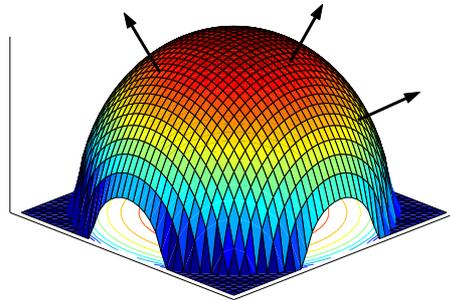
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

$f$  ordnet jedem Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  seinen Euklidischen Abstand vom Nullpunkt zu. Mit Hilfe von  $f$  lassen sich die Punkte des  $\mathbb{R}^3$  nun anders einteilen: Punkte mit demselben Abstand vom Ursprung gelten als „gleichwertig“, sie liegen auf einer *Äquipotentialfläche*. Diese sind hier offenbar Kugelschalen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt:

$$A_c := \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = c \}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \quad \longrightarrow \quad (\vec{\nabla} f)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \\ \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} \\ \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

Der Gradient ist hier ein Einheitsvektor, der die Richtung des Ortsvektors  $\vec{OX}$  von  $\vec{x}$  hat. Er steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen, s. Abb. 11.5

Abbildung 11.5: Äquipotentialfläche im  $\mathbb{R}^3$  zur Funktion aus Beispiel 11.2**Definition 11.3**

Die Menge  $\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{x}) = c\}$  heißt die *Niveaumenge* von  $f$  zum Niveau  $c$ . Meistens sind die Niveaumengen im Fall  $n = 2$  Kurven, die *Niveaukurven* oder *Äquipotentiallinien*; im Fall  $n = 3$  Flächen, die *Niveauflächen* oder *Äquipotentialflächen*. Das ist allerdings nicht zwingend und hängt wesentlich von der Funktion  $f$  ab.

**Aufgabe**

Niveaukurven auf einer Wanderkarte heißen *Höhenlinien* oder *Isohypsen*. Wann sind solche Höhenlinien keine Linien, sondern Flächenstücke?

**Beispiel 11.3**

Seien  $\vec{p} := \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$ ,  $Q, q > 0$  und sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto -\frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|}. \end{aligned}$$

Im physikalischen Zusammenhang ist  $f$  interpretierbar als potentielle Energie (*Potential*) der Probeladung  $q$  in dem elektrischen Feld, welches durch die in  $\vec{p}$  befindliche Ladung  $Q$  am Punkt  $\vec{x}$  – dem *Aufpunkt* – erzeugt wird.

In  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}$  ist  $f$  nach allen drei Variablen partiell differenzierbar, und man erhält für  $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} D_k f(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{q \cdot Q}{\sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2}} \right) \\ &= \frac{q \cdot Q \cdot 2(x_k - p_k)}{2 \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2}^3} \\ &= q \cdot Q \cdot \frac{(x_k - p_k)}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} f)(\vec{x}) &= \left\langle \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} (x_1 - p_1), \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} (x_2 - p_2), \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} (x_3 - p_3) \right\rangle \\ &= \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \end{aligned}$$

in der vektoriellen Schreibweise.

### Ergebnis

Der Gradient des *Potentialfeldes*  $f$  ist gerade die Kraft  $\vec{F}$ , die eine in  $\vec{p}$  liegende Ladung der Stärke  $Q$  auf eine am Ort  $\vec{x}$  befindliche Probeladung  $q$  ausübt, cf. Beispiel 10.5. Es ist

$$(\vec{\nabla} f)(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) =: q \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\})$$

mit dem durch  $Q$  am Ort  $\vec{x}$  erzeugten *elektrischen Feld*

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}).$$

### Bemerkung

Durch Gradientenbildung (= Ableiten) wurde zur Funktion  $f$  das Kraftfeld  $\vec{F}$  bzw. das elektrische Feld  $\vec{E}$  bestimmt. Meistens stellt sich das Problem allerdings umgekehrt: Gegeben sei ein Kraftfeld

$$\vec{F}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

nämlich etwas, was man physikalisch messen kann.

Gibt es dann zum Feld  $\vec{F}$  ein Potential  $f$ , d.h. eine Funktion  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} f)(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}) ?$$

Wenn ja, dann hätte man es „nur“ mit einer skalaren Funktion zu tun, – einem *Skalarfeld* – nicht mit einem sog. *Vektorfeld*.

### Definition 11.4

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\vec{v}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld.

- (i) Eine reellwertige Funktion  $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine *Stammfunktion* von  $\vec{v}$  in  $\mathcal{G}$ , wenn gilt:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{v}.$$

In einem solchen Fall heißt  $\vec{v}$  ein *Gradientenfeld*.

- (ii) In der Physik heißt

$$U := -\varphi$$

das *Potential* des Vektorfeldes  $\vec{v}$ , und man sagt,  $\vec{v}$  besitze ein Potential.

**Bemerkung**

- (i) Genauer müßte man die Funktion  $U$  aus Definition 11.4 *ein* – nicht *das* – Potential von  $\vec{v}$  nennen, denn mit  $U$  ist auch jede Funktion  $U + c$  mit einer Konstanten  $c$  ein Potential. *Das* Potential ist also überhaupt nicht eindeutig bestimmt, sondern nur Potentialdifferenzen.
- (ii) Das Vektorfeld  $\vec{F}$  aus Beispiel 11.3 ist ein Gradientenfeld mit der Stammfunktion  $f$ .
- (iii) Das formale  $n$ -Tupel

$$\vec{\nabla} = \langle D_1, \dots, D_n \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$$

wird auch als *Nabla-Vektor* oder *Nabla-Operator* bezeichnet. Tatsächlich läßt sich mit  $\vec{\nabla}$  in manchen Fällen so rechnen wie mit Elementen des  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{V}^n$ , es ist aber Vorsicht geboten.

In diesem Sinne ist beispielsweise  $\vec{\nabla}f$  der von rechts mit dem „Skalar“  $f$  multiplizierte „Vektor“  $\vec{\nabla}$ . Eine „Multiplikation“ von  $\vec{\nabla}$  mit  $f$  von links dagegen ist sinnlos: der Ausdruck  $f\vec{\nabla}$  ist ohne weitere Voraussetzungen allein nicht definiert.

**11.2.3 Richtungsableitung in beliebiger Richtung**

Will man in einem Wald querfeldein einen Berg hinauflaufen, so kann man nicht immer den geradlinigen Weg wählen. Das nicht nur, weil häufig Bäume im Weg stehen sondern auch, weil manchmal der Weg einfach zu steil ist. Es läßt sich nur solch ein Weg wählen, bei dem die Steigung an keiner Stelle zu groß wird.

Beim Wandern läßt sich das natürlich intuitiv beurteilen. Will die Forstverwaltung jedoch einen Wanderweg bauen, muß sie die Steigung des Geländes in einer gegebenen Richtung, nämlich der Richtung des zu bauenden Weges, kennen; das Gelände läßt sich hierbei als Schaubild einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ansehen.

**Definition 11.5**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{G}$  offen, sei  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\vec{u}\| = 1$  (Euklidische Norm!). Seien  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $t \in \mathbb{R}$  hinreichend klein, so daß für alle betrachteten Werte von  $t$  auch noch

$$(\vec{\xi} + t \cdot \vec{u}) \in \mathcal{G}$$

gilt. Seien  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $g$  definiert durch

$$g(t) := f(\vec{\xi} + t \cdot \vec{u}) \quad (t \text{ hinreichend klein}).$$

Falls  $g$  an der Stelle  $t = 0$  als Funktion aus  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist, so heißt

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{\xi} + t \cdot \vec{u}) - f(\vec{\xi})}{t}$$

die *Richtungsableitung* von  $f$  im Punkt  $\vec{\xi}$  in Richtung  $\vec{u}$ . Sie wird mit den folgenden Bezeichnungen versehen:

$$g'(0) = D_{\vec{u}}f(\vec{\xi}) = \frac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial \vec{u}}.$$

**Bemerkung**

- (i) Ist speziell für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{u} = \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (k\text{-te Zeile})$$

so gilt:

$$D_{\vec{e}_k}f(\vec{\xi}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{\xi} + t \cdot \vec{e}_k) - f(\vec{\xi})}{t} = D_k f(\vec{\xi}) = \frac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial x_k},$$

d.h. die Richtungsableitung in Richtung  $\vec{e}_k$  ist gerade die partielle Ableitung nach der  $k$ -ten Variablen.

- (ii) Die Richtungsableitung gibt ein Maß für den Zuwachs von  $f$ :

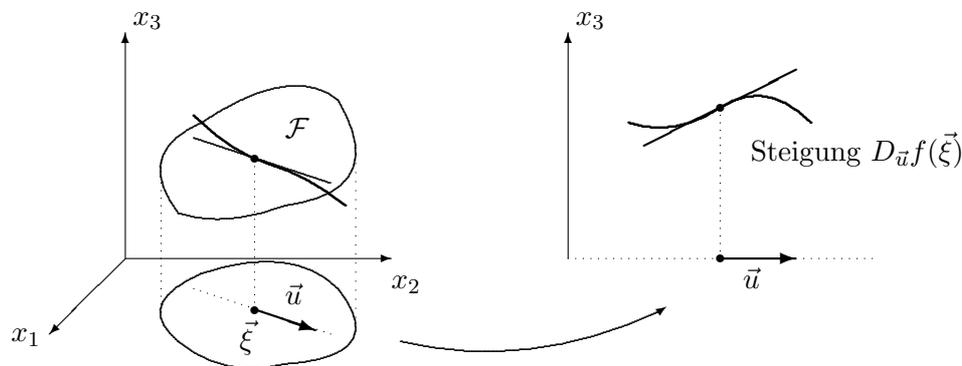
„zeigt“  $\vec{u}$  in eine Richtung, in der sich  $f(\vec{\xi} + t\vec{u})$  und  $f(\vec{\xi})$  für kleine  $t$  „wenig“ unterscheiden, so wird die Richtungsableitung  $D_{\vec{u}}f(\vec{\xi})$  „klein“ sein; in einer anderen Richtung  $\vec{u}$ , in der sich  $f$  „stark“ ändert, ist  $D_{\vec{u}}f(\vec{\xi})$  „groß“.

Im Fall  $n = 2$  ist auch eine geometrische Veranschaulichung möglich, s. Abb. 11.6.

In Worten:

Schneidet man die Fläche  $f$  mit der Ebene, die  $\vec{u}$  enthält und senkrecht zur  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene steht und konstruiert die Tangente an die Schnittkurve an der Stelle  $f(\vec{\xi})$ , so hat diese die Steigung  $D_{\vec{u}}f(\vec{\xi})$ .

Im Fall  $n > 2$  ist diese geometrische Interpretation nicht mehr möglich.

Abbildung 11.6: Richtungsableitung im Fall  $n = 2$ **Beispiel 11.4**

Man betrachte die in ganz  $\mathbb{R}^2$  definierte Funktion

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_1 \cdot \sin x_2 \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2).$$

Es soll die Richtungsableitung von  $f$  in einem Punkt  $\vec{\xi} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$  in der durch

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definierten Richtung berechnet werden.

Dazu muß der Richtungsvektor zuerst normiert werden:

$$\vec{u}^0 := \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}^0} f(\vec{\xi}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\xi_1 + \frac{t}{\sqrt{2}})^2 + (\xi_1 + \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot \sin(\xi_2 + \frac{t}{\sqrt{2}}) - \xi_1^2 - \xi_1 \sin \xi_2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} t \xi_1 + \frac{1}{2} t^2}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin(\xi_2 + \frac{t}{\sqrt{2}}) - \sin \xi_2}{\frac{t}{\sqrt{2}}} \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\xi_2 + \frac{t}{\sqrt{2}}) \\ &= \sqrt{2} \cdot \xi_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \cos \xi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \xi_2 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Richtungsableitung im letzten Beispiel geht auf Definition 11.5 zurück und ist demzufolge ziemlich unhandlich. Es stellt sich die Frage, ob es nicht einfacher geht, vergleichbar mit der Berechnung der partiellen Ableitung einer Funktion.

Dazu wird die Richtungsableitung in Richtung der Koordinatenachsen betrachtet ( $\vec{u} = \vec{u}^0 = \vec{e}_k$ ):

$$D_{\vec{u}}f(\vec{\xi}) = D_k f(\vec{\xi}) = \frac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial x_k} = ((\vec{\nabla} f)(\vec{\xi}), \vec{e}_k)$$

In Worten:

Im Punkt  $\vec{\xi}$  ist die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\vec{e}_k$  gegeben durch die Projektion des Gradienten auf die durch  $\vec{e}_k$  bestimmte Gerade. Eine analoge Formel gilt nun auch für beliebige Richtungen  $\vec{u}$ , s. Abb. 11.7.

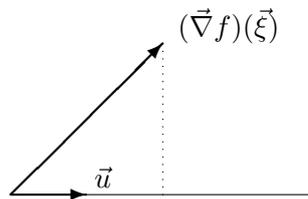


Abbildung 11.7: Richtungsableitung als Projektion des Gradienten

**Satz 11.2**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{G}$  offen und  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ . Seien  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion, deren Richtungsableitung  $D_{\vec{u}}f(\vec{\xi})$  und deren partielle Ableitungen  $D_k f(\vec{\xi})$  alle existieren mögen. Ferner seien die partiellen Ableitungen  $D_k f(\cdot)$  in  $\vec{\xi}$  stetig.

Dann gilt:

$$D_{\vec{u}}f(\vec{\xi}) = ((\vec{\nabla} f)(\vec{\xi}), \vec{u}).$$

*Zum Beweis*

Der Beweis ist äußerst einfach, wenn man den Begriff der (totalen) Differenzierbarkeit zur Verfügung hat, der im nächsten Abschnitt behandelt wird.

**Beispiel 11.5** (Wiederaufnahme von Beispiel 11.4)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_1 \cdot \sin x_2 && (\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2), \\ \vec{\nabla} f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 2x_1 + \sin x_2 \\ x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}, && \vec{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \longrightarrow D_{\vec{u}}f(\vec{\xi}) &= ((\vec{\nabla} f)(\vec{\xi}), \vec{u}) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 2\xi_1 + \sin \xi_2 \\ \xi_1 \cos \xi_2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \sqrt{2} \cdot \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \xi_2 + \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \cos \xi_2. \end{aligned}$$

### Qualitative Beschreibung des Gradienten

$$\begin{aligned} |D_{\vec{u}}f(\vec{\xi})| &= |((\vec{\nabla}f)(\vec{\xi}), \vec{u}^0)| \\ &\leq \|(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})\| \cdot \|\vec{u}^0\| = \|(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})\| \end{aligned}$$

Bei der Schwarz'schen Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})$  und  $\vec{u}$  die gleiche Richtung haben. Somit:

Der „Anstieg“ von  $f$  an der Stelle  $\vec{\xi}$  in Richtung  $\vec{u}$  ist dann am größten, wenn  $\vec{u}$  die gleiche Richtung von  $(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})$  hat.

Oder:

$(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})$ , an der Stelle  $\vec{\xi}$  angetragen, zeigt in Richtung des maximalen Anstiegs von  $f$ . Dort hat die Richtungsableitung den Wert  $\|(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})\|$ .

Für die entgegengesetzte Richtung  $-\vec{u}$  ist

$$D_{-\vec{u}}f(\vec{x}) = ((\vec{\nabla}f)(\vec{\xi}), -\vec{u}) = -((\vec{\nabla}f)(\vec{\xi}), \vec{u}) = -D_{\vec{u}}f(\vec{x}).$$

Kehrt man die Richtung um, so ändert die Richtungsableitung ihr Vorzeichen. Infolgedessen ist die Gegenrichtung des Gradienten die Richtung des stärksten Gefälles von  $f$ , und dieses Gefälle ist durch  $\|(\vec{\nabla}f)(\vec{\xi})\|$  gegeben.

In diesem Zusammenhang stehen Redewendungen wie

- Ein Wärmefluß erfolgt in Richtung des negativen Temperaturgradienten,
- Diffusion findet statt in Richtung des negativen Diffusionsgradienten,
- etc.

Immer soll durch diese Formulierungen ausgedrückt werden, daß ein Potentialausgleich in Richtung des größten Gefälles der entsprechenden Potentialfunktion stattfindet.

Im folgenden soll dieser Sachverhalt noch einmal exemplarisch an einem Beispiel demonstriert werden, indem gezeigt wird, daß der Gradient senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht und damit die Richtung des stärksten Anstiegs oder Gefälles einer Funktion angibt.

#### Beispiel 11.6

Das Potential des von einer Punktladung der Stärke  $Q$  am Ort  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  am Aufpunkt  $\vec{x}$  erzeugten elektrischen Feldes ist gegeben durch (cf. Beispiel 11.3)

$$f(\vec{x}) = -\frac{Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}).$$

Für  $c > 0$  ( $c < 0$ ) und  $Q < 0$  ( $Q > 0$ ) ist

$$A_c := \{\vec{x} : \vec{x} \in D(f), f(\vec{x}) = c\}$$

eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , und zwar die Oberfläche einer Kugel mit dem Mittelpunkt  $\vec{p}$  und dem Radius  $-Q/c$ :

$$f(\vec{x}) = c \iff \|\vec{x} - \vec{p}\| = -\frac{Q}{c} \quad (\vec{x} \in D(f)).$$

Der Gradient von  $f$  ist das von  $Q$  erzeugte elektrische Feld

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \quad (\vec{x} \in D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}).$$

Das Feld ist *kugelsymmetrisch* und steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen (= Flächen gleichen Potentials), s. Abb. 11.8.

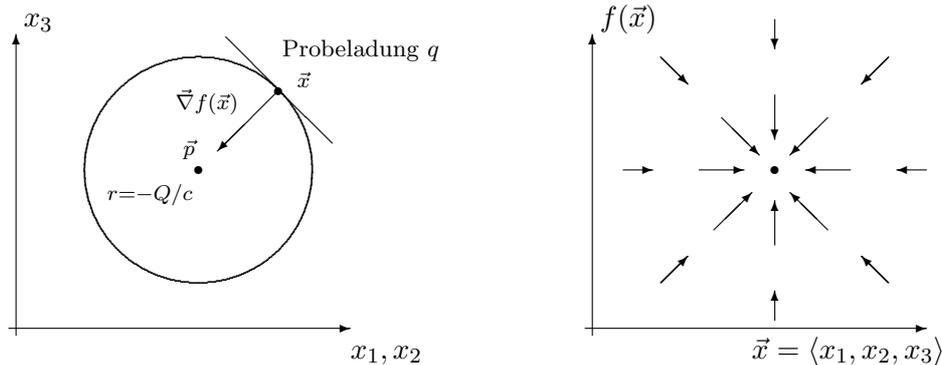


Abbildung 11.8: Gradientenfeld einer Punktladung für  $qQ < 0$ , daher ist die Kraft  $\vec{F}$  attraktiv

Im folgenden soll das intuitive Bild eines sog. *Potentialtopfes* an diesem Beispiel noch einmal näher beleuchtet werden. Seien dazu o.B.d.A.  $\vec{p} = \vec{0}$  und  $Q = -1$ , es gelte also

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|},$$

$$(\vec{\nabla} f)(\vec{x}) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (\vec{x} \in D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

Ist die Probeladung  $q$  positiv, z.B.  $q = 1$ , so ist wegen  $qQ = -1 < 0$  die Kraft  $\vec{F}$  attraktiv,

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} f)(\vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}),$$

sie ist also vom Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  auf den Ursprung hin gerichtet. Definiert man nun – wie in der Physik üblich – das Potential durch  $\varphi := -f$ , so erhält

man mit  $\vec{F} = \vec{\nabla} f = -\vec{\nabla} \varphi$ :

$$\varphi(\vec{x}) = -f(\vec{x}) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|},$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla} \varphi)(\vec{x}) = (\vec{\nabla} f)(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

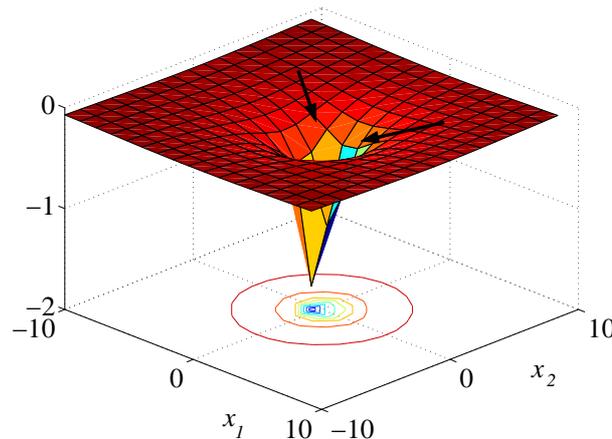


Abbildung 11.9: „Potentialtopf“ der Coulomb-Kraft im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, x_2) = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\frac{1}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\})$$

Anschaulich versucht das Kraftfeld, die Probeladung in den Potentialtopf „hineinzuziehen“, s. Abb. 11.9. Im Sonnensystem wird das durch die kinetische Energie der umlaufenden Planeten, bei Atomen durch die kinetische Energie der Elektronen verhindert (Bohr'sches Atommodell).

## 11.3 Differenzierbarkeit von Abbildungen

### 11.3.1 Einführung und Definition

Die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion mit Hilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten,

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

funktioniert nur im Eindimensionalen, da man im  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$  nicht dividieren kann; dort ist

$$\vec{h} = \vec{\xi} + \vec{h} - \vec{\xi}$$

ein Punkt (Vektor) des  $\mathbb{R}^n$ . Es läßt sich allerdings durch die Norm  $\|\vec{h}\|$  des Vektors  $\vec{h}$  dividieren, da diese wiederum eine Zahl ist. Was ist in diesem Fall jedoch  $f'(\xi)$ ?

Im folgenden wird der eindimensionale Differenzierbarkeitsbegriff etwas umgebaut, um zu einem von  $\mathbb{R}$  in den  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$  übertragungsfähigen Ausdruck zu gelangen. Dazu wird er so geschrieben, daß eine Division vermieden wird.

Seien dazu  $f$  im Punkt  $\xi$  differenzierbar und

$$r(\xi + h) := \begin{cases} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) & , \quad h \neq 0 \\ 0 & , \quad h = 0 \end{cases}$$

$$b := f'(\xi) .$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann für  $h \neq 0$ :

$$f(\xi + h) = f(\xi) + b \cdot h + r(\xi + h) \cdot h ,$$

und diese Beziehung kann als Ausgangspunkt einer zur Differenzierbarkeit äquivalenten Charakterisierung herangezogen werden:

**Satz 11.3**

Sei  $f$  eine reellwertige Funktion und sei  $\xi \in D(f)$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ . Dann gilt:

$f$  ist an der Stelle  $\xi$  differenzierbar

$\iff$

Es existieren eine Zahl  $b \in \mathbb{R}$  und eine in  $\xi$  stetige Funktion

$$r : U_\varepsilon(\xi) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\varepsilon > 0 \text{ geeignet})$$

mit  $r(\xi) = 0$ , so daß gilt:

$$f(\xi + h) = f(\xi) + b \cdot h + r(\xi + h) \cdot h \quad (\xi + h \in D(f)).$$

*Beweis*

„ $\implies$ “

s. die Ausführungen vor diesem Satz.

„ $\impliedby$ “

Es gelte die rechte Seite der Äquivalenz. Dann ist für  $x = \xi + h \in D(f)$ ,  $h \neq 0$

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = b + r(\xi + h).$$

Wegen  $\lim_{h \rightarrow 0} r(\xi + h) = r(\xi) = 0$  existiert

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

und ist gleich  $b$ .

Damit ist auch  $b = f'(\xi)$  gezeigt, und die Darstellung für  $r$  folgt aus der Darstellung für  $f$  durch Auflösen nach  $r$ :

$$r(\xi + h) = \begin{cases} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) & , h \neq 0 \\ 0 & , h = 0 \end{cases} .$$

In Worten:

In einer Umgebung von  $\xi$  sieht  $f$  aus wie eine Gerade, also eine lineare Funktion, d.h. dort gilt

$$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot h + \text{„kleiner Fehler“}.$$

Dabei ist der „kleine Fehler“ so klein, daß er auch dann noch gegen Null geht, wenn man ihn durch  $h$  dividiert und  $h$  gegen Null gehen läßt, s. Abb. 11.10.

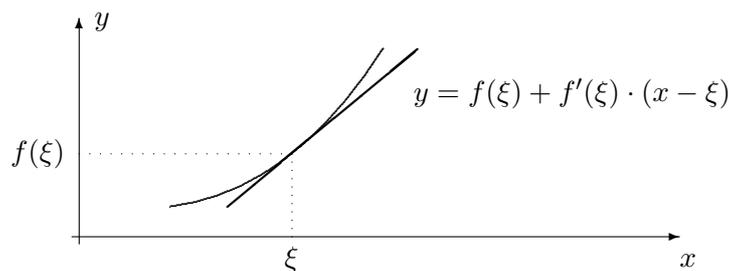


Abbildung 11.10: (Eindimensionale) Differenzierbarkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$

Man kann die Ableitung  $f'(\xi)$  als eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto f'(\xi) \cdot h \quad (h \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

auffassen und dafür

$$Df(\xi) := f'(\xi)$$

schreiben.

### Definition 11.6

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $\vec{f}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.

$\vec{f}$  heißt an der Stelle  $\vec{\xi}$  (total) differenzierbar :  $\iff$

Es existieren eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine in  $\vec{\xi}$  stetige Funktion

$$\vec{r}: U_\varepsilon(\vec{\xi}) \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\varepsilon > 0 \text{ geeignet})$$

mit  $\vec{r}(\vec{\xi}) = \vec{0}$ , so daß gilt:

$$\vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{\xi}) + L(\vec{h}) + \vec{r}(\vec{\xi} + \vec{h}) \cdot \|\vec{h}\| \quad (\vec{\xi} + \vec{h} \in D(\vec{f})).$$

**Bemerkung**

Diese Bedingung bedeutet die Existenz einer linearen Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so daß gilt:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{\xi}) - L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0, \quad (11.1)$$

oder alternativ:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{\xi} + \vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Die „Fehlerfunktion“  $r$  geht also schneller als linear gegen 0. Dummerweise läßt sich allerdings nicht angeben, *wie* schnell.

**Definition 11.7**

Ist  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$  differenzierbar, so ist die lineare Abbildung  $L$  eindeutig bestimmt (ohne Beweis), wird mit

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) := \vec{f}'(\vec{\xi}) := L$$

bezeichnet und heißt *Ableitung von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$*  oder *Totales Differential von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$* .

Man beachte:

Das totale Differential  $D\vec{f}(\vec{\xi})$  von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ !

**Beispiele 11.7**

(i)  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei konstant, d.h. mit einem geeigneten  $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$  gelte

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{c} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Dann ist

$$D\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n).$$

*Beweis*

Für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$  gilt ( $O$ : Nullmatrix)

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) = \vec{c} - \vec{c} = \vec{0} = O \cdot \vec{h} + \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n).$$

- (ii)  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei linear. Dann ist  $\vec{f}$  in jedem Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, und das totale Differential  $D\vec{f}(\vec{x})$  ist  $\vec{f}$  selbst.

*Beweis*

Für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) &= \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) \\ &= \vec{f}(\vec{h}) + \vec{0},\end{aligned}$$

infolgedessen ist  $\vec{f}$  in  $\vec{x}$  (total) differenzierbar, und die (die lineare Abbildung)  $\vec{f}$  im Punkt  $\langle \vec{x}, \vec{f}(\vec{x}) \rangle \in \mathbb{R}^{n+m}$  approximierende lineare Abbildung  $L$  ist  $\vec{f}$  selbst.

- (iii)

$$\begin{aligned}\vec{f}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \langle x_1, x_2 \rangle &\longmapsto \langle x_1^2, x_2^2, 2x_1 + 3x_2 \rangle \quad (\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

**Beh.**

$\vec{f}$  ist differenzierbar, d.h. an jeder Stelle  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar, und es ist

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \mathbb{R}^2).$$

*Beweis*

Seien  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$  und  $\vec{h} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}& \frac{\left\| \vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{\xi}) - \begin{pmatrix} 2\xi_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\|}{\|\vec{h}\|} \\ &= \frac{1}{\|\vec{h}\|} \left\| \begin{pmatrix} (\xi_1 + h_1)^2 \\ (\xi_2 + h_2)^2 \\ 2(\xi_1 + h_1) + 3(\xi_2 + h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\xi_1 h_1 \\ 2\xi_2 h_2 \\ 2h_1 + 3h_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{h}\|} \left\| \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{h_1^4 + h_2^4}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\sqrt{h_1^4 + 2h_1^2 h_2^2 + h_2^4}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(h_1^2 + h_2^2)^2}{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \|\vec{h}\| \longrightarrow 0 \quad (\vec{h} \rightarrow \vec{0})\end{aligned}$$

### 11.3.2 Funktionalmatrix

In den ersten beiden Beispielen von Beispiele 11. 7 läßt sich die  $\vec{f}$  approximierende lineare Abbildung erraten, bei dem dritten Beispiel ist diese schon nicht mehr so einsichtig. Wie kommt man auf diese lineare Abbildung?

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $\vec{f}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, welche an der Stelle  $\vec{\xi}$  differenzierbar ist, es gelte also

$$\vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{\xi}) = D\vec{f}(\vec{\xi})(\vec{h}) + \vec{r}(\vec{\xi} + \vec{h}) \cdot \|\vec{h}\| \quad (\vec{\xi} + \vec{h} \in \mathcal{G}) \quad (11.2)$$

mit einer in  $\vec{\xi}$  verschwindenden stetigen Abbildung  $\vec{r}$ . Die lineare Abbildung  $D\vec{f}(\vec{\xi}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  ist mit einer  $(m \times n)$ -Matrix ( $m$  Zeilen,  $n$  Spalten) identifizierbar, also

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Zahlen  $d_{ij} \in \mathbb{R}$ . Es soll nun versucht werden, diese Zahlen zu bestimmen.

Dazu wird die Differenzierbarkeitsbedingung (11.2) mit den Koordinatenfunktionen  $f_i$  von  $\vec{f}$  komponentenweise ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_1(\vec{\xi} + \vec{h}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{\xi} + \vec{h}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{\xi}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{\xi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(\vec{\xi} + \vec{h}) \\ \vdots \\ r_m(\vec{\xi} + \vec{h}) \end{pmatrix} \cdot \|\vec{h}\| \end{aligned}$$

Die  $i$ -te Zeile davon lautet

$$f_i(\vec{\xi} + \vec{h}) - f_i(\vec{\xi}) = \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot h_j + r_i(\vec{\xi} + \vec{h}) \cdot \|\vec{h}\| \quad (i \in \{1, \dots, m\})$$

Setzt man hier speziell

$$\vec{h} := t \cdot \vec{e}_k^{(n)} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (k\text{-te Zeile})$$

so erhält man

$$\begin{aligned} f_i(\vec{\xi} + t \cdot \vec{e}_k^{(n)}) - f_i(\vec{\xi}) &= f_i(\xi_1, \dots, \xi_k + t, \dots, \xi_n) - f_i(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n) \\ &= d_{ik} \cdot t + r_i(\vec{\xi} + t \cdot \vec{e}_k^{(n)}) \cdot |t|, \end{aligned}$$

also

$$d_{ik} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(\vec{\xi} + t \cdot \vec{e}_k^{(n)}) - f_i(\vec{\xi})}{t} = D_k f_i(\vec{\xi}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\vec{\xi}).$$

**Definition 11.8**

Die Matrix, welche aus den ersten partiellen Ableitungen im Punkt  $\vec{\xi}$  gebildet wird,

$$J_{\vec{f}}(\vec{\xi}) := \begin{pmatrix} D_1 f_1(\vec{\xi}) & \cdots & D_n f_1(\vec{\xi}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\vec{\xi}) & \cdots & D_n f_m(\vec{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{\xi}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{\xi}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{\xi}) \end{pmatrix},$$

heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$ .

Mit den Ausführungen vor Definition 11.8 ist damit der folgende Satz bewiesen:

**Satz 11.4**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $\vec{f}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, welche an der Stelle  $\vec{\xi}$  differenzierbar ist.

**Beh.**

Alle partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen  $f_i$  von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$  existieren, und die (zur linearen Abbildung  $L$  aus Definition 11.7 gehörende) Matrix  $D\vec{f}(\vec{\xi})$  ist gleich der Jacobi-Matrix  $J_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ :

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) = J_{\vec{f}}(\vec{\xi}).$$

**Definition 11.9**

Die Matrix  $D\vec{f}(\vec{\xi})$  aus Satz 11.4 heißt *Ableitungsmatrix* von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$ .

Ohne Beweis werden im folgenden Satz einige Verbindungen zusammengetragen, die den Zusammenhang mit der neu eingeführten Definition 11.7 beleuchten (sollen).

**Satz 11.5**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $\vec{f}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Dann gilt:

- (i)  $\vec{f}$  ist in  $\vec{x}$  differenzierbar  $\implies \vec{f}$  ist in  $\vec{x}$  stetig.
- (ii)  $\vec{f}$  ist in  $\vec{x}$  differenzierbar  $\implies$   
in  $\vec{x}$  existieren sämtliche Richtungsableitungen, insbesondere sämtliche partiellen Ableitungen.

- (iii) Die partiellen Ableitungen von  $\vec{f}$  in  $\vec{x}$  existieren und sind auf einer Umgebung  $U(\vec{x})$  beschränkte Funktionen  $\implies \vec{f}$  ist in  $\vec{x}$  stetig.
- (iv) Die partiellen Ableitungen von  $\vec{f}$  in  $\vec{x}$  existieren auf einer Umgebung  $U(\vec{x})$  und sind dort stetig  $\implies \vec{f}$  ist in  $\vec{x}$  (total) differenzierbar und  $\vec{f}' := D\vec{f}(\cdot)$  ist in  $\vec{x}$  stetig.

**Bemerkung**

- (i) Die Jacobi-Matrix „existiert“ natürlich immer schon dann, wenn  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  nach allen Variablen partiell differenzierbar ist. Nur dann, wenn  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  auch (total) differenzierbar im Sinne von Definition 11.7 ist, ist die Jacobi-Matrix  $J_{\vec{f}}(\vec{\xi})$  gleich der Ableitungsmatrix  $D\vec{f}(\vec{\xi})$ .
- (ii) Die Sätze 11.4 und 11.5 liefern nun eine bequeme hinreichende Bedingung dafür, wann eine vektorwertige Funktion  $\vec{f}$  in einem Punkt  $\vec{\xi}$  ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist und wenn ja, wie ihr totales Differential  $D\vec{f}(\vec{\xi})$  dann aussieht:
  - Existieren alle partiellen Ableitungen  $\partial f_i / \partial x_k$  der Koordinatenfunktionen  $f_i$  in einer Umgebung  $U(\vec{\xi})$  und sind dort stetig, so ist  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  (total) differenzierbar.
  - Das totale Differential von  $\vec{f}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$ , d.h. die lineare Abbildung  $D\vec{f}(\vec{\xi})$ , ist dann gegeben durch die Funktionalmatrix.
- (iii) In diesem Zusammenhang greife man noch einmal die Beispiele 11.7 auf, insbesondere (iii).
- (iv) Man könnte nun meinen, die (totale) Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt ließe sich dadurch erschließen, daß man ihre Funktionalmatrix in diesem Punkt berechnet: wenn diese existiert, dann liegt (totale) Differenzierbarkeit vor.

Tatsächlich ist diese Bedingung aber nicht hinreichend, wie man etwa an Beispiel 10.13 (ii) im Zusammenhang mit Beispiel 11.1 (ii) erkennen kann; s. auch Abb. 10.11. Hier existieren die partiellen Ableitungen überall, auch im Nullpunkt, die aus diesen partiellen Ableitungen am Nullpunkt gebildete Matrix – die Funktionalmatrix – lautet

$$J_g(0,0) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \right) = (0 \ 0),$$

es handelt sich dabei allerdings nicht um das (nicht existente) totale Differential  $Dg(\vec{0})$ . Nach Satz 11.5 (iv) wäre eine hinreichende Bedingung für deren Existenz beispielsweise die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in einer ganzen Umgebung des Nullpunktes, und diese liegt hier nicht vor (cf. Beispiel 11.1 (ii)).

- (v) Will man also eine Funktion  $\vec{f}$  mehrerer Variablen in einem Punkt  $\vec{\xi}$  differenzieren, so berechne man zuerst ihre partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{\xi})$ , ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ).

- Sind diese in einer Umgebung  $U$  von  $\vec{\xi}$  stetig, so ist die Funktion  $\vec{f}$  (total) differenzierbar, die Funktionalmatrix  $J_{\vec{f}}(\vec{\xi})$  der partiellen Ableitungen ist die Ableitungsmatrix  $D\vec{f}(\vec{\xi})$ .
- Existiert eine der partiellen Ableitungen nicht, so ist  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  nicht differenzierbar.
- Ist  $\vec{f}$  (in einer Umgebung  $U$  von  $\vec{\xi}$ ) nicht stetig, so ist  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  nicht differenzierbar.
- Existieren die partiellen Ableitungen, sind aber (in einer Umgebung  $U$  von  $\vec{\xi}$ ) nicht alle stetig, so kann  $\vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  (total) differenzierbar sein oder auch nicht. In diesem glücklicherweise seltenen Fall muß man die Existenz des Fehler-Grenzwertes (11.1) nachprüfen, wobei  $L$  die Funktionalmatrix ist.

(vi) Als eine weitere Bezeichnung sei die Schreibweise der *partiellen Ableitung einer vektorwertigen Funktion* erwähnt. Ist  $\vec{f}$  vektorwertig, also

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix},$$

so definiert man die partielle Ableitung von  $\vec{f}$  nach  $x_k$  durch

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{\xi}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\vec{\xi}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\vec{\xi}) \end{pmatrix} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

### 11.3.3 Tangentialebene, Linearisierung einer Funktion

Im Spezialfall  $n = 2, m = 1$ , also dem Fall einer reellwertigen Funktion zweier Variablen, läßt unsere Anschauung eine geometrische Interpretation des totalen Differentials zu. Der Graph einer solchen Funktion läßt sich als Fläche im  $\mathbb{R}^3$  veranschaulichen.

Seien  $\vec{\xi} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \mathcal{G} \in \mathbb{R}^2$  und  $f$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar. Dann ist die Funktionalmatrix die  $\langle 1 \times 2 \rangle$ -Matrix

$$Df(\vec{\xi}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\xi}) \right),$$

in etwas anderer Schreibweise auch

$$Df(\vec{\xi}) = ((\vec{\nabla} f)(\vec{\xi}))^T = ((\text{grad } f)(\vec{\xi}))^T.$$

Die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\vec{\xi}$  liefert in der Nähe von  $\vec{\xi}$  eine Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} f(\vec{\xi} + \vec{h}) &= f(\vec{\xi}) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\xi}) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + r(\vec{\xi} + \vec{h}) \cdot \|\vec{h}\| \\ &= f(\vec{\xi}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\xi}) \cdot h_2 + r(\vec{\xi} + \vec{h}) \cdot \|\vec{h}\|. \end{aligned} \tag{11.3}$$

In Angleichung an die Ingenieurliteratur werden in diesem Abschnitt die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} \langle x_0, y_0 \rangle &:= \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \\ \langle x, y \rangle &:= \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle h_1, h_2 \rangle &= \langle x - x_0, y - y_0 \rangle \\ z &:= f(x_1, x_2) \\ z_0 &:= f(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

Damit liest sich (11.3) als

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + r(x, y) \cdot \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Die Gleichung

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (11.5)$$

ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  geht und in  $x$ - und  $y$ -Richtung dieselbe Steigung aufweist wie die Fläche  $z = f(x, y)$ . Damit ist (11.5) die Gleichung der *Tangentialebene* an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ .

Genauer ist diese Tangentialebene als Punktmenge im  $\mathbb{R}^3$  natürlich gegeben durch (s. Abb. 11.2)

$$T_f(\langle x_0, y_0, z_0 \rangle) := \{ \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y, z \rangle \text{ erfüllt (11.5)} \}.$$

Die Größe

$$\begin{aligned} \Delta z &:= z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \\ &\quad (\Delta x := x - x_0, \Delta y := y - y_0) \end{aligned}$$

gibt die Änderung des  $z$ -Wertes auf der Tangentialebene an (Zuwachs oder Abnahme), wenn man in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene die Verschiebung

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

durchführt. Die Approximation

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (11.6)$$

entspricht also der Approximation einer gekrümmten Fläche durch ihre Tangentialebene im Punkt  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . Den Vorgang der Ersetzung einer Funktion durch ihren linearen Anteil unter Weglassung des Restes bezeichnet man als *Linearisierung*.

### Problem

Man weiß nichts Quantitatives darüber, wie gut die Linearisierung ist, man hat den Restsummanden

$$r(x, y) \cdot \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|$$

quantitativ nicht im Griff!

Später werden auch dafür quantitative Abschätzungen bereitgestellt. Dazu ist es allerdings erforderlich, auch höhere Ableitungen zu Hilfe zu nehmen (mehrdimensionale Taylor-Formel).

Die Gleichung der Tangentialebene soll jetzt etwas anders geschrieben werden, um den Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Linearen Algebra herzustellen.

Unter Benutzung des Euklidischen Skalarproduktes wird aus (11.5) die *Normalenform der Ebenengleichung*:

$$\left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

mit dem *Normalenvektor*

$$\vec{n} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

im Punkt  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ :

$$T_f(\langle x_0, y_0, z_0 \rangle) := \{ \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{n} \right) - d = 0 \}.$$

Abhängig davon, ob  $\vec{n}$  ein Einheitsvektor ist oder nicht, handelt es sich bei dieser Normalenform der Ebenengleichung um die *Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung*.

### Beispiel 11.8

Zu berechnen ist die Tangentialebene an die obere Fläche der Halbkugel vom Radius  $r$  ( $r > 0$  geeignet) um den Nullpunkt:

$$z := f(x, y) := \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \quad (x^2 + y^2 \leq r^2).$$

Im Punkt  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  der Halbkugel­fläche gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-x_0}{\sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{-y_0}{\sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)}} .$$

Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene

$$z - z_0 = \frac{-x_0}{\sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)}} (x - x_0) + \frac{-y_0}{\sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)}} (y - y_0) ,$$

oder anders geschrieben

$$\begin{aligned} x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + \sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)} \cdot z &= x_0^2 + y_0^2 + \underbrace{\sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)} \cdot z_0}_{z_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ &= r^2 . \end{aligned}$$

Das ist die Normalenform der Tangentialebene:

$$T_f(\langle x_0, y_0, z_0 \rangle) := \{ \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) - r^2 = 0 \} ,$$

und der Normalenvektor ist, wie bei einer Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt nicht anders zu erwarten, der Ortsvektor des Punktes  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ .

### Aufgabe

- (i) Wie lautet die Hesse'sche Normalenform der Tangentialebene?
- (ii) Welches sind die Äquipotentiallinien der Funktion  $f$  (im  $\mathbb{R}^2$ ), welches ihr Gradient? Man zeige an diesem Beispiel explizit, daß der Gradient auf den Äquipotentiallinien senkrecht steht.

### Bemerkung

An Abb. 10.11 läßt sich auch visuell erkennen, daß zur Existenz einer Tangentialebene in einem Punkt offenbar mehr erforderlich ist als die bloße Existenz der partiellen Ableitungen in diesem Punkt.

### 11.3.4 Totales Differential, Pfaff'sche Form

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine (reellwertige) Abbildung, welche an der Stelle  $\vec{\xi}$  differenzierbar ist. Dann existiert das totale Differential

$Df(\vec{\xi})$  von  $f$  in  $\vec{\xi}$  (hier: eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ ) und ist gegeben durch die (hier: einzeilige) Funktionalmatrix

$$Df(\vec{\xi}) = (D_1f(\vec{\xi}) \dots D_nf(\vec{\xi})) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\xi}) \right). \quad (11.7)$$

In der Literatur tritt häufig ein anderer Ausdruck unter dem Namen „Totales Differential“ auf, nämlich

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (11.8)$$

Welches ist der Zusammenhang zwischen (11.7) und (11.8)?

Um das zu klären, geht man von (11.7) aus und nimmt schrittweise eine Folge von Änderungen und Vereinfachungen vor.

- (i) Man ersetzt links das große „D“ durch ein kleines „d“:

$$df(\vec{\xi}) = (D_1f(\vec{\xi}) \dots D_nf(\vec{\xi})) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\xi}) \right).$$

- (ii) Man läßt links und rechts das Argument  $\vec{\xi}$  weg in der Annahme, daß ja links und rechts dasselbe  $\vec{\xi}$  steht und der Benutzer das schon wieder korrekt einsetzen wird:

$$df = (D_1f \dots D_nf) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \quad (11.9)$$

- (iii) Nun betrachtet man eine spezielle reellwertige Funktion von  $n$  Variablen, nämlich diejenige Funktion  $g_1$ , die einem Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  seine erste Komponente zuordnet:

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto g_1(\vec{x}) := x_1 \end{aligned}$$

Wenn man, wie so oft üblich, das Funktionssymbol  $g_1$  mit dem Funktionswert  $x_1$  gleichsetzt („ $y = f := f(x)$ “), so folgt mit  $x_1 = x_1(\vec{x}) := g_1(\vec{x})$  für das totale Differential von  $g_1$ :

$$dx_1 \text{ „=“ } dg_1 = \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right) = (1 \dots 0). \quad (11.10)$$

- (iv) Mit dieser Bezeichnung folgt für eine differenzierbare Funktion  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot (1 \ 0 \ \dots \ 0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \ 0 \ \dots \ 0 \right), \quad (11.11)$$

analog für die anderen Komponentenfunktionen  $g_2, \dots, g_n$ .

(v) Nun kombiniert man (11.9) und (11.11) und erhält:

$$\begin{aligned} df &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \ 0 \ \dots \ 0 \right) + \dots + \left( 0 \ \dots \ 0 \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$

Ein solcher Ausdruck ist also nichts Anderes als eine lineare Abbildung oder eine Matrix mit Funktionen als Komponenten, die hier nicht in der Form (11.9), sondern in der Form (11.8) geschrieben wird; die  $dx_i$  in der Form (11.10) sind dabei die Basisvektoren der Standardbasis des (Dualraumes des)  $\mathbb{R}^n$ . In Abschnitt 11.4 wird dieser Formel eine anschauliche Interpretation gegeben.

Die folgende Definition findet sich z.B. oft in der Thermodynamik:

**Definition 11.10**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $g_1, \dots, g_n$  in  $\mathcal{G}$  stetige Funktionen von  $n$  Variablen. Ein Ausdruck der Form

$$d\omega := g_1(\vec{x}) dx_1 + \dots + g_n(\vec{x}) dx_n \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

heißt eine *Differentialform ersten Grades* oder eine *Pfaff'sche Form*.

I.a. sind die Funktionen  $g_i$  nicht unbedingt die sämtlichen partiellen Ableitungen einer Funktion  $f$ ; in diesem Fall heißt  $d\omega$  ein (*unvollständiges*) *Differential*. Wenn es jedoch eine differenzierbare Funktion  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = g_i(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}, i \in \{1, \dots, n\}),$$

so heißt das Differential auch *vollständig* oder *total*. Nach Definition 11.4 ist  $f$  dann eine Stammfunktion des Vektorfeldes  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)^T$  in  $\mathcal{G}$ .

**Beispiel 11.9**

Ein Beispiel für eine Pfaff'sche Form (zweier Variablen) ist

$$d\omega_1 := x_2 dx_1$$

oder, in der Sprache der Thermodynamik,

$$d\omega_1 := p dV.$$

**Aufgabe**

Man zeige, daß  $d\omega_1 := p dV$  ein unvollständiges Differential, aber  $d\omega_2 := p dV + V dp$  vollständig ist.

### 11.3.5 Differentiationsregeln

Um das einfache Ergebnis vorwegzunehmen: Die vertrauten eindimensionalen Differentiationsregeln übertragen sich ohne Änderung auf vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen. Die Formeln werden gelegentlich etwas komplizierter, weil die Ableitung nicht mehr nur ein Skalar, sondern eine lineare Abbildung bzw. eine Matrix ist.

**Satz 11.6** (Summen- und Faktorregel)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $\vec{f}, \vec{g}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar. Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dann sind auch  $\vec{f} \pm \vec{g}$  und  $\lambda \cdot \vec{f}$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} D(\vec{f} \pm \vec{g})(\vec{\xi}) &= D(\vec{f})(\vec{\xi}) \pm D(\vec{g})(\vec{\xi}) \\ D(\lambda \cdot \vec{f})(\vec{\xi}) &= \lambda \cdot D(\vec{f})(\vec{\xi}) \end{aligned}$$

Die Produktregel setzt voraus, daß für  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  ein Produkt definiert ist. Folgende Fälle sind möglich:

- (i) Eine der beiden Abbildungen ist reellwertig, etwa  $\vec{f} = f$ . Dann ist das folgende Produkt definiert:

$$(f \cdot \vec{g})(\vec{x}) := f(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G});$$

- (ii)  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  sind  $\mathbb{R}^m$ -wertig, und „Produkt“ bedeutet Skalarprodukt:

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(\vec{x}) := (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G});$$

- (iii)  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  sind  $\mathbb{R}^3$ -wertig, und „Produkt“ bedeutet Vektorprodukt:

$$(\vec{f} \times \vec{g})(\vec{x}) := \vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

Zumindest in den ersten beiden Fällen der obigen Aufzählung läßt sich eine Formel für die Produktregel auch in Matrix-Vektor-Schreibweise angeben:

**Satz 11.7** (Produktregel)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $f(\vec{f}): \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^m$ ) und  $\vec{g}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar.

- (i)  $f$  reellwertig,  $\vec{g}$  vektorwertig:

Dann ist auch  $f \cdot \vec{g}$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar, und es gilt

$$D(f \cdot \vec{g})(\vec{\xi}) = f(\vec{\xi}) \cdot (D\vec{g})(\vec{\xi}) + \vec{g}(\vec{\xi}) \cdot (Df)(\vec{\xi}).$$

Das Produkt auf der linken Seite ist das Produkt einer skalaren Funktion mit einer  $\mathbb{R}^m$ -wertigen Vektorfunktion, so daß die Ableitung dieser Vektorfunktion nach  $n$  Variablen eine  $(m \times n)$ -Matrix ist; die Produkte der rechten Seite sind jeweils Matrizenprodukte einer

- (a)  $f(\vec{\xi}) \cdot (D\vec{g})(\vec{\xi})$ :  $(1 \times 1)$ -Matrix mit einer  $(m \times n)$ -Matrix;  
 (b)  $\vec{g}(\vec{\xi}) \cdot (Df)(\vec{\xi})$ :  $(m \times 1)$ -Matrix mit einer  $(1 \times n)$ -Matrix.

(ii)  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  vektorwertig:

Dann ist auch  $\vec{f} \cdot \vec{g}$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar, und es gilt

$$D(\vec{f} \cdot \vec{g})(\vec{\xi}) = \vec{f}(\vec{\xi}) \cdot (D\vec{g})(\vec{\xi}) + \vec{g}(\vec{\xi}) \cdot (D\vec{f})(\vec{\xi}).$$

Das Produkt auf der linken Seite ist das Skalarprodukt, die Produkte der rechten Seite sind jeweils Produkte einer  $(1 \times m)$ -Matrix mit einer  $(m \times n)$ -Matrix. Daher ist also i.a.

$$\vec{g}(\vec{\xi}) \cdot (D\vec{f})(\vec{\xi}) \neq (D\vec{f})(\vec{\xi}) \cdot \vec{g}(\vec{\xi}),$$

falls der Ausdruck auf der rechten Seite überhaupt definiert ist.

### Beispiel 11.10

(i) Ableitung des Produktes einer skalaren mit einer vektorwertigen Funktion:

$$\begin{aligned} & D \left( \sin(x_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \sin(x_1 x_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} (x_2 \cdot \cos(x_1 x_2) \quad x_1 \cdot \cos(x_1 x_2)) \\ &= \sin(x_1 x_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3x_1 - 2x_2) \cdot x_2 \cos(x_1 x_2) & (3x_1 - 2x_2) \cdot x_1 \cos(x_1 x_2) \\ 2x_1 x_2^2 \cdot \cos(x_1 x_2) & 2x_1^2 x_2 \cdot \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Ableitung des Skalarproduktes zweier vektorwertigen Funktionen:

$$\vec{f}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 + x_3^3 \\ x_2 + x_3^2 + x_1^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} e^{x_1} + \sin x_2 + \cos x_3 \\ e^{x_2} + \sin x_3 + \cos x_1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe

Man berechne die Ableitung  $D(\vec{f} \cdot \vec{g})(\vec{\xi})$ .

### Bemerkung

Da die Formeln für die Ableitung von Produkten von Funktionen in Matrixschreibweise zugegebenermaßen etwas umständlich sind, sollen sie hier noch einmal für die partiellen Ableitungen separat angegeben werden. Alle Funktionen sind stets an der Stelle  $\vec{\xi}$  auszuwerten,  $k \in \{1, \dots, m\}$ :

(i) Produkt mit einer skalaren Funktion:

$$\frac{\partial(f\vec{g})}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \vec{g} + f \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_k}$$

(ii) Skalarprodukt:

$$\frac{\partial(\vec{f}, \vec{g})}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}, \vec{g} \right) + \left( \vec{f}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_k} \right)$$

(iii) Vektorprodukt:

$$\frac{\partial(\vec{f} \times \vec{g})}{\partial x_k}(\vec{\xi}) = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} \times \vec{g} \right)(\vec{\xi}) + \left( \vec{f} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_k} \right)(\vec{\xi}).$$

(iv) Eine Quotientenregel für die Ableitung eines Quotienten kann im Mehrdimensionalen nur für den Fall existieren, daß  $g$  reellwertig ist. In diesem Fall aber kommt man jedoch schon mit der Produktregel zurecht:

$$D\left(\frac{\vec{f}}{g}\right) = D\left(\frac{1}{g} \cdot \vec{f}\right) = \frac{1}{g} \cdot (D\vec{f}) + \vec{f} \cdot \left(D\frac{1}{g}\right).$$

Die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen sieht formal genauso aus wie bei Funktionen einer Variablen, nur bedeutet die Multiplikation hier eine Multiplikation zweier Matrizen.

**Satz 11.8** (Kettenregel)

Seien  $l, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $\vec{g}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^l$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar,  $\vec{f}: \mathbb{R}^l \supseteq W(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{\eta} = \vec{g}(\vec{\xi})$  differenzierbar.

Dann ist auch  $\vec{f} \circ \vec{g}: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{\xi}$  differenzierbar, und es gilt

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{\xi}) = D\vec{f}(\vec{g}(\vec{\xi})) \cdot D\vec{g}(\vec{\xi}).$$

Wenn man die Variablen im  $\mathbb{R}^l$  mit  $\vec{y} = \langle y_1, \dots, y_l \rangle$  bezeichnet, so hat man für den Koeffizienten von  $D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{\xi})$  an der Stelle  $\langle i, k \rangle$  die Formel

$$\frac{\partial(\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_k}(\vec{\xi}) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\vec{g}(\vec{\xi})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\vec{\xi}), \quad (11.12)$$

$$(i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, n\}).$$

**Bemerkung**

Unter Weglassung der Argumente liest sich (11.12) als

$$\frac{\partial(\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k},$$

und unter (der bei Ingenieuren üblichen) Gleichsetzung der Funktionen  $g_j$  mit ihren Werten  $y_j = g_j(\vec{\xi})$  als

$$\frac{\partial(\vec{f} \circ \vec{g})_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k}.$$

**Beispiel 11.11**

Betrachtet wird eine Schraubenlinie im  $\mathbb{R}^3$ , auf welcher eine reellwertige Funktion definiert ist:

$$\begin{aligned} \vec{g}: [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} & \vec{x} &\longmapsto x_1 + x_2 \cdot x_3 \\ & & \longrightarrow h(t) := (f \circ \vec{g})(t) &= \cos t + t \cdot \sin t \quad (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

Diese zusammengesetzte Funktion soll unter Verwendung von Satz 11.8 nach  $t$  differenziert werden.

$$\begin{aligned} D\vec{g}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dt} \\ \frac{dg_2}{dt} \\ \frac{dg_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} & (t \in [0, T]) \\ Df(\vec{x}) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (1 \ x_3 \ x_2) & (\vec{x} \in \mathbb{R}^3) \\ \longrightarrow D(f \circ \vec{g})(t) &= Df(\vec{g}(t)) \cdot D\vec{g}(t) \\ &= (1 \ t \ \sin t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\sin t + t \cos t + \sin t \\ &= t \cos t & (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

Natürlich hätte man diese Aufgabe auch dadurch lösen können, daß man

$$h = f \circ \vec{g}: [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch Terme angibt und mit den Methoden der eindimensionalen Differentiation arbeitet:

$$\begin{aligned}(f \circ \vec{g})(t) &= f(\vec{g}(t)) = \cos t + t \cdot \sin t, \\ (f \circ \vec{g})'(t) &= -\sin t + t \cdot \cos t + \sin t \quad (t \in [0, T])\end{aligned}$$

### Beispiel 11.12

$$\begin{array}{llll} g: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ \vec{x} & \longmapsto & \|\vec{x}\| & \end{array} \quad \begin{array}{l} f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{sei differenzierbar} \end{array}$$

$g$  besitzt in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, also ist die Funktion  $h := f \circ g$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  differenzierbar.

$$\begin{aligned} Df(r) &= f'(r) & (r > 0) \\ \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|} & (k \in \{1, 2, 3\}) \\ Dg(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{1 \times 3} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} & \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} & \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix} & (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}) \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel (Satz 11.8) erhält man

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(\vec{x}) &= Df(g(\vec{x})) \cdot Dg(\vec{x}) \\ &= f'(\|\vec{x}\|) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} & \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} & \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}). \end{aligned}$$

Identifiziert man die  $\langle 1, 3 \rangle$ -Matrix (Zeilenvektor)

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} & \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} & \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix}$$

mit dem Punkt bzw. (Spalten-) Vektor

$$\left\langle \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}, \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}, \frac{x_3}{\|\vec{x}\|} \right\rangle = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|},$$

dem Einheitsvektor in  $\vec{x}$ -Richtung, so erhält man

$$Df(r) \Big|_{\|\vec{x}\|} := D(f \circ g)(\vec{x}) = f'(\|\vec{x}\|) \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

In Worten:

Die Ableitung eines kugelsymmetrischen Potentials ist gleich der Änderung in radialer Richtung, multipliziert mit dem Einheitsvektor in dieser Richtung.

Man betrachte noch einmal das Potential einer Punktladung aus Beispiel 11.3.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto -\frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|}. \end{aligned}$$

Dann ist  $\varphi$  eine Komposition der zwei Funktionen

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto \|\vec{x} - \vec{p}\|, \\ \\ f : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto -\frac{q \cdot Q}{r}, \end{aligned}$$

also  $\varphi = f \circ g$ , und es gilt mit  $r = \|\vec{x} - \vec{p}\|$ :

$$\begin{aligned} D\varphi(\vec{x}) &= f'(r) \cdot Dg(\vec{x}) = f'(r) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \\ &= \frac{q \cdot Q}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} = q \cdot \vec{E}(\vec{x}) \end{aligned}$$

**Beispiel 11.13**

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, daß

$$A_c := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathcal{G}, f(\vec{x}) = c\}$$

für  $c \in \mathbb{R}$  entweder leer ist oder eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  darstellt, eine sog. Äquipotentialfläche. (Diese Eigenschaft von  $f$  folgt unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen aus dem Satz über implizite Funktionen und ist keineswegs selbstverständlich!)

**Beh.**

In jedem Punkt  $\langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle \in A_c$  steht der Gradient senkrecht auf dieser Fläche.

*Beweis*

Sei  $\vec{x} : [0, 1] \rightarrow A_c$  eine differenzierbare Kurve, die man als die Bahn eines Teilchens auf der Fläche  $A_c$  interpretieren kann. Dann ist

$$\varphi(t) = f(\vec{x}(t)) = c \quad (t \in [0, 1]),$$

also

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d\varphi}{dt} = Df(\vec{x}(t)) \cdot D\vec{x}(t) \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}(t)) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}(t)) \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{x}(t)) \right) \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \frac{dx_3}{dt}(t) \end{pmatrix} \\
 &= \left( (\vec{\nabla} f)(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right) \\
 &= \left( (\vec{\nabla} f)(\vec{x}(t)), \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} \right) \cdot \|\dot{\vec{x}}(t)\| \quad (t \in [0, 1]) .
 \end{aligned}$$

Der Gradient  $\vec{\nabla} f$  steht damit senkrecht auf jeder Tangente an die Fläche und damit auf der Fläche selbst.

Auch wenn die Bahn des Teilchens nicht auf einer Äquipotentialfläche verläuft, d.h.  $d\varphi/dt$  nicht unbedingt immer überall gleich Null ist, so kann man hieraus weiter ablesen:

Interpretiert man den Gradienten des Potentials  $f$  als Kraftfeld, so ist die Änderung des Potentials längs der Bahnkurve gleich der Komponente der Kraft in Richtung der Bahn multipliziert mit dem Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens.

### Bemerkung

Mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel ist ein weiterer Zugang zum Ausdruck des Totalen Differentials in der Form (11.8) möglich.

Man betrachte dazu die Komposition einer differenzierbaren Kurve  $\vec{x}$  im  $\mathbb{R}^n$  mit einer differenzierbaren reellwertigen Funktion  $f$  mehrerer Variablen:

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{x} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & & f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 t & \longmapsto & \vec{y} = \vec{x}(t) & & \vec{y} & \longmapsto & f(\vec{y}) = f(g(t))
 \end{array}$$

Dadurch ist dann die Kompositionsfunktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto h(t) := f(g(t))$  definiert, welche jetzt nach der Kettenregel (11.12) differenziert wird:

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{d(f \circ \vec{x})}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t).$$

(i) Nun läßt man rechts und links die Argumente  $t$  und  $\vec{x}(t)$  wieder weg:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(f \circ \vec{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}.$$

(ii) Wieder identifiziert man Funktionen mit ihren abhängigen Variablen, hier:  $\vec{y}$  mit  $\vec{y} = \vec{x}(t)$  und  $f$  mit  $f(\vec{y}) = f(\vec{x}(t))$ :

$$\frac{df}{dt} \text{ „}=\text{“ } \frac{d(f \circ \vec{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \text{ „}=\text{“ } \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}.$$

(iii) Nun betrachtet man den Ausdruck auf der rechten Seite fälschlicherweise als Bruch, indem man schreibt:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \text{ „}=\text{“ } \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i}{dt}.$$

(iv) Dann kann man „getrost“ links und rechts den Nenner  $dt$  weglassen und erhält (11.8):

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i.$$

### Beispiel 11.14

Dieses Beispiel liefert eine weitere Anwendung der Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen, die *Ableitung einer Funktion in Polarkoordinaten*. Sei

$$\begin{aligned} \vec{p}: \quad \mathbb{R}_{r,\varphi}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2 \\ \langle r, \varphi \rangle &\longmapsto \langle x, y \rangle = \langle r \cos \varphi, r \sin \varphi \rangle \end{aligned}$$

Die reellwertige Funktion  $g$  sei definiert durch (Abb. 11.11)

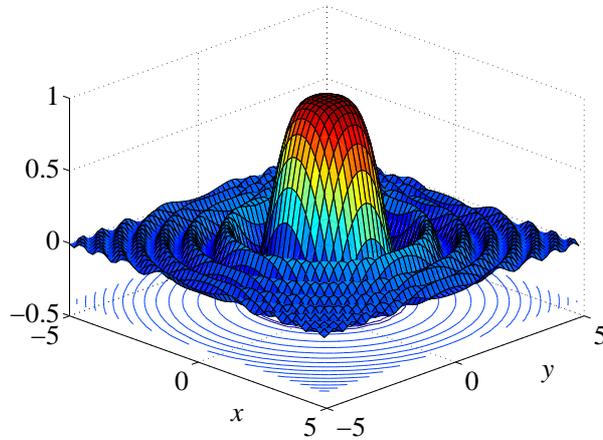
$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}_{x,y}^2 \setminus \{ \langle 0, 0 \rangle \} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle x, y \rangle &\longmapsto g(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Unter der *Ableitung von  $g$  in Polarkoordinaten* versteht man die Ableitung der Funktion  $h$ , definiert durch

$$h(r, \varphi) := (g \circ \vec{p})(r, \varphi) = \frac{1}{r^2} \sin r^2 \quad (\langle r, \varphi \rangle \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)).$$

Wie man sieht, hängt  $h$  von  $\varphi$  gar nicht ab, und es gilt für  $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{2}{r} \left[ \cos(r^2) - \frac{\sin(r^2)}{r^2} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Abbildung 11.11: Graph der gedämpften symmetrischen Sinusfunktion im  $\mathbb{R}^2$ :

$$g(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) \quad (\langle x, y \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{r,\varphi}^2 & \xrightarrow{\vec{p}} & \mathbb{R}_{x,y}^2 \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Abbildung 11.12: Darstellung von  $g$  in Polarkoordinaten

Als Übung soll die Ableitung von  $h$  noch einmal mit der mehrdimensionalen Kettenregel in Matrixschreibweise bestimmt werden:

$$\begin{aligned} Dh(r, \varphi) &= Dg(\vec{p}(r, \varphi)) \cdot D\vec{p}(r, \varphi), \\ (D_1h \quad D_2h) &= (D_1g \quad D_2g) \Big|_{\vec{p}(r, \varphi)} \cdot \begin{pmatrix} D_1p_1 & D_2p_1 \\ D_1p_2 & D_2p_2 \end{pmatrix} \Big|_{\langle r, \varphi \rangle}. \end{aligned}$$

Im einzelnen bedeutet das:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Big|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Big|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r}(r, \varphi) \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \left[ \cos(x^2 + y^2) - \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right] \Big|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot \cos \varphi \\ &\quad + \frac{2y}{x^2 + y^2} \left[ \cos(x^2 + y^2) - \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right] \Big|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot \sin \varphi \\ &= \frac{2}{r} \left[ \cos(r^2) - \frac{\sin(r^2)}{r^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \left. \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \varphi}(r, \varphi) + \left. \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \left[ \cos(x^2 + y^2) - \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right] \Big|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot (-r \sin \varphi) \\ &\quad + \frac{2y}{x^2 + y^2} \left[ \cos(x^2 + y^2) - \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right] \Big|_{\langle x, y \rangle = \vec{p}(r, \varphi)} \cdot (r \cos \varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

### Bemerkung<sup>1</sup>

An dieser Stelle steht in vielen Büchern recht verwirrend

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{2}{r} \left[ \cos(r^2) - \frac{\sin(r^2)}{r^2} \right], \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser „Darstellung“ ergeben sich sofort einige Fragen:

- An welcher Stelle sind die Ableitungen jeweils zu nehmen?
- Sind  $x$  und  $y$  hier Variablen, *nach denen* differenziert wird, oder sind es Funktionen, *welche selbst* differenziert werden?
- $g$  wird nach  $r, \varphi, x$  und  $y$  differenziert. Ist  $g$  dann eine Funktion von zwei oder von vier Variablen?
- Wenn  $g$  eine Funktion von zwei Variablen ist, von welchen zweien dann? Was bedeutet beispielsweise  $g(3, 4)$ ? Ist hier  $\langle x, y \rangle = \langle 3, 4 \rangle$  oder  $\langle r, \varphi \rangle = \langle 3, 4 \rangle$ ?

Für den *Ingenieur* ist  $g$  eine physikalische Größe, z.B. ein elektrisches Potential in der Ebene (da  $n = 2$ ). Das Potential hängt vom Ort  $\langle x, y \rangle$  ab, und deshalb ist  $g = g(x, y)$ . Wenn  $g$  nun in Polarkoordinaten  $\langle r, \varphi \rangle$  einfacher zu beschreiben ist, dann ist für den Ingenieur eben  $g = g(r, \varphi)$ . Wenn etwa  $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , dann ist  $g(r, \varphi) = \frac{1}{r}$ . Weil das Potential als physikalische Größe unabhängig davon ist, welche Koordinaten man zu seiner Beschreibung verwendet, benutzt der Ingenieur allemal denselben Buchstaben  $g$ , um es zu bezeichnen.

Für den *Mathematiker* ist das verwirrend: Als mathematische Funktion sieht  $g$  in beiden Fällen ganz verschieden aus. Was ist denn  $g(3, 4)$ ? Ist es

<sup>1</sup>Diese Bemerkung entstammt dem vorzüglichen Skript „Analysis II für Ingenieure“ von Prof. Dr. D. Ferus, Fakultät II, Institut für Mathematik der Technischen Universität Berlin

$\frac{1}{5}$  ( $x = 3, y = 4$ ) oder  $\frac{1}{3}$  ( $r = 3$ )? Der Mathematiker würde für die verschiedenen Funktionen verschiedene Symbole benutzen, zum Beispiel  $h(r, \varphi) = \frac{1}{r}$ , und dann ist „mathematisch exakt“

$$h(r, \varphi) = g(x, y) = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Für den Mathematiker geht es also nicht um die physikalische Größe „Potential“, sondern um die mathematischen Modelle dafür, die er zu seiner Beschreibung verwendet, und die sind in Abhängigkeit von den verwendeten Koordinaten ganz verschieden.

Im folgenden Beispiel soll das mehrdimensionale Analogon zur Formel für die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion untersucht werden.

### Beispiel 11.15

Bei der Umrechnung in Polarkoordinaten,

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gilt für die partielle Ableitung des Radius'  $r$  nach der Koordinate  $x$  einerseits

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad ,$$

andererseits erhält man aus  $r = x / \cos \varphi$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad .$$

Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch ist, daß bei den Berechnungen der partiellen Ableitungen nicht die gleichen Variablen konstant gehalten werden. In der ersten Gleichung ist  $y$  konstant, in der zweiten  $\varphi$ . In beiden Fällen wird  $x$  variiert, und die Auswirkungen auf  $r$  werden beobachtet. Dabei bewegt sich der Punkt  $\langle x, y \rangle$  einmal auf einer horizontalen Geraden ( $y$  konstant), das andere Mal auf einer mit dem Winkel  $\varphi$  geneigten Geraden ( $\varphi$  konstant). Entsprechend ist die lokale Änderung von  $r$  jeweils verschieden. Ingenieure kennzeichnen das durch einen Index an der jeweiligen partiellen Ableitung, der anzeigt, welche Variable(n) bei dem Differentiationsvorgang konstant gehalten werden. So sind

$$\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_y = \cos \varphi \quad , \quad \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_\varphi = \frac{1}{\cos \varphi} \quad ,$$

und beide Größen sind verschieden.

Dieses Beispiel soll noch etwas weiter ausgebaut werden. Mit der obigen Notation sind dann

$$\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_y = \cos \varphi \quad , \quad \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)_\varphi = \cos \varphi \quad ,$$

also scheint die aus dem Eindimensionalen bekannte skalare Ableitungsregel für die Ableitung der Umkehrfunktion,

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))},$$

bzw. in gefährlicher Kurzschreibweise, unter Weglassung der Argumente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1},$$

hier nicht zu gelten. Sie gilt im Mehrdimensionalen auch, allerdings nur für die Transformationsmatrizen als *Ganzes*, nicht für ihre Koeffizienten, die partiellen Ableitungen, einzeln.

Dazu betrachte man die Transformation  $\vec{p}$  auf Polarkoordinaten und ihre Umkehrabbildung,  $\vec{q} = \vec{p}^{-1}$ , (Abb. 11.13), wobei o.B.d.A.  $x, y > 0$  vorausgesetzt wird.

$$\mathbb{R}_{r,\varphi}^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\vec{p}} \\ \xleftarrow{\vec{q}} \end{array} \mathbb{R}_{x,y}^2$$

Abbildung 11.13: Transformation auf Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{p} : \langle r, \varphi \rangle &\longmapsto \langle x, y \rangle = \langle r \cos \varphi, r \sin \varphi \rangle \\ \vec{q} : \langle x, y \rangle &\longmapsto \langle r, \varphi \rangle = \left\langle \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right\rangle \end{aligned}$$

Hier ist  $\vec{q} = \vec{p}^{-1}$ , und für die Ableitungsmatrizen folgt

$$D\vec{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad D\vec{q}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun leicht nach (wie?), daß gilt:

$$\begin{aligned} D\vec{q}(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} \Big|_{\langle r, \varphi \rangle = (\vec{p})^{-1}(x, y)} \\ &= (D\vec{p})^{-1}(r, \varphi) \Big|_{\langle r, \varphi \rangle = (\vec{p})^{-1}(x, y)}, \end{aligned}$$

so daß die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion für die gesamten Ableitungsmatrizen schon gilt, nur eben nicht für den ersten Koeffizienten allein.

Man kann dieses „Problem“ leicht dadurch entzerren, daß man Größen wie  $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial r}$  etc. nicht einfach so hinschreibt, sondern sich in jedem einzelnen Fall überlegt, welcher funktionale Zusammenhang genau besteht und was man ausdrücken will. Zu Anfang ist das lästig, an solchen Stellen zahlt es sich aber aus.

## 11.4 Fehlerrechnung

Gegeben sei eine reellwertige Funktion  $f$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , definiert in einem Gebiet  $\mathcal{G}$ . Die Größen  $x_1, \dots, x_n$  mögen als Meßgrößen interpretiert werden, welche ihrerseits als Argumente von  $f$  dienen. In der Regel sind Meßgrößen mit Meßfehlern  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  behaftet, und diese Meßfehler pflanzen sich fort: anstelle der „wahren“ Größe  $f(\vec{x})$  erhält man einen Wert  $f(\vec{y})$  mit  $y_k \in [x_k - \Delta x_k, x_k + \Delta x_k]$  für  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

In diesem Abschnitt soll die Frage beantwortet werden, wie eine sichere Abschätzung („Fehlerabschätzung“) für die Differenz

$$f(\vec{x} \pm \vec{y}) - f(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}, \vec{y} \in [\vec{x} - \Delta \vec{x}, \vec{x} + \Delta \vec{x}])$$

angegeben werden kann, und diese Frage kann mit den Methoden der mehrdimensionalen Differentialrechnung beantwortet werden.

### 11.4.1 Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen

Im Fall  $n = 1$ , also dem Fall einer reellwertigen Funktion einer Variablen gilt für eine im Punkt  $\xi$  differenzierbare Funktion  $f$ :

$$\begin{aligned} f(\xi + h) &= f(\xi) + f'(\xi) \cdot h + r(\xi + h) \cdot h \\ &\approx f(\xi) + f'(\xi) \cdot h, \end{aligned}$$

falls  $h$  so klein ist, daß stets  $(\xi + h) \in D(f)$  erfüllt ist.

Hier darf man das „ $\approx$ “ dann durch das „ $=$ “ ersetzen, wenn die Ableitung  $f'$  nicht an der Stelle  $\xi$ , sondern an einer geeigneten Stelle zwischen  $\xi$  und  $\xi + h$  gebildet wird (Mittelwertsatz der Differentialrechnung):

$$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi + \vartheta \cdot h) \cdot h \quad (\vartheta \in (0, 1) \text{ geeignet}).$$

Ein analoger Satz gilt nun auch im Mehrdimensionalen, wenn man an den Definitionsbereich die Zusatzforderung stellt, daß er *konvex* ist:

#### Definition 11.11

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.  $\mathcal{G}$  heißt *konvex*, wenn für alle Punkte  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{G}$  auch deren Verbindungsstrecke in  $\mathcal{G}$  enthalten ist:

$$\bigwedge_{\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{G}} \{ \vec{x} + t \cdot \vec{y} : t \in [0, 1] \text{ geeignet} \} \subseteq \mathcal{G}.$$

Im  $\mathbb{R}^3$  sind ein (deutscher) Fußball oder ein (amerikanischer) football konvex, eine Banane oder eine Gurke dagegen i.a. nicht. Ist ein Stück Schweizer Käse konvex?

**Satz 11.9** (Mittelwertsatz)

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein konvexes Gebiet. Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{G}$  und  $f$  eine auf  $\mathcal{G}$  definierte reellwertige Funktion mit dort stetigen partiellen Ableitungen.

Dann gibt es eine Zahl  $\vartheta \in (0, 1)$ , so daß gilt:

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = ((\vec{\nabla} f)(\vec{x} + \vartheta(\vec{y} - \vec{x})), \vec{y} - \vec{x}).$$

*Beweis* (durch Zurückführen auf den eindimensionalen Mittelwertsatz)

Man definiere die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \vec{g}: \quad [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \vec{g}(t) := \vec{x} + t \cdot (\vec{y} - \vec{x}) \\ \\ h: \quad [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto h(s) := (f \circ \vec{g})(s) \end{aligned}$$

Da  $f$  und  $\vec{g}$  differenzierbar sind, ist es auch  $h$  (mehrdimensionale Kettenregel, Satz 11.8). Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz gilt somit:

$$\bigvee_{\vartheta \in (0,1)} h(1) - h(0) = h'(\vartheta) \cdot (1 - 0) = h'(\vartheta).$$

Nun sind aber

$$h(1) = f(\vec{g}(1)) = f(\vec{y}) \quad , \quad h(0) = f(\vec{g}(0)) = f(\vec{x}),$$

und nach der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} h'(\vartheta) &= h(1) - h(0) \\ &= Df(\vec{g}(\vartheta)) \cdot D\vec{g}(\vartheta) \\ &= \left( (\vec{\nabla} f)(\vec{g}(\vartheta)), \vec{g}'(\vartheta) \right) \\ &= \left( (\vec{\nabla} f)(\vec{x} + \vartheta \cdot (\vec{y} - \vec{x})), \vec{y} - \vec{x} \right) \quad (\vartheta \in (0, 1) \text{ geeignet}) \end{aligned}$$

**Bemerkung**

- (i) Dieser Satz wird im folgenden Abschnitt zur Fehlerabschätzung herangezogen.
- (ii) Für vektorwertige Funktionen (i.e.  $n > 1$ ) gilt obiger Satz i.a. nicht mehr!

**Aufgabe**

Man zeige, daß es für die Funktion

$$\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\tau := 0$ ,  $h := 2\pi$  kein  $\vartheta \in (0, 1)$  gibt, so daß gilt:

$$\vec{f}(\tau + h) - \vec{f}(\tau) = D\vec{f}(\tau + \vartheta h) \cdot h.$$

Hinweis: Man untersuche  $\|D\vec{f}(\tau + \vartheta h) \cdot h\|^2$ .

**11.4.2 Fehlerschrankensatz**

Der folgende Satz präzisiert die einleuchtende Tatsache, daß Schranken für die Ableitung (= Wachstumsrate) einer Funktion Schranken für das Wachstum der Funktion selbst liefern, und er gibt zuverlässige Fehlerschranken.

**Satz 11.10** (Fehlerschrankensatz)

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein konvexes Gebiet und  $f$  eine auf  $\mathcal{G}$  definierte reellwertige Funktion mit dort stetigen partiellen Ableitungen, welche in  $\mathcal{G}$  alle beschränkt sein mögen:

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} \bigvee_{M_i \geq 0} \bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} \left| \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right| \leq M_i.$$

Dann gilt für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{G}$ :

$$|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \leq \sum_{i=1}^n M_i |y_i - x_i|,$$

bzw. in einer anderen Schreibweise:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n M_i |\Delta x_i|.$$

Die Differenz der Funktionswerte ist abschätzbar durch die Summe der Differenzen der Argumente, jedes versehen mit einem Gewichtungsfaktor, welcher durch das Maximum der Wachstumsrate gegeben ist.

*Beweis*

Nach dem mehrdimensionalen Mittelwertsatz (Satz 11.9) gilt für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{G}$  die

Abschätzung

$$\begin{aligned}
 f(\vec{y}) - f(\vec{x}) &= \left| \left( (\vec{\nabla} f)(\vec{x} + \vartheta(\vec{y} - \vec{x})), \vec{y} - \vec{x} \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x} + \vartheta(\vec{y} - \vec{x})) \cdot (y_i - x_i) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x} + \vartheta(\vec{y} - \vec{x})) \right| \cdot |y_i - x_i| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot |y_i - x_i|.
 \end{aligned}$$

**Beispiel 11.16** (Wechselstromwiderstand)

Man betrachte eine Reihenschaltung aus einem Ohm'schen und einem induktiven Widerstand,<sup>2</sup> s. Abb. 11.14.

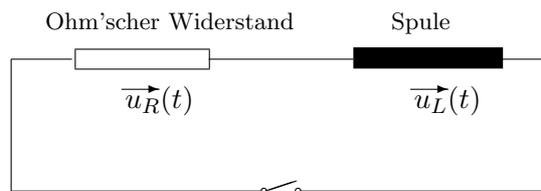


Abbildung 11.14: Reihenschaltung aus Ohm'schem und induktivem Widerstand

Der Betrag des Scheinwiderstandes (= Betrag des komplexen Widerstandes) dieser Schaltung ist gegeben durch

$$Z := f(R, L) := \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (\omega, R, L > 0).$$

Gesucht ist eine Fehlerschranke  $\Delta Z$  für  $Z$ , falls gilt:

$$\begin{aligned}
 R \pm \Delta R &= (20.0 \pm 0.1) [\Omega] \\
 L \pm \Delta L &= (5.0 \pm 0.1) \cdot 10^{-3} [\text{H}] \\
 \omega &= 6 \cdot 10^3 [\text{Hz}] \quad [f \approx 10^3 [\text{Hz}] \text{ wegen } 2\pi \approx 6]
 \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von  $Z$  lauten

$$\begin{aligned}
 D_1 f(R, L) &= \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{R}{Z} \\
 D_2 f(R, L) &= \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) = \frac{\omega^2 L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega^2 L}{Z},
 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Auch dieses Beispiel habe ich dem Skript „Höhere Mathematik für Ingenieure“ von Prof. Dr. D. Ferus von der TU Berlin entnommen.

und man kann den Fehler  $\Delta Z$  mit dem totalen Differential ungefähr angeben (s. dazu die Approximation (11.6) auf p. 50 und die Bemerkung im Anschluß an dieses Beispiel)

$$\begin{aligned}\Delta Z &\approx \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) \cdot \Delta R + \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) \cdot \Delta L \\ &= \frac{20}{\sqrt{20^2 + 30^2}} 0.1 [\Omega] + \frac{18 \cdot 10^4}{\sqrt{20^2 + 30^2}} 10^{-4} [\Omega] \\ &= 0.5547 [\Omega] \leq 0.56 [\Omega].\end{aligned}\quad (11.13)$$

- (i) Da  $f$  in beiden Variablen  $R$  und  $L$  streng monoton wachsend ist (Abb. 11.15), läßt sich in diesem Fall präzise sagen, daß für die angegebenen Werte von  $R$  und  $L$  der Wert von  $Z$  im *Toleranzintervall*

$$[f(R - \Delta R, L - \Delta L), f(R + \Delta R, L + \Delta L)] = [35.5017, 36.6111]$$

liegt, weil gilt:

$$\begin{aligned}f(R + \Delta R, L + \Delta L) &= 36.611063 [\Omega] \\ f(R, L) &= 36.055512 [\Omega] \\ f(R - \Delta R, L - \Delta L) &= 35.50169 [\Omega] \\ f(R + \Delta R, L + \Delta L) - f(R, L) &= 0.555551 [\Omega] \\ f(R, L) - f(R - \Delta R, L - \Delta L) &= 0.553822 [\Omega].\end{aligned}$$

Bei diesem einfachen Beispiel ist dieses Resultat mit dem Taschenrechner sicherlich bequemer zu ermitteln, als erst die partiellen Ableitungen zu bilden und auszuwerten. Darüberhinaus gibt es genauere Informationen.

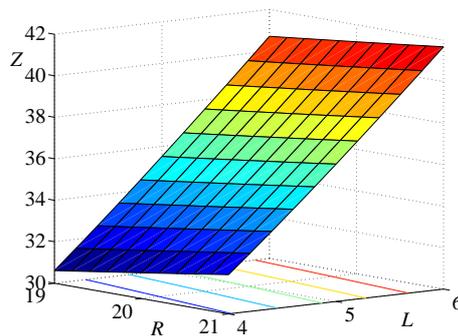


Abbildung 11.15: Abhängigkeit des Betrages des Scheinwiderstandes einer Reihenschaltung aus Ohm'schem - und induktivem Widerstand

- (ii) Für die relativen Fehler  $\frac{\Delta Z}{Z}$ ,  $\frac{\Delta R}{R}$  und  $\frac{\Delta L}{L}$  ergibt sich mit (11.13)

$$\frac{\Delta Z}{Z} \approx \frac{R^2}{Z^2} \frac{\Delta R}{R} + \frac{\omega^2 L^2}{Z^2} \frac{\Delta L}{L} = \frac{4}{13} \frac{\Delta R}{R} + \frac{9}{13} \frac{\Delta L}{L}.$$

Diese Formel gibt Aufschluß darüber, welcher Meßfehler in welchem Maße für Fehler im Ergebnis verantwortlich ist: in diesem Beispiel geht ein relativer Meßfehler von  $R$  zu etwa 30 % in den relativen Gesamtfehler ein, derjenige von  $L$  dagegen zu knapp 70 %. Für die Planung von Versuchsreihen kann die Untersuchung der Gewichte, mit der die relativen Fehler den Gesamtfehler beeinflussen, daher eine wichtige Information sein, welche man eben nicht durch „Rumrechnen“ bekommt.

- (iii) Wenn keine Monotonie wie in diesem Beispiel vorliegt, so muß keiner der Werte

$$f(x_1 \pm \Delta x_1, \dots, x_n \pm \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

(mit allen möglichen Vorzeichenkombinationen) die maximale Abweichung vom Sollwert realisieren. Und wenn die Feststellung der Monotonie aufwendig ist, so ist die Approximation mit dem totalen Differential vielleicht einfacher.

- (iv) Im folgenden wird zur Abschätzung des Fehlers der Fehlerschrankensatz (Satz 11.10) herangezogen. Dazu müssen die partiellen Ableitungen auf dem betrachteten Gebiet der  $\langle R, L \rangle$ -Ebene abgeschätzt werden, wozu es mehrere Möglichkeiten gibt je nachdem, wie aufwendig man die Rechnung gestalten will.

1. Möglichkeit: (Abschätzung in der ganzen  $\langle R, L \rangle$ -Ebene)

$$\left| \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) \right| = \left| \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right| \leq \left| \frac{R}{R} \right| = 1$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) \right| = \left| \frac{\omega \cdot (\omega L)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right| \leq \omega \left| \frac{\omega L}{\omega L} \right| = \omega$$

Damit erhält man für den Fehler  $\Delta Z$  als *zuverlässige* Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Delta Z| &\leq 1 \cdot |\Delta R| + \omega \cdot |\Delta L| \\ &= 1 \cdot 0.1 [\Omega] + 6 \cdot 10^3 [\text{Hz}] \cdot 10^{-4} [\text{H}] \\ &= 0.1 [\Omega] + 0.6 [\Omega] \\ &= 0.7 [\Omega], \end{aligned}$$

und diese Abschätzung ist gültig in der ganzen  $\langle R, L \rangle$ -Ebene, obwohl natürlich nur positive Werte von  $R$  und  $L$  interessant sind.

2. Möglichkeit: (Abschätzung in einem Rechteck um den Arbeitspunkt)

Die partiellen Ableitungen lassen sich weniger grob abschätzen.

- Vorteil:  
Die Fehlerabschätzung für  $|\Delta Z|$  wird kleiner.
- Nachteil:

Man muß sich auf einen kleineren Bereich der  $\langle R, L \rangle$ -Ebene beschränken, etwa auf

$$B := [R - \Delta R, R + \Delta R] \times [L - \Delta L, L + \Delta L].$$

Dadurch wird der Rechenaufwand größer, weil man für jedes Paar von Ohm'schem Widerstand und Spule die Abschätzung neu durchführen muß.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) \right| &\leq \left| \frac{R + \Delta R}{\sqrt{(R - \Delta R)^2 + \omega^2(L - \Delta L)^2}} \right| \\ &\leq \frac{20.1}{35.5} \leq 0.57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) \right| &\leq \left| \frac{\omega^2(L + \Delta L)}{\sqrt{(R - \Delta R)^2 + \omega^2(L - \Delta L)^2}} \right| \\ &\leq \frac{1.836 \cdot 10^5}{35.5} \leq 0.5172 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Fehler  $\Delta Z$  als *zuverlässige* Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Delta Z| &\leq 0.57 \cdot |\Delta R| + 0.5172 \cdot 10^4 \text{ [Hz]} \cdot |\Delta L| \\ &= 1 \cdot 0.057 \text{ [\Omega]} + 0.5172 \text{ [\Omega]} \\ &\leq 0.58 \text{ [\Omega]}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist besser als 0.7 [Ω], allerdings unter Zugrundelegung der oben beschriebenen Nachteile.

Prinzipiell geht es bei beiden Abschätzungen darum, das Maximum der partiellen Ableitungen  $f_R$  und  $f_L$  zu bestimmen. Das läßt sich auch mit den Methoden der Differentialrechnung erledigen (Extremwertbestimmung). In Abschnitt 11.6 wird dieses Beispiel daher noch einmal aufgegriffen, s. Beispiel 11.18.

### Bemerkung

- (i) Die Art der Fehlerbestimmung mit Hilfe des totalen Differentials in (11.13) wird von Ingenieuren heiß und innig geliebt. In der Regel, d.h. bei nicht zu stark schwankenden Funktionen (also kleinen Ableitungen), ist sie auch recht brauchbar, wie man an der exakten Berechnung zu Beginn des Beispiels erkennen kann. Man weiß allerdings nicht, *wie* brauchbar, und das ist der große Nachteil.
- (ii) In vielen Büchern findet man auch eine Variante von (11.13). Dort wird (11.13) mit Hilfe der Dreiecksungleichung „abgeschätzt“, das Resultat *maximaler Fehler* genannt und geschrieben

$$|\Delta Z_{\max}| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) \right| |\Delta R| + \left| \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) \right| |\Delta L|.$$

Führt man das mit den angegebenen Werten durch, so kommt man zwar auf den etwas günstigeren Wert  $\Delta Z \approx 0,56 [\Omega]$ , allerdings ist die Benutzung der Dreiecksungleichung und die Abschätzung mit den Betragsstrichen hier irreführend, da die Werte von  $\frac{\partial f}{\partial R}(R, L)$  und von  $\frac{\partial f}{\partial L}(R, L)$  nicht an den ungünstigsten Stellen ausgewertet sondern direkt vom Arbeitspunkt übernommen worden sind.

## 11.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

### Definition 11.12

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine (reellwertige) Funktion, deren partielle Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  in  $\mathcal{G}$  existieren.

(i) Sei  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ .

Wenn für eine Zahl  $k \in \{1, \dots, n\}$  die Funktion  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  an der Stelle  $\vec{\xi}$  wieder partiell nach  $x_j$  differenzierbar ist, dann nennt man

$$D_j D_k f(\vec{\xi}) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{\xi}) \stackrel{\text{(Reihenfolge!)}}{=} f_{x_k x_j}(\vec{\xi}) := \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)}{\partial x_j}(\vec{\xi})$$

die (eine) *zweite partielle Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\vec{\xi}$*  oder die (eine) *partielle Ableitung zweiter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $\vec{\xi}$* .

Im Falle  $j = k$  schreibt man analog zum Eindimensionalen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{\xi}) \quad \text{anstelle von} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(\vec{\xi}).$$

(ii) Ist  $D_k f$  in jedem Punkt von  $\mathcal{G}$  partiell nach  $x_j$  differenzierbar, so wird die auf  $\mathcal{G}$  definierte Funktion

$$\begin{array}{ccc} D_j D_k f : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \vec{x} & \longmapsto & D_j D_k f(\vec{x}) \end{array}$$

*zweite partielle Ableitung von  $f$  oder partielle Ableitung von  $f$  zweiter Ordnung* genannt und mit einem der Symbole

$$D_j D_k f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad f_{x_k x_j}$$

bezeichnet.

(iii) Es sollte klar sein, was unter partiellen Ableitungen dritter, vierter, ... Ordnung und unter Zeichen wie

$$D_j D_k D_l f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_4 \partial x_1 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3}$$

zu verstehen ist.

Zur Erleichterung der Schreibweise noch die folgende

**Definition 11.13**<sup>3</sup>

Seien  $k \in \mathbb{N}_0, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ , und  $\mathcal{G}$  offen.

$\mathcal{C}^k(\mathcal{G}) := \{f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis zur } k\text{-ten Ordnung einschließlich existieren in } \mathcal{G} \text{ und sind dort stetig.}\}$

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}) := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(\mathcal{G})$$

$$(\mathcal{C}^k(\mathcal{G}))^m := \left\{ \vec{f} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m, \bigwedge_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i \in \mathcal{C}^k(\mathcal{G}) \right\}$$

$$(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}))^m := \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathcal{C}^k(\mathcal{G}))^m$$

**Beispiel 11.17**

$$\begin{aligned} f : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle x_1, x_2 \rangle &\longmapsto x_1^2 \cdot \sin x_2 \end{aligned}$$

Für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen in  $\mathbb{R}^2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 2x_1 \cdot \sin x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= x_1^2 \cdot \cos x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= 2 \sin x_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) &= 2x_1 \cdot \cos x_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) &= 2x_1 \cdot \cos x_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= -x_1^2 \cdot \sin x_2 \end{aligned}$$

**11.5.1 Satz von Schwarz**

An Beispiel 11.17 erkennt man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \quad (\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2),$$

<sup>3</sup>continuous = stetig

und es erhebt sich sofort die Frage, ob die Reihenfolge der partiellen Differentiationen stets vertauschbar ist.

Leider ist das nicht immer der Fall, es gibt Gegenbeispiele, etwa Beispiel 10.13 (ii). Die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge der partiellen Ableitungen gilt jedoch dann, wenn alle auftretenden partiellen Ableitungen stetig sind.

**Satz 11.11** (Satz von Schwarz)

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $k \in \mathbb{N}$  und  $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{G})$ . Dann gilt:

Für jedes  $l \leq k$  sind die partiellen Ableitungen der Ordnung  $l$  von  $f$  unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Differentiation ausgeführt wird.

Speziell gilt also für  $n = 2, k = 2$ :

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G}) \quad \implies \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

**Bemerkung**

In der Sprache der Linearen Algebra ausgedrückt, bedeutet der Satz von Schwarz, daß die aus den zweifachen partiellen Ableitungen gebildete Matrix

$$H_f := \begin{pmatrix} D_1 D_1 f & \cdots & D_n D_1 f \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 D_n f & \cdots & D_n D_n f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

für in  $\mathcal{G}$  stetige Funktionen symmetrisch ist.  $H_f$  heißt *Hesse'sche Matrix*.

## 11.6 Taylor'sche Formel (Satz von Taylor)

Bei der Übertragung der Taylor'schen Formel ins Mehrdimensionale werde ich mich auf reellwertige Funktionen beschränken, da für vektorwertige Funktionen nur ein verallgemeinerter Mittelwertsatz existiert. Weiterhin wird die Taylor'sche Formel nur bis zur Ordnung 2 bewiesen, und für diejenige höherer Ordnung wird daraus eine Analogiebetrachtung abgeleitet und angegeben.

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion,  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$ . Seien  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$  und die Verbindungsstrecke von  $\vec{\xi}$  und  $\vec{\xi} + \vec{h}$  sei in  $\mathcal{G}$  enthalten:

$$\{\vec{\xi} + t \cdot \vec{h} : t \in [0, 1] \text{ geeignet}\} \subseteq \mathcal{G}.$$

Man betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) := f(\vec{\xi} + t \cdot \vec{h}) \quad (t \in [0, 1]). \end{aligned}$$

Wegen der zweimaligen Differenzierbarkeit von  $f$  ist auch  $g$  zweimal differenzierbar, auf  $g$  läßt sich also die „eindimensionale“ Taylor'sche Formel anwenden, und man erhält

$$g(t + \Delta t) = g(t) + g'(t) \cdot \Delta t + \frac{g''(\tau)}{2!} (\Delta t)^2$$

mit einer geeigneten Zahl  $\tau \in (t, t + \Delta t)$ . Nach der mehrdimensionalen Kettenregel (Satz 11.8, Formel (11.12)) und dem Satz von Schwarz (Satz 11.11) ist dann

$$\begin{aligned} g'(t) &= (\vec{\nabla} f(\vec{\xi} + t\vec{h}), \vec{h}) = \sum_{i=1}^n D_i f(\vec{\xi} + t\vec{h}) \cdot h_i, \\ g''(t) &= \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(\vec{\xi} + t\vec{h}) \cdot h_i h_j. \end{aligned}$$

Wählt man hier  $t := 0$ ,  $\Delta t := 1$ , so folgt der

**Satz 11.12** (Taylor'sche Formel mit Restglied 2. Ordnung)

Ist  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$  und liegt die Verbindungsstrecke von  $\vec{\xi}$  und  $\vec{\xi} + \vec{h}$  in  $\mathcal{G}$ , so gilt für ein geeignetes  $\theta \in (0, 1)$

$$f(\vec{\xi} + \vec{h}) = f(\vec{\xi}) + \sum_{i=1}^n D_i f(\vec{\xi}) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(\vec{\xi} + \theta\vec{h}) \cdot h_i h_j. \quad (11.14)$$

### Bemerkung

Mit Hilfe des Differentialoperators (lineare Abbildung)

$$\begin{aligned} D_i : \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{G}) \\ f &\longmapsto D_i f \end{aligned}$$

läßt sich die Taylor'sche Formel auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} f(\vec{\xi} + \vec{h}) &= f(\vec{\xi}) + \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right) f(\vec{\xi}) + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^2 f(\vec{\xi} + \theta\vec{h}) \\ &= f(\vec{\xi}) + (\vec{h}, \vec{\nabla}) f(\vec{\xi}) + \frac{1}{2} (\vec{h}, \vec{\nabla})^2 f(\vec{\xi} + \theta\vec{h}) \\ &= \sum_{\nu=0}^1 \frac{1}{\nu!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^\nu f(\vec{\xi}) + \frac{1}{(1+1)!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^{1+1} f(\vec{\xi} + \theta\vec{h}) \\ &= \sum_{\nu=0}^1 \frac{1}{\nu!} (\vec{h}, \vec{\nabla})^\nu f(\vec{\xi}) + \frac{1}{(1+1)!} (\vec{h}, \vec{\nabla})^{1+1} f(\vec{\xi} + \theta\vec{h}), \end{aligned}$$

und es ist unmittelbar ersichtlich, wie sie sich auf Funktionen mit höherer Differenzierbarkeitsordnung verallgemeinern läßt:

$$\begin{aligned} f(\vec{\xi} + \vec{h}) &= \sum_{\nu=0}^p \frac{1}{\nu!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^\nu f(\vec{\xi}) + \frac{1}{(p+1)!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^{p+1} f(\vec{\xi} + \theta \vec{h}) \\ &= \sum_{\nu=0}^p \frac{1}{\nu!} (\vec{h}, \vec{\nabla})^\nu f(\vec{\xi}) + \frac{1}{(p+1)!} (\vec{h}, \vec{\nabla})^{p+1} f(\vec{\xi} + \theta \vec{h}) \end{aligned}$$

für Funktionen  $f \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{G})$  und  $\mathcal{G}$  so beschaffen, daß es die Verbindungsstrecke von  $\vec{\xi}$  und  $\vec{\xi} + \vec{h}$  enthält.

### Bemerkung

Die Ableitung einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist wieder eine Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , nämlich  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Ableitung von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x} \mapsto Df(\vec{x})$ , ist nicht wieder eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ , sondern eine von  $\mathbb{R}^n$  in  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , der Menge der linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Daher erfordert die Definition des 2. oder höheren totalen Differentials so viel technischen Aufwand, daß hier darauf verzichtet werden soll.

### Beispiel 11.18

Mit der Taylor-Formel soll noch einmal zurückgekehrt werden zu Beispiel 11.16, der Fehlerrechnung für die Reihenschaltung aus Ohm'schem und induktivem Widerstand. Für die benötigten Ableitungen erhält man

$$Z = f(R, L) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (R, L > 0)$$

$$\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ [Hz]},$$

$$Z_R = \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{R}{Z}$$

$$Z_L = \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) = \frac{\omega^2 L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega^2 L}{Z},$$

$$Z_{RR} = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}(R, L) = \frac{Z - R \cdot \frac{R}{Z}}{Z^2} = \frac{Z^2 - R^2}{Z^3} = \frac{(\omega L)^2}{Z^3}$$

$$Z_{RL} = \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial R}(R, L) = -\frac{R}{Z^2} \cdot \frac{\omega L^2}{Z} = \omega^2 \frac{RL}{Z^3}$$

$$Z_{LL} = \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(R, L) = \frac{\omega^2 Z - \omega^2 L \cdot \frac{\omega^2 L}{Z}}{Z^2} = \omega^2 \frac{R^2}{Z^3}.$$

Im Bereich

$$R \pm \Delta R = (20.0 \pm 0, 1) \text{ [\Omega]}$$

$$L \pm \Delta L = (5.0 \pm 0, 1) \cdot 10^{-3} \text{ [H]}$$

muß man nun die die zweiten partiellen Ableitungen von  $Z$  abschätzen, da man über die in der Taylor-Formel (11.14) auftretende Größe  $\theta$  nur aussagen kann, daß sie eben aus  $(0, 1)$  ist. Daher muß wieder der ungünstigste Fall angenommen werden.

Man betrachte die Abschätzung für  $Z_{RR} = \frac{(\omega L)^2}{Z^3}$ . Hier müßte man im Zähler den größtmöglichen -, im Nenner den kleinstmöglichen Wert einsetzen, also

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &: \omega^2(L + \Delta L)^2 \\ \text{Nenner} &: (Z - \Delta Z)^3 = \sqrt{(R - \Delta R)^2 + \omega^2(L - \Delta L)^2}^3 \end{aligned}$$

Konkret:

$$\begin{aligned} Z_{RR} &= \left| \frac{\omega^2 L^2}{Z^3} \right| \leq \left| \frac{\omega^2 (L + \Delta L)^2}{\sqrt{(R - \Delta R)^2 + \omega^2 (L - \Delta L)^2}^3} \right| \\ &= \frac{36 \cdot 10^6 \cdot 5.1^2 \cdot 10^{-6}}{35.50^3} [\Omega] = 0.0209 [\Omega] \leq 21 \cdot 10^{-3} [\Omega] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{RL} &= \omega^2 \frac{RL}{Z^3} \leq \left| \omega^2 \frac{(R + \Delta R)(L + \Delta L)}{\sqrt{(R - \Delta R)^2 + \omega^2 (L - \Delta L)^2}^3} \right| \\ &= \frac{36 \cdot 10^6 \cdot 20.1 \cdot 5.1 \cdot 10^{-3}}{35.50^3} [\Omega] = 82.4866 [\Omega] \leq 83 [\Omega] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{LL} &= \frac{\omega^2 R^2}{Z^3} \leq \left| \omega^2 \frac{(R + \Delta R)^2}{\sqrt{(R - \Delta R)^2 + \omega^2 (L - \Delta L)^2}^3} \right| \\ &= \frac{36 \cdot 10^6 \cdot 20.1^2}{35.50^3} [\Omega] = 32.5094 \cdot 10^4 [\Omega] \leq 33 \cdot 10^4 [\Omega] \end{aligned}$$

Man erhält daraus die folgende Abschätzung für das Restglied 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} |R_2(f)(R, L)| &= \left| \frac{1}{2} [Z_{RR}(\Delta R)^2 + 2Z_{RL}(\Delta R)(\Delta L) + Z_{LL}(\Delta L)^2] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} [21 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-1})^2 + 2 \cdot 83 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} + 33 \cdot 10^4 \cdot (10^{-4})^2] [\Omega] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} [0.21 + 1.66 + 3.3] [\Omega] \\ &\leq 2.6 \cdot 10^{-3} [\Omega]. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \left| \Delta Z - \left[ \frac{\partial f}{\partial R}(R, L) \cdot \Delta R + \frac{\partial f}{\partial L}(R, L) \cdot \Delta L \right] \right| \\ \leq \left| \Delta Z - 0.5547 [\Omega] \right| \leq 0.0026 [\Omega] \end{aligned}$$

Die Approximation durch das Differential ist also tatsächlich viel besser als die grobe Fehlerabschätzung durch die Maximalwerte der partiellen Ableitungen erster Ordnung. Allerdings ist auch der Rechenaufwand deutlich größer!

## 11.7 Relative Extrema

Die folgende Definition ist die Übertragung von reellwertigen Funktionen einer Variablen.

### Definition 11.14

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige (!) Funktion.

- (i)  $f$  besitzt an der Stelle  $\vec{\xi}$  ein *relatives* oder *lokales Maximum* bzw. *Minimum*, wenn gilt:

$$\bigvee_{U_\delta(\vec{\xi})} \bigwedge_{\vec{x} \in U_\delta(\vec{\xi}) \cap \mathcal{G}} f(\vec{x}) \leq f(\vec{\xi}) \quad \text{bzw.} \quad f(\vec{x}) \geq f(\vec{\xi}).$$

Lokale Maxima oder -Minima heißen auch *lokale* oder *relative Extrema*.

- (ii) Das relative Extremum heißt *strenges relatives Maximum* bzw. *Minimum*, wenn gilt:

$$\bigvee_{\dot{U}_\delta(\vec{\xi})} \bigwedge_{\vec{x} \in \dot{U}_\delta(\vec{\xi}) \cap \mathcal{G}} f(\vec{x}) < f(\vec{\xi}) \quad \text{bzw.} \quad f(\vec{x}) > f(\vec{\xi})$$

mit der punktierten Umgebung

$$\dot{U}_\delta(\vec{\xi}) := U_\delta(\vec{\xi}) \setminus \{\vec{\xi}\}.$$

Ein lokales Maximum von  $f$  kann sehr wohl kleiner sein als das Maximum von  $f$  auf dem gesamten Gebiet  $\mathcal{G}$ , dem sog. *globalen Maximum*, falls letzteres überhaupt existiert. Ein globales Extremum ist natürlich erst recht ein lokales Extremum.

Ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum an einem Punkt  $\xi$  im Eindimensionalen ist das Verschwinden der ersten Ableitung in  $\xi$ :

$$\xi \text{ ist lokales Extremum} \quad \wedge \quad \xi \text{ ist innerer Punkt} \quad \implies \quad f'(\xi) = 0.$$

Ein analoger Sachverhalt gilt nun auch im Mehrdimensionalen.

**Satz 11.13** (Notwendiges Kriterium für ein relatives Extremum)

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion aus der Klasse  $\mathcal{C}^1(\mathcal{G})$  ( $f$  ist im Punkt  $\vec{\xi}$  also insbesondere total differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen).  $f$  habe in  $\vec{\xi}$  ein lokales Extremum.

**Beh.**  $Df(\vec{\xi}) = (\vec{\nabla} f)(\vec{\xi})^T = \vec{0}$ .

Aussage:

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion  $f$ ,

$$T_f(\langle \vec{\xi}, z \rangle) := \{ \langle \xi_1, \dots, \xi_n, z \rangle : z = f(\xi_1, \dots, \xi_n), \vec{\xi} \in \mathcal{G} \text{ geeignet} \},$$

ist gegeben durch

$$z = f(\vec{\xi}) = \text{const.},$$

d.h. die Tangentialebene (hier:  $n = 2$ ) ist horizontal, s. Abb. 11.16.

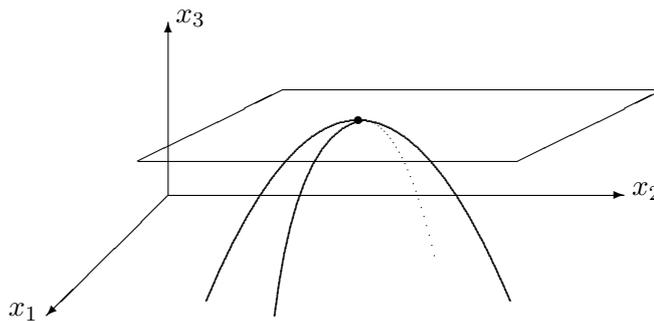


Abbildung 11.16: Horizontale Tangentialebene an einem lokalen Extremwert

*Beweis*

Es ist  $\vec{\xi} = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle \in \mathcal{G}$ , und  $\vec{\xi}$  ist ein innerer Punkt von  $\mathcal{G}$ , da  $\mathcal{G}$  nach Voraussetzung offen ist. Da  $f$  in  $\vec{\xi}$  ein lokales Extremum hat, haben die  $n$  partiellen (stetig differenzierbaren, reellwertigen) Funktionen

$$x \mapsto g_k(x) := f(\xi_1, \dots, x, \dots, \xi_n)$$

in  $x = \xi_k$  ein lokales Extremum, dort also die Ableitung 0, d.h. es ist

$$D_k f(\vec{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\xi}) = 0 \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

**Beispiel 11.19**

$$\mathcal{D} := \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, y, x + y \leq \pi \}$$

$$f(x, y) := \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{D})$$

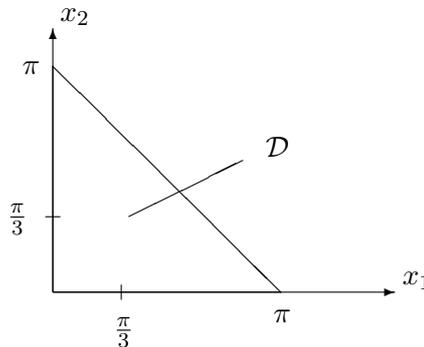


Abbildung 11.17: Definitionsbereich der Funktion  $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$

Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  von  $f$  ist das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten  $\langle 0, 0 \rangle$ ,  $\langle \pi, 0 \rangle$  und  $\langle 0, \pi \rangle$ , s. Abb. 11.17.  $f$  verschwindet auf dem Rand  $\dot{\mathcal{D}}$  von  $\mathcal{D}$  und ist im Inneren positiv. Daher besitzt  $f$  das lokale und globale Minimum 0 und nimmt dieses genau in den Randpunkten von  $\mathcal{D}$  an.

Untersucht werden soll nun das Extremalverhalten von  $f$  in den inneren Punkten  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$  von  $\mathcal{D}$ :

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}} = \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, 0 < x, y, x + y < \pi \}.$$

Dazu werden zuerst die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) &= \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \end{aligned}$$

Wegen  $\langle x, y \rangle \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$  ist  $\sin x \neq 0 \wedge \sin y \neq 0$ , daher erhält man aus der Bedingung  $\vec{\nabla} f(x, y) = \langle 0, 0 \rangle$  zunächst die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \sin(x+y) &= -\sin x \cdot \cos(x+y) \\ \cos y \cdot \sin(x+y) &= -\sin y \cdot \cos(x+y) \end{aligned}$$

**Beh. 1**  $\cos x \neq 0 \wedge \cos(x+y) \neq 0$

*Bew.* Man betrachte die erste Gleichung.

(a) Wäre  $\cos x = 0$ , so wäre die linke Seite gleich Null und die rechte Seite gleich

$$-\sin x \cdot (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = \sin^2 x \sin y \neq 0 \quad \zeta$$

- (b) Wäre  $\cos(x+y) = 0$ , so müßte auch  $\sin(x+y) = 0$  sein, da  $\cos x = 0$  in (a) zu einem Widerspruch geführt hat.  $\sin$  und  $\cos$  können an ein und derselben Stelle aber nicht zugleich Null sein wegen

$$\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1 \neq 0 \quad \zeta$$

**Beh. 2**  $\cos y \neq 0$

*Bew.*

Nach Beh. 1 ist  $\cos(x+y) \neq 0$ ; damit ist die rechte Seite der zweiten Gleichung ungleich Null, also auch die linke.

Daher sind alle in den beiden Gleichungen auftretenden Größen ungleich Null, und eine Division ist uneingeschränkt möglich. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin x}{\sin y} &\longrightarrow \tan x = \tan y \\ &\longrightarrow x = y, \quad \text{da } x, y \in (0, \pi). \end{aligned}$$

$x = y$  in die erste der beiden obigen Gleichungen eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cos 2x = \sin 3x = 0 \\ \longrightarrow x = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Nur der (innere) Punkt  $\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$  kann also Kandidat für einen lokalen Extremwert sein – und ist es tatsächlich (Abb. 11.18), da

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

### Bemerkung

- (i) Ist  $\vec{\nabla} f(\vec{\xi}) = \vec{0}$ , so nennt man  $\vec{\xi}$  einen *kritischen Punkt* von  $f$ . Satz 11.13 besagt also, daß ein innerer Punkt von  $\mathcal{G}$  höchstens dann die Chance hat, Stelle eines lokalen Extremums zu sein, wenn er ein kritischer Punkt von  $f$  ist. Ein Randpunkt von  $\mathcal{G}$  kann aber sehr wohl Stelle eines lokalen Extremums sein, ohne daß er ein kritischer Punkt ist:

$$\mathcal{G} := [0, 1] \times [0, 1], \quad f(x, y) := x + y.$$

Ferner braucht ein kritischer Punkt, auch wenn er im Innern von  $\mathcal{G}$  liegt, durchaus nicht Stelle eines lokalen Extremums zu sein:

$$\mathcal{G} := \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := x^2 - y^2.$$

Beispielen ähnlicher Bauart begegnet man schon im Eindimensionalen:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} := [0, 1] \quad , \quad f(x) := x \\ \text{bzw.} \\ \mathcal{I} := \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := x^3 \end{aligned}$$

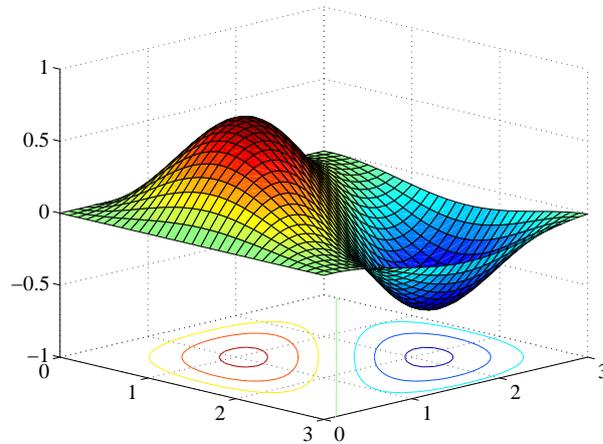


Abbildung 11.18: Graph der Funktion  $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$

- (ii) Am Beispiel der in  $\mathbb{R}^2$  definierten Funktion  $f(x, y) := x^2 - y^2$  erkennt man ferner, daß die Bedingung  $\vec{\nabla} f(\vec{\xi}) = \vec{0}$  nur notwendig ist.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes sollen hinreichende Bedingungen angegeben werden, unter denen man auf lokale Extremwerte einer reellwertigen Funktion mehrerer Variablen schließen kann und darüberhinaus, um welchen Extremwert es sich dann handelt: ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Im Eindimensionalen muß dazu das Verhalten der zweiten Ableitung von (der dann im kritischen Punkt  $\xi$  notwendigerweise zweimal differenzierbaren Funktion)  $f$  untersucht werden, und man erhält als hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes:

$$\begin{aligned} f'(\xi) = 0 \wedge f''(\xi) > 0 &\implies \text{an der Stelle } \xi \text{ hat } f \text{ ein lokales Minimum;} \\ f'(\xi) = 0 \wedge f''(\xi) < 0 &\implies \text{an der Stelle } \xi \text{ hat } f \text{ ein lokales Maximum.} \end{aligned}$$

Selbst diese Bedingung kann nicht immer erschöpfend Auskunft geben, wie die Beispiele der Funktionen  $x \mapsto f(x) := x^m$  für  $m \in \mathbb{N}, m \geq 4$  im Punkt  $\xi = 0$  zeigen; hier sind dann noch höhere Ableitungen heranzuziehen.

Zumindest das Analogon des Gebrauchs der zweiten Ableitung im Mehrdimensionalen soll hier besprochen werden, das allerdings auch nur im Fall  $n = 2$ .

#### Satz 11.14

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion aus der Klasse  $\mathcal{C}^2(\mathcal{G})$ . Es gelte  $\vec{\nabla} f(\vec{\xi}) = \vec{0}$  ( $\vec{\xi}$  ist also ein kritischer Punkt von  $f$ ). Sei

$$H_f(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{\xi}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{\xi}) \end{pmatrix}$$

die (nach dem Satz von Schwarz (Satz 11.11) symmetrische) Hesse'sche Matrix von  $f$  an der Stelle  $\vec{\xi}$ . Sei  $\Delta(\vec{\xi}) := \det H_f(\vec{\xi})$ . Dann gilt:

(i) Ist  $\Delta(\vec{\xi}) > 0$ , so liegt in  $\vec{\xi}$  ein lokaler Extremwert vor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi}) > 0 &\implies \vec{\xi} \text{ ist ein lokales Minimum} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi}) < 0 &\implies \vec{\xi} \text{ ist ein lokales Maximum} \end{aligned}$$

(ii) Ist  $\Delta(\vec{\xi}) = 0$ , so läßt sich mit den zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\vec{\xi}$  allein keine Aussage treffen; man sagt, die Matrix  $H_f(\vec{\xi})$  sei *degeneriert*.

(iii) Ist  $\Delta(\vec{\xi}) < 0$ , so liegt in  $\vec{\xi}$  ein Sattelpunkt vor.

*Beweis*

Wie im Eindimensionalen folgt der Beweis aus der Taylor-Formel (11.14).

### Aufgabe

Man führe den Beweis unter der Zusatzbedingung aus, daß die „gemischten Ableitungen“  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{\xi})$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{\xi})$  verschwinden.

### Bemerkung

Die Auszeichnung von  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi})$  bei der Behandlung eines Extremums ist nur eine scheinbare:

**Beh.**

Ist  $\Delta(\vec{\xi}) = \det H_f(\vec{\xi}) > 0$ , so haben  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi})$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{\xi})$  dasselbe Vorzeichen.

*Bew.*

Wegen der Symmetrie der Hesse'schen Matrix gilt bei positiver Determinante  $\Delta(\vec{\xi})$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{\xi}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{\xi}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{\xi}) \right)^2, \\ \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{\xi}) &= \Delta(\vec{\xi}) + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{\xi}) \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung** (Für Kenner und Genießer der Linearen Algebra)

Unter der Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\vec{\xi}$  ist die Hesse'sche Matrix  $H_f(\vec{\xi})$  symmetrisch. Vermöge einer orthogonalen Basistransformation ist  $H_f(\vec{\xi})$  dann äquivalent zu einer Diagonalmatrix mit den

zwei *Eigenwerten*  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in der Hauptdiagonale. Ist  $\vec{\xi}$  ein kritischer Punkt von  $f$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 &\implies \vec{\xi} \text{ ist ein lokales Minimum} \\ \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 &\implies \vec{\xi} \text{ ist ein lokales Maximum} \\ \left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0 \\ \text{oder} \\ \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0 \end{array} \right\} &\implies \vec{\xi} \text{ ist ein Sattelpunkt} \\ \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 &\implies \text{Mit Hilfe von } H_f(\vec{\xi}) \text{ allein läßt sich} \\ &\text{keine weitergehende Aussage treffen;} \\ &H_f(\vec{\xi}) \text{ ist degeneriert.} \end{aligned}$$

**Beispiel 11.20** (s. Beispiel 11.19)

Nach den Ausführungen auf p. 81 ist  $\vec{\xi} = \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$  Stelle eines lokalen Extremwertes. Eine einfache, wenn auch umständliche Rechnung zeigt, daß in  $\vec{\xi}$  gilt:

$$\Delta(\vec{\xi}) = \frac{4}{9} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{\xi}) = -\sqrt{3}$$

Somit hat  $f$  in  $\vec{\xi} = \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$  ein lokales Maximum. Dieses Maximum ist sogar ein globales Maximum, da  $f$  auf dem Rand  $\mathring{D}$  des Dreiecks

$$\mathcal{D} = \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, y, x + y \leq \pi \}$$

verschwindet und das Maximum der nichtkonstanten Funktion  $f$  daher im Inneren angenommen werden muß.

**Beispiel 11.21**

$D(f) := \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) := x^2 - y^2$  (parabolisches Hyperboloid)

$$(\vec{\nabla} f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x = y = 0.$$

Der Punkt  $\vec{\xi} = \langle 0, 0 \rangle$  ist somit ein kritischer Punkt. In ihm lautet die Hesse-Matrix

$$H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

welche eine negative Determinante hat. Damit liegt in  $\vec{\xi}$  ein Sattelpunkt vor.

<b>i</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>T<sub>i</sub></b>	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
<b>R<sub>i</sub></b>	16,02	16,42	16,81	17,10	17,37	17,58	17,86	18,12	18,34	18,60

Tabelle 11.1: Temperaturabhängigkeit eines Ohm'schen Widerstandes

## 11.8 Ausgleichsrechnung

Gegeben seien  $p$  Paare von Meßwerten

$$\langle x_k, y_k \rangle \quad (k \in \{1, \dots, p\}).$$

Gesucht ist eine lineare Beziehung

$$y = a_0 + a_1x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

eine sog. *Approximationsfunktion*, welche die Beziehung zwischen  $x_k$  und  $y_k$  für alle  $p$  Paare „möglichst gut“ beschreiben soll.

### Definition 11.15

Die Gerade

$$y = A(x) := a_0 + a_1x \quad (x \in \mathbb{R})$$

heißt *Ausgleichsgerade*, *Trendgerade* oder auch *Regressionsgerade* („wie geht  $y$  auf  $x$  zurück“).

### Beispiel 11.22

Eine Messung der Temperaturabhängigkeit eines Ohm'schen Widerstandes in einem bestimmten Temperaturintervall ergebe das Meßprotokoll aus Tabelle 11.1.

Die dabei entstehenden zehn Wertepaare  $\langle T_i, R_i \rangle$  führen zu zehn Meßpunkten  $P_i := \langle T_i, R_i \rangle \in \mathbb{R}^2$ , die nach Augenschein nahezu auf einer Geraden liegen, s. Abb. 11.19.

### Problem

Was bedeutet es, daß die Approximationsfunktion die Beziehung zwischen den Meßpunkten „möglichst gut“ beschreiben soll?

Es bedeutet, daß für  $k \in \{1, \dots, p\}$  die Differenz

$$y_k - (a_0 + a_1x_k)$$

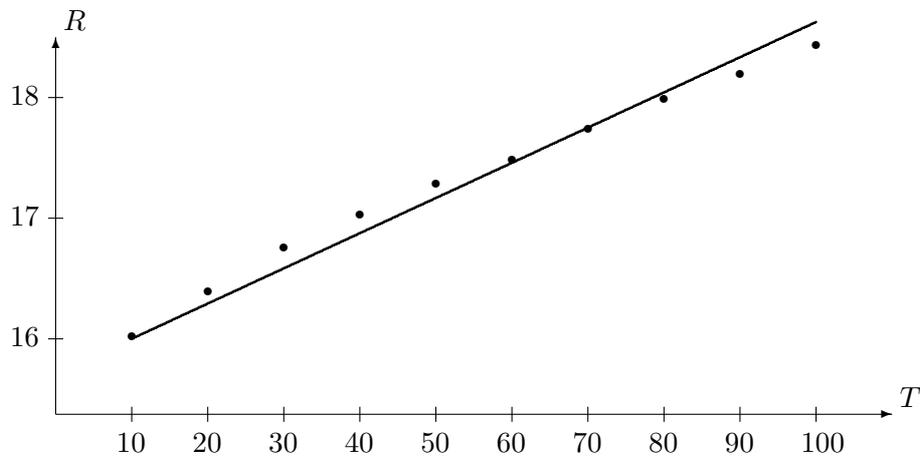


Abbildung 11.19: Trendgerade für die Temperaturabhängigkeit eines Ohm'schen Widerstandes

minimiert werden muß. Dazu benötigt man einen geeigneten Abstandsbegriff. Als Maß für die Abweichung zwischen Meßpunkt und Ausgleichskurve nimmt man in der Regel den vertikalen Abstand, d.h. die Ordinatendifferenz. Man könnte zwar auch den Abstand zwischen Meßpunkt und Funktionsgraph als Maß ansetzen, hätte dann aber einen wesentlich größeren Rechenaufwand in Kauf zu nehmen. Warum?

Aus rechentechnischen Gründen verwendet man die sog. *Methode der kleinsten Quadrate* und sucht ein (das?) Minimum der Funktion

$$f(a_0, a_1) := \sum_{k=1}^p [y_k - (a_0 + a_1 x_k)]^2.$$

Die notwendige Bedingung  $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$  für  $\vec{a} := \langle a_0, a_1 \rangle$  führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_0}(\vec{a}) &= -2 \sum_{k=1}^p [y_k - (a_0 + a_1 x_k)] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_1}(\vec{a}) &= -2 \sum_{k=1}^p [y_k - (a_0 + a_1 x_k)] x_k = 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Umstellen ein lineares Gleichungssystem für  $a_0$  und  $a_1$ , das System der sog. *Normalgleichungen*

$$\begin{aligned} p \cdot a_0 + \left( \sum_{k=1}^p x_k \right) \cdot a_1 &= \sum_{k=1}^p y_k \\ \left( \sum_{k=1}^p x_k \right) \cdot a_0 + \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right) \cdot a_1 &= \sum_{k=1}^p x_k y_k. \end{aligned}$$

Dieses System der Normalgleichungen besitzt genau eine Lösung, da die Koef-

fizientendeterminante nicht verschwindet:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\vec{a}) &:= H_f(\vec{a}) = \begin{vmatrix} p & \sum_{k=1}^p x_k \\ \sum_{k=1}^p x_k & \sum_{k=1}^p x_k^2 \end{vmatrix} \\
 &= p \cdot \sum_{k=1}^p x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^p x_k \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[ p \cdot \sum_{i=1}^p x_i^2 + p \cdot \sum_{k=1}^p x_k^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^p x_i \right) \left( \sum_{k=1}^p x_k \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p [x_i^2 + x_k^2 - 2x_i x_k] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p (x_i - x_k)^2 > 0,
 \end{aligned}$$

jedenfalls dann, wenn mindestens zwei Meßpunkte voneinander verschieden sind. Mit Hilfe der *empirischen Mittelwerte*

$$\bar{x} := \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_k, \quad \bar{y} := \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k$$

ergeben sich die Lösungen mit Hilfe der Cramer'schen Regel zu

$$a_0 = \frac{\bar{y} \sum x_k^2 - \bar{x} \sum x_k y_k}{\frac{1}{p} \sum x_k^2 - \bar{x}^2}, \quad a_1 = \frac{\frac{1}{p} \sum x_k y_k - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{p} \sum x_k^2 - \bar{x}^2} \quad (11.15)$$

### Beispiel 11.23

Betrachtet wird noch einmal das Eingangsbeispiel 11.22. Mit den dort angegebenen Werten ergibt sich die Regressionsgerade

$$R := f(T) = R_0 + R_1 T \quad (T \in [10, 100])$$

mit den folgenden Werten:

$$\begin{array}{ll}
 \sum_{k=1}^{10} T_k &= 550 & \sum_{k=1}^{10} R_k &= 174,22 \\
 \sum_{k=1}^{10} T_k^2 &= 38\,500 & \sum_{k=1}^{10} T_k R_k &= 9810,6
 \end{array}$$



Minimum handelt:

$$\begin{aligned}
 f(a_0, a_1) &:= \sum_{k=1}^p [y_k - (a_0 + a_1 x_k)]^2 \\
 \frac{\partial f}{\partial a_0}(\vec{a}) &= -2 \sum_{k=1}^p [y_k - (a_0 + a_1 x_k)] \\
 \frac{\partial f}{\partial a_1}(\vec{a}) &= -2 \sum_{k=1}^p [y_k - (a_0 + a_1 x_k)] x_k \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2}(\vec{a}) &= 2p \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_0}(\vec{a}) &= 2 \sum_{k=1}^p x_k = \frac{\partial^2 f}{\partial a_0 \partial a_1}(\vec{a}) \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}(\vec{a}) &= 2 \sum_{k=1}^p x_k^2 \\
 \longrightarrow H_f &= \begin{pmatrix} 2p & 2 \sum_{k=1}^p x_k \\ 2 \sum_{k=1}^p x_k & 2 \sum_{k=1}^p x_k^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bis auf den Faktor  $2^2 = 4$  ist das gerade die Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen. Damit ist (s. die Rechnung auf p. 89)

$$\Delta(\vec{a}) = \det H_f(\vec{a}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p (x_i - x_k)^2 > 0.$$

Es ist auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2}(\vec{a}) = 2p > 0,$$

also liegt für die berechneten Werte (11.15) von  $a_0$  und  $a_1$  tatsächlich ein Minimum vor.

## 11.9 Umkehrabbildungen

Das Problem der Umkehrbarkeit von Funktionen ist von großer Bedeutung. Man denke etwa an die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten und wieder zurück oder an die „Paare“ von Funktionen

- $e \longleftrightarrow \ln,$
- $\sin \longleftrightarrow \arcsin,$

- $\sinh \longleftrightarrow \operatorname{arsinh}$ ,
- etc.

Aufbauend auf den Bedingungen, unter denen eine Funktion im Eindimensionalen umkehrbar ist, soll eine entsprechende Theorie nun auch im Mehrdimensionalen entwickelt werden, welche insbesondere für (mehrdimensionale) Koordinatentransformationen gebraucht wird.

Seien  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  ein eindimensionales Intervall und  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ streng monoton} \implies f \text{ umkehrbar}$$

Wenn  $f$  zusätzlich stetig ist, dann ist die Bedingung der strengen Monotonie auch notwendig für die Umkehrbarkeit:

$$f \text{ stetig} \implies$$

$$f \text{ streng monoton} \iff f \text{ umkehrbar}$$

Ist  $f$  zusätzlich differenzierbar, so ist die Bedingung

$$f'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{I})$$

hinreichend für die strenge Monotonie und damit die Umkehrbarkeit.

Auch im Mehrdimensionalen stellt sich nun die Frage, wann eine Abbildung

$$\vec{f} : D(\vec{f}) \longrightarrow W(\vec{f})$$

mit  $D(\vec{f}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $W(\vec{f}) \subseteq \mathbb{R}^m$  bijektiv ist, also eine Umkehrabbildung besitzt.

Dazu zuerst ein Beispiel:

**Beispiel 11.24**

$$\begin{aligned} \vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \\ \langle x, y \rangle &\longmapsto \langle x^2 - y^2, 2xy \rangle \end{aligned}$$

**Beh. 1**

$\vec{f}$  ist nicht global umkehrbar.

*Beweis*

$$\vec{f}(x, y) = \vec{f}(-x, -y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\})$$

**Beh. 2**

Lokal ist  $\vec{f}$  umkehrbar, d.h. zu jedem Punkt  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  existiert eine Umgebung  $\mathcal{U}$ , so daß

$$\vec{f} \upharpoonright \mathcal{U} : \mathcal{U} \longrightarrow W(\vec{f} \upharpoonright \mathcal{U})$$

bijektiv ist.

*Beweis*

Seien  $\langle x, y \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$  und  $\langle u, v \rangle = \langle x^2 - y^2, 2xy \rangle$ , also

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy . \end{aligned}$$

Dann läßt sich dieses (nichtlineare) Gleichungssystem nach  $x$  und  $y$  auflösen:

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2 + v^2} + u)} \\ y &= \pm \eta \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2 + v^2} - u)} \quad , \quad \eta := \operatorname{sgn} v . \end{aligned}$$

Diese Auflösung bekommt man etwa durch die folgende Betrachtung:

$$\begin{aligned} u = x^2 - y^2 \quad , \quad x^2 u = x^4 - x^2 y^2 = x^4 - \frac{v^2}{4} \\ \longrightarrow \quad (x^2)_{1,2} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{4}} = \frac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned}$$

Wegen  $\sqrt{u^2 + v^2} \geq |u|$  kommt nur das positive Vorzeichen in Betracht, und man erhält

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 + v^2})} .$$

Für  $y$  ergibt sich, ebenfalls unter Beachtung von  $\sqrt{u^2 + v^2} \geq |u|$ ,

$$y = \pm \sqrt{x^2 - u} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2 + v^2} - u)} ,$$

und wegen  $v = 2xy$  haben für

- $v \geq 0$  :  $x$  und  $y$  dasselbe Vorzeichen,
- $v < 0$  :  $x$  und  $y$  verschiedene Vorzeichen.

*Global* gibt es also zwei Paare  $\langle x, y \rangle$  von Lösungen, *lokal* dagegen jeweils nur eins.

**Bemerkung**

Später wird, unter Verwendung von Polarkoordinaten, dieses Beispiel noch einmal aufgegriffen und geometrisch interpretiert; s. Beispiel 11.25 auf p. 97.

Es stellt sich nun die Frage nach einem „vernünftigen“ Kriterium für die Umkehrbarkeit einer solchen Funktion  $\vec{f}$ .

Aus der Theorie von speziellen, nämlich den linearen Abbildungen weiß man, daß die Umkehrbarkeit höchstens dann erwartet werden kann, wenn Urbildraum und Bildraum dieselbe Dimension haben:  $n = m$ . Das wird dann wohl auch bei den „linear approximierbaren“, also den differenzierbaren Abbildungen der Fall sein. Ferner läßt sich der Theorie der linearen Abbildungen auch entnehmen, daß, in einer ersten Übertragung des eindimensionalen Falles, die Bedingung

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) \neq O \quad (\text{Nullmatrix})$$

als Ersatz von

$$f'(\xi) \neq 0 \quad (n = m = 1)$$

nicht ausreichen wird. Denn ist speziell  $\vec{f} = T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , so ist

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) = DT(\vec{\xi}) = T$$

(Beispiel 11.7 (ii)), und für die Invertierbarkeit einer linearen Abbildung  $T$  muß bekanntlich mehr als  $T \neq 0$  gefordert werden, nämlich

$$\det T \neq 0.$$

In diesem Sinne ist also die Bedingung  $f'(\xi) \neq 0$  eine Bedingung an die Determinante der  $(1 \times 1)$ -Matrix  $f'(\xi)$ . Das führt zu der folgenden

**Vermutung**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{f} \in (\mathcal{C}^1(\mathcal{G}))^n$ . Dann gilt

$$\bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} \det D\vec{f}(\vec{x}) \neq 0 \implies \vec{f} \text{ ist lokal umkehrbar.}$$

**Idee**

Seien  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $\det D\vec{f}(\vec{\xi}) \neq 0$ . Dann ist

$$D\vec{f}(\vec{\xi}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

bijektiv, und für „kleine“  $\vec{h}$  ist

$$\vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{\xi}) \approx D\vec{f}(\vec{\xi}) \cdot \vec{h},$$

somit gilt:

$$\vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}_2) - \vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}_1) \approx D\vec{f}(\vec{\xi}) \cdot (\vec{h}_2 - \vec{h}_1).$$

Damit ist für kleine  $\vec{h}$  die Injektivität von  $\vec{f}$  in der Nähe von  $\vec{\xi}$  gezeigt:

$$\vec{h}_1 \neq \vec{h}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}_1) \neq \vec{f}(\vec{\xi} + \vec{h}_2).$$

Das ist der Grundgedanke beim Beweis des folgenden Satzes über die lokale Existenz von Umkehrabbildungen.

**Satz 11.15**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{G}$  offen und  $\vec{f} \in (\mathcal{C}^1(\mathcal{G}))^n$ . Seien  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$ ,  $\vec{\eta} := \vec{f}(\vec{\xi})$  und gelte  $\det D\vec{f}(\vec{\xi}) \neq 0$ .

Dann gibt es offene Umgebungen  $\mathcal{U}$  von  $\vec{\xi}$  und  $\mathcal{V}$  von  $\vec{\eta}$ , so daß gilt:

- (i)  $\vec{f} \upharpoonright \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  ist bijektiv.
- (ii) Die (dann existierende) Umkehrabbildung

$$\vec{g} := (\vec{f} \upharpoonright \mathcal{U})^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$$

ist aus der Klasse  $(\mathcal{C}^1(\mathcal{V}))^n$ .

- (iii)  $D\vec{g}(\vec{y}) = \left( D\vec{f}[\vec{g}(\vec{y})] \right)^{-1} \quad (\vec{y} \in \mathcal{V})$   
(gemeint ist hier die inverse Matrix.)

## 11.10 Koordinatentransformationen

Invertierbare Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  treten häufig in folgendem Zusammenhang auf. Sei etwa  $n = 3$ , dann sind  $x_1, x_2, x_3$  die kartesischen Koordinaten, mit denen man ein physikalisches Phänomen beschreiben will, z.B. ein Magnetfeld. Besondere Symmetrieeigenschaften des untersuchten Problems lassen dann oft andere Koordinaten geeigneter erscheinen als die kartesischen, weil damit die Gleichungen einfacher werden.

In einem solchen Fall muß man wissen, wie sich die Koordinaten  $u_1, u_2, u_3$  des neuen Systems in die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  des alten Systems transformieren, man braucht eine sog. *Koordinatentransformation*  $\vec{t}$ :

$$\vec{x} = \vec{t}(\vec{u}), \quad \text{oder ausgeschrieben}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{t} \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} t_1(u_1, u_2, u_3) \\ t_2(u_1, u_2, u_3) \\ t_3(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix}.$$

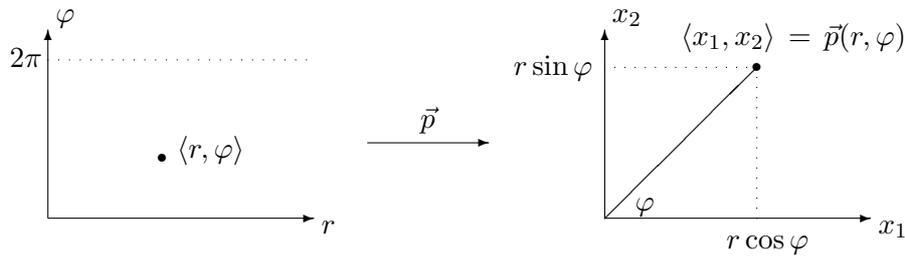


Abbildung 11.20: Ebene Polarkoordinaten

### 11.10.1 Ebene Polarkoordinaten

Die Darstellung eines Punktes  $P$  in kartesischen Koordinaten werde mit Hilfe einer Funktion  $\vec{p}$  auf Polarkoordinaten umgerechnet. Das geschieht dadurch, daß die  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene auf die  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene abgebildet wird, s. Abb. 11.20.

$$\begin{aligned} \vec{p}: [0, \infty) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \langle r, \varphi \rangle &\longmapsto \langle r \cos \varphi, r \sin \varphi \rangle \end{aligned}$$

$\vec{p}$  bildet also ein „rechts offenes“ Rechteck der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene auf den gesamten  $\mathbb{R}^2$  ab. Die Einschränkung auf das Intervall  $[0, 2\pi)$  ist etwas willkürlich und macht z.B. beim Differenzieren auf der positiven  $x_1$ -Achse Probleme. Dann wählt man lieber  $\varphi \in [-\pi, \pi)$  oder Ähnliches.

Für die Abbildung  $\vec{p}$  ist

$$\det D\vec{p}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Somit ist  $\vec{p} \upharpoonright [(0, \infty) \times [0, 2\pi)]$  lokal injektiv und damit lokal umkehrbar. Man kann zeigen, daß die Funktion

$$\vec{p}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$$

bijektiv und damit auch global umkehrbar ist.

#### Bemerkung

(i) Für  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$  ist

$$\vec{p}(0, \varphi_1) = \vec{p}(0, \varphi_2),$$

also ist  $\vec{p}$  bei  $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$  nicht lokal umkehrbar.

(ii) Aus der geometrischen Interpretation erkennt man, daß die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\vec{p}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$$

Für  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  sei

$$\arg(x_1, x_2) := \begin{cases} \arctan \frac{x_2}{x_1} & , \quad x_1 > 0 \quad \wedge \quad x_2 \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 > 0 \\ \arctan \frac{x_2}{x_1} + \pi & , \quad x_1 < 0 \quad \wedge \quad x_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & , \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 < 0 \\ \arctan \frac{x_2}{x_1} + 2\pi & , \quad x_1 > 0 \quad \wedge \quad x_2 < 0 \end{cases}$$

Die Umkehrabbildung  $\vec{q}$  von  $\vec{p}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{q}: \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} & \longrightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi) \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \longmapsto \left\langle \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arg(x_1, x_2) \right\rangle \end{aligned}$$

Es ist also  $\vec{q} = \vec{p}^{-1}$ , d.h.

$$\begin{aligned} (\vec{p} \circ \vec{q})(x_1, x_2) &= \langle x_1, x_2 \rangle & (\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}) \\ (\vec{q} \circ \vec{p})(r, \varphi) &= \langle r, \varphi \rangle & (\langle r, \varphi \rangle \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)), \end{aligned}$$

und es gelten die bekannten Umrechnungsformeln:

- Polarkoordinaten  $\longrightarrow$  Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos \varphi \\ x_2 &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

- Kartesische Koordinaten  $\longrightarrow$  Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \tan \varphi &= x_2/x_1 & (\text{falls } x_1 \neq 0) \end{aligned}$$

**Beispiel 11.25** (Wiederaufnahme von Beispiel 11.24)

Verwendet wird die geometrische Interpretation von  $\vec{p}$  (Polarkoordinaten), um die Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{f}: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \longmapsto \langle x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2 \rangle \end{aligned}$$

geometrisch zu untersuchen. Zuvor der Test auf lokale Umkehrbarkeit:

$$\det D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 4(x_1^2 + x_2^2).$$

Lokale Umkehrbarkeit liegt vor als Abbildung von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  nach  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ , was ja auch früher schon festgestellt worden ist.

Betrachtet wird nun die Kompositionsabbildung  $\vec{f} \circ \vec{p}$ , was nichts Anderes bedeutet, als daß die Punkte der Ebene durch Polarkoordinaten beschrieben werden:

$$\begin{aligned} (\vec{f} \circ \vec{p})(r, \varphi) &= \langle r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi, 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \rangle \\ &= \langle r^2 \cos 2\varphi, r^2 \sin 2\varphi \rangle, \end{aligned}$$

d.h. ein Punkt  $\vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$ , zu dem die Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \varphi &= \arg(x_1, x_2) \end{aligned}$$

gehören, wird durch  $\vec{f}$  abgebildet auf einen Punkt  $\vec{y} = \langle y_1, y_2 \rangle$ , zu dem die Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r^2 \\ \tilde{\varphi} &= \begin{cases} 2\varphi & , \varphi < \pi \\ 2\varphi - 2\pi & , \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

gehören. Dieses Ergebnis läßt sich aus der Darstellung

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle r^2 \cos 2\varphi, r^2 \sin 2\varphi \rangle$$

direkt ablesen.

### Interpretation von $\vec{f}$

$\vec{f}$ , angewandt auf einen Punkt  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , „quadriert“ den Abstand und „verdoppelt“ den Winkel.

Damit kann man sich auch geometrisch klarmachen, warum  $\vec{f}$  keine globale Umkehrfunktion besitzt, s. Abb. 11.21.

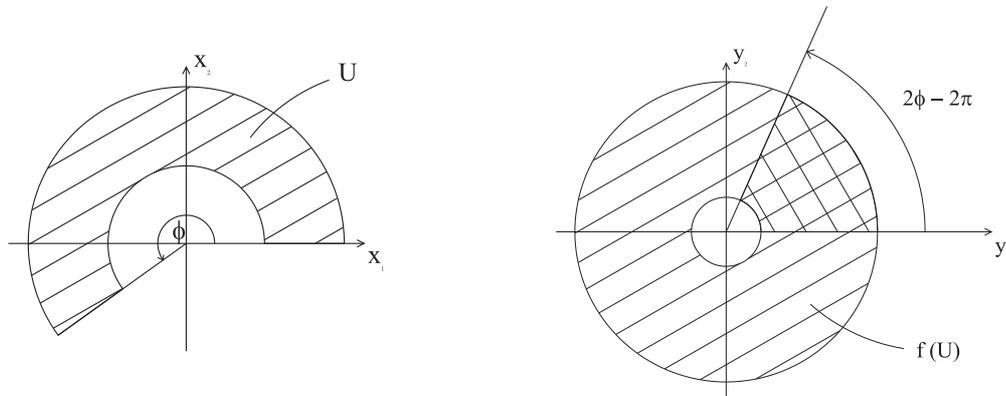


Abbildung 11.21: Geometrische Darstellung der Funktion  
 $\vec{f}(x_1, x_2) = \langle x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2 \rangle$

In dem doppelt schraffierten Stück  $\vec{f}(\mathcal{U})$  der  $\langle y_1, y_2 \rangle$ -Ebene ist jeder Punkt Bildpunkt von je zwei verschiedenen Punkten der Menge  $\mathcal{U}$  der  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene.

**Bemerkung** (Darstellung als Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ )

- (i) Identifiziert man den reellen zweidimensionalen Punkt  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2$  mit dem Punkt  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  der komplexen Zahlenebene, dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x_1 + ix_2) \\ &\text{„=“ } \vec{f}(x_1, x_2) \\ &= \langle x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2 \rangle \\ &\text{„=“ } x_1^2 - x_2^2 + i \cdot 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + ix_2)^2 \\ &= z^2 \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

- (ii) Auch die aus dem Eindimensionalen bekannte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ist überall lokal, aber nicht global umkehrbar.

### 11.10.2 Zylinderkoordinaten

*Zylinderkoordinaten* bestehen aus Polarkoordinaten in der  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene und der kartesischen Koordinate  $x_3$ . Sie sind beispielsweise dafür geeignet, die Beschreibung von elektromagnetischen Phänomenen in zylindrischen Leitern längs der  $x_3$ -Achse zu realisieren.

Dabei wird ein Raumpunkt  $\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  durch diejenigen Koordinaten dargestellt, die man ihm zuordnen müßte, wenn man ihn als einen Punkt auf der Mantelfläche eines Zylinders der Höhe  $x_3$  und des Radius'  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  auffassen würde, s. Abb. 11.22.

$$\begin{array}{ccc} \vec{z} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \langle r, \varphi, x_3 \rangle & \longmapsto & \langle r \cos \varphi, r \sin \varphi, x_3 \rangle \end{array}$$

Für die Abbildung  $\vec{z}$  ist

$$\det D\vec{z}(r, \varphi, x_3) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Somit ist  $\vec{z} \upharpoonright [(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}]$  lokal injektiv und damit lokal umkehrbar. Man kann zeigen, daß die Funktion

$$\vec{z} : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x} : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$$

bijektiv und damit auch global umkehrbar ist.

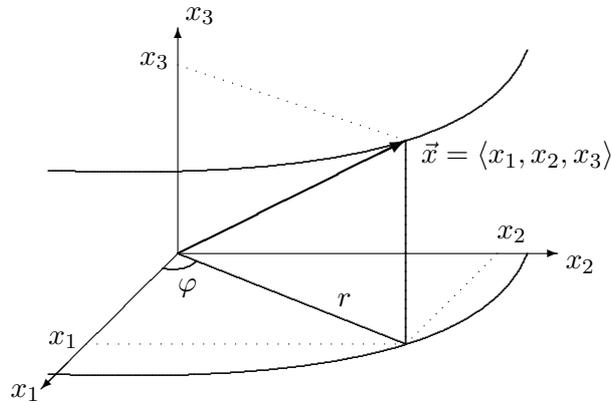


Abbildung 11.22: Zylinderkoordinaten

### 11.10.3 Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

Zur Darstellung eines Punktes in *Kugelkoordinaten* oder *räumlichen Polarkoordinaten* denkt man sich eine Kugel um den Ursprung, auf deren Oberfläche  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  liegt und beschreibt diesen Punkt dann durch die Angabe von (Abb. 11.23)

- Kugelradius,
- geographischer Länge  $\varphi$  – dem *Azimut*,
- geographischer Breite  $\theta$  – dem *Polarwinkel*.

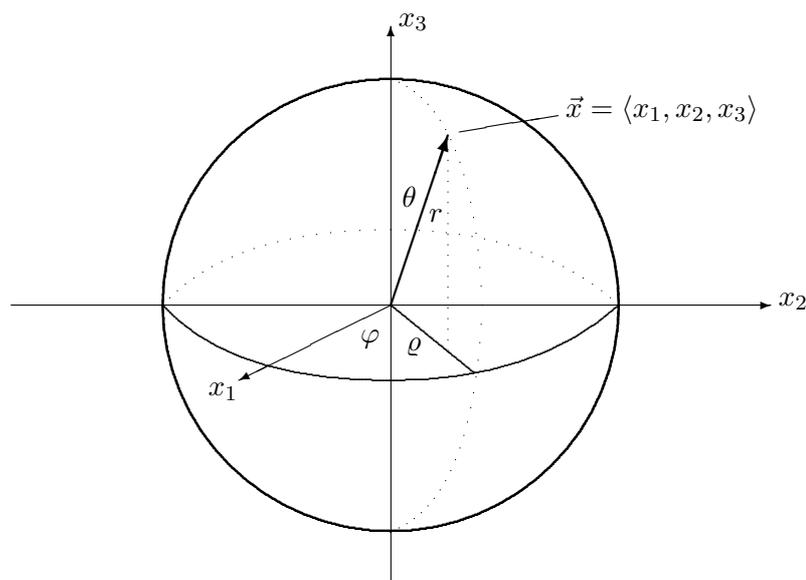


Abbildung 11.23: Kugelkoordinaten oder räumliche Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{k}: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \langle r, \varphi, \theta \rangle &\longmapsto \langle \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, r \cos \theta \rangle \\ &\quad \langle r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta \rangle \end{aligned}$$

Für die Abbildung  $\vec{k}$  ist

$$\det D\vec{k}(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \theta.$$

Somit ist  $\det D\vec{k}(r, \varphi, \theta) \neq 0$  für  $r > 0$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ . Also ist die Funktion  $\vec{k} \upharpoonright [(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)]$  lokal injektiv und damit lokal umkehrbar. Man kann zeigen, daß die Funktion

$$\vec{k}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x}: x_1^2 + x_2^2 = 0\}$$

bijektiv und damit auch global umkehrbar ist.

### Bemerkung

In dieser Darstellung der Kugelkoordinaten ist  $\theta$  der sog. *Polarwinkel*, also der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Achse durch den Nordpol der Kugel; dabei ist  $\theta \in [0, \pi]$ .

Üblich ist auch eine andere Darstellung. Hierbei ist  $\theta'$  der Winkel zwischen Radiusvektor und dessen Projektion in die  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene, die Äquatorebene. Dann ist  $\theta' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , und die Koordinaten eines Punktes werden auch bzgl. ihrer geographischen Breite so gezählt wie die Koordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche; darüberhinaus spricht man in der Geographie nicht von positiven oder negativen Breitengraden, sondern unterscheidet zwischen nördlicher und südlicher Breite.

Die Transformationsformel lautet in diesem Fall

$$\vec{k}'(r, \varphi, \theta') = \langle r \cos \theta' \cos \varphi, r \cos \theta' \sin \varphi, r \sin \theta' \rangle$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\det D\vec{k}'(r, \varphi, \theta') = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta' & -r \sin \varphi \cos \theta' & r \cos \varphi \sin \theta' \\ \sin \varphi \cos \theta' & r \cos \varphi \sin \theta' & r \sin \varphi \sin \theta' \\ \sin \theta' & 0 & -r \cos \theta' \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta'.$$

#### 11.10.4 Krummlinige Koordinatensysteme

Ein Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  wird durch seine Komponenten  $x_1, \dots, x_n$  bzgl. einer Basis beschrieben. Wenn man die durch das Euklidische Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  gegebene

geometrische Struktur des  $\mathbb{R}^n$  berücksichtigt, so spricht man von den  $x_i$  als den *Koordinaten* des Punktes  $\vec{x}$  bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems, dessen Geraden die Richtungen  $\vec{e}_i^{(n)}$  besitzen und dessen Ursprung in  $O$  liegt. Hält man alle bis auf eine Koordinate fest, so sind durch

$$f_i : t \mapsto \langle x_1, \dots, t, \dots, x_n \rangle$$

Linien im  $\mathbb{R}^n$  definiert, die sog. *Koordinatenlinien*. Diese überziehen den  $\mathbb{R}^n$  mit einem orthogonalen Gitter.

Nun ist es oft zweckmäßig, das Koordinatensystem zu wechseln und die Punkte in neuen Koordinaten zu beschreiben. Wie sehen die Koordinatenlinien im neuen System aus? Diese Problematik soll am Beispiel der ebenen Polarkoordinaten diskutiert werden.

**Beispiel 11.26** (ebene Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} \vec{p} : \mathbb{R}_{r,\varphi}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{x_1,x_2}^2 \\ \langle r, \varphi \rangle &\longmapsto \langle x_1, x_2 \rangle = \vec{p}(r, \varphi) := \langle r \cos \varphi, r \sin \varphi \rangle \end{aligned}$$

Wegen  $\det D\vec{p}(r, \varphi) = r$  ist die Abbildung  $\vec{p}$  überall lokal umkehrbar, falls  $r \neq 0$ . Sei  $\vec{q} := \vec{p}^{-1}$ .  $\vec{q}$  ist auf einer offenen Umgebung  $\mathcal{V}$  von  $\vec{p}(r, \varphi)$  definiert, und es ist

$$\begin{aligned} \vec{q}(x_1, x_2) &= \vec{q}(p_1(r, \varphi), p_2(r, \varphi)) \\ &= (\vec{q} \circ \vec{p})(r, \varphi) \\ &= \langle r, \varphi \rangle \quad (\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Die Koordinatenlinien im neuen Koordinatensystem sind die Kurven

$$\begin{aligned} g_1 : t &\longmapsto \langle t, \varphi \rangle \\ g_2 : t &\longmapsto \langle r, t \rangle, \end{aligned}$$

also Geraden, in der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene, welche diese mit einem orthogonalen Gitter überziehen.

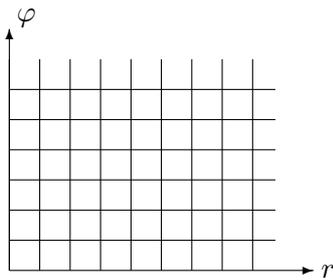
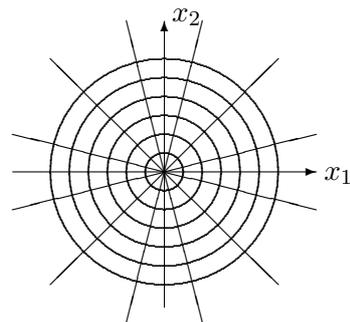
Stellt man diese Geraden nun in dem alten Koordinatensystem dar, also dem kartesischen, so erhält man die Koordinatenlinien des neuen Systems als Bilder der üblichen kartesischen Koordinaten – nämlich der orthogonalen Geraden in der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene – unter  $\vec{q}^{-1} = \vec{p}$ , s. Abb. 11.24 und 11.25:

$$\begin{aligned} l_1(t) &:= \vec{p}(t, \varphi) = \langle t \cdot \cos \varphi, t \cdot \sin \varphi \rangle \\ l_2(t) &:= \vec{p}(r, t) = \langle r \cdot \cos t, r \cdot \sin t \rangle \end{aligned}$$

Die Koordinatenlinien von ebenen Polarkoordinaten sind Geraden durch den Nullpunkt ( $\varphi$  konstant) und konzentrische Kreise um den Nullpunkt ( $r$  konstant).

### Aufgabe

Wie sehen die Koordinatenlinien für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten aus?

Abbildung 11.24:  $\langle r, \varphi \rangle$ -EbeneAbbildung 11.25:  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene

## Kapitel 12

# Integration von Abbildungen aus dem $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

In diesem Kapitel soll der Integralbegriff ausgedehnt und erklärt werden, wie Funktionen über zwei-, drei- oder mehrdimensionale Bereiche integriert werden können. In den Anwendungen stellt eine solche Funktion beispielsweise die Ladungsdichte auf einer zweidimensionalen Platte oder in einem dreidimensionalen räumlichen Bereich dar, und das Integral liefert dann die Gesamtladung.

Das eindimensionale bestimmte Integral wird motiviert durch den Wunsch, den (Flächen-) Inhalt krummlinig berandeter Gebiete zu definieren und zu berechnen. Genauso läßt sich das zweidimensionale Integral motivieren mit dem Wunsch, nicht regelmäßige Volumina berechnen zu wollen, s. Abb. 12.1.

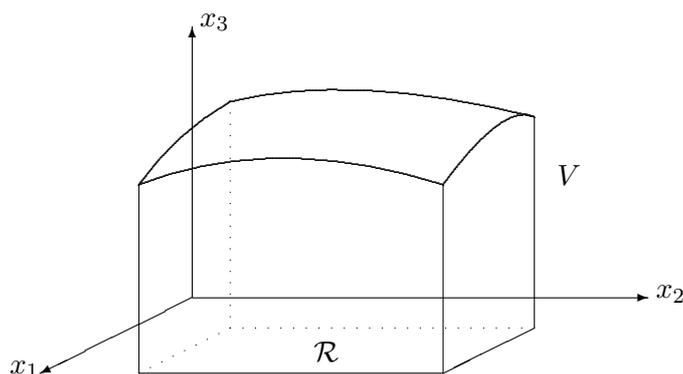


Abbildung 12.1: Definition und Berechnung eines dreidimensionalen Volumens

Die auf dem Rechteck  $\mathcal{R} := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  der  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene definierte reellwertige und dort nichtnegative Funktion  $f$  besitzt ein Schaubild, welches eine über dem Rechteck  $\mathcal{R}$  liegende Fläche im  $\mathbb{R}^3$  darstellt. Zusammen mit dem Rechteck  $\mathcal{R}$  begrenzt diese Fläche dann ein dreidimensionales Volumen im  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ -Raum.

**Problem**

Welches ist das Volumen des entstehenden räumlichen Bereiches bzw. wie kann man sein Volumen überhaupt definieren?

Die dann zum bestimmten Integral führende Definition unterscheidet sich von der im eindimensionalen Fall nur in einem Punkt: während dort als Integrationsbereiche stets Intervalle auftreten, ist man jetzt nicht mit Rechtecken oder Quadern als Integrationsbereichen zufrieden, sondern will z.B. auch über Kreise oder über Kugeln integrieren. Letzteres wird erreicht durch eine Transformation auf neue Koordinaten. Zur Erinnerung:

Kreise sind Rechtecke in der  $\langle r, \phi \rangle$ -Ebene,  
Kugeln sind Quader im  $\langle r, \phi, \theta \rangle$ -Raum.

Dadurch wird motiviert, daß man sich zunächst trotzdem mit der Integration von Funktionen auf Rechtecken bzw. Quadern beschäftigt. Die Vorgehensweise ist dabei zu derjenigen, die zur Definition des eindimensionalen Integralbegriffes führt, völlig analog.

**12.1 Das bestimmte Integral**

Begonnen werden soll mit der Definition mehrdimensionaler Analoga offener, halboffener und abgeschlossener Intervalle.

**Definition 12.1**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißen

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &:= \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i, i \in \{1, \dots, n\} \} \\ &= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \\ &\text{offenes } n\text{-dimensionales Intervall;} \end{aligned}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}) := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}] &:= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \\ &\text{halboffene } n\text{-dimensionale Intervalle;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &:= \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \\ &\text{abgeschlossenes } n\text{-dimensionales Intervall.} \end{aligned}$$

Letzteres wird, da es beschränkt ist, auch *kompaktes  $n$ -dimensionales Intervall* genannt.

Sei  $\mathcal{I} \in \{[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{b}], (\vec{a}, \vec{b})\}$ . Dann heißt

$$|\mathcal{I}| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad \text{Maß oder Inhalt von } \mathcal{I},$$

im Fall  $n = 2$  auch *Fläche*,  
 im Fall  $n = 3$  auch *Volumen*.

Die folgende Definition beschäftigt sich mit dem mehrdimensionalen Analogon einer Zerlegung. Diese wird, analog zur Definition mehrdimensionaler Intervalle, definiert als kartesisches Produkt eindimensionaler Zerlegungen.

**Definition 12.2**

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{I} := \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , also  $\mathcal{I}$  ein kompaktes  $n$ -dimensionales Intervall.

- (i) Eine *Zerlegung*  $\mathcal{Z}$  oder eine *Partition* von  $\mathcal{I}$  ist das kartesische Produkt

$$\mathcal{Z} := \times_{i=1}^n \mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_n$$

von Zerlegungen  $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n$  der Komponentenintervalle  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ .

- (ii) Die Elemente von  $\mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_n$  heißen die *Teilpunkte* der Zerlegung  $\mathcal{Z}$ .  
 (iii) Die *Teilintervalle* von  $\mathcal{Z}$  erhält man, indem man in dem kartesischen Produkt  $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n$  die  $\mathcal{T}_i$  jeweils alle Teilintervalle von  $\mathcal{Z}_i$  durchlaufen läßt.  
 (iv) Unter der *Norm* oder *Feinheit* versteht man das Maximum der Feinheiten der Einzelzerlegungen:

$$\|\mathcal{Z}\| := \max_{i=1}^n \|\mathcal{Z}_i\| = \max_{i=1}^n \left( \max_{j=1}^{m_i} \{|x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}|\} \right),$$

wobei  $m_i$  die Anzahl der Zerlegungspunkte der eindimensionalen Zerlegung  $\mathcal{Z}_i$  darstellt.

- (v) Eine Folge  $\{\mathcal{Z}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen heißt eine *ausgezeichnete Zerlegungsfolge*, wenn ihre Feinheit mit wachsendem  $k$  gegen Null konvergiert:

$$\|\mathcal{Z}_k\| \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0.$$

**Beispiel 12.1**

$$n = 2 \quad , \quad \mathcal{I} := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2],$$

$$\mathcal{Z}_1 := \{a_1 = x_0, x_1, \dots, x_k = b_1\},$$

$$\mathcal{Z}_2 := \{a_2 = y_0, y_1, \dots, y_l = b_2\}.$$

Dann besteht die Zerlegung  $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2$  aus allen Punkten der Form

$$\langle x_i, y_j \rangle \quad (i \in \{0, \dots, k\}, j \in \{0, \dots, l\}),$$

– das sind die Teilpunkte von  $\mathcal{Z}$  – während ein typisches Teilintervall von  $\mathcal{Z}$  die Gestalt

$$\mathcal{R}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

hat, s. Abb. 12.2.

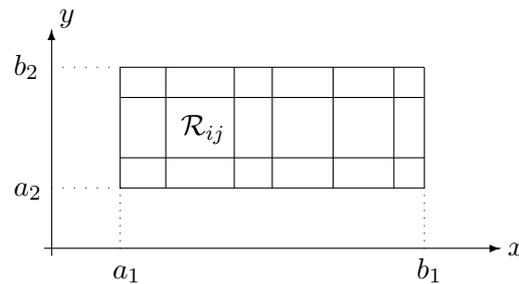


Abbildung 12.2: Zerlegung eines zweidimensionalen Intervalles

### Definition 12.3

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I} := [\vec{a}, \vec{b}] (\subseteq \mathbb{R}^n)$ ,  $f$  eine beschränkte reellwertige Funktion auf  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung von  $\mathcal{I}$  mit den (einfach durchnummerierten) Teilintervallen  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m$ .

$$(i) \quad m_k := \inf_{\mathcal{I}_k} f(\vec{x}) \quad , \quad M_k := \sup_{\mathcal{I}_k} f(\vec{x}) \quad (k \in \{1, \dots, m\})$$

$$(ii) \quad \underline{S}(\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^m m_k \cdot |\mathcal{I}_k| \quad \text{Untersumme -}$$

$$\bar{S}(\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^m M_k \cdot |\mathcal{I}_k| \quad \text{Obersumme -}$$

von  $f$  bzgl. der Zerlegung  $\mathcal{Z}$ .

(iii) Sei  $\mathcal{B} := \{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_m\}$  eine Menge von Zahlen mit der Eigenschaft

$$\vec{\xi}_k \in \mathcal{I}_k \quad (k \in \{1, \dots, m\}),$$

ein sog. *Zwischenpunktsystem* oder eine *Besetzung* von  $\mathcal{Z}$ . Dann heißt der Ausdruck

$$S(\mathcal{Z}, \mathcal{B}) := \sum_{k=1}^m f(\vec{\xi}_k) \cdot |\mathcal{I}_k|$$

eine *Riemann'sche Summe* oder eine *Zwischensumme* von  $f$  zur Besetzung  $\mathcal{B}$ , s. Abb. 12.3.

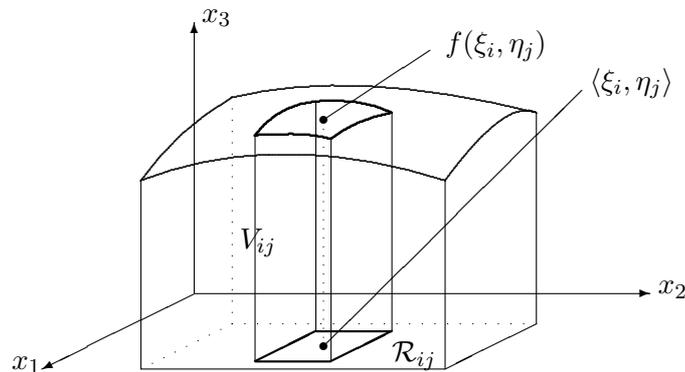


Abbildung 12.3: Säule einer Riemann'schen Summe der Zerlegung für ein Volumen

**Man beachte**

Eine Unter- oder Obersumme ist nicht notwendig eine Riemann'sche Summe. Warum nicht?

Der folgende Satz liefert – wie im Eindimensionalen auch – die Grundlage für die Definition von Integralen mit Hilfe von Unter- und Obersummen bzw. Riemann'schen Zwischensummen:

**Satz 12.1**

- (i) Sei  $\mathcal{Z}'$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{Z}$ , d.h. eine Zerlegung, welche gegenüber der ursprünglichen Zerlegung zusätzliche Teilpunkte enthält. Bzgl. dieser Verfeinerung sind die Untersummen monoton wachsend, die Obersummen monoton fallend, i.e.

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) \leq \underline{S}(\mathcal{Z}') \quad , \quad \bar{S}(\mathcal{Z}) \geq \bar{S}(\mathcal{Z}')$$

- (ii) Seien  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$  zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt:

$$\underline{S}(\mathcal{Z}_1) \leq \bar{S}(\mathcal{Z}_2).$$

Insbesondere sind alle Untersummen nach oben und alle Obersummen nach unten beschränkt.

Nach dem letzten Satz gilt für jede Folge  $\{\mathcal{Z}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen mit immer kleiner werdenden Feinheit, daß sowohl die zugehörige Folge  $\{\underline{S}(\mathcal{Z}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  der Untersummen (weil sie monoton steigt und nach oben beschränkt ist) als auch die zugehörige Folge  $\{\bar{S}(\mathcal{Z}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  der Obersummen (weil sie monoton fällt und nach unten beschränkt ist) jeweils einen Grenzwert hat.

Damit ist die nachstehende Definition sinnvoll. Man beachte, daß  $f$  nach Voraussetzung auf dem Intervall  $\mathcal{I} = [\vec{a}, \vec{b}]$  beschränkt ist.

**Definition 12.4**

(i) Das *untere (Riemann)-Integral* ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} := \sup \{ \underline{S}(\mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } \mathcal{I} \};$$

(ii) Das *obere (Riemann)-Integral* ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} := \inf \{ \overline{S}(\mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } \mathcal{I} \};$$

(iii) Gilt  $\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x}$ , so heißt  $f$  über (oder „auf“ oder „in“)  $\mathcal{I}$  *(Riemann)-integrierbar*, und

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} := \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \quad \left( = \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \right)$$

heißt das *(Riemann)-Integral* von  $f$  über  $\mathcal{I}$ .

**Bemerkung**

- (i) Eine andere Schreibweise für das (mehrdimensionale) Integral ist auch  $\int_{\mathcal{I}} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$ . Die Schreibweise  $\int_{\mathcal{I}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$  wird hier (noch) nicht verwendet, da sie von der Idee her etwas Anderes bedeutet.
- (ii) Auch hier hätte man anstelle abgeschlossener Intervalle bei der Definition auch halboffene oder offene Intervalle verwenden können: eine Änderung des (beschränkten!) Integranden an „niedriger dimensionalen“ Stellen des Integrationsgebietes (Linien im  $\mathbb{R}^2$ , Flächen im  $\mathbb{R}^3$ , etc. ändert den Wert des Integrals nicht.
- (iii) Anschaulich ist klar, daß eine Zwischensumme, genau wie der gesuchte Flächeninhalt, „zwischen“ Unter- und Obersumme liegt. Deshalb wird bei der numerischen Berechnung bestimmter Integrale gern von solch einer Zwischensumme Gebrauch gemacht.

Seien  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung und  $\mathcal{B}$  eine Besetzung des Intervalles  $\mathcal{I}$ .  
Dann gilt:

$$m \cdot |\mathcal{I}_k| \leq \underline{S}(\mathcal{Z}) \leq S(\mathcal{B}, \mathcal{Z}) \leq \overline{S}(\mathcal{Z}) \leq M \cdot |\mathcal{I}_k|.$$

*Beweis*

Für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt die Abschätzung

$$m \leq m_k \leq f(\vec{\xi}_k) \leq M_k \leq M,$$

dann ergibt sich die Behauptung nach Multiplikation mit  $|\mathcal{I}_k|$  und anschließender Summation.

Wählt man eine Folge  $\{\mathcal{Z}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen mit abnehmenden Feinheiten, so gilt für die dazu gebildeten Zwischensummen im Falle der Integrierbarkeit von  $f$ :

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^N f(\vec{\xi}_k) \cdot |\mathcal{I}_k| \right)_{\mathcal{Z}_N}.$$

Dies erklärt die Symbolik der Verwendung eines stilisierten „S“ für das Integralzeichen „ $\int$ “.

- (iv) Im Falle  $n = 1$  stimmt das eben definierte Integral genau mit dem eindimensionalen Riemann-Integral überein. Daher nennt man im Falle  $n > 1$   $\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x}$  auch ein *mehrfaches* oder *mehrdimensionales Integral*.
- (v) In den Anwendungen existieren für zwei- und dreidimensionale Integrale auch andere Schreibweisen:

(a)  $\underline{n = 2}$  : 
$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} =: \iint_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2) d(x_1, x_2)$$

Statt  $d(x_1, x_2)$  schreibt man auch  $dA$  oder  $dF$  und nennt diesen Ausdruck das *Flächenelement*.

(b)  $\underline{n = 3}$  : 
$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} =: \iiint_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

Statt  $d(x_1, x_2, x_3)$  schreibt man auch  $dV$  und nennt diesen Ausdruck das *Volumenelement*.

Zuerst wird in der folgenden Definition der Menge aller über einem (mehrdimensionalen) Intervall  $\mathcal{I}$  integrierbaren Funktionen eine Bezeichnung gegeben:

**Definition 12.5**

Sei  $\mathcal{I}$  ein beschränktes offenes, halboffenes oder abgeschlossenes mehrdimensionales Intervall. Dann wird definiert („ $\mathcal{R}$ “ steht für Riemann):

$$\mathcal{R}(\mathcal{I}) := \{f : f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ist beschränkt und über } \mathcal{I} \text{ integrierbar}\}$$

Direkt aus der Definition ergeben sich die folgenden Rechenregeln, welche denen der eindimensionalen Integration völlig analog sind.

**Satz 12.2**

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{I}$  ein  $n$ -dimensionales Intervall.

- (i)  $\mathcal{R}(\mathcal{I})$  zusammen mit der für Funktionen auf einem gemeinsamen Definitionsbereich erklärten Addition und Skalarenmultiplikation bildet einen Vektorraum.
- (ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} : \mathcal{R}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) d\vec{x} &= \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\mathcal{I}} g(\vec{x}) d\vec{x} \\ \int_{\mathcal{I}} (\lambda \cdot f(\vec{x})) d\vec{x} &= \lambda \cdot \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

für alle  $f, g \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (iii)  $f, g \in \mathcal{R}(\mathcal{I}) \implies (f \cdot g) \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$

$$f, g \in \mathcal{R}(\mathcal{I}), \inf_{\mathcal{I}} |g| > 0 \implies \left( \frac{f}{g} \right) \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$$

**Man beachte**

Der Vorgang der Integration ist aber nicht multiplikativ, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) d\vec{x} &\neq \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \cdot \int_{\mathcal{I}} g(\vec{x}) d\vec{x} \\ \int_{\mathcal{I}} \left( \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) d\vec{x} &\neq \frac{\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x}}{\int_{\mathcal{I}} g(\vec{x}) d\vec{x}} \end{aligned}$$

- (iv) Monotonie des Integrals:

Für  $f, g \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$ ,  $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$  ( $\vec{x} \in \mathcal{I}$ ) ist

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_{\mathcal{I}} g(\vec{x}) d\vec{x};$$

insbesondere gelten für  $\vec{x} \in \mathcal{I}$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\vec{x}) &\implies 0 = \int_{\mathcal{I}} 0 d\vec{x} \leq \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x}, \\ m \leq f(\vec{x}) \leq M &\implies m \cdot |\mathcal{I}| \leq \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \leq M \cdot |\mathcal{I}|. \end{aligned}$$

(v) Absolute Integrierbarkeit von  $f$ :

Für  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$  ist auch  $|f| \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$ , und es gilt

$$\left| \int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \int_{\mathcal{I}} |f(\vec{x})| d\vec{x}.$$

## 12.2 Iterierte Integrale

Nun fehlt noch ein bequemes Verfahren, um das Integral  $\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x}$  zu berechnen; bisher hat man dazu nur die Definition über eine Riemann'sche Summe zur Verfügung. Dabei wählt man eine Folge von Zerlegungen mit abnehmender Feinheit, berechnet für jede dieser Zerlegungen eine Riemann'sche Summe und dann den Grenzwert. Das Ganze klingt nicht sehr attraktiv, ist für numerische Zwecke aber ganz brauchbar:

Man verzichtet auf die Grenzwertberechnung und approximiert stattdessen das Integral durch eine Riemann'sche Summe mit einer einigermaßen feinen Zerlegung.

Die explizite Berechnung eines mehrdimensionalen Integrals wird i.a. mit Hilfe des folgenden *Satzes von Fubini* durchgeführt. Dieser zeigt, daß man in den praktisch wichtigsten Fällen ein mehrfaches Integral durch wiederholte „einfache“ Integrationen auswerten kann. Vorausgesetzt werden muß dabei natürlich, daß die „einfachen“ Integrale existieren.

**Satz 12.3** (Satz von Fubini)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\vec{x}} &\subseteq \mathbb{R}^n && \text{ein kompaktes Intervall} \\ \mathcal{I}_{\vec{y}} &\subseteq \mathbb{R}^m && \text{ein kompaktes Intervall} \\ \mathcal{I} &:= \mathcal{I}_{\vec{x}} \times \mathcal{I}_{\vec{y}} \end{aligned}$$

$f$  sei auf  $\mathcal{I}$  integrierbar, d.h.  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$ . Das Integral  $g(\vec{y}) := \int_{\mathcal{I}_{\vec{x}}} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$  existiere für jedes  $\vec{y} \in \mathcal{I}_{\vec{y}}$ .

**Beh.**

(i)  $g$  ist auf  $\mathcal{I}_{\vec{y}}$  integrierbar.

(ii) 
$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} \left( \int_{\mathcal{I}_{\vec{x}}} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y}.$$

**Beispiel 12.2**

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_x &= [0, 2] \subseteq \mathbb{R}^1 \\ \mathcal{I}_{\vec{y}} &= [1, 2] \times [2, 3] \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \longrightarrow \quad \mathcal{I} &= \mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_{\vec{y}} \subseteq \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

Sei  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x_1, y_1, y_2) := \frac{2x_1}{(y_1 + y_2)^2} \quad (\langle x_1, y_1, y_2 \rangle \in \mathcal{I})$$

Dann läßt sich  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$  zeigen. Ferner existiert

$$g(y_1, y_2) := \int_0^2 \frac{2x_1}{(y_1 + y_2)^2} dx_1 = \frac{4}{(y_1 + y_2)^2}$$

für jedes  $\vec{y} = \langle y_1, y_2 \rangle \in [1, 2] \times [2, 3]$ .

Dann erhält man für das dreidimensionale Integral die Reduktion

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}} \frac{2x_1}{(y_1 + y_2)^2} d(x_1, y_1, y_2) &= \int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} \left( \int_0^2 \frac{2x_1}{(y_1 + y_2)^2} dx_1 \right) d(y_1, y_2) \\ &= \int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} \left( \frac{4}{(y_1 + y_2)^2} \right) d(y_1, y_2).\end{aligned}$$

Das letzte zweidimensionale Integral gestattet nun die nochmalige Anwendung des Satzes von Fubini, und man erhält

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} \left( \frac{4}{(y_1 + y_2)^2} \right) d(y_1, y_2) &= \int_2^3 \left( \int_1^2 \frac{4}{(y_1 + y_2)^2} dy_1 \right) dy_2 \\ &= \int_2^3 \left[ -\frac{4}{(y_1 + y_2)} \right]_{y_1=1}^{y_1=2} dy_2 \\ &= \int_2^3 \left[ -\frac{4}{(y_2 + 2)} + \frac{4}{(y_2 + 1)} \right] dy_2 \\ &= \left[ -4 \ln(y_2 + 2) + 4 \ln(y_2 + 1) \right]_{y_2=2}^{y_2=3} \\ &= 4(-\ln 5 + \ln 4 + \ln 4 - \ln 3) \\ &= 4 \ln \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} = 4 \ln \frac{16}{15}\end{aligned}$$

**Bemerkung**

Die Symmetrie des Integranden  $\frac{4}{(y_1+y_2)^2}$  im zweiten Teil des letzten Beispiels läßt vermuten, daß die Integrationsreihenfolge auch vertauscht werden darf: Integration zuerst nach  $y_2$ , danach nach  $y_1$ .

Unter der Voraussetzung der Existenz aller auftretenden Einzelintegrale ist das auch wahr:

**Satz 12.4** (Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\vec{x}} &\subseteq \mathbb{R}^n && \text{ein kompaktes Intervall} \\ \mathcal{I}_{\vec{y}} &\subseteq \mathbb{R}^m && \text{ein kompaktes Intervall} \\ \mathcal{I} &:= \mathcal{I}_{\vec{x}} \times \mathcal{I}_{\vec{y}} \end{aligned}$$

Die folgenden Integrale mögen existieren:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) \\ &\int_{\mathcal{I}_{\vec{x}}} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \quad \text{für jedes } \vec{y} \in \mathcal{I}_{\vec{y}} \\ &\int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \quad \text{für jedes } \vec{x} \in \mathcal{I}_{\vec{x}} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} \left( \int_{\mathcal{I}_{\vec{x}}} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y} = \int_{\mathcal{I}_{\vec{x}}} \left( \int_{\mathcal{I}_{\vec{y}}} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x} \quad (12.1)$$

Durch mehrmalige Anwendung des letzten Satzes erhält man dann den für die Praxis des Integrierens so wichtigen folgenden

**Satz 12.5**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I} := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  und  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ . Dann ist  $f$  über  $\mathcal{I}$  integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left( \dots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n, \quad (12.2)$$

oder kürzer, unter Fortlassung der Klammern

$$\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Die Reihenfolge der Integrationen darf hierbei beliebig gewählt werden.

### Bemerkung

(i) Aus der Existenz der iterierten Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \quad \text{und} \quad \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

braucht nicht die Existenz des Bereichsintegrals

$$\int_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2) d(x_1, x_2)$$

zu folgen.

(ii) Umgekehrt braucht aus der Existenz des Bereichsintegrals

$$\int_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2) d(x_1, x_2)$$

auch nicht die Existenz der iterierten Integrale zu folgen.

(iii) Ist  $f$  allerdings stetig auf dem Rechteck  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , so existieren nach dem letzten Satz alle drei Integrale und sind gleich.

(iv) Hat die Funktion  $f$  die Form

$$f(x_1, x_2) := f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

mit  $f_1 \in \mathcal{C}([a_1, b_1])$ ,  $f_2 \in \mathcal{C}([a_2, b_2])$ , so existieren alle Integrale, und es gilt

$$\int_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) dx_2.$$

### Beispiele 12.3

Die in den folgenden Beispielen auftretenden Integrale haben auf ihrem jeweiligen Integrationsgebiet stetige Integranden, so daß sie die Anwendung von Satz 12.5 über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge gestatten.

$$(i) \mathcal{I} := [1, 2] \times [1, 2] \quad , \quad \int_{\mathcal{I}} e^{x+y} d(x, y)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} e^{x+y} d(x, y) &= \int_1^2 \int_1^2 e^x \cdot e^y dy dx \\ &= \left( \int_1^2 e^x dx \right)^2 \\ &= \left( [e^x]_1^2 \right)^2 \\ &= (e^2 - e)^2 \end{aligned}$$

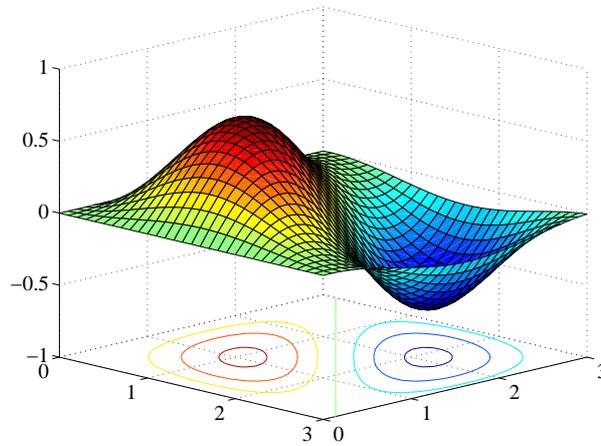
$$(ii) \mathcal{I} := [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \quad , \quad \int_{\mathcal{I}} \frac{x^2 \cdot z^3}{1 + y^2} d(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} \frac{x^2 \cdot z^3}{1 + y^2} d(x, y, z) &= \int_0^1 x^2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \cdot \int_0^1 z^3 dz dy dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy dx \\ &= \frac{1}{4} \arctan(1) \cdot \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{48} \end{aligned}$$

$$(iii) \mathcal{I} := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \quad , \quad \int_{\mathcal{I}} \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y) d(x, y),$$

s. Abb. 12.4.

$$\int_{\mathcal{I}} \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y) d(x, y)$$

Abbildung 12.4: Graph der Funktion  $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$ 

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y \cdot \sin(x + y) dy dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [\cos((y - (x + y))) - \cos((y + (x + y)))] dy dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [\cos x - \cos(x + 2y)] dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x dx \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos(x + 2y) dy dx \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\sin((x - (x + 2y))) + \sin((x + (x + 2y)))] dy dx \\
 &= -\frac{\pi}{16} [\cos 2x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\sin 2y - \sin 2(x + y)] dy dx \\
 &= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} [\cos 2y]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} [\cos 2(x + y)]_{y=0}^{y=\pi/2} dx \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} [\cos(2x + \pi) - \cos 2x] dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} [\sin 2x]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

**Aufgabe**

$f$  sei auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig und positiv. Dann gilt:

$$\left( \int_a^b f(x) \, dx \right) \left( \int_a^b \frac{1}{f(x)} \, dx \right) \geq (b - a)^2$$

Hinweis:

Sei  $L$  der Wert der linken Seite der Ungleichung und  $\mathcal{I} := [a, b] \times [a, b]$ . Dann folgt

$$L = \left( \int_a^b f(x) \, dx \right) \left( \int_a^b \frac{1}{f(y)} \, dy \right) = \int_{\mathcal{I}} \frac{f(x)}{f(y)} \, d(x, y) = \int_{\mathcal{I}} \frac{f(y)}{f(x)} \, d(x, y),$$

also ist

$$L = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} \left( \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) \, d(x, y) = ???$$

(Hauptnenner und eine schlaue Abschätzung)

**Beispiel 12.4**

$$\left( \int_{-1}^{+1} \frac{\cosh x}{e^x} \, dx \right) \left( \int_{-1}^{+1} \frac{e^x}{\cosh x} \, dx \right) \geq (1 - (-1))^2 = 4$$

**12.3 Integration über Normalbereiche**

Es reicht nun nicht aus, nur über Intervalle integrieren zu können, man will auch über andere Bereiche des  $\mathbb{R}^n$  integrieren, z.B. über Kugeln, Zylindern oder beliebigen (zunächst beschränkten) Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Ganz „beliebig“ klappt zwar nicht, ist allerdings auch nicht nötig.

**Definition 12.6**

Seien  $\mathcal{I} := [a, b]$  und  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$  mit

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \quad (x \in \mathcal{I}).$$

Dann heißt die Menge

$$\mathcal{N}_x := \{(x, y) : x \in \mathcal{I}, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

ein *Normalbereich* (auch: *zylindrischer Bereich*) bzgl. der  $x$ -Achse, s. Abb. 12.5.

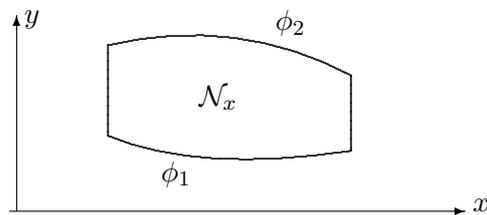


Abbildung 12.5: Normalbereich bzgl. der  $x$ -Achse

**Beispiel 12.5**

Welches sind die Begrenzungsfunktionen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  des Normalbereiches aus Abb. 12.6?

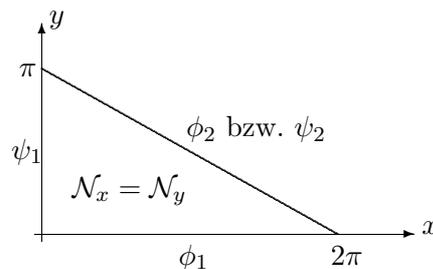


Abbildung 12.6: Normalbereich bzgl. der  $x$ - und der  $y$ -Achse

**Lösung**

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= [0, 2\pi] \\ \phi_1(x) &= 0 \\ \phi_2(x) &= -\frac{1}{2}x + \pi \quad (x \in \mathcal{I} = [0, 2\pi]) \end{aligned}$$

Ein Normalbereich  $\mathcal{N}_x$  ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und stetige Funktionen lassen sich über ihn integrieren:

**Satz 12.6**

Ist  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_x)$ , so gilt

$$\int_{\mathcal{N}_x} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Selbstverständlich lassen sich Normalbereiche auch bzgl. der  $y$ -Achse definieren:

**Definition 12.7**

Seien  $\mathcal{J} := [c, d]$  und  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{J})$  mit

$$\psi_1(y) \leq \psi_2(y) \quad (y \in \mathcal{J}).$$

Dann heißt die Menge

$$\mathcal{N}_y := \{ \langle x, y \rangle : y \in \mathcal{J}, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

ein Normalbereich (auch: zylindrischer Bereich) bzgl. der  $y$ -Achse, s. Abb. 12.7.

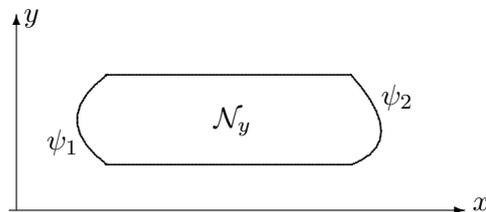


Abbildung 12.7: Normalbereich bzgl. der  $y$ -Achse

**Beispiel 12.6**

Welches sind die Begrenzungsfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  des Normalbereiches aus Abb. 12.6, dieses Mal aufgefaßt als Normalbereich bzgl. der  $y$ -Achse?

**Lösung**

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= [0, \pi] \\ \psi_1(y) &= 0 \\ \psi_2(y) &= -2y + 2\pi \quad (y \in \mathcal{J} = [0, \pi]) \end{aligned}$$

Wiederum lassen sich stetige Funktionen, da  $\mathcal{N}_y$  als Normalbereich abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist, über  $\mathcal{N}_y$  integrieren:

**Satz 12.7**

Ist  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_y)$ , so gilt

$$\int_{\mathcal{N}_y} f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Satz 12.8**

Seien  $\mathcal{N}$  ein Normalbereich bzgl. beider Achsen und  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$ . Dann gilt eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge in der folgenden Weise:

$$\int_{\mathcal{N}} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

*Beweis*

Wegen der Stetigkeit von  $f$  auf dem Normalbereich  $\mathcal{N}$  (bzgl. beider Achsen) ist der Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge (Satz 12.4) anwendbar. Damit ist jedes der beiden Doppelintegrale auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem Bereichsintegral auf der linken Seite, insbesondere sind die beiden Doppelintegrale gleich.

**Beispiel 12.7**

Zu berechnen ist das Integral

$$\int_{\mathcal{B}} e^{x+y} d(x, y)$$

durch eine iterierte Integration bzgl.  $\mathcal{B}$  aus Abb. 12.6 als eines Normalbereiches bzgl. der  $x$ -Achse.

**Lösung**

In Beispiel 12.5 wurden die Grenzen des Bereiches  $\mathcal{B}$  als eines Normalbereiches bzgl. der  $x$ -Achse schon bestimmt. Man erhält

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} e^{x+y} d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{-\frac{1}{2}x+\pi} e^{x+y} dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ e^{x+y} \right]_{y=0}^{y=-\frac{1}{2}x+\pi} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ e^{\frac{1}{2}x+\pi} - e^x \right] dx = \left[ 2e^{\frac{1}{2}x+\pi} - e^x \right]_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= (2e^{2\pi} - e^{2\pi} - 2e^{\pi} + 1) = (e^{\pi} - 1)^2 \end{aligned}$$

### Aufgabe

Man berechne dasselbe Integral

$$\int_{\mathcal{B}} e^{x+y} d(x, y),$$

dieses Mal aber durch eine iterierte Integration bzgl.  $\mathcal{B}$  aus Abb. 12.6 als eines Normalbereiches bzgl. der  $y$ -Achse, s. Beispiel 12.6.

### Bemerkung

- (i) Rechtecke, Kreise und Ellipsen sind Normalbereiche bzgl. beider Achsen.
- (ii) Die oben eingeführten Begriffsbildungen und Aussagen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Da in den Anwendungen besonders der dreidimensionale Fall von Interesse ist, begnüge ich mich hier mit dessen Beschreibung.

### Definition 12.8

Seien  $\mathcal{A}$  ein Normalbereich bzgl. der  $x$ - oder der  $y$ -Achse und seien  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$  mit

$$\phi_1(x, y) \leq \phi_2(x, y) \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{A}).$$

Dann heißt die Menge

$$\mathcal{N}_{xy} := \{ \langle x, y, z \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathcal{A}, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y) \}$$

ein *Normalbereich* (auch: *zylindrischer Bereich*) bzgl. der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene.

### Satz 12.9

Ist  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{xy})$ , so gilt

$$\int_{\mathcal{N}_{xy}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_{\mathcal{A}} \left( \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Wie stellt man jetzt im konkreten Fall fest, ob eine Funktion  $f$  über einen Bereich  $\mathcal{B}$  integrierbar ist oder nicht? Die unmittelbare Definition 12.4 ist dafür i.a. nicht geeignet. Einerseits möchte man eine möglichst große Teilmenge der integrierbaren Funktionen zur Verfügung haben, andererseits soll es möglichst einfach sein zu entscheiden, ob eine Funktion Element dieser Menge ist oder nicht.

- Ist  $f$  stetig und  $\mathcal{B}$  ein Quader, so hilft Satz 12.5.
- Ist  $f$  stetig und  $\mathcal{B}$  ein Normalbereich, so helfen die Sätze dieses Abschnittes.
- Ist  $f$  stetig und  $\mathcal{B}$  kein Normalbereich, dann möchte man diesen Bereich gern so in Teil-Normalbereiche zerlegen, daß man über die einzelnen Teilbereiche integrieren und die Integrale hinterher addieren kann. So, wie man über ein eindimensionales Intervall  $[a, b]$  dadurch integrieren kann, daß man dieses Intervall in Teilintervalle zerlegt und über die einzelnen Teile integriert:

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b] \implies \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Dabei ist es unerheblich, wie  $f$  an den Randpunkten definiert ist. Ja, man kann eine auf einem Intervall  $[a, b]$  definierte beschränkte Funktion an endlich vielen Punkten dieses Intervalles abändern, ohne daß das Integral etwas davon „merkt“. Auf diese Weise kann man die Teilintegrale an den Randpunkten der Intervalle – hier  $c$  – zusammenbauen, ohne daß sich ihr Wert ändert.

Was entspricht nun im  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 1$  den endlich vielen Punkten eines Intervalles? Es zeigt sich, daß „endlich viele  $(n-1)$ -dimensionale beschränkte Teilmengen“ des  $\mathbb{R}^n$  die geeignete Übertragung ist:

- „Linienstücke“ im  $\mathbb{R}^2$
- „Flächenstücke“ im  $\mathbb{R}^3$
- etc.

Etwas allgemeiner ist die folgende Definition „dünner Mengen“ im  $\mathbb{R}^n$ , mit der man aber einfacher rechnen kann:

### Definition 12.9

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{N}$  heißt eine (Jordan-) Nullmenge, falls gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existieren eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$  und  $m$  Intervalle  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m \subseteq \mathbb{R}^n$  mit

$$\mathcal{N} \subseteq \bigcup_{k=1}^m \overset{\circ}{\mathcal{I}}_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^m |\mathcal{I}_k| < \varepsilon .$$

Eine Menge  $\mathcal{N}$  ist also dann eine (Jordan-) Nullmenge, wenn es endlich viele Intervalle  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m$  beliebig kleiner Gesamtlänge gibt, deren offene Kerne  $\mathcal{N}$  überdecken.

### Beispiele 12.8

- (i) Endlich viele Punkte in  $\mathbb{R}$  bilden eine Nullmenge. Beweis?

- (ii) Abzählbar unendlich viele Punkte bilden eine Nullmenge, wenn sie beschränkt sind, sonst nicht.
- (iii) Anschaulich klar ist, daß eine (beschränkte) Linie eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$  ist, s. Abb. 12.8.

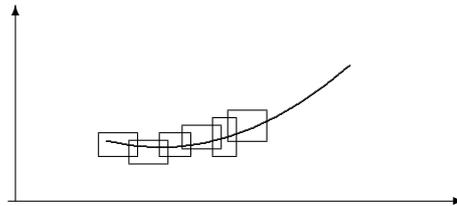


Abbildung 12.8: Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$

(Jordan'sche) Nullmengen sind also die mehrdimensionale Verallgemeinerung von einzelnen Punkten in der eindimensionalen Integrationstheorie. Dort konnte der Funktionswert des Integranden an einzelnen Punkten abgeändert werden, ohne den Wert des Integrals zu beeinflussen. Ein analoger Sachverhalt gilt hier: bei der Berechnung eines bestimmten Integrals kommt es auf Nullmengen nicht an.

So läßt sich auch ein mehrdimensionaler Integrationsbereich in einzelne Teilbereiche zerlegen, über welche additiv integriert werden kann. Diese können sich in Randpunkten überlappen, welche Nullmengen sind, etwa Kanten von Rechtecken im  $\mathbb{R}^2$  oder Seitenflächen von Quadern im  $\mathbb{R}^3$ .

Schließlich braucht der Integrationsbereich  $\mathcal{A}$  selbst auch kein Normalbereich zu sein, es reicht, wenn er ein sog. (Jordan-) meßbarer Bereich ist (vgl. dazu auch Definition 12.12):

**Definition 12.10**

$\mathcal{A}$  heißt ein (Jordan-) meßbarer Bereich

$$:\iff \mathcal{A} \text{ ist kompakt und } \dot{\mathcal{A}} := \bar{\mathcal{A}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{A}} \text{ ist eine (Jordan)-Nullmenge.}$$

Der folgende Satz faßt die diesbezüglichen Ergebnisse zusammen.

**Satz 12.10**

- (i) Seien  $\mathcal{N}$  eine Nullmenge und  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte reellwertige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{N}} f(\vec{x}) d\vec{x} \text{ ist vorhanden und gleich } 0.$$

- (ii) Seien  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein meßbarer Bereich,  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$ ,  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$  eine Nullmenge und  $g$  eine beschränkte reellwertige Funktion auf  $\mathcal{B}$  mit

$$g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{N}).$$

Dann gilt:

$$g \in \mathcal{R}(\mathcal{B}) \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{B}} g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{B}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Insbesondere folgt aus dieser Behauptung, daß es beim Integrieren auf „endlich viele Funktionswerte nicht ankommt“.

- (iii) (Bereichsadditivität des mehrdimensionalen Integrals)

Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  zwei einander höchstens am Rand nicht überlappende meßbare Bereiche, d.h. es gelte  $\overset{\circ}{\mathcal{A}} \cap \overset{\circ}{\mathcal{B}} = \emptyset$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$   
 (b)  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \wedge f \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$

In diesem Fall besteht die Gleichung

$$\int_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{A}} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\mathcal{B}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Eine große und wichtige Klasse von Nullmengen wird durch den folgenden Satz geliefert. Im wesentlichen besagt er, daß im  $\mathbb{R}^n$  alle beschränkten „niederdimensionalen Teilbereiche“ Nullmengen sind, also beispielsweise Geradenstücke im  $\mathbb{R}^2$  oder Ebenenstücke im  $\mathbb{R}^3$ .

### Satz 12.11

- (i) Seien  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein meßbarer Bereich und  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$ . Dann ist der Graph von  $f$

$$\Gamma(f) := \{ \langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle : \vec{x} \in \mathcal{B} \}$$

eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

- (ii) Die Menge  $\mathcal{M}$  sei beschränkt und enthalten in einer *Hyperebene*

$$\mathcal{H}_j := \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, x_j = c \}.$$

Dann ist  $\mathcal{M}$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^n$ .

In den folgenden Beispielen sollen diese Begriffsbildungen illustriert werden. Dabei ist nicht die Berechnung der jeweils auftretenden Integrale das Problem, sondern die analytische Bestimmung der Grenzen der angegebenen Normalbereiche.

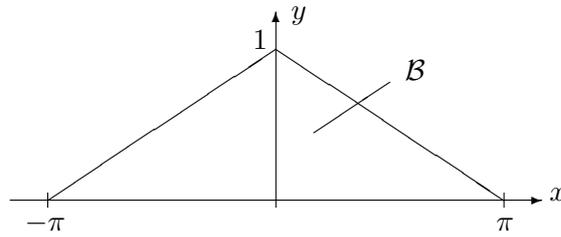


Abbildung 12.9: Zweidimensionaler Integrationsbereich

**Beispiele 12.9**

(i) s. Abb. 12.9

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y) d(x, y) = \int_{-\pi}^0 \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^{\pi} \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_3(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad , \quad \phi_2(x) = \frac{1}{\pi}x + 1 \quad , \quad \phi_3(x) = -\frac{1}{\pi}x + 1 \quad ,$$

$$= \int_0^1 \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

$$\psi_1(y) = \pi(y - 1) \quad , \quad \psi_2(y) = \pi(1 - y).$$

(ii) s. Abb. 12.10

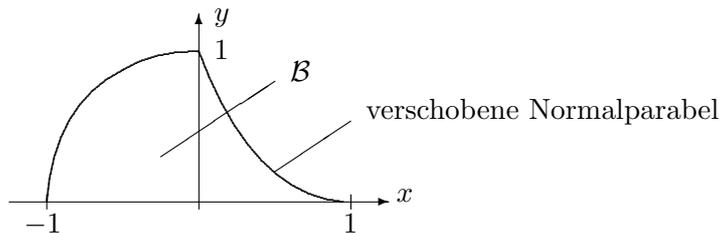


Abbildung 12.10: Zweidimensionaler Integrationsbereich

$$\mathcal{B} = \{ \langle x, y \rangle : x \in [-1, 0], y \in [0, \sqrt{1 - x^2}] \}$$

$$\cup \{ \langle x, y \rangle : x \in [0, 1], y \in [0, (x - 1)^2] \}$$

$$= \{ \langle x, y \rangle : y \in [0, 1], x \in [-\sqrt{1 - y^2}, 1 - \sqrt{y}] \},$$

(Vorzeichen !)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} f(x, y) d(x, y) &= \int_{-1}^0 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 \left( \int_0^{(x-1)^2} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

(iii) s. Abb. 12.11

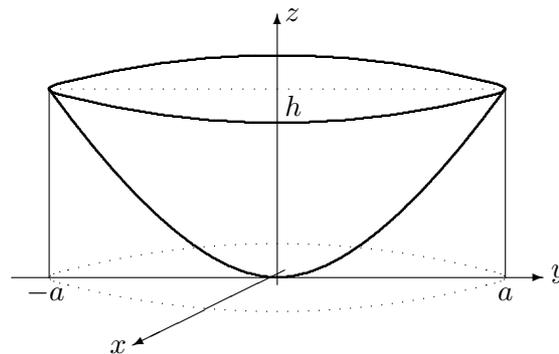


Abbildung 12.11: Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2$  der Höhe  $h$

$$\mathcal{B} = \{ \langle x, y, z \rangle : x \in [-a, a], y \in [-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}], z \in [x^2 + y^2, h] \},$$

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{-a}^a \left( \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left( \int_{x^2 + y^2}^{h} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

### Bemerkung

Für das letzte Integral ist auch die folgende Schreibweise üblich:

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{x=-a}^a dx \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{z=x^2+y^2}^{h} dz f(x, y, z)$$

## 12.4 Maß (Inhalt) von Mengen

Sei  $\mathcal{I} := [a, b]$ , also  $\mathcal{I}$  ein eindimensionales kompaktes Intervall. Seine Länge (= sein Inhalt) ist gegeben durch

$$|\mathcal{I}| := (b - a).$$

Für die Länge von  $\mathcal{I}$  ist es dabei unerheblich, ob  $\mathcal{I}$  abgeschlossen, halboffen oder offen ist.

Mit Hilfe eines eindimensionalen Integrals läßt sich  $|\mathcal{I}|$  auch schreiben als Integral der konstanten Funktion 1 über  $\mathcal{I}$ :

$$|\mathcal{I}| = \int_a^b 1 \, dx.$$

Bis auf Einheiten gilt dann für den Inhalt der Fläche  $\mathcal{F}$ , s. Abb. 12.12:

$$\mathcal{F} = (b - a) \cdot 1 = \int_a^b 1 \, dx = |\mathcal{I}|.$$

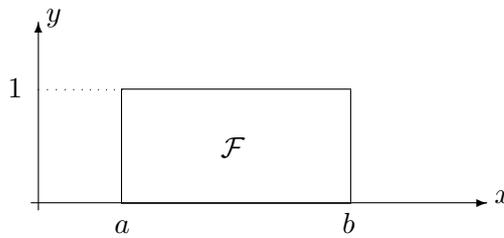


Abbildung 12.12: Flächeninhalt als bestimmtes Integral

Dieser Zusammenhang soll im folgenden etwas näher untersucht werden.

### 12.4.1 Inhalt von Ordinatenmengen

Der *Inhalt* einer Menge wird mit Hilfe von deren *charakteristischer Funktion* definiert:

**Definition 12.11**

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Die *charakteristische Funktion*  $\chi_{\mathcal{B}}$  von  $\mathcal{B}$  ist definiert durch

$$\chi_{\mathcal{B}}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & , \vec{x} \in \mathcal{B} \\ 0 & , \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B} \end{cases}$$

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion läßt sich die Länge des Intervalles  $\mathcal{I} = [a, b]$  wie folgt schreiben:

$$|\mathcal{I}| = \int_a^b 1 \, dx = \int_{\mathcal{I}} \chi_{\mathcal{I}}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathcal{I}}(x) \, dx.$$

Hierbei ist das letzte Integral formal natürlich ein uneigentliches Integral.

Dieser Sachverhalt läßt sich ins Mehrdimensionale übertragen, um mit Hilfe der charakteristischen Funktion Inhalte von Mengen zu definieren.

**Definition 12.12**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ .

$\mathcal{B}$  heißt *Jordan-meßbar* oder *Riemann-meßbar*, wenn die charakteristische Funktion  $\chi_{\mathcal{B}}$  über  $\mathcal{B}$  integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$|\mathcal{B}| := \int_{\mathcal{B}} \chi_{\mathcal{B}}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{B}} 1 d\vec{x} = \int_{\mathcal{B}} d\vec{x}$$

(*n-dimensional*) (*Jordan-*) *Inhalt* von  $\mathcal{B}$  oder das (*n-dimensional*) (*Jordan-*) *Maß* von  $\mathcal{B}$ .

Ergänzend sei gesetzt:

$$|\emptyset| := 0.$$

Für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  wird  $|\mathcal{B}|$  auch *Flächeninhalt* bzw. *Volumen* genannt.

**Bemerkung**

Dieser Inhaltsbegriff ist anschaulich sehr naheliegend. Ist  $\mathcal{B}$  etwa ein Bereich der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene, so wird durch  $\mathcal{B}$  und das Schaubild der Funktion 1 ein „Zylinder mit der Grundfläche  $\mathcal{B}$  und der Höhe 1“ begrenzt, s. Abb. 12.13.

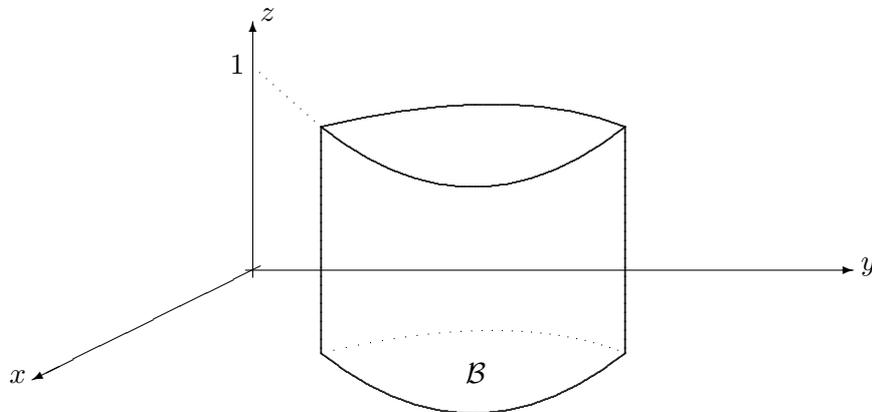


Abbildung 12.13: Flächeninhalt und Volumen

Sein (anschauliches) Volumen ist gleich dem Flächeninhalt von  $\mathcal{B}$ , multipliziert mit der Höhe 1. Nach der Einführung des mehrdimensionalen Integrals sollte das Volumen auch durch

$$\int_{\mathcal{B}} 1 d(x, y)$$

gegeben sein; man wird also (bis auf Einheiten) die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}} 1 d(x, y) = \text{Flächeninhalt von } \mathcal{B}$$

erwarten können. Diese Erwartung wird nun durch die obige Inhaltsdefinition erfüllt.

Im folgenden sollen diese Ideen etwas verallgemeinert werden. Seien dazu

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &:= [a, b] \subseteq \mathbb{R} && \text{ein eindimensionales Intervall} \\ f &: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R} && \text{eine nichtnegative reellwertige Funktion} \\ M(f) &:= \{ \langle x, y \rangle : x \in \mathcal{I}, 0 \leq y \leq f(x) \} \end{aligned}$$

ihre sog. *Ordinatenmenge*, s. Abb 12.14.

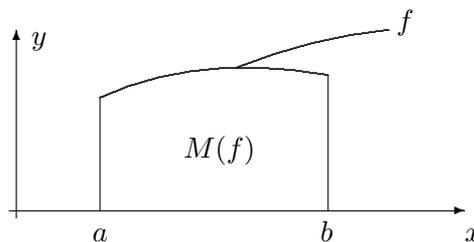


Abbildung 12.14: Ordinatenmenge der positiven Funktion  $f$

Bei der Definition des eindimensionalen Riemann-Integrals wurde der Flächeninhalt von  $|M(f)|$  erklärt als

$$|M(f)|_1 := \int_a^b f(x) dx.$$

Auf der anderen Seite steht jetzt eine andere Methode der Flächenberechnung zur Verfügung:

$$|M(f)|_2 := \int_{M(f)} 1 d(x, y).$$

Wie zu erwarten, führen beide Methoden zum selben Ergebnis. In Zukunft wird daher bei nichtnegativen Funktionen  $f$  für beide (gleiche) Inhalte dasselbe Zeichen  $|M(f)|$  verwendet:

$$|M(f)| = \int_{M(f)} 1 d(x, y) = \int_a^b f(x) dx$$

Im Falle einer zweidimensionalen Ordinatenmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist damit die Motivation gerechtfertigt und formalisiert, welche zum Begriff des zweidimensionalen Integrals einer nichtnegativen Funktion geführt hat (Deutung als Volumen).

Es gilt die folgende Verallgemeinerung:

**Satz 12.12**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$  meßbar,  $f_1, f_2 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen, und es gelte

$$f_1(\vec{x}) \leq f_2(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{B}).$$

Dann besitzt die verallgemeinerte Ordinatenmenge

$$M(f_1, f_2) := \{(\vec{x}, y) : \vec{x} \in \mathcal{B}, f_1(\vec{x}) \leq y \leq f_2(\vec{x})\}$$

einen  $(n + 1)$ -dimensionalen Inhalt, und dieser ist gegeben durch

$$|M(f_1, f_2)| = \int_{\mathcal{B}} (f_2(\vec{x}) - f_1(\vec{x})) d\vec{x}.$$

**Beispiel 12.10**

Man betrachte die Kreisscheibe  $\mathcal{K}$  mit dem Mittelpunkt  $\langle \xi, \eta \rangle$  und dem Radius  $r$ . Sie ist die verallgemeinerte Ordinatenmenge der beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \eta - \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2} \\ f_2(x) &:= \eta + \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2} \end{aligned}$$

auf  $\mathcal{B} := [\xi - r, \xi + r]$ , s. Abb. 12.15.

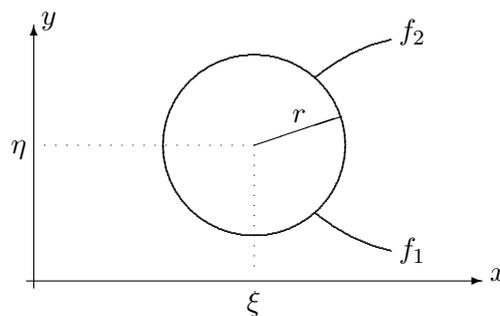


Abbildung 12.15: Kreisscheibe als verallgemeinerte Ordinatenmenge

Der Flächeninhalt von  $\mathcal{K}$  berechnet sich infolgedessen zu

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{K}| &= \int_{\mathcal{B}} d(x, y) \\
 &= \int_{\xi-r}^{\xi+r} \left( \int_{\eta-\sqrt{r^2-(x-\xi)^2}}^{\eta+\sqrt{r^2-(x-\xi)^2}} dy \right) dx \\
 &= \int_{\xi-r}^{\xi+r} \left[ (\eta + \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2}) - (\eta - \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2}) \right] dx \\
 &= 2 \int_{\xi-r}^{\xi+r} \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2} dx \quad [\text{Substitution: } t = x - \xi] \\
 &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2} dt \\
 &= 2 \left[ \frac{1}{2} t \sqrt{r^2 - t^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{t}{r} \right]_{-r}^r \\
 &= \pi r^2
 \end{aligned}$$

### 12.4.2 Prinzip von Cavalieri

In der Schule lernt man bisweilen das *Prinzip von Cavalieri*<sup>1</sup> kennen:

Haben zwei (meßbare) Mengen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  in gleichen Höhen gleiche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich.

#### Beispiel 12.11

Nach dem Prinzip von Cavalieri haben die beiden Mengen aus Abb. 12.16 das selbe Volumen.

#### Beispiel 12.12

Das Cavalierische Prinzip kann benutzt werden, um aus Zylinder- und Kreiskegelvolumen das Volumen einer Halbkugel zu bestimmen, s. Abb. 12.17.

Jeweils in der Höhe  $k \in [0, r]$  beträgt die

$$\begin{aligned}
 \text{Schnittfläche der Halbkugel:} &= \pi \rho^2 \\
 \text{Schnittfläche des Zylinders:} &= \pi r^2 \\
 \text{Schnittfläche des Kreiskegels:} &= \pi k^2
 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Bonaventura Cavalieri (1598? - 1647), Freund und Schüler von Galileo Galilei

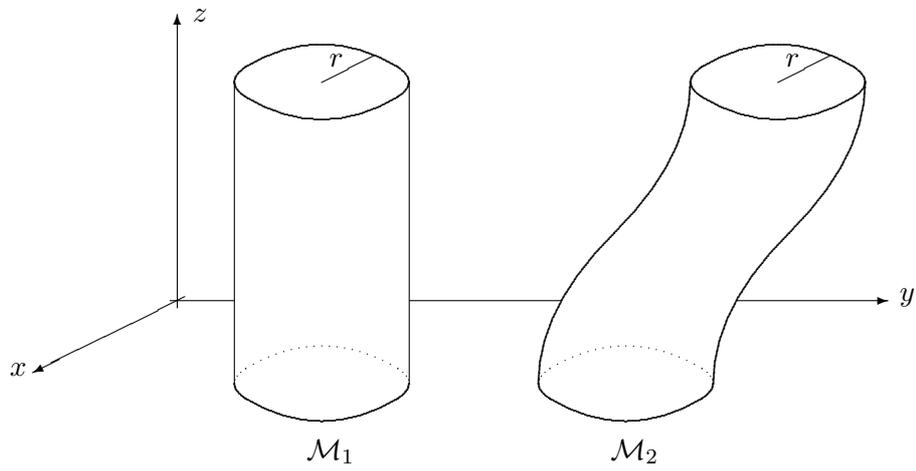


Abbildung 12.16: Körper gleichen Volumens

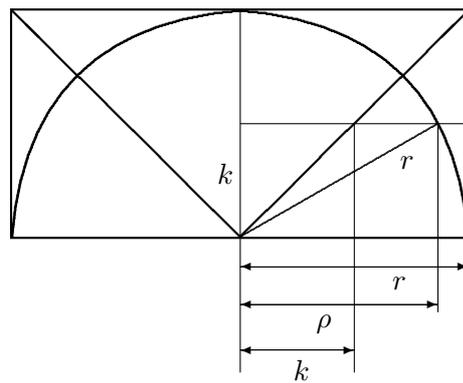


Abbildung 12.17: Bestimmung des Volumens einer Halbkugel

Nach dem Satz des Pythagoras gilt, s. die Bezeichnungen in Abb. 12.17:

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + k^2 \\ \longrightarrow \quad \pi\rho^2 &= \pi r^2 - \pi k^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, daß in jeder Höhe  $k$  gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Schnittfläche von Halbkugel} \\ &= \text{Schnittfläche von Zylinder} - \text{Schnittfläche von Kreiskegel.} \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt:

$$\begin{aligned} V_{\text{Halbkugel}} &= V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kreiskegel}} \\ &= \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Hinter dem Prinzip von Cavalieri, das bereits Archimedes bekannt war, steckt eine Aussage der Integralrechnung. Da diese ein Licht darauf wirft, wie man sich historisch und – in der Anschauung auch noch heute – eine Integration plastisch vorstellt, möchte ich etwas näher darauf eingehen.

**Satz 12.13** (Prinzip von Cavalieri)

Die Menge  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  sei beschränkt, meßbar und liege ganz zwischen den zwei Hyperebenen

$$\mathcal{H}_a := \{\vec{x} : x_1 = a\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_b := \{\vec{x} : x_1 = b\}$$

(o.B.d.A. wird  $x_1$  ausgezeichnet). Für jede Zahl  $t \in [a, b]$  besitze der Durchschnitt der Hyperebene

$$\mathcal{H}_t := \{\vec{x} : x_1 = t\}$$

mit der Menge  $\mathcal{M}$  einen  $(n - 1)$ -dimensionalen Inhalt  $q(t)$ .

Dann ist die Funktion  $q(\cdot)$  über  $[a, b]$  integrierbar, und der Inhalt von  $\mathcal{M}$  ist gegeben durch

$$|\mathcal{M}| = \int_a^b q(t) dt.$$

*Beweis*

Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Satzes von Fubini (Satz 12.3):

- (1.) Seien  $\chi_{\mathcal{M}}$  die charakteristische Funktion von  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{I} := [a, b]$  und  $\mathcal{J}$  ein  $(n - 1)$ -dimensionales kompaktes Intervall im  $\langle x_2, \dots, x_n \rangle$ -Raum, das so groß sei, daß  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{J}$  gilt. Definitionsgemäß ist also

$$|\mathcal{M}| = \int_{\mathcal{M}} \chi_{\mathcal{M}}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \chi_{\mathcal{M}}(\vec{x}) d\vec{x}.$$

(2.) Für jedes  $t \in [a, b]$  ist nach Voraussetzung

$$\int_{\mathcal{J}} \chi_{\mathcal{M}}(t, x_2, \dots, x_n) d(x_2, \dots, x_n) \text{ vorhanden und gleich } q(t).$$

(3.) Nach dem Satz von Fubini existiert demnach  $\int_{\mathcal{I}} q(t) dt$ , und es gilt

$$|\mathcal{M}| = \int_{\mathcal{I}} \left( \int_{\mathcal{J}} \chi_{\mathcal{M}}(t, x_2, \dots, x_n) d(x_2, \dots, x_n) \right) dt = \int_a^b q(t) dt.$$

### Beispiel 12.13

Berechnung des Rauminhaltes der Kugel

$$\mathcal{K} := \{ \langle x, y, z \rangle : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 \}$$

Die Kugel liegt zwischen den beiden Ebenen

$$x = x_0 - r \quad \text{und} \quad x = x_0 + r.$$

Ihr Querschnitt mit der Ebene

$$x = t \quad (x_0 - r \leq t \leq x_0 + r)$$

ist eine (evtl. zu einem Punkt degenerierte) Kreisscheibe mit dem Radius (Abb. 12.18)

$$\rho = \sqrt{r^2 - (t - x_0)^2}.$$

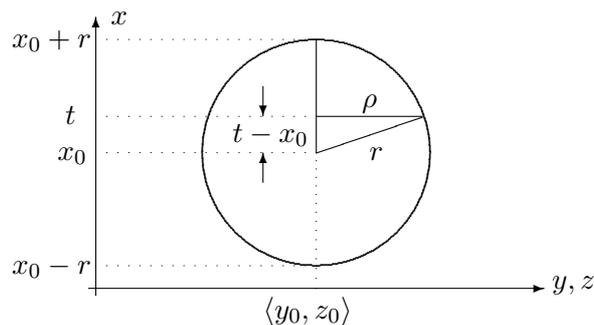


Abbildung 12.18: Berechnung des Kugelvolumens mit dem Prinzip von Cavalieri

Der Flächeninhalt der Kreisscheibe in der Höhe  $t$  beträgt

$$q(t) = \pi \rho^2 = \pi [r^2 - (t - x_0)^2].$$

Infolgedessen ist das Kugelvolumen gegeben durch

$$V = \pi \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [r^2 - (t - x_0)^2] dt = \pi \int_{-r}^r (r^2 - u^2) du = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

**Bemerkung**

Wenn man das Kugelvolumen ohne den Satz von Cavalieri berechnen wollte, so müßte man etwa wie folgt vorgehen:

Die Kugel  $\mathcal{K}$  ist die Menge

$$\mathcal{K} := \left\{ \langle x, y, z \rangle : \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3, \right. \\
 x_0 - r \leq x \leq x_0 + r, \\
 -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, \\
 \left. -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \right\}$$

und das Kugelvolumen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}| &= \int_{\mathcal{K}} 1 \, d(x, y, z) \\ &= \int_{x_0-r}^{x_0+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} dy \int_{-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}^{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} dz \\ &= \dots = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Die letzte Rechnung ist, wenn man sie denn ausführt, eine ziemlich umständliche Angelegenheit. Später wird das Volumen einer Kugel sehr leicht dadurch berechnet werden können, daß man *angepaßte Koordinaten* einführt, sog. *Kugelkoordinaten*.

## 12.5 Uneigentliche Integrale

In den Anwendungen werden auch Integrale über nicht beschränkte Bereiche sowie Integrale mit nicht beschränkten Integranden gebraucht.

**Beispiel 12.14**

In einem (möglicherweise unbeschränkten) Gebiet  $\mathcal{G}$  des  $\mathbb{R}^3$  sei durch  $\rho(\vec{x})$  eine Ladungsdichte definiert. Dann ist die Gesamtladung  $Q$  gegeben durch das uneigentliche Integral

$$Q = \int_{\mathcal{G}} \rho(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Wie bei uneigentlichen Integralen im Eindimensionalen werden *uneigentliche Integrale im  $\mathbb{R}^n$*  als geeignete Grenzwerte von eigentlichen Integralen definiert, also solchen über Jordan-Bereichen. Dazu braucht man eine Vereinbarung über die „Konvergenz“ von Jordan-Bereichen gegen offene Mengen:

**Definition 12.13**

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .  $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  heißt eine *Ausschöpfung von  $\mathcal{G}$  (mit Jordan-Bereichen)*, falls gilt:

- (i)  $\mathcal{M}_k$  ist ein Jordan-Bereich im  $\mathbb{R}^n$  ( $k \in \mathbb{N}$ )
- (ii)  $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{G}$  ( $k \in \mathbb{N}$ )
- (iii)  $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_{k+1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ )
- (iv) Zu jeder kompakten Teilmenge  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$  gibt es eine Zahl  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}_k$  ist für alle  $k \geq k_0$ .

**Bemerkung**

Zu jeder offenen Menge  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  gibt es eine Ausschöpfung: dazu „zerlege“ man den Raum in Würfel der Kantenlänge 1, durch Halbieren der Kanten jeden Würfel in  $2^n$  Würfel der Kantenlänge  $\frac{1}{2}$  etc. und nehme als  $\mathcal{M}_k$  die Vereinigung aller derjenigen Würfel der  $k$ -ten Zerlegung, die in

$$\mathcal{G} \cap \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, |x_i| \leq k \ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

liegen.

Ist  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ , so bilden die Würfel

$$\mathcal{W}_k := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, |x_i| \leq k, i \in \{1, \dots, n\}\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

und auch die Kugeln

$$\mathcal{K}_k := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\| \leq k\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

jeweils Ausschöpfungen.

**Definition 12.14**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und die reellwertige Funktion  $f$  über jedem (kompakten) Jordan-Bereich  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$  (eigentlich) integrierbar. Das uneigentliche Integral  $\int_{\mathcal{G}} f(\vec{x}) d\vec{x}$  heißt *existent* oder *konvergent*, falls für jede Ausschöpfung

$\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{G}$  der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}_k} f(\vec{x}) d\vec{x}$  existiert. Es ist dann

$$\int_{\mathcal{G}} f(\vec{x}) d\vec{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}_k} f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ eine Ausschöpfung von } \mathcal{G}).$$

Wieder muß gezeigt werden, daß der Grenzwert, wenn er denn existiert, nicht von der Wahl der Ausschöpfungen abhängt, man also bei einer anderen Wahl der Ausschöpfung zum selben Grenzwert gelangt; ansonsten wäre die Definition sinnlos.

**Bemerkung**

Sind  $n = 1$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $\mathcal{G} := (a, b)$  und  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  bzw.  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  bzw.  $b$  konvergente Folgen mit

$$a < a_k < a_{k-1} < b_{k-1} < b_k < b \quad (k \in \mathbb{N})$$

(etwa  $a_k := a + \frac{1}{k}$ ,  $b_k := b - \frac{1}{k}$ ), dann ist  $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathcal{M}_k := [a_k, b_k]$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) eine Ausschöpfung von  $(a, b)$ .

**Beispiel 12.15**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x}$ .

(a) Der Integrand  $e^{-\|\vec{x}\|^2}$  ( $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ) ist auf ganz  $\mathbb{R}^n$  stetig, damit also integrierbar über jedem Kompaktum.

(b) Sei  $c := \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n$ . Man kann mit einer Abschätzung leicht beweisen, daß das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$  existiert (wie?).

(c) Im folgenden wird nachgewiesen, daß für jeden Jordan-Bereich  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathcal{M}} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} \leq c$$

gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen, da der Integrand positiv ist, eine monoton wachsende Folge von Jordan-Bereichen somit eine monoton wachsende und beschränkte Folge von Integralen definiert, welche gegen einen Grenzwert konvergieren muß.

Seien  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Jordan-Bereich und  $k \in \mathbb{N}$  so gewählt, daß  $\mathcal{M}$  in dem  $k$ -ten Ausschöpfungswürfel  $\mathcal{W}_k$  des  $\mathbb{R}^n$  liegt:

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}_k := \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n, |x_i| \leq k, i \in \{1, \dots, n\} \} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(Da  $\mathcal{M}$  als Jordan-Bereich insbesondere beschränkt ist, existiert natürlich

eine solche Zahl  $k$ .) Wegen der Positivität des Integranden  $e^{-\|\vec{x}\|^2}$  ist dann

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} &\leq \int_{\mathcal{W}_k} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} \\
 \text{(Satz 12.5)} &= \int_{-k}^k \left( \int_{-k}^k \left( \dots \left( \int_{-k}^k e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2} dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1 \\
 &= \left( \int_{-k}^k e^{-x_n^2} dx_n \right) \cdot \int_{-k}^k \left( \dots \left( \int_{-k}^k e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_{n-1}^2} dx_{n-1} \right) \dots \right) dx_1 \\
 &= \dots = \prod_{i=1}^n \left( \int_{-k}^k e^{-x_i^2} dx_i \right) \\
 &= \left( \int_{-k}^k e^{-t^2} dt \right)^n \\
 &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n \\
 &= c
 \end{aligned}$$

### Bemerkung

Im nächsten Abschnitt (Beispiel 12.21) wird gezeigt, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

gilt. Somit ist also

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

### Bemerkung

Man hüte sich trotzdem, uneigentliche Integrale so zu behandeln als wären es nur verkappte eigentliche Integrale. Insbesondere der Satz über die Vertauschbarkeit der Integrale stetiger Funktionen auf kompakten Mengen (Satz 12.5) darf ohne weitere Voraussetzungen nicht so einfach auf uneigentliche Integrale übertragen werden. Dazu ein Beispiel:

**Beispiel 12.16**

Die beiden iterierten Integrale

$$I := \int_1^\infty \left( \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy \quad \text{und} \quad J := \int_1^\infty \left( \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx$$

unterscheiden sich nur in der Integrationsreihenfolge. Für  $I$  erhält man

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \left( \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = \int_1^\infty \left( \int_1^\infty \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} dx \right) dy \\ &= \int_1^\infty \left( \int_1^\infty \frac{1}{(x+y)^2} dx \right) dy - \int_1^\infty \left( \int_1^\infty \frac{2y}{(x+y)^3} dx \right) dy \\ &= \int_1^\infty \left( \frac{-1}{(x+y)} \Big|_{x=1}^\infty \right) dy + \int_1^\infty \left( \frac{y}{(x+y)^2} \Big|_{x=1}^\infty \right) dy \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{1+y} dy - \int_1^\infty \frac{y}{(1+y)^2} dy \\ &= \int_1^\infty \frac{1+y}{(1+y)^2} dy - \int_1^\infty \frac{y}{(1+y)^2} dy = \int_1^\infty \frac{1}{(1+y)^2} dy \\ &= \frac{-1}{(1+y)} \Big|_{y=1}^\infty = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist dann  $J = -\frac{1}{2} \neq I$ .

## 12.6 Substitutionsregel (Transformationsformel für Mehrfachintegrale)

### 12.6.1 Problemstellung

Die Berechnung eines Mehrfachintegrals wird mit Hilfe des Satzes von Fubini und seiner Folgerungen (Sätze 12.3, 12.4 und 12.5, p. 112 - p. 114) zurückgeführt auf die sukzessive Berechnung einfacher Integrale. Wird dabei nicht über ein mehrdimensionales Intervall integriert sondern über einen allgemeineren Normalbereich, so erfordert dieser Prozeß darüberhinaus eine korrekte Anpassung der Integrationsgrenzen, s. Abb. 12.19.

**Beispiel 12.17** (Anpassung der Integrationsgrenzen)

$$\int_B f(x,y) d(x,y) = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x f(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \right) dy$$

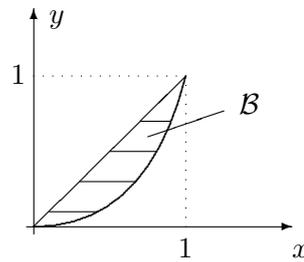


Abbildung 12.19: Anpassung der Integrationsgrenzen

Manche Bereiche lassen sich in anderen Koordinaten bequemer beschreiben als in kartesischen:

**Beispiel 12.18**

Sei  $\mathcal{KR} := \{ \langle x, y \rangle : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ , ein Kreisring mit innerem Radius  $r$  und äußerem Radius  $R$ . Für die Mehrfachintegration in kartesischen Koordinaten muß man diesen Kreisring in vier Normalbereiche zerlegen, s. Abb. 12.20.

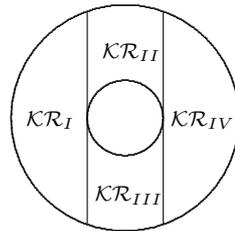


Abbildung 12.20: Anpassung der Integrationsgrenzen bei einem Kreisring

Man erhält

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{KR}} f(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{\mathcal{KR}_I} f(x, y) d(x, y) + \dots + \int_{\mathcal{KR}_{IV}} f(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{x=-R}^{-r} \left( \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_{x=-r}^{+r} \left( \int_{y=+\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \\ & \quad + \int_{x=-r}^{+r} \left( \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_{x=r}^R \left( \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bereichsadditivität des Integrals könnte man evtl. auch anders

rechnen:

$$\int_{\mathcal{KR}} f(x, y) d(x, y) = \underbrace{\int_{x=-R}^{+R} \left( \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx}_{\text{Integral über den großen Kreis}} - \underbrace{\int_{x=-r}^{+r} \left( \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx}_{\text{Integral über den kleinen Kreis}}$$

Das funktioniert natürlich nur, wenn die Funktion  $f$  auf dem kleinen Kreis auch definiert ist. Ist z.B.  $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$  ( $x^2 + y^2 \geq r^2$ ), so ist das nicht der Fall, und die letzte Berechnung ergibt keinen Sinn. Dann muß man doch auf die obige komplizierte Zerlegung zurückgreifen.

In ebenen Polarkoordinaten entspricht diesem Kreisring einfach das Rechteck

$$\mathcal{R} := [r, R] \times [0, 2\pi]$$

der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene. Läßt sich nun das Integral von  $f$  über dem Kreisring  $\mathcal{KR}$  vielleicht ausdrücken als Integral einer geeigneten Funktion von  $r$  und  $\varphi$  über diesem Rechteck?

$$\int_{\odot} f(x, y) d(x, y) = \int_{\square} ? d(r, \varphi)$$

Mit Hilfe ebener Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

läßt sich  $f$  als Funktion von  $r$  und  $\varphi$  ausdrücken:

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(x, y) = f(p_1(r, \varphi), p_2(r, \varphi)),$$

und man könnte annehmen, daß gilt:

$$\int_{\mathcal{KR}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathcal{R}} \tilde{f}(r, \varphi) d(r, \varphi).$$

Eine solche Beziehung kann aber nicht richtig sein!

### Gegenbeispiel

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r, \varphi) &= f(p_1(r, \varphi), p_2(r, \varphi)) := 1 \\ r &:= 0, \quad (\text{also ist } \mathcal{KR} \text{ ein Vollkreis}), \end{aligned}$$

dann ist

$$\int_{\mathcal{KR}} d(x, y) = \int_{x=-R}^{+R} \left( \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \pi R^2$$

$$\int_{\mathcal{R}} d(r, \varphi) = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi R$$

also i.a. etwas Anderes. Deutet man dieses Integral als Volumenintegral („Grundfläche mal Höhe“) mit der Grundfläche  $\mathcal{KR}$  bzw.  $\mathcal{R}$  und der Höhe  $\tilde{f} = f = 1$ , so sieht man, daß die Transformation zwar die Höhe, nicht aber die Grundfläche den neuen Koordinaten anpaßt, diese muß nun noch korrigiert werden.

### 12.6.2 Heuristische Herleitung der Transformationsformel

Der Bereich  $\mathcal{B}$  sei durch Koordinaten  $\langle u, v \rangle$  beschrieben, welche einen Bereich  $\mathcal{A}$  durchlaufen:

$$\vec{p}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \vec{p}(u, v) := \begin{pmatrix} p_1(u, v) \\ p_2(u, v) \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Abbildung geht ein *Rechtecknetz* auf  $\mathcal{A}$  (Abb. 12.21) über in ein *krummliniges Netz* auf  $\mathcal{B}$  (Abb. 12.22).

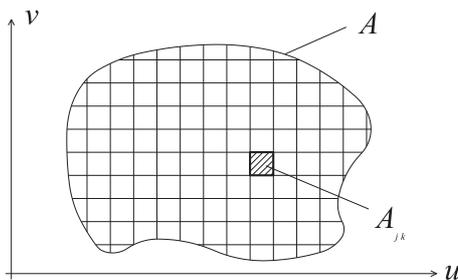


Abbildung 12.21:  
Gitternetz in der  
 $\langle u, v \rangle$ -Ebene

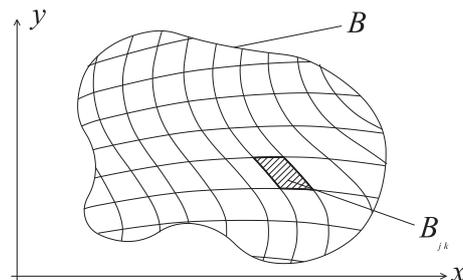


Abbildung 12.22:  
Transformation des Gitternetzes in  
die  $\langle x, y \rangle$ -Ebene

Die lokale Injektivität der Abbildung  $\vec{p}$  sorgt dafür, daß die Netzlinien in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene, welche als Bilder der Netzlinien in der  $\langle u, v \rangle$ -Ebene entstehen, sich nicht schneiden, also in einem gewissen Sinne „parallel“ sind; erst dadurch werden sie in den Stand gesetzt, ein „Netz“ in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene zu definieren.

Man betrachte das markierte kleine Rechteck  $\mathcal{A}_{jk}$  mit den vier Ecken

$$\begin{pmatrix} u_j \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_j + \Delta u_j \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_j + \Delta u_j \\ v_k + \Delta v_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_j \\ v_k + \Delta v_k \end{pmatrix}$$

und dem Flächeninhalt

$$|\mathcal{A}_{jk}| = \Delta u_j \cdot \Delta v_k.$$

Bei der Abbildung  $\vec{p}$  geht  $\mathcal{A}_{jk}$  über in das „krumme Parallelogramm“  $\mathcal{B}_{jk}$  in  $\mathcal{B}$ , dessen Eckpunkte die Bilder der Eckpunkte von  $\mathcal{A}_{jk}$  unter der Abbildung  $\vec{p}$  sind. Wäre dieses krumme Parallelogramm ein echtes Parallelogramm, so könnte man seinen Flächeninhalt sofort angeben: er wäre der Betrag der Determinante<sup>2</sup>

$$\Delta_{jk} := \det \begin{pmatrix} p_1(u_j + \Delta u_j, v_k) - p_1(u_j, v_k) & p_1(u_j, v_k + \Delta v_k) - p_1(u_j, v_k) \\ p_2(u_j + \Delta u_j, v_k) - p_2(u_j, v_k) & p_2(u_j, v_k + \Delta v_k) - p_2(u_j, v_k) \end{pmatrix}.$$

Für kleine  $\Delta u_j$  ist nach dem (eindimensionalen) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$p_1(u_j + \Delta u_j, v_k) - p_1(u_j, v_k) \approx D_1 p_1(u_j, v_k) \cdot \Delta u_j,$$

und entsprechende Formeln gelten für die anderen Differenzen in der Matrix  $\Delta_{jk}$ . Infolgedessen ist approximativ

$$\begin{aligned} \Delta_{jk} &\approx \left| \det \begin{pmatrix} D_1 p_1(u_j, v_k) & D_2 p_1(u_j, v_k) \\ D_1 p_2(u_j, v_k) & D_2 p_2(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right| \cdot \Delta u_j \Delta v_k \\ &= |\det D\vec{p}(u_j, v_k)| \cdot \Delta u_j \Delta v_k. \end{aligned}$$

Sind nun  $\Delta u_j, \Delta v_k$  klein, so wird man erwarten, daß der Flächeninhalt von  $\mathcal{B}_{jk}$  näherungsweise gegeben ist durch

$$|\det D\vec{p}(u_j, v_k)| \cdot \Delta u_j \Delta v_k.$$

Diese Erwartung führt auf die Vermutung

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y) d(x, y) \approx \sum_{j,k} f[\vec{p}(u_j, v_k)] |\det D\vec{p}(u_j, v_k)| \cdot \Delta u_j \Delta v_k$$

für eine Funktion  $f$  zweier Variablen, und damit auf die Transformationsformel

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathcal{A}} f(\vec{p}(u, v)) |\det D\vec{p}(u, v)| d(u, v).$$

Die allgemeine Form der Substitutionsregel ist durch den folgenden Satz gegeben:

---

2

$$\begin{aligned} \vec{a} &:= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow |F| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Satz 12.14** (Transformationsformel für Mehrfachintegrale)

Seien  $n \in \mathbb{N}, \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{g} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$  und  $\vec{g}$  injektiv. Für alle  $\vec{x} \in \mathcal{G}$  sei  $\det D\vec{g}(\vec{x})$  entweder ständig positiv oder ständig negativ.  $\mathcal{T}$  sei eine kompakte, Jordan-meßbare Teilmenge von  $\mathcal{G}$ ,  $f \in \mathcal{C}(\vec{g}(\mathcal{T}))$ .

Dann ist  $\vec{g}(\mathcal{T})$  Jordan-meßbar,  $f$  ist über  $\vec{g}(\mathcal{T})$  Riemann-integrierbar, und es gilt die Transformationsformel

$$\int_{\vec{g}(\mathcal{T})} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{T}} f(\vec{g}(\vec{t})) |\det D\vec{g}(\vec{t})| d\vec{t}. \tag{12.3}$$

Diese Formel gilt auch dann noch, wenn entgegen den obigen Voraussetzungen gilt:

(a)  $\det D\vec{g}(\vec{t}) = 0 \quad (\vec{t} \in \mathcal{N})$

(b)  $\vec{g} \upharpoonright \mathcal{N}$  ist nicht injektiv

auf einer Teilmenge  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$ , welche den Inhalt Null hat, also eine Jordan-Nullmenge ist.

**Bemerkung**

(i) Erinnerung an das Eingangsbeispiel der Berechnung einer Funktion  $f$  über einen Kreisring:

$$\int_{\odot} f(x, y) d(x, y) = \int_{\square} ? d(r, \varphi).$$

Anstelle von „?“ darf nun nicht einfach die Funktion  $f$  (als Funktion von  $r$  und  $\varphi$ ) stehen:

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(x, y) = f(p_1(r, \varphi), p_2(r, \varphi)),$$

sondern es muß noch ein „Korrekturfaktor“ berücksichtigt werden, welcher die Anpassung an die neuen Koordinaten vornimmt: der Betrag der Funktionaldeterminante der Transformationsfunktion  $\vec{p}$ :

$$\int_{\odot} f(x, y) d(x, y) = \int_{\square} \tilde{f}(r, \varphi) |\det D\vec{p}(r, \varphi)| d(r, \varphi).$$

(ii) Substitutionsregel im Fall  $n = 1$ :

Nach der Substitutionsregel im Fall  $n = 1$  gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

unter der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= [\alpha, \beta], \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{T}), \\ g(\alpha) &\in \{a, b\}, \quad g(\beta) \in \{a, b\}, \quad g(\mathcal{T}) \in \{[a, b], [b, a]\}, \quad f \in \mathcal{C}(g(\mathcal{T})) \end{aligned}$$

Sei nun  $g'(t) \neq 0$  ( $t \in \mathcal{T}$ ), wegen der Stetigkeit also durchweg positiv oder durchweg negativ.

(a)  $g' > 0$ :

In diesem Fall ist  $a < b$ , also  $g(\mathcal{T}) = [a, b]$ , und man erhält die Formel

$$\begin{aligned} \int_{g(\mathcal{T})} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_{\mathcal{T}} f(g(t)) g'(t) dt = \int_{\mathcal{T}} f(g(t)) |g'(t)| dt \end{aligned}$$

(b)  $g' < 0$ :

In diesem Fall ist  $a > b$ , also  $g(\mathcal{T}) = [b, a]$ , und daher auch hier

$$\begin{aligned} \int_{g(\mathcal{T})} f(x) dx &= \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt \\ &= - \int_{\mathcal{T}} f(g(t)) g'(t) dt = \int_{\mathcal{T}} f(g(t)) (-g'(t)) dt \\ &= \int_{\mathcal{T}} f(g(t)) |g'(t)| dt \end{aligned}$$

### 12.6.3 Anwendungen

Am häufigsten, ja fast ausschließlich, kommt in der Praxis die Transformation eines Integrals auf

- ebene Polarkoordinaten
- Zylinderkoordinaten
- räumliche Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten

vor. Diese Fälle werden in den nächsten Abschnitten der Reihe nach behandelt.

#### 12.6.3.1 Ebene Polarkoordinaten

Ein Integral

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y) d(x, y)$$

im Sinne der Transformationsregel auf Polarkoordinaten zu transformieren bedeutet, die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

vorzunehmen. Gemäß der heuristischen Herleitung der Substitutionsregel muß man nun, so befremdlich das klingen mag,  $r$  und  $\varphi$  als kartesische Koordinaten deuten. Die Funktion  $\vec{p}$  ist in der ganzen  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene stetig differenzierbar, ihr totales Differential (ihre „Ableitung“) ist die Matrix

$$D\vec{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} D_1 p_1(r, \varphi) & D_2 p_1(r, \varphi) \\ D_1 p_2(r, \varphi) & D_2 p_2(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

deren Funktionaldeterminante

$$\det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) := \det(D\vec{p}(r, \varphi)) = r$$

für alle  $r > 0$  ständig positiv ist.  $\vec{p}$  bildet das Rechteck

$$\mathcal{R} := (0, \infty) \times [0, 2\pi)$$

der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene injektiv auf die  $\langle x, y \rangle$ -Ebene mit Ausnahme des Nullpunktes ab. Da die Menge  $\mathcal{N} := \{0\} \times [0, 2\pi)$  eine Nullmenge der Menge

$$\overline{\mathcal{R}} = [0, \infty) \times [0, 2\pi]$$

ist, läßt sich die Transformationsformel auch auf  $r = 0$  ausdehnen.

**Beispiel 12.19**

Seien  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  mit  $0 < r_1 < r_2$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$  mit  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ . Berechnet werden soll die Fläche des Kreisrings (Abb. 12.24)

$$\mathcal{B} := \{ \langle x, y \rangle : r_1 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_2, \varphi_1 \leq \arg(x, y) \leq \varphi_2 \}.$$

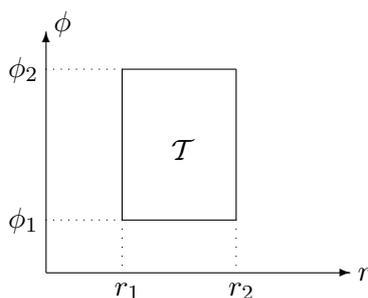


Abbildung 12.23: Urbild des Kreisrings in der  $\langle r, \phi \rangle$ -Ebene

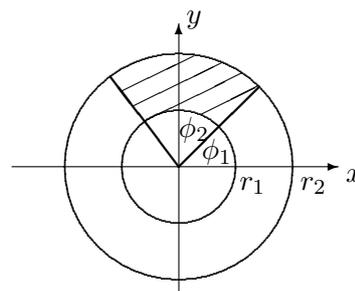


Abbildung 12.24: Ursprünglicher Kreisring in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene

Hier ist das Urbild  $\mathcal{T}$  von  $\mathcal{B}$  unter der Transformationsabbildung  $\vec{p}$  ein Rechteck in der  $\langle r, \phi \rangle$ -Ebene, und man erhält

$$|\mathcal{B}| = \int_{\mathcal{B}} d(x, y) = \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \, d\varphi \right) dr = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) (r_2^2 - r_1^2).$$

Spezialfälle:

- (i)  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi \implies |\mathcal{B}| = \pi(r_2^2 - r_1^2)$
- (ii)  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, r_1 = 0$  (Vollkreis)  $\implies |\mathcal{B}| = \pi r_2^2$

**Beispiel 12.20** (Kardioide)

Sei  $a > 0$ . Man berechne den Inhalt desjenigen Bereiches, der von der *Kardioide* oder *Herzkurve*

$$\varrho(\varphi) := a(1 + \cos \varphi) \quad (\varphi \in [0, 2\pi))$$

umschlossen wird, s. Abb. 12.26.

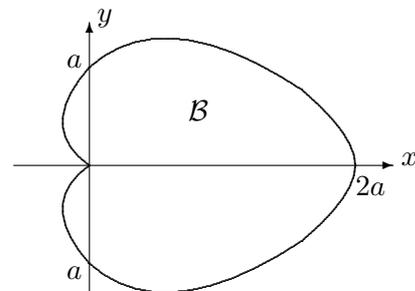
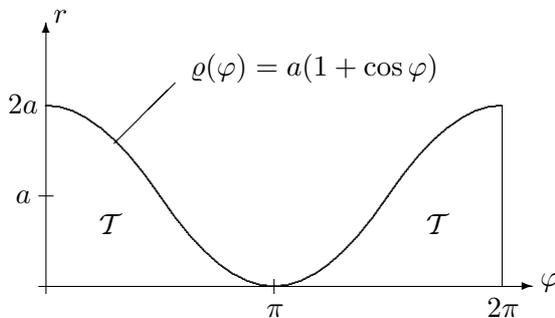


Abbildung 12.25: Urbild einer Kardioide als Normalbereich in der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene

Abbildung 12.26: Fläche einer Kardioide

Hier ist das Urbild  $\mathcal{T}$  von  $\mathcal{B}$  unter der Abbildung  $\vec{p}$  zwar kein Rechteck in der  $\langle r, \varphi \rangle$ -Ebene, allerdings noch ein Normalbereich (Abb. 12.25)

$$\mathcal{T} = \{ \langle r, \varphi \rangle : \varphi \in [0, 2\pi), 0 \leq r \leq \varrho(\varphi) := a(1 + \cos \varphi) \},$$

Die Fläche  $\mathcal{B}$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \int_{\mathcal{B}} 1 \, d(x, y) = \int_{\mathcal{T}} 1 \, d(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\varrho(\varphi)} r \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\varrho(\varphi)]^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} (1 + \cos \varphi)^2 \, d\varphi \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \right) d\varphi \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{3}{2}\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

**Beispiel 12.21**

(a) Seien  $\mathcal{B}(R)$  ein Kreis mit Radius  $R$  um den Nullpunkt und

$$f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad (\langle x, y \rangle \in \mathcal{B}(R)).$$

Mit

$$\mathcal{T}(R) := \{ \langle r, \varphi \rangle : 0 \leq r \leq R, \varphi \in [0, 2\pi) \}$$

erhält man mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(R)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_{\mathcal{T}(R)} e^{-r^2} r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R e^{-r^2} r dr \quad (!) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) d\phi \\ &= \pi (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Läßt man jetzt  $R \rightarrow \infty$  gehen, so erhält man eine Ausschöpfung des  $\mathbb{R}^2$  und damit ein uneigentliches mehrfaches Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{B}(R)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

(b) Sei  $\mathcal{Q}(a)$  das Quadrat der Kantenlänge  $2a$  mit  $O$  als Mittelpunkt. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}(a)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy \\ &= \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \cdot \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \\ &= \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

Läßt man jetzt  $a \rightarrow \infty$  gehen, so erhält man ebenfalls eine Ausschöpfung des  $\mathbb{R}^2$  und damit das unter (a) berechnete Integral mit dem Wert  $\pi$ , also das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Mit Hilfe der Substitution  $x := t/\sqrt{2}$  wird daraus

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.} \quad (12.4)$$

### 12.6.3.2 Zylinderkoordinaten

Mit *Zylinderkoordinaten* bezeichnet man dasjenige Koordinatensystem im Raum  $\mathbb{R}^3$ , das mit den  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des kartesischen Koordinatensystems via Polarkoordinaten zusammenhängt und die  $z$ -Koordinate unverändert übernimmt, s. Abb. 12.27.

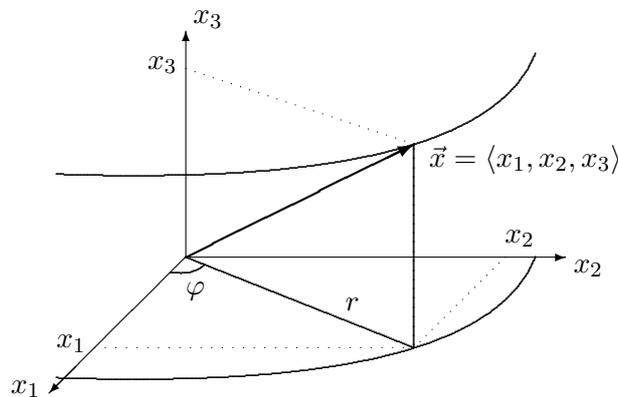


Abbildung 12.27: Zylinderkoordinaten

Substitutionsfunktion:

$$\vec{p}: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \vec{p}(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Funktionaldeterminante:

$$\det \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) := \det(D\vec{p}(r, \varphi, z)) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r,$$

und die Funktionaldeterminante ist für  $r > 0$  ständig positiv. Für stetige Integranden  $f$  gilt daher die Transformationsformel

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\mathcal{T}} f(\vec{p}(r, \varphi, z)) r d(r, \varphi, z).$$

**Bemerkung**

In den Anwendungen hat man es meistens mit dem Fall zu tun, daß  $\mathcal{T}$  ein dreidimensionales Intervall (Quader)

$$\mathcal{T} = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2]$$

ist, wobei gilt:

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \quad , \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq 2\pi \quad , \quad z_1 \leq z_2 .$$

Da die Substitutionsfunktion  $\vec{p}$  die lokale Injektivität auf einer Nullmenge durchaus verletzen darf, ohne die Gültigkeit der Transformationsformel zu gefährden, gilt diese in der Form

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

**Beispiel 12.22**

Man berechne die Gesamtladung  $Q$  eines koaxialen zylindrischen Isolators  $\mathcal{B}$  der Länge  $l$  und den Radien  $r_1, r_2$  mit  $0 < r_1 < r_2$ , wenn die Ladungsdichte  $\rho$  in jedem Punkt von  $\mathcal{B}$  proportional zum Quadrat des Abstandes von der Mittelachse ist, s. Abb. 12.28; die  $z$ -Achse weise senkrecht aus der Zeichenebene nach oben.

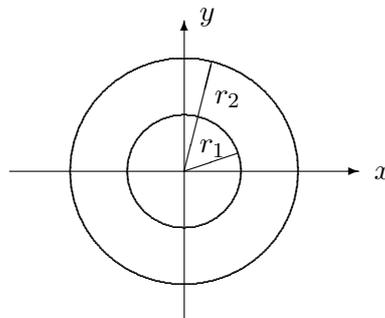


Abbildung 12.28: Querschnitt eines koaxialen zylindrischen Leiters

Seien  $a > 0$  und

$$\rho(x, y, z) := a \cdot (x^2 + y^2) = a \cdot r^2$$

Dann folgt mit der Transformation auf Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\mathcal{B}} \rho(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z=0}^l dz \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=r_1}^{r_2} a \cdot r^2 r dr \\ &= 2\pi a l \int_{r=r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{\pi a l}{2} (r_2^4 - r_1^4). \end{aligned}$$

### Beispiel 12.23

Seien  $a$  und  $h > 0$ . Durch Rotation einer flüssigen Glasmenge soll ein optischer Parabolspiegel entstehen, dessen Stärke an der dünnsten Stelle mindestens  $h$  beträgt, s. Abb. 12.29.

Wie groß ist sein Volumen?

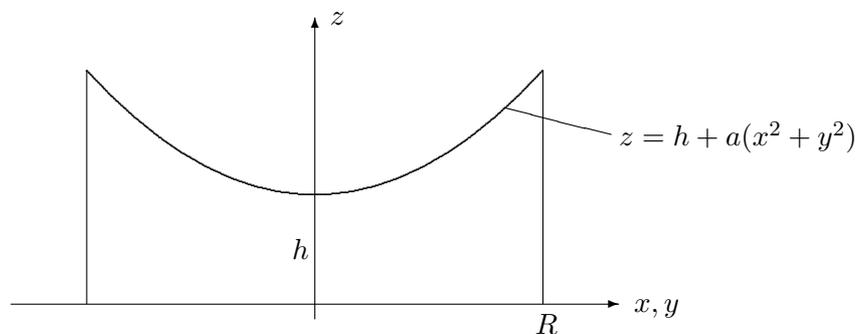


Abbildung 12.29: Optischer Parabolspiegel

(a) Integration in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}| &= \int_{\mathcal{B}} d(x, y, z) \\
 &= \int_{x=-R}^R dx \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{z=0}^{h+a(x^2+y^2)} dz \\
 &= \int_{r=-R}^R dx \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (h + a(x^2 + y^2)) dy \\
 &= \int_{r=-R}^R \left[ (h + ax^2)y + \frac{a}{3}y^3 \right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\
 &= 2 \int_{r=-R}^R \left[ (h + ax^2)\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{a}{3}(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2} \right] dx \\
 &= 2 \int_{r=-R}^R \left[ \left( h + \frac{aR^2}{3} \right) \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{2}{3}ax^2\sqrt{R^2 - x^2} \right] dx \\
 [x=R \sin t] \quad &= 2 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \left( h + \frac{aR^2}{3} \right) R \cos t + \frac{2}{3}aR^2 \sin^2 t R \cos t \right] R \cos t dt \\
 &= 2 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \left( h + \frac{aR^2}{3} \right) R^2 \cos^2 t + \frac{2}{3}aR^4 (1 - \cos^2 t) \cos^2 t \right] dt \\
 &= 2 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \left[ (hR^2 + aR^4) \cos^2 t - \frac{2}{3}aR^4 \cos^4 t \right] dt \\
 &= 2 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \left[ (hR^2 + aR^4) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) - \frac{2aR^4}{3} \left( \frac{1}{8} \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{8} \right) \right] dt \\
 &= 2 \left[ (hR^2 + aR^4) \left( \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) - \frac{2aR^4}{3} \left( \frac{1}{32} \sin 4t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{3t}{8} \right) \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= 2 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \left( hR^2 + \frac{a}{2} R^4 \right) dt \\
 &= \pi R^2 \left( h + \frac{a}{2} R^2 \right)
 \end{aligned}$$

(b) Integration in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}| &= \int_{\mathcal{B}} d(x, y, z) = \int_{r=0}^R r \, dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^{h+ar^2} dz \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R r(h + a \cdot r^2) \, dr = 2\pi \left[ \frac{r^2}{2}h + \frac{a}{4}r^4 \right]_0^R \\
 &= \pi R^2 \left( h + \frac{a}{2} R^2 \right)
 \end{aligned}$$

### 12.6.3.3 Kugelkoordinaten

Zur Darstellung eines Punktes  $\langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3$  in *Kugelkoordinaten* oder *räumlichen Polarkoordinaten* denkt man sich eine Kugel um den Ursprung, auf deren Oberfläche der Punkt  $\langle x, y, z \rangle$  liegt und beschreibt diesen Punkt durch die Angabe von (Abb. 12.30)

- Kugelradius  $r$
- geographischer Länge  $\varphi$  – dem *Azimut*
- geographischer Breite  $\theta$  – dem *Polarwinkel*

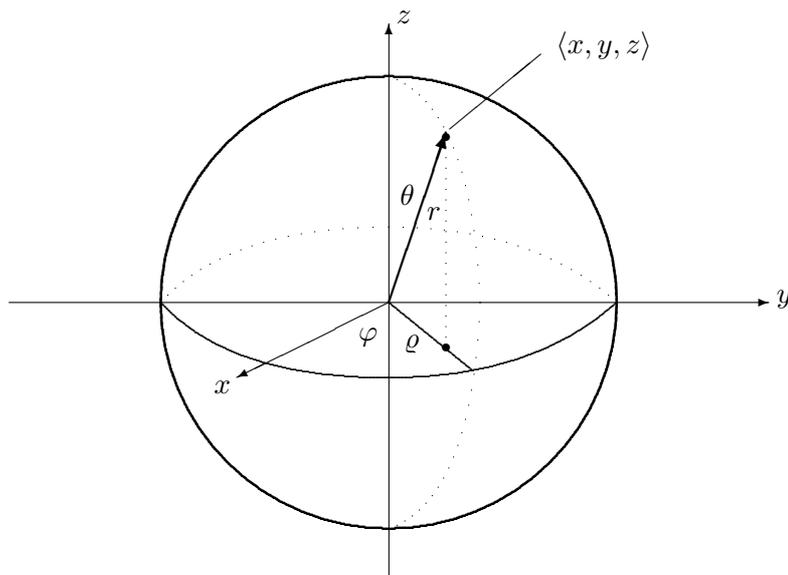


Abbildung 12.30: Kugelkoordinaten oder räumliche Polarkoordinaten

Substitutionsfunktion:

$$\vec{p}: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \vec{p}(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \end{pmatrix} &:= \det(D\vec{p}(r, \varphi, \theta)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante ist für  $r > 0$  und  $\theta \in (0, \pi)$  negativ. Für stetige Integranden  $f$  gilt dann die Transformationsformel

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\mathcal{T}} f(\vec{p}(r, \varphi, \theta)) r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta),$$

welche sich über die bekannte Nullmengenbetrachtung auf ein dreidimensionales Intervall (Quader) der Form

$$\mathcal{T} = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2]$$

ausdehnen läßt, wobei gilt:

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \quad , \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2.$$

Daher gilt die Transformationsformel in der Form

$$\int_{\mathcal{B}} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

### Beispiel 12.24

In Beispiel 12.13 wird das Volumen einer Kugel mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri bestimmt, eine machbare Aufgabe. In der anschließenden Bemerkung wird skizziert, wie das Volumen unter Verwendung von kartesischen Koordinaten zu bestimmen wäre, und das ist schon einigermaßen aufwendig.

Ganz einfach wird die Berechnung unter Verwendung von Kugelkoordinaten, welche für dieses Problem eben besonders gut angepaßte Koordinaten sind:

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}| &= \int_{\mathcal{K}} d(x, y, z) = \int_{\mathcal{I}} | -r^2 \sin \theta | d(r, \varphi, d\theta) \\ &= \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot [ -(-1) - (-1) ] = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

**Beispiel 12.25**

Die obere Halbkugel  $\mathcal{HK}$  vom Radius  $R$  um den Nullpunkt sei mit einer Masse der konstanten Dichte  $\rho$  angefüllt. Zu berechnen ist der Schwerpunkt von  $\mathcal{HK}$ .

**Lösung**

Aus Symmetriegründen befindet sich der Schwerpunkt auf der  $z$ -Achse. Er berechnet sich zu

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{\rho}{M} \int_{\mathcal{HK}} z d(x, y, z) \\ &= \frac{\rho}{M} \int_{r=0}^R dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta r \cos \theta r^2 \sin \theta \\ &= \frac{2\pi\rho}{M} \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi\rho R^4}{2M} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi\rho R^4}{4M}. \end{aligned}$$

Aus

$$M = \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \rho \pi R^3$$

folgt das Ergebnis:

$$z_S = \frac{3}{8} R.$$

**Beispiel 12.26**

Der Kugeloktant

$$\mathcal{B} := \{ \langle x, y, z \rangle : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x, y, z \geq 0 \}$$

sei mit Masse der konstanten Dichte  $\rho$  angefüllt. Man bestimme den Schwerpunkt von  $\mathcal{B}$ .

### Lösung

Aus Symmetriegründen hat der Schwerpunkt drei identische Koordinaten, es reicht also, eine von ihnen zu berechnen, etwa  $x_S$ :

$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{\rho}{M} \int_{\mathcal{B}} x d(x, y, z) \\
 &= \frac{\rho}{M} \int_{r=0}^R dr \int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta (r \sin \theta \cos \varphi) (r^2 \sin \theta) \\
 &= \frac{\rho}{M} \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{\rho}{M} \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^R \cdot \left[ \sin \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{\rho}{M} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot (1 - 0) \cdot \frac{1}{2} \left[ \theta - \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_{\theta=0}^{\pi/2} \\
 &= \frac{\pi \rho R^4}{16M}.
 \end{aligned}$$

Da auch die Masse des Kugeloktanten ein Viertel der Masse der Halbkugel ausmacht,

$$M = \int_{\mathcal{B}} \rho d(x, y, z) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^3}{6},$$

folgt auch hier

$$x_S = \frac{3}{8} R.$$

### Aufgabe

Man berechne die beiden noch fehlenden Schwerpunktskoordinaten  $y_S$  und  $z_S$  explizit.

### Beispiel 12.27

$\mathcal{B}_\varrho$  sei die Kugelschale

$$\mathcal{B}_\varrho := \{ \langle x, y, z \rangle : \varrho^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}.$$

Man bestimme das uneigentliche Integral

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z).$$

**Lösung**

$$\begin{aligned} I_\varrho &:= \int_{B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z) \\ &= \int_\rho^R \frac{dr}{r} \cdot r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{R^2 - \varrho^2}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi(R^2 - \varrho^2) \\ \longrightarrow \quad I &:= \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} I_\varrho = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Dieses Integral ist das Integral des Coulomb-Potentials über eine Kugel vom Radius  $R$  und spielt in der Elektrostatik eine große Rolle. Über die Singularität kann also „integriert“ werden!

## Kapitel 13

# Kurvenintegrale

In jedem Punkt  $\vec{x} \in \mathcal{G}$  eines Gebietes des  $\mathbb{R}^3$  herrsche eine Kraft, etwa das von einer im Punkt  $\vec{\xi} \notin \mathcal{G}$  befindlichen Punktladung  $Q$  am Ort  $\vec{x}$  hervorgerufene elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{\xi}}{\|\vec{x} - \vec{\xi}\|^3} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

In diesem elektrischen Feld soll eine Ladung  $q$  längs einer *Bahnkurve* durch  $\mathcal{G}$  bewegt werden, und zwar von einem Anfangspunkt  $\vec{a}$  zu einem Endpunkt  $\vec{b}$ . Dafür soll die *Arbeit* berechnet werden, welche dabei aufzuwenden ist oder gewonnen wird.

Dazu muß man aus der geometrischen Vorstellung einer („krummen“) Linie im Raum oder aus der physikalischen Vorstellung der Bahn eines Teilchens etwas machen, mit dem man rechnen kann. Im  $\mathbb{R}^3$  ist diese Vorstellung etwa: Tritt ein Teilchen in eine Blaskammer ein, dann erkennt man seine Bahn als eine räumliche Linie.

Auf jeden Fall stellt man sich vor: Könnte man die Linie am Anfangs- und am Endpunkt anfassen, dann verhielte sie sich wie eine Schnur. Man könnte sie spannen und erhielte eine Strecke, welche man injektiv auf ein Intervall abbilden könnte. Bringt man die Schnur dann in ihre alte Lage zurück, so bleibt die Injektivität erhalten: Jedem Punkt des reellen Intervalles entspricht genau ein Punkt auf der Schnur.

In diesem Sinne ist die „Schnur“ also dargestellt als Bild eines reellen Intervalles im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{f}: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

## 13.1 Kurven

### Definition 13.1

- (i) Ein Weg im  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetige Abbildung

$$\vec{x}: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eines kompakten Intervalles  $[a, b]$  in den  $\mathbb{R}^n$ .

- (ii) Sei  $\vec{x}$  ein Weg im  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt

(a)  $\vec{x}(a)$  : Anfangspunkt

(b)  $\vec{x}(b)$  : Endpunkt und

(c)  $W(\vec{x})$  : Spur des Weges  $\vec{x}$ .

(d)  $\vec{x}$  geschlossen :  $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$

(e)  $\vec{x}$  : doppeltpunktfrei :  $\Leftrightarrow \vec{x} \upharpoonright [a, b]$  und  $\vec{x} \upharpoonright (a, b)$  sind injektiv.

### Beispiele 13.1

- (i)  $n = 2$ ,  $[a, b] := [0, 2\pi]$

$$\vec{x}(t) := \langle \cos t, \sin t \rangle \quad (t \in [0, 2\pi])$$

ist der einmal im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufene Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ ; dieser ist doppeltpunktfrei.

- (ii)  $n = 2$ ,  $[a, b] := [0, 4\pi]$

$$\vec{x}(t) := \langle \cos t, \sin t \rangle \quad (t \in [0, 4\pi])$$

ist der zweimal im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufene Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ ; dieser ist *nicht* doppeltpunktfrei.

Mit dem Begriff „Kurve“ verbindet man nun eher die Spur, also den Wertebereich  $W(\vec{x})$  eines Weges. Verschiedene Wege können unter diesen Umständen miteinander „identifiziert“ werden, falls ihre Wertebereiche gleich sind. Diese Identifizierung soll aber *nicht* so weit gehen, daß man z.B. nicht mehr unterscheiden kann, ob der Einheitskreis einmal oder zweimal „durchlaufen“ wird, d.h. die beiden obigen Beispiele sollen als verschieden erkennbar bleiben. Ebenso soll erkennbar bleiben, ob der Einheitskreis positiv oder negativ „durchlaufen“ wird.

### Beispiel 13.2

$n = 2$ , wieder wird der Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$  betrachtet.

$$(i) \quad \vec{f}(t) := \langle \cos t, \sin t \rangle \quad (t \in [0, 2\pi])$$

$$(ii) \quad \vec{g}(t) := \langle \cos 2t, \sin 2t \rangle \quad (t \in [0, \pi])$$

sind zwei verschiedene Wege, die jedoch zu derselben Kurve führen. Dagegen liefert

$$(iii) \quad \vec{h}(t) := \langle \cos t, -\sin t \rangle \quad (t \in [0, 2\pi])$$

eine andere Kurve (welche?).

### Bemerkung

Mathematisch erfolgt die Zusammenfassung von Wegen mit gleicher Spur und gleichem Durchlaufssinn mit Hilfe einer *Äquivalenzrelation*. In diesem Sinne sind die Wege (i) und (ii) des letzten Beispiels zueinander äquivalent, aber nicht zu dem Weg (iii).

Eine Kurve ist dann eine *Äquivalenzklasse* von Wegen, und jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt ein *Repräsentant* der entsprechenden Kurve. Im obigen Beispiel sind die beiden Wege (i) und (ii) Repräsentanten des einmal im positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreises.

## 13.2 Länge von Kurven - Kurvenintegrale erster Art

Die Länge einer Kurve in der Ebene oder im Raum ist intuitiv klar: man nehme die über eine Darstellung  $\vec{x}(\cdot)$  im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  gewonnene Linie wie eine frei schwebende Schnur an beiden Enden, strecke sie und messe die Länge der so gewonnenen Strecke auf einer Skala, die durch die Skala auf den Koordinatenachsen festgelegt ist.

Bei einer „glatten“ Kurve wird für zwei hinreichend benachbarte Punkte auf der Kurve das Kurvenstück zwischen den beiden Punkten fast wie eine Strecke sein, der Abstand der beiden Punkte also eine gute Näherung für die Länge des zwischen ihnen verlaufenden Kurvenstückchens.

Diese Vorstellung und ein Vorgehen mit Hilfe von Riemann'schen Summen wie zu Beginn des letzten Kapitels werden zu einem Integral führen, das dann zur Definition von *Kurvenlänge* benutzt wird. Ich beschränke mich dabei auf reguläre oder wenigstens stückweise reguläre Kurven:

### Definition 13.2

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{K}$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$ .

- (i)  $\mathcal{K}$  heißt *reguläre Kurve*, wenn  $\mathcal{K}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve ist und eine Darstellung  $\vec{x} \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  existiert mit

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad (t \in [a, b]).$$

Jede solche Darstellung nennt man dann eine *reguläre Darstellung* von  $\mathcal{K}$ .

- (ii)  $\mathcal{K}$  heißt *stückweise reguläre Kurve*, wenn  $N \in \mathbb{N}$  und reguläre Kurven  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$  existieren, für die gilt, daß der Endpunkt von  $\mathcal{K}_i$  gleich dem Anfangspunkt von  $\mathcal{K}_{i+1}$  ist für  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ . Man verwendet in einem solchen Fall die Notation

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_N.$$

### Bemerkung

Die zugrundeliegende Idee der Bedingung, daß der Tangentenvektor  $\dot{\vec{x}}(t)$  an keiner Stelle verschwindet, ist, daß die Kurve immer mit einer Minimalgeschwindigkeit  $\neq 0$  durchlaufen wird. Dadurch kann sich die Richtung nicht plötzlich ändern, und es können keine „Ecken“ entstehen.

### Beispiele 13.3

- (i)  $n = 2$ ,  $[a, b] := [0, 2\pi]$

$$\mathcal{K} : t \mapsto \vec{x}(t) := \langle \cos t, \sin t \rangle \quad (t \in [0, 2\pi])$$

ist der einmal im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufene Einheitskreis. Diese Kurve ist regulär, denn es gilt:

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \neq 0 \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

- (ii)  $n = 2$ ,  $[a, b] := [-1, 1]$

$$\mathcal{K} : t \mapsto \vec{x}(t) := \begin{cases} \langle t^2, -t^2 \rangle & , \quad -1 \leq t \leq 0 \\ \langle t^2, t^2 \rangle & , \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

ist eine  $\mathcal{C}^1$ -Darstellung von  $\mathcal{K}$ . Diese (und jede andere auch) läuft allerdings mit der Geschwindigkeit 0 durch die Knickstelle  $\langle 0, 0 \rangle$ . Somit ist diese Kurve *nicht* regulär.

### Aufgabe

Man skizziere den Wertebereich dieser Kurve und veranschauliche sich die Nicht-Regularität dieser Kurve.

Seien  $\mathcal{I} := [a, b]$ ,  $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{Z} := \{t_0, \dots, t_N\}$  eine Zerlegung von  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$  sei ein einbeschriebener Polygonzug, der aus (der Kurve  $\mathcal{K}$  einbeschriebenen stetig differenzierbaren) Geradenstücken zusammengesetzt ist, s. Abb. 13.1. Seine Länge ist gegeben durch

$$|\mathcal{P}(\mathcal{Z})| = \sum_{k=1}^N \|\vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1})\|;$$

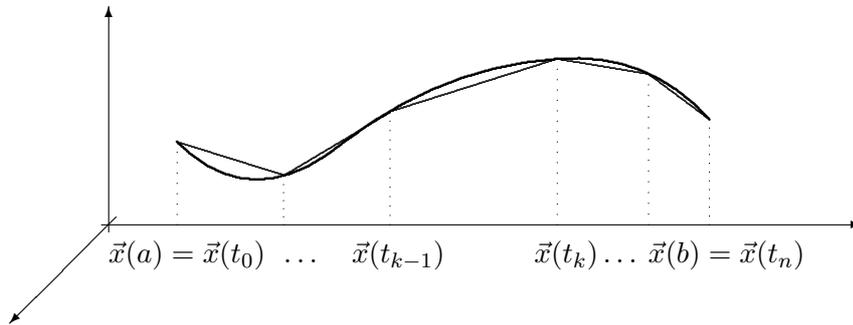


Abbildung 13.1: Polygon-Approximation einer regulären Kurve

diese Länge ist damit eine Approximation der Kurvenlänge  $L$ . Aufgrund von  $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$  ist  $\vec{x}$  im Intervall  $\mathcal{I}$  total differenzierbar:

$$\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t) = D\vec{x}(t) \cdot h + o(h)^1 \approx \dot{\vec{x}}(t) \cdot h \quad (t \in [a, b]),$$

mit  $h = (b-a)/N$ . Damit erhält man als Näherung für die Länge  $L$  der vorliegenden Kurve  $\mathcal{K}^2$ :

$$\begin{aligned} L &\approx |\mathcal{P}(\mathcal{Z})| = \sum_{k=1}^N \|\vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1})\| \\ &\approx \sum_{k=1}^N \|\dot{\vec{x}}(t_k)\| (t_k - t_{k-1}) \\ &\longrightarrow \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt \quad \text{für} \quad \|\mathcal{Z}\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

da der letzte Summenausdruck eine Riemann'sche Summe für das Integral ist.

### Definition 13.3

- (i) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{K}$  eine reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^n$ . Mit einem geeigneten Intervall  $[a, b]$  sei  $\vec{x}(\cdot) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  eine reguläre Darstellung von  $\mathcal{K}$ . Dann ist die *Länge der Kurve*  $\mathcal{K}$  definiert durch

$$|\mathcal{K}| := \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt \quad \left( = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)} dt \right).$$

<sup>1</sup>Hiermit ist ein sog. *Landau-Symbol* definiert:  $o(h)$  bedeutet, daß der eigentlich dort stehende Ausdruck für  $h \rightarrow 0$  auch dann noch gegen Null geht, wenn man ihn vorher durch  $h$  dividiert.

<sup>2</sup>Von den beiden im folgenden verwendeten „Ungefähr-Zeichen  $\approx$ “ hat es das zweite etwas in sich: will man hier korrekt arbeiten, so muß man dezidiert vorgehen: entweder verwendet man den Mittelwertsatz für jede Komponente der Vektordifferenz  $\vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1})$  *einzeln* oder man benutzt eine Argumentation wie im Buch von H. Heuser: *Analysis 2*, Teubner-Verlag, 3. Auflage 1986, Abschnitt 177.

- (ii) Sind  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  zwei Kurven derart, daß der Endpunkt von  $\mathcal{K}_1$  und der Anfangspunkt von  $\mathcal{K}_2$  gleich sind, so kann man die beiden Kurven zusammenhängen zu einer neuen Kurve,  $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$  geschrieben.
- (iii) Ist  $\mathcal{K}$  eine stückweise reguläre Kurve, gilt also mit geeignetem  $N \in \mathbb{N}$  und regulären Kurven  $\mathcal{K}_j$  ( $j \in \{1, \dots, N\}$ )

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_N,$$

dann wird definiert:

$$|\mathcal{K}| := |\mathcal{K}_1| + \dots + |\mathcal{K}_N|.$$

### Bemerkung

- (i) Die Regularität der Darstellung einer Kurve braucht man für den Beweis der Aussage, daß die Länge einer Kurve nicht von ihrer speziellen Darstellung abhängt.
- (ii) Mit den Bezeichnungen aus (i) der Definition oben nennt man  $\|\dot{\vec{x}}(t)\| dt$  auch (*skalares*) *Wegelement*  $ds$  und schreibt

$$|\mathcal{K}| = \int_{\mathcal{K}} ds := \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt.$$

- (iii) Ist  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  für ein eindimensionales Intervall  $[a, b]$ , dann ist durch

$$\mathcal{K} : t \longmapsto \vec{x}(t) := \langle t, f(t) \rangle \quad (t \in [a, b])$$

eine reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^2$  definiert, denn die Darstellung  $\vec{x}(\cdot)$  ist stetig differenzierbar, und es gilt

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \langle 1, f'(t) \rangle \neq 0 \quad (t \in [a, b]).$$

Insbesondere ist dann das Wegelement  $ds$  gleich  $\sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ , und die Länge der Kurve ist gegeben durch

$$|\mathcal{K}| = \int_{\mathcal{K}} ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

### Beispiel 13.4

Seien  $\varphi_0 > 0$  und

$$\mathcal{B} : \varphi \longmapsto \vec{x}(\varphi) := \langle \cos \varphi, \sin \varphi \rangle \quad (\varphi \in [0, \varphi_0]),$$

s. Abb. 13.2.

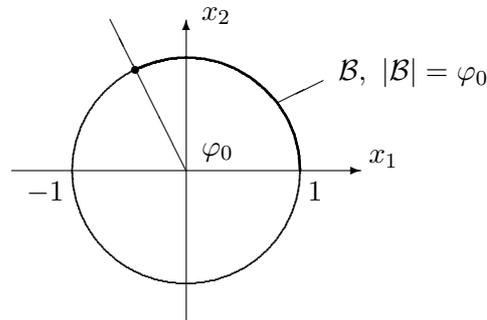


Abbildung 13.2: Parametrisierung des Einheitskreisbogens

Dann ist  $\vec{x}(\cdot)$  eine reguläre Darstellung (Beweis?), also  $\mathcal{B}$  eine reguläre Kurve, und es gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \int_{\mathcal{K}} ds = \int_0^{\varphi_0} \|\dot{\vec{x}}(\varphi)\| d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_0} d\varphi = \varphi_0. \end{aligned}$$

### Bemerkung

Im letzten Beispiel ist die Länge der Kurve  $\mathcal{B}$ , also die Länge des Kreisbogens zwischen 0 und  $\varphi_0$ , genauso groß wie die Länge des für die Darstellung benutzten Parameterintervalles  $[0, \varphi_0]$ . Das liegt daran, daß das Parameterintervall mit der Geschwindigkeit  $\|\dot{\vec{x}}(\varphi)\| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$  „durchfahren“ worden ist, um die Kurve  $\mathcal{B}$  abzutragen.

Eine solche Parametrisierung ist daher ausgezeichnet und bekommt einen Namen:

### Definition 13.4

Die Darstellung einer Kurve  $\mathcal{K}$  mit der Bogenlänge als Parameter heißt *natürliche Parametrisierung*, *kanonische Darstellung* oder *Parametrisierung mit der Bogenlänge*.

Es lassen sich jetzt auch Integrale über stetige reellwertige Funktionen definieren, welche auf einer stetig differenzierbaren Kurve definiert sind.

### Definition 13.5

Seien  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\vec{x}(t)$  für  $t \in [a, b]$  die Darstellung einer regulären Kurve  $\mathcal{K}$  im  $\mathbb{R}^n$ ; somit ist also die Abbildung  $f \circ \vec{x}$  definiert und

stetig. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{K}} f(s) ds := \int_a^b f(\vec{x}(t)) \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt$$

Kurvenintegral erster Art von  $f$  längs  $\mathcal{K}$ .

### Beispiel 13.5

Man berechne die Masse eines Drahtes, welcher hundert Mal auf den Einheitskreis aufgewickelt ist (Spule), dessen Dichte  $\rho$  nicht konstant ist, sondern mit dem Abstand von der  $x_1$ -Achse, ausgehend vom Wert 1, linear zunimmt.

### Lösung

Die Dichte ist gegeben durch die Funktion

$$\rho(\vec{x}) := 1 + |x_2| \quad (\vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2),$$

und der Einheitskreis  $\mathcal{EK}$  kann über die Bogenlänge parametrisiert werden:

$$\mathcal{EK} : t \longmapsto \vec{x}(t) := \langle \cos t, \sin t \rangle \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Dann ist die Masse des gesamten Drahtes gegeben durch

$$\begin{aligned} M &:= 100 \int_{\mathcal{EK}} \rho(s) ds = 100 \int_0^{2\pi} \rho(\vec{x}(t)) \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt \\ &= 100 \int_0^{2\pi} (1 + |\sin t|) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 200 \int_0^{\pi} (1 + \sin t) dt \\ &= 200 \left[ t - \cos t \right]_0^{\pi} = 200 (\pi - (-1) + 1) = 200 (2 + \pi). \end{aligned}$$

### Aufgabe

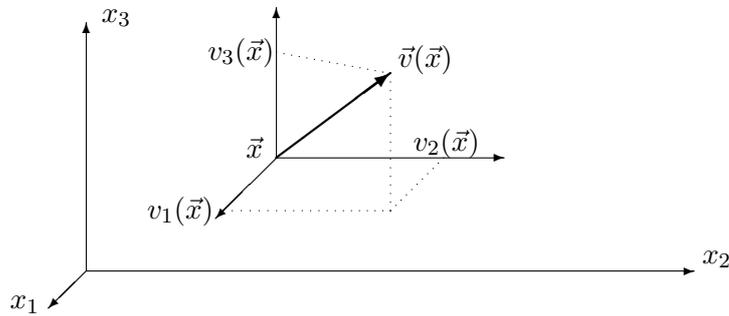
Man berechne dieselbe Aufgabe für den Fall, daß die Dichte mit dem Abstand von der  $x_2$ -Achse, ausgehend vom Wert 1, linear zunimmt. Warum ergibt sich derselbe Wert?

## 13.3 Kurvenintegrale zweiter Art

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet und

$$\vec{v}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{eigentlich: } \mathbb{V}^3)$$

eine stetige Abbildung, welche als Vektorfeld interpretiert wird:

Abbildung 13.3: Vektorfeld  $\vec{v}$ , am Punkt  $\vec{x}$  abgetragen

In jedem Punkt  $\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathcal{G}$  denkt man sich ein lokales Koordinatensystem, und  $\vec{v}(\vec{x})$  ist dann der am Nullpunkt dieses Systems – also  $\vec{x}$  – abgetragene Orstvektor von  $\vec{v}(\vec{x})$ , s. Abb. 13.3.

Diese Vektorfelder sind mathematische Beschreibungen physikalischer *Kraftfelder*, etwa des Gravitationsfeldes oder eines elektrischen - oder magnetischen Feldes.

Sei nun

$$\mathcal{K} : t \longmapsto \vec{x}(t) \quad (t \in [a, b])$$

eine Kurve in  $\mathcal{G}$ , d.h. es gelte  $W(\vec{x}) \subseteq \mathcal{G}$ .

### Interpretation

$\vec{x}$  ist der Weg eines Teilchens, das dem Kraftfeld  $\vec{v}$  unterliegt.  $\vec{x}(t)$  ist der Ort dieses Teilchens zur Zeit  $t$ , und an diesem Ort ist das Teilchen der herrschenden Kraft ausgesetzt, also der Kraft

$$\vec{v}(\vec{x}(t)) \quad (t \in [a, b]).$$

Die Energie, die ein solches Teilchen in dem Kraftfeld gewinnt oder verliert, ist eine fundamentale physikalische Größe.

1. Das Feld sei homogen, und das Teilchen bewege sich auf einer Strecke ( $\vec{a}$ : Anfangspunkt,  $\vec{b}$ : Endpunkt), s. Abb. 13.4:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &:= \vec{v}_0 \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}) & \vec{x}(0) &= \vec{a} \quad , \quad \vec{x}(1) = \vec{b} \\ \vec{x}(t) &:= \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (1-t) \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} & (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

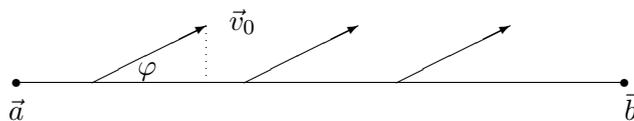


Abbildung 13.4: Bewegung auf einer Strecke in einem homogenen Kraftfeld

Der Energiegewinn ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta E &:= \|\vec{v}_0\| \cdot \|\vec{b} - \vec{a}\| \cdot \cos \varphi \\ &= (\vec{v}_0, \vec{b} - \vec{a}) = \left( \vec{v}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right) \quad (t \in [0, 1]).\end{aligned}$$

2. Das Feld sei nicht mehr homogen, aber noch stetig. Die Bahn des Teilchens sei durch eine stetig differenzierbare Kurve gegeben:

$$\mathcal{K}: t \longmapsto \vec{x}(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Im Zeitintervall  $[a, b]$  wählt man nun eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$$

gemäß Abb. 13.5. Der Energiegewinn beim Durchlaufen des (nicht notwendig homogenen) Feldes entlang dieser Kurve ist näherungsweise durch den Energiegewinn gegeben, der beim Durchlaufen des eingeschriebenen Polygons entsteht, also beim Durchlaufen endlich vieler Strecken.

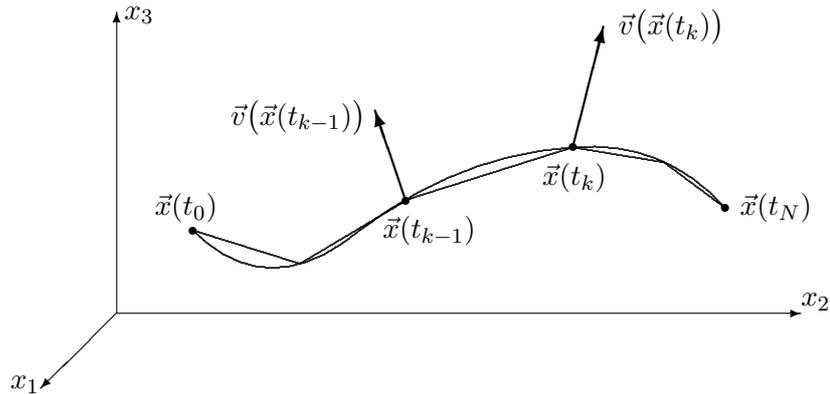


Abbildung 13.5: Approximation einer stetig differenzierbaren Kurve durch ein Polygon

Näherungsweise erhält man

$$\begin{aligned}\Delta E &\approx \sum_{k=1}^N \left( \vec{v}(\vec{x}(t_{k-1})), \vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^{n=3} v_{\mu}(\vec{x}(t_{k-1})) \cdot [x_{\mu}(t_k) - x_{\mu}(t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^{n=3} v_{\mu}(\vec{x}(t_{k-1})) \cdot \dot{x}_{\mu}(\tau_{k\mu}) \cdot (t_k - t_{k-1})\end{aligned}$$

nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf jede der einzelnen  $n = 3$  Komponenten  $x_{\mu}$  von  $\vec{x}$ , wobei gilt:

$$t_{k-1} < \tau_{k\mu} < t_k \quad (\mu \in \{1, \dots, n = 3\}).$$

Macht man nun die Zerlegung  $\mathcal{Z}$  immer feiner, so erhält man aufgrund der Stetigkeit aller Summanden den Grenzwert

$$\sum_{\mu=1}^{n=3} \int_a^b v_{\mu}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{x}_{\mu}(t) dt = \int_a^b \left( \vec{v}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right) dt,$$

wobei  $\dot{\vec{x}}(t)$  der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zur Zeit  $t$  ist.

Dieses Integral wird interpretiert als Gesamtarbeit, welche das Kraftfeld verrichtet, um das Teilchen vom Anfangspunkt  $\vec{a}$  des Weges zu seinem Endpunkt  $\vec{b}$  zu transportieren, und zwar entlang des Weges  $\vec{x}$ . Man bezeichnet es daher auch als *Arbeitsintegral* oder *Energieintegral*.

### Bemerkung

Die Arbeit hängt nicht von der Geschwindigkeit ab, mit der sie bewältigt wird. Wenn ein Teilchen auf der gleichen Bahn mit einer anderen Geschwindigkeit durch das Feld läuft, so wird physikalisch die gleiche Arbeit verrichtet (ob man einen Eimer Wasser schnell oder langsam vier Treppen hochträgt, führt zum selben Gewinn an potentieller Energie, mithin zur selben am Eimer Wasser gegen das Gravitationsfeld verrichteten Arbeit).

In die mathematische Sprache übersetzt heißt das aber nichts Anderes, als daß das oben definierte Integral nicht von der Wahl der Darstellung  $\vec{x}(\cdot)$  der Kurve  $\mathcal{K}$  abhängen darf. Das läßt sich für verschiedene Repräsentanten ein und derselben Kurve streng beweisen und soll hier an zwei Beispielen demonstriert werden.

### Beispiel 13.6

$$\mathcal{G} := \mathbb{R}^2 \quad , \quad \vec{v}(\vec{x}) := \langle x_1^2 + x_2^2, 2x_1x_2 \rangle \quad (\vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathcal{G})$$

Die Darstellung des Vektorfeldes ist in Abb. 13.6 zu sehen.

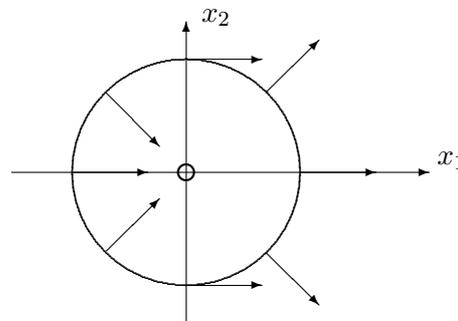


Abbildung 13.6: Unabhängigkeit der Energie von der Geschwindigkeit des Durchlaufes durch ein Vektorfeld

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \vec{x}(t) &:= \langle \cos t, \sin t \rangle && (t \in [0, 2\pi]) \\
\int_0^{2\pi} \left( \vec{v}(\vec{x}(t)), \dot{x}(t) \right) dt &= \int_0^{2\pi} \left( \left( \begin{array}{c} \cos^2 t + \sin^2 t \\ 2 \cos t \sin t \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -\sin t \\ \cos t \end{array} \right) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 \cdot (-\sin t) - 2 \cos^2 t (-\sin t)) dt \\
&= \left[ \cos t - \frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi} = 1 - \frac{2}{3} - \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \vec{y}(t) &:= \langle \cos t^2, \sin t^2 \rangle && (t \in [0, \sqrt{2\pi}]) \\
\rightarrow \dot{\vec{y}}(t) &= 2 \langle -2t \sin 2t, 2t \cos 2t \rangle \\
\int_0^{\sqrt{2\pi}} \left( \vec{v}(\vec{y}(t)), \dot{\vec{y}}(t) \right) dt &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \left( \left( \begin{array}{c} \cos^2 t^2 + \sin^2 t^2 \\ 2 \cos t^2 \sin t^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -2t \sin t^2 \\ 2t \cos t^2 \end{array} \right) \right) dt \\
&= \int_0^{\sqrt{2\pi}} (1 \cdot (-2t \sin t^2) - 2t \cos^2 t^2 (-\sin t^2) \cdot 2) dt \\
&= \left[ \cos t^2 - \frac{2}{3} \cos^3 t^2 \right]_0^{\sqrt{2\pi}} = 1 - \frac{2}{3} - \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Beide Repräsentantendarstellungen liefern somit denselben Wert des Integrals, d.h. der Wert des Integrals ist von der speziellen Wahl des Repräsentanten unabhängig.

Man gelangt daher zu der folgenden Definition:

**Definition 13.6**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\vec{v} \in (\mathcal{C}^0(\mathcal{G}))^n$  (stetiges Vektorfeld auf  $\mathcal{G}$ ).

(i) Ist  $\mathcal{K}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $\mathcal{G}$ ,

$$t \longmapsto \vec{x}(t) \quad (t \in [a, b])$$

eine stetig differenzierbare Darstellung von  $\mathcal{K}$ , dann ist das *Kurvenintegral über  $\vec{v}$  längs der Kurve  $\mathcal{K}$*  (auch: *Kurvenintegral zweiter Art*) definiert durch

$$\boxed{\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) := \int_a^b \left( \vec{v}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right) dt} \quad (13.1)$$

- (ii) Ist  $\mathcal{K}$  eine *stückweise stetig differenzierbare Kurve*, also eine stetige Kurve, welche aus (stetigen) differenzierbaren Teilen zusammengesetzt ist ( $\mathcal{K} := \sum_{k=1}^N \mathcal{K}_k$ , Abb. 13.7),

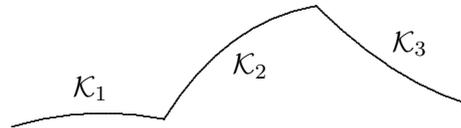


Abbildung 13.7: Aus stetig differenzierbaren Stücken zusammengesetzte Kurve

so definiert man:

$$\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) := \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{K}_k} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) \quad (13.2)$$

- (iii) Der Ausdruck

$$d\vec{x} := \dot{\vec{x}}(t) dt$$

wird auch als *vektorielles Wegelement* bezeichnet.

### Beispiel 13.7

Seien  $D, m, R, h > 0$  und  $g$  die Fallbeschleunigung. Ein Massenpunkt werde gegen eine Kraft  $\vec{F}$  längs einer Schraubenlinie der Ganghöhe  $h$  und des Grundkreisradius  $R$  bewegt:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) &= \vec{F}_1(\vec{x}) + \vec{F}_2(\vec{x}) \\ &= -D \cdot \vec{x} - mg \cdot \vec{e}_3 \\ &= (\text{elastische Kraft} + \text{Schwerkraft}) \end{aligned}$$

Schraubenlinie  $\mathcal{K}$ :

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h/(2\pi) \cdot t \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Man erhält für den Integranden längs  $\mathcal{K}$ :

$$\begin{aligned} \vec{F}[\vec{x}(t)] &= -D \cdot \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h/(2\pi) \cdot t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ h/(2\pi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die aufzuwendende Energie wird dann durch das Energieintegral (13.1) geliefert:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{K}} (\vec{F}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_{\mathcal{K}} (\vec{F}_1(\vec{x}), d\vec{x}) + \int_{\mathcal{K}} (\vec{F}_2(\vec{x}), d\vec{x}) \\
 &= \int_0^{2\pi} (-D) \left( \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h/(2\pi) \cdot t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ h/(2\pi) \end{pmatrix} \right) dt \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ h/(2\pi) \end{pmatrix} \right) dt \\
 &= -D \int_0^{2\pi} \left[ -R^2 \sin t \cos t + R^2 \sin t \cos t + \frac{h^2}{4\pi^2} t \right] dt \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{mgh}{2\pi} \right] dt \\
 &= \left[ -\frac{Dh^2}{4\pi^2} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{mgh}{2\pi} \cdot t \right]_0^{2\pi} dt \\
 &= -\frac{Dh^2}{2} - mgh \\
 &= (\text{Spannarbeit} + \text{Hubarbeit})
 \end{aligned}$$

### Beispiel 13.8

Eine punktförmige positive elektrische Ladung  $Q$  befinde sich im Ursprung  $O$  eines Koordinatensystems. In der Umgebung von  $Q$  beobachtet man dann Kraftwirkungen auf andere elektrischen Ladungen; man sagt,  $Q$  erzeuge um sich herum ein *elektrisches Feld*.

Die auf eine Probeladung<sup>3</sup>  $q$  im Raumpunkt  $\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$  von  $Q$  ausgeübte Kraft ist die *Coulomb-Kraft*

$$\vec{F}(\vec{x}) := \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = q \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

Es soll nun die Arbeit berechnet werden, die erforderlich ist,  $q$  vom Punkt  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  (Anfangspunkt) an einen Ort  $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$  (Endpunkt) zu bringen, etwa längs der Verbindungsstrecke von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$ .

Parametrisierung der Verbindungsstrecke:

$$\vec{r}(t) := \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (1-t) \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \quad (t \in [0, 1])$$

Diese Parametrisierung der Verbindungsstrecke könnte man benutzen. Tatsächlich kann man hier sogar darauf verzichten und parametrisiert den Weg

<sup>3</sup>Unter einer Probeladung versteht man eine (ideale) Ladung, die so klein ist, daß sie das um sie herum existierende elektrische Feld nicht beeinflusst.

überhaupt nicht, d.h. man verwendet einen beliebigen stetig differenzierbaren Weg mit dem Anfangspunkt  $\vec{a}$  und dem Endpunkt  $\vec{b}$ . Dann erhält man für das Arbeitsintegral den Wert

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{K}} (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) &= \int_0^1 (\vec{F}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t)) dt \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3}, \dot{\vec{r}}(t) \right) dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \left( \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3}, \dot{\vec{r}}(t) \right) dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^3 r_k(t) \cdot \dot{r}_k(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3} dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|} \right) \cdot \frac{dr_k}{dt}(t) dt \\
 \text{(mehrdimensionale Kettenregel)} &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|} \right) dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(1)\|} + \frac{1}{\|\vec{r}(0)\|} \right) \\
 &= -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|\vec{b}\|} - \frac{1}{\|\vec{a}\|} \right)
 \end{aligned}$$

### Ergebnis

Der Wert des Integrals hängt nur vom Abstand des Anfangspunktes des Weges zu seinem Endpunkt ab und nicht davon, auf welchem speziellen Weg die Probeladung innerhalb des Feldes von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$  verbracht worden ist. Physikalisch bedeutet das Integral den *Potentialunterschied* zwischen den Punkten  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Kurvenintegrale über Vektorfelder, deren Wert nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt, spielen eine große Rolle und werden im nächsten Abschnitt eingehend untersucht.

### Beispiel 13.9

Das Magnetfeld um einen (unendlich lang gedachten) von einem Gleichstrom  $I$  durchflossenen Draht längs der  $x_3$ -Achse ist gegeben durch das Vektorfeld (Abb. 13.8)

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3) := \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1^2 + x_2^2 \neq 0).$$

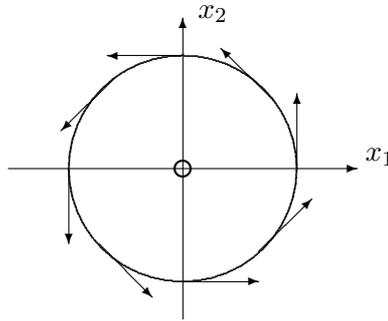


Abbildung 13.8: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Die Norm von  $\vec{H}(\vec{x})$  an der Stelle  $\vec{x}$  ist umgekehrt proportional zum Abstand von der  $x_3$ -Achse (Zylinderradius  $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , ohne  $x_3$ !):

$$\|\vec{H}(\vec{x})\| = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

Im folgenden soll die Arbeit des Magnetfeldes längs verschiedener Wege vom Anfangspunkt  $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle$  zum Endpunkt  $\vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle$  berechnet werden. Er-sichtlich handelt es sich hier im wesentlichen um ein zweidimensionales Problem; der Deutlichkeit halber wird die dritte Koordinate dennoch mitgeführt.

(1.) Geradlinige Verbindung von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$ :

Eine Parametrisierung dieses Weges ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

Für die durch diesen Weg definierte Kurve  $\mathcal{K}_1$  erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_1} (\vec{H}(\vec{r}), d\vec{r}) &= \frac{I}{2\pi} \int_0^1 \left( \begin{pmatrix} \frac{-t}{(1-t)^2+t^2} \\ \frac{1-t}{(1-t)^2+t^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2} dt = \frac{I}{2\pi} \int_0^1 \frac{2}{1+(2t-1)^2} dt \\ [u:=2t-1] &= \frac{I}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u^2} du = \frac{I}{2\pi} [\arctan u]_{-1}^{+1} = \frac{I}{4} \end{aligned}$$

(2.) Kreisbogen von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$  im positiven Sinne:

Eine Parametrisierung dieses Weges ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in [0, \pi/2])$$

Für die durch diesen Weg definierte Kurve  $\mathcal{K}_2$  erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_2} (\vec{H}(\vec{r}), d\vec{r}) &= \frac{I}{2\pi} \int_0^1 \left( \left( \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) dt \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \frac{I}{4} \end{aligned}$$

(3.) Geradlinige Verbindung von  $\vec{a}$  nach  $\vec{c} := \langle 1, 1, 0 \rangle$ , dann geradlinig von  $\vec{c}$  nach  $\vec{b}$ :

Hier erhält man ebenfalls (s. eine Hausaufgabe)

$$\int_{\mathcal{K}_3} (\vec{H}(\vec{r}), d\vec{r}) = \dots = \frac{I}{4}$$

(4.) Kreisbogen von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$  im negativen Sinne:

$$\int_{\mathcal{K}_4} (\vec{H}(\vec{r}), d\vec{r}) = \dots = -\frac{3I}{4} \quad (!)$$

### Ergebnis

Entgegen der ersten Vermutung ist dieses Integral *doch* vom Weg abhängig. Der Grund dafür ist, daß die Bewegung eines gedachten magnetischen Monopols längs einer magnetischen Feldlinie um den Leiter herum eine positive oder negative Arbeit erfordert, s. Abb. 13.8.

Insbesondere ist das Kurvenintegral über einen geschlossenen Weg ungleich Null, wenn der Weg den Leiter mit einschließt.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>In der Physik ist  $\int_{\mathcal{C}} \vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}$  die *magnetische Spannung*. Ist  $\mathcal{C}$  eine geschlossene Kurve, so ist die Notation  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}$  üblich, und man spricht bei  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}(\vec{x})d\vec{x}$  von *Ringspannung*.

## 13.4 Wegunabhängigkeit - Konservative Vektorfelder

In diesem Abschnitt sollen diejenigen Vektorfelder charakterisiert werden, bei denen die (Werte der) Kurvenintegrale (zweiter Art) nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen aber nicht davon, mit welcher Kurve die beiden Punkte verbunden werden, solange diese im Definitionsbereich des Feldes bleibt.

### Bemerkung

In den Beispielen 13.7 und 13.8 treten Vektorfelder auf, bei denen das Kurvenintegral nicht vom Verbindungsweg abhängt:

$$\text{Beispiel 13.7:} \quad \vec{F}(\vec{x}) = -D \cdot \vec{x} - mg \cdot \vec{e}_3 \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$$\text{Beispiel 13.8:} \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\})$$

(i) Beispiel 13.7:

$$\int_{\kappa} (\vec{F}(\vec{x}), d\vec{x}) = -\frac{Dh^2}{2} - mgh$$

Die Energie hängt nur von der Federkonstante  $D$  und der Höhe  $h$  ab, nicht davon, auf welchem Weg der Massenpunkt vom Anfangspunkt zum Endpunkt des Weges verbracht worden ist; dies ist allerdings noch kein Beweis; s. dazu Beispiele 13.10, wo für dieses Vektorfeld auch ein Potential angegeben wird.

(ii) Beispiel 13.8:

$$\int_{\kappa} (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) = -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|\vec{b}\|} - \frac{1}{\|\vec{a}\|} \right)$$

Hier wurde die Wegunabhängigkeit mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel direkt verifiziert: die Energie hängt nur vom Abstand des Anfangspunktes vom Endpunkt des Weges ab, nicht davon, auf welchem Weg die Probeladung dorthin verbracht worden ist.

Anders in Beispiel 13.9: hier tritt ein Kurvenintegral auf, dessen Wert vom Weg abhängt, mit dem Anfangs- und Endpunkt miteinander verbunden werden.

Erinnert werde an Definition 10.2 einer zusammenhängenden Menge, also insbesondere eines Gebietes:

Eine Menge  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei disjunkten offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist. Für offene und zusammenhängende Mengen – also Gebiete – gilt darüberhinaus, daß sich je zwei Punkte aus  $\mathcal{G}$  durch einen Weg (stetig!) verbinden lassen, welcher ganz in  $\mathcal{G}$  verläuft.

**Definition 13.7**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$ , also  $\vec{v}$  ein stetiges Vektorfeld in  $\mathcal{G}$ .

$\vec{v}$  heißt in  $\mathcal{G}$  *konservativ*, wenn für je zwei in  $\mathcal{G}$  verlaufende stetige und stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt:

$$\int_{\mathcal{K}_1} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\mathcal{K}_2} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$$

**Bemerkung**

(i) Das Prädikat „konservativ“ stammt aus der Physik. Dort werden Felder konservativ genannt, bei denen der Satz von der Erhaltung (Konservierung) der Summe von kinetischer und potentieller Energie gilt.

(ii) Statt „ $\vec{v}$  ist in  $\mathcal{G}$  konservativ“ sagt man auch:

$$\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ vom Weg unabhängig.}$$

(wobei  $\mathcal{K}$  hier als Kurvenvariable fungiert)

(iii) Ist  $\vec{v}$  in  $\mathcal{G}$  konservativ, so gilt für jede geschlossene stetige und stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $\mathcal{G}$ :

$$\oint_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) := \int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = 0.$$

Das Integral  $\oint_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$  nennt man auch ein *Kontourintegral*.

**Ziel im Folgenden**      Charakterisierung konservativer Vektorfelder

Dazu soll noch einmal die Berechnung des Kurvenintegrals des Coulomb-Feldes

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \quad (\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\})$$

aus Beispiel 13.8, p. 172 analysiert werden. Die dort durchgeführte Rechnung

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{K}} (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) &= \int_0^1 (\vec{F}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t)) dt \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3}, \dot{\vec{r}}(t) \right) dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \left( \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3}, \dot{\vec{r}}(t) \right) dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^3 r_k(t) \cdot \dot{r}_k(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3} dt \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|} \right) \cdot \frac{dr_k}{dt}(t) dt \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \left( \vec{\nabla} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|} \right), \dot{\vec{r}}(t) \right) dt \\
 \text{(mehrdimensionale Kettenregel)} &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|} \right) dt \\
 &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\|\vec{r}(1)\|} + \frac{1}{\|\vec{r}(0)\|} \right) \\
 &= -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|b\|} - \frac{1}{\|a\|} \right)
 \end{aligned}$$

macht an den Stellen (\*) und (\*\*) vor der Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel davon Gebrauch, daß sich das Vektorfeld  $\vec{F}$  als Gradient einer skalaren Funktion  $\phi$ , eines sog. *Skalarfeldes* darstellen läßt:

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{x}) &:= -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|} && \implies \\
 \vec{F}(\vec{x}) &= (\vec{\nabla}\phi)(\vec{x}) = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} && (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\})
 \end{aligned}$$

Ohne diese Möglichkeit hätte man die Integration an der Stelle nicht durchführen, keine „Stammfunktion“ finden können.

### Definition 13.8

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v}$  ein stetiges Vektorfeld in  $\mathcal{G}$ .

- (i) Eine reellwertige Funktion  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine *Stammfunktion* von  $\vec{v}$  in  $\mathcal{G}$ , wenn gilt:

$$\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \quad , \quad \vec{\nabla} \phi = \vec{v}$$

In einem solchen Fall heißt  $\vec{v}$  ein *Gradientenfeld*.

- (ii) In der Physik heißt

$$U := -\phi$$

das *Potential* des Vektorfeldes  $\vec{v}$ , und man sagt,  $\vec{v}$  besitze ein Potential.

Genauer müßte man  $U$  *ein* (nicht *das*) Potential von  $\vec{v}$  nennen, denn mit  $U$  ist auch jede Funktion  $U + c$  ( $c$ : Konstante) ein Potential. „Das“ Potential ist also überhaupt nicht eindeutig bestimmt, sondern nur Potentialdifferenzen.

### Ergebnis

Das von einer Punktladung  $Q$  erzeugte elektrische Feld ist ein Potentialfeld:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) &= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad , \quad U(\vec{x}) := -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|} \\ \implies \vec{F}(\vec{x}) &= -(\vec{\nabla} U)(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}) \end{aligned}$$

Im folgenden Satz wird eine Charakterisierung von Gradientenfeldern geliefert. Grob gesprochen, ist der Inhalt:

Ein stetiges Vektorfeld  $\vec{v}$  in einem Gebiet  $\mathcal{G}$  ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn das Kurvenintegral über  $\vec{v}$  in  $\mathcal{G}$  wegunabhängig ist.

Um den Wert eines Kurvenintegrals eines Gradientenfeldes zu berechnen, braucht man daher „nur“ eine Stammfunktion zu bestimmen und muß diese dann an den Endpunkten des Weges auswerten.

### Satz 13.1

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v}$  ein stetiges Vektorfeld in  $\mathcal{G}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Im Gebiet  $\mathcal{G}$  besitzt  $\vec{v}$  ein Potential  $U$ , d.h. es existiert eine Funktion  $U \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$  mit der Eigenschaft

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} U.$$

- (ii) Für alle in  $\mathcal{G}$  verlaufenden stetigen und stückweise differenzierbaren Kurven  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt

$$\int_{\mathcal{K}_1} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\mathcal{K}_2} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = 0.$$

- (iii) Für jede in  $\mathcal{G}$  verlaufende stetige und stückweise differenzierbare geschlossene Kurve  $\mathcal{K}$  ist

$$\oint_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) := \int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = 0.$$

### Beispiele 13.10

- (i) Beispiel 13.7:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -D \cdot \vec{x} - mg \cdot \vec{e}_3 = -\vec{\nabla} \left( \frac{D}{2} \|\vec{x}\|^2 + mg \cdot x_3 \right) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

- (ii) Beispiel 13.8:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = -\vec{\nabla} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\})$$

### Bemerkung

- (i) Das Ergebnis des letzten Satzes wird, vom praktischen Standpunkt aus gesehen, nicht voll befriedigen, denn die Berechnung eines Kurvenintegrals kann sehr mühsam sein, ja auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen. Weitaus zweckmäßiger wäre es, anstelle eines „Integrationskriteriums“ ein „Differentiationskriterium“ zur Verfügung zu haben. Unter geeigneten Voraussetzungen, die in den Anwendungen sehr oft erfüllt sind, läßt sich ein solches Differentiationskriterium in der Tat beweisen; das wird im nächsten Abschnitt geschehen.
- (ii) Das dritte Beispiel (Beispiel 13.9)

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1^2 + x_2^2 \neq 0)$$

liefert kein wegunabhängiges Kurvenintegral. Dennoch existiert für  $x_1 > 0, x_2 > 0$  eine Stammfunktion (Potential), nämlich

$$\phi(x_1, x_2, x_3) := \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad (x_1, x_2 > 0, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Das scheint dem letzten Satz zu widersprechen, aber nur scheinbar:

Das Potential existiert nicht in ganz  $\mathcal{G}$  als stetig differenzierbare Funktion!

### Aufgabe

Im Gebiet  $\mathcal{G} := \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ , dem Definitionsbereich des Magnetfeldes  $\vec{H}$ , ist die Potentialfunktion  $\phi$  nicht stetig differenzierbar. Warum nicht, und in welchem(n) Teilgebiet(en) hat sie diese Eigenschaft?

## 13.5 Rotation von Vektorfeldern

In diesem Abschnitt soll ein „Differentiationskriterium“ bereitgestellt werden, mit dessen Hilfe in vielen (nicht allen!) Fällen auf die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals geschlossen werden kann; nach dem letzten Abschnitt ist das äquivalent zur Existenz eines Potentials.

### Satz 13.2

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$  (stetig differenzierbar!).  $\vec{v}$  sei ein Gradientenfeld, d.h.

$$\bigvee_{\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})} \bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})$$

Dann sind die Ableitungen von  $\vec{v}$  symmetrisch, d.h.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}, \vec{x} \in \mathcal{G})$$

### Bemerkung

- (i) Wegen der Voraussetzung  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$  muß  $\phi$  sogar aus  $\mathcal{C}^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$  sein.
- (ii) Die Bedingungen dieses Satzes heißen auch *Integrabilitätsbedingungen*. Sie sind nur notwendig, i.a. ohne weitere Voraussetzungen noch nicht hinreichend.

### Beweis

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge bei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen:

Im Falle  $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$  ist nämlich

$$v_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (j \in \{1, \dots, n\}),$$

und daher gilt

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

In den Fällen  $n \in \{2, 3\}$  soll die Symmetriebedingung einmal explizit hingeschrieben werden:

$$\underline{n = 2} : \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\underline{n = 3} : \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$$

Diese Beziehungen geben Anlaß zu einer neuen Definition.

**Definition 13.9**

Seien  $n \in \{2, 3\}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$  (ein stetig differenzierbares Vektorfeld). Dann heißt für  $\vec{x} \in \mathcal{G}$

$$\underline{n = 2} : \quad (\text{rot } \vec{v})(\vec{x}) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x})$$

$$\underline{n = 3} : \quad (\text{rot } \vec{v})(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von  $\vec{v}$  an der Stelle  $\vec{x}$ .

**Bemerkung**

- (i) Der Begriff „Rotation“<sup>5</sup> hat etwas mit der Vorstellung einer rotierenden Strömung zu tun; das wird im Anschluß an diese Bemerkung erläutert.
- (ii) Die Rotation läßt sich auch in Fällen  $n \notin \{2, 3\}$  definieren, erfordert dann aber etwas mehr technischen Aufwand (s. R. Wüst: Höhere Mathematik für Physiker).
- (iii) Im Fall  $n = 3$  ist auch  $\text{rot } \vec{v}$  ein Vektorfeld und läßt sich mit Hilfe des formalen Operators  $\vec{\nabla}$  als Vektorprodukt berechnen:

$$(\text{rot } \vec{v})(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \times \vec{v})(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & v_1(\vec{x}) \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & v_2(\vec{x}) \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

<sup>5</sup>In der angelsächsischen Literatur als *curl* bezeichnet

(iv)  $\mathcal{C}^1$ -Felder mit der Eigenschaft

$$(\operatorname{rot} \vec{v})(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

heißen *wirbelfrei*. Damit läßt sich der letzte Satz kurz so formulieren:

Potentialfelder sind wirbelfrei.

### Zum Namen „Rotation“

Man betrachte das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x})$  einer Strömung in der Nähe des Nullpunktes. Es soll gemessen werden, wie schnell diese Strömung um die  $x_3$ -Achse rotiert. Dazu denkt man sich dort um diese Achse ein drehbares Rad vom Radius  $R$  angebracht, s. Abb. 13.9.

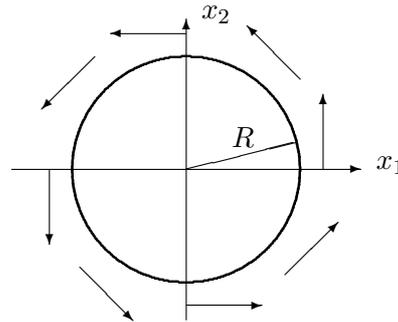


Abbildung 13.9: Um die  $x_3$ -Achse drehbares Rad

Das Rad werde beschrieben durch die Parametrisierung über den Winkel  $\varphi$ :

$$\vec{x}(\varphi) := \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

Im Punkt  $\vec{x}(\varphi)$  bewirkt die Strömung ein Drehmoment  $D(\varphi)$ , welches proportional zur Tangentialkomponente von  $\vec{v}[\vec{x}(\varphi)]$  ist, also zum Skalarprodukt von  $\vec{v}[\vec{x}(\varphi)]$  und dem Tangenteneinheitsvektor von  $\vec{x}'(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} D(\varphi) &= \left( \vec{v}(\vec{x}(\varphi)), \frac{\vec{x}'(\varphi)}{\|\vec{x}'(\varphi)\|} \right) = \left( \vec{v}(\vec{x}(\varphi)), \frac{1}{R} \vec{x}'(\varphi) \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}(\varphi)) \\ v_2(\vec{x}(\varphi)) \\ v_3(\vec{x}(\varphi)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\varphi \in [0, 2\pi]). \end{aligned}$$

Die Größe  $\vec{v}[\vec{x}(\varphi)]$  wird jetzt mit Hilfe des totalen Differentials approximiert:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(\vec{x}(\varphi)) &\approx \vec{v}(\vec{0}) + D\vec{v}(\vec{0})\vec{x}(\varphi) \\
 &= \vec{v}(\vec{0}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{0}) & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{0}) & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{0}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{0}) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{0}) & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{0}) \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{0}) & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{0}) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\vec{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \vec{v}(\vec{0}) + \begin{pmatrix} R \cos \varphi \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{0}) + R \sin \varphi \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{0}) \\ R \cos \varphi \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{0}) + R \sin \varphi \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \vec{v}(\vec{0}) + R \cos \varphi \cdot D_1 \vec{v}(\vec{0}) + R \sin \varphi \cdot D_2 \vec{v}(\vec{0})
 \end{aligned}$$

Damit ist das gesamte am Rad angreifende Drehmoment ungefähr gegeben durch

$$\begin{aligned}
 D &:= \int_0^{2\pi} D(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( v(\vec{x}(\varphi)), \frac{\vec{x}'(\varphi)}{\|\vec{x}'(\varphi)\|} \right) d\varphi \\
 &\approx \int_0^{2\pi} \left( \vec{v}(\vec{0}), \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\varphi \\
 &\quad + R \int_0^{2\pi} \left( D_1 \vec{v}(\vec{0}), \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \varphi \\ \cos^2 \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\varphi + R \int_0^{2\pi} \left( D_2 \vec{v}(\vec{0}), \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\varphi
 \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \varphi \cos \varphi}_{\frac{1}{2} \sin 2\varphi} d\varphi = 0 \\
 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi
 \end{aligned}$$

bleiben von dem letzten Ausdruck nur die folgenden beiden übrig:

$$D \approx R\pi D_1 v_2(\vec{0}) - R\pi D_2 v_1(\vec{0}) = R\pi [D_1 v_2(\vec{0}) - D_2 v_1(\vec{0})].$$

Das *mittlere Drehmoment* erhält man nach Division durch den Kreisumfang. Somit ergibt sich

$$\bar{D} := \frac{D}{2\pi R} \approx \frac{1}{2} [D_1 v_2(\vec{0}) - D_2 v_1(\vec{0})] = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{v})(\vec{0}).$$

Die Größe  $\frac{1}{2} (\operatorname{rot} \vec{v})(\vec{0})$  beschreibt also die „Rotationskomponente“ von  $\vec{v}(\vec{x})$  für  $\vec{x} = \vec{0}$  um die  $x_3$ -Achse.

Ebenso berechnet man die Komponenten um die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse, und der aus diesen drei Komponenten gebildete Vektor beschreibt dann die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$  im Nullpunkt.

### Beispiel 13.11

Seien  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$  mit  $\|\vec{a}\| = 1$  und  $\vec{v}$  das Vektorfeld, definiert durch

$$\vec{v}(\vec{x}) := \omega(\vec{a} \times \vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{V}^3)$$

#### Beh

$\vec{v}$  ist das Geschwindigkeitsfeld einer um die (durch den Vektor  $\vec{a}$  definierte) Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Strömung, s. Abb. 13.10.

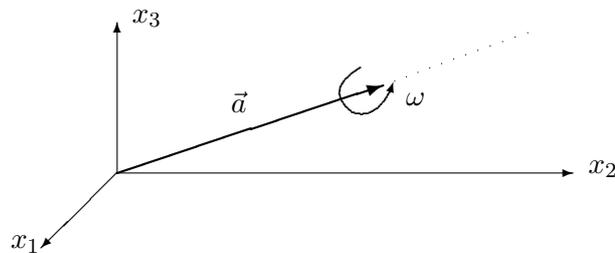


Abbildung 13.10: Um die Achse  $\vec{a}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierende Strömung

#### Beweis

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= \omega(\vec{a} \times \vec{x}) = \omega \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \omega \begin{pmatrix} D_2(a_1x_2 - a_2x_1) - D_3(a_3x_1 - a_1x_3) \\ D_3(a_2x_3 - a_3x_2) - D_1(a_1x_2 - a_2x_1) \\ D_1(a_3x_1 - a_1x_3) - D_2(a_2x_3 - a_3x_2) \end{pmatrix} = 2\omega \vec{a}. \end{aligned}$$

An jeder Stelle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \sim \mathbb{V}^3$  ist  $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x})$  parallel zu  $\vec{a}$ , der Rotationsachse.

### Beispiel 13.12

Sei  $\vec{E}$  das von der im Ursprung liegenden Punktladung  $Q$  erzeugte elektrische Feld, also (cf. Beispiel 13.8)

$$\vec{E}(\vec{x}) := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3} \\ \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3} \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

Durch partielle Differentiation folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} 2x_2x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5 + \frac{3}{2} 2x_3x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5 \\ -\frac{3}{2} 2x_3x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5 + \frac{3}{2} 2x_1x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5 \\ -\frac{3}{2} 2x_1x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5 + \frac{3}{2} 2x_2x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Ergebnis

Das elektrische Feld einer Punktladung ist wirbelfrei. Dieses Ergebnis hätte man allerdings auch anders einsehen können, da Potentialfelder stets wirbelfrei sind:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}), \\ \phi(\vec{x}) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}), \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) &= -\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi(\vec{x})) = [(\operatorname{rot} \operatorname{grad}) \phi](\vec{x}) \\ &= \begin{pmatrix} D_2D_3\phi(\vec{x}) - D_3D_2\phi(\vec{x}) \\ D_3D_1\phi(\vec{x}) - D_1D_3\phi(\vec{x}) \\ D_1D_2\phi(\vec{x}) - D_2D_1\phi(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als „Gedächtnisstütze“ kann man das mit dem formalen „Vektor“

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

auch so einsehen:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \times \vec{E})(\vec{x}) = -(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi)(\vec{x}) = -[(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})\phi](\vec{x}) = \vec{0}.$$

Aus diesem Beispiel folgt allgemein:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \vec{0} \quad (\phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})),$$

d.h. Potentialfelder sind wirbelfrei.

**Beispiel 13.13**

Sei  $\vec{H}$  das (ringförmige) Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters längs der  $x_3$ -Achse (cf. Beispiel 13.9), also

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1^2 + x_2^2 \neq 0).$$

Dann rechnet man nach:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} D_2 0 - D_3 \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ D_3 \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} - D_1 0 \\ D_1 \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - D_2 \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Ergebnis**

Das Magnetfeld eines unendlich langen geradlinigen Leiters ist – dort, wo es definiert ist, also für  $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$  – wirbelfrei.

**13.6 Einfach zusammenhängende Gebiete**

Nach Satz 13.1 ist das Kurvenintegral über ein Vektorfeld  $\vec{v}$  genau dann vom Weg unabhängig, wenn  $\vec{v}$  ein Gradientenfeld ist (Integralkriterium). Satz 13.2 im Zusammenhang mit der Bemerkung auf p. 182 erweitert diesen Zusammenhang auf ein Differentiationskriterium. Es liegt somit die folgende Kette von Aussagen vor:

$$\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ vom Weg unabhängig : } \oint (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = 0$$

$$\iff \vec{v} \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ ein Gradientenfeld : } \vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

$$\implies \text{Wirbelfreiheit von } \vec{v} \text{ in } \mathcal{G} : \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

Schön wäre es, wenn die Wirbelfreiheit eines Vektorfeldes (Differentiationskriterium!) auch hinreichend für die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals wäre, die dadurch beschriebene Arbeit dann nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhinge. Beispiel 13.9 des ringförmigen Magnetfeldes eines stromdurchflossenen Leiters zeigt, daß sich die letzte Implikation ohne zusätzliche Voraus-

setzungen nicht umkehren läßt:

$$(i) \quad \mathcal{G} := \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x} : x_3 = 0\}$$

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

$$(ii) \quad \vec{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

$$\int_{\mathcal{K}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) = I \neq 0 \quad (\text{Integral über einen geschlossenen Weg})$$

$$(iii) \quad \text{rot } \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

In diesem Gegenbeispiel ist die geschlossene Kurve  $\mathcal{K}$  so gewählt, daß sie die Achse  $\{\vec{x} : x_3 = 0\}$  umfährt, also einen Bereich, der nicht zum (dreidimensionalen) Gebiet  $\mathcal{G}$  gehört:

$\mathcal{G}$  hat bei  $x_3 = 0$  ein „Loch“, ist nicht „einfach zusammenhängend“.

Die genaue Definition dieses Begriffes ist nicht einfach, grob sei vereinbart:

### Definition 13.10

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.  $\mathcal{G}$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sich jede geschlossene Linie in  $\mathcal{G}$  auf einen Punkt zusammenziehen läßt, ohne daß dabei  $\mathcal{G}$  verlassen wird.

Im  $\mathbb{R}^2$  ist etwa  $\mathcal{G}$  nicht einfach zusammenhängend, wenn  $\mathcal{G}$  „Löcher“ hat; im  $\mathbb{R}^3$  ist  $\mathcal{G}$  nicht einfach zusammenhängend, wenn eine „Röhre“ von Rand zu Rand durch  $\mathcal{G}$  geht.

### Beispiele 13.14

- (i) Eine Scheibe Schweizer Käse, aufgefaßt als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , ist nicht einfach zusammenhängend.
- (ii) Ein Stück Schweizer Käse, aufgefaßt als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , ist einfach zusammenhängend.
- (iii) Ein Mensch, aufgefaßt als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , ist nicht einfach zusammenhängend.

### Aufgabe

- (i) Ist ein Kreisring im  $\mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend?

(ii) Ist eine Kugelschale im  $\mathbb{R}^3$  einfach zusammenhängend?

### Satz 13.3

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $\mathcal{K}$  eine Kurve in  $\mathcal{G}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Das Kurvenintegral  $\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$  ist vom Weg unabhängig:

$$\oint (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = 0$$

(ii)  $\vec{v}$  ist ein Gradientenfeld:  $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$

(iii)  $\vec{v}$  ist wirbelfrei:  $\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$

### Bemerkung

(i) Für einfach zusammenhängende Gebiete, also insbesondere konvexe und sternförmige Gebiete hat man damit die zu Anfang dieses Abschnittes gesuchte Äquivalenz erhalten.

(ii) In Beispiel 13.9 und Beispiel 13.13 des ringförmigen Magnetfeldes gilt:

(a)  $\oint (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) \neq 0 \quad (\text{keine Wegunabhängigkeit})$

(b)  $\text{rot } \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (x_3 \neq 0)$

(c)  $\phi(\vec{x}) := \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (x_1, x_2 > 0) \quad \text{ist ein Potential!}$

Dieses Potential existiert allerdings nur in einem Teilbereich von  $\mathcal{G}$ .

### Beispiel 13.15

Führt man einer abgeschlossenen Menge eines idealen Gases mit den Zustandsgrößen  $\langle p_1, V_1, T_1 \rangle$  eine Wärmemenge  $Q$  zu, so geht sie in den Zustand  $\langle p_2, V_2, T_2 \rangle$  über. Die Wärmemenge dient der Steigerung der inneren Energie des Gases und zur Aufbringung der Expansionsarbeit. Es gilt die Gleichung

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{dU}{dt}(t) + p(t) \cdot \frac{dV}{dt}(t) \quad (t \geq 0).$$

(Zur leichteren Lesbarkeit werden hier die Variablen  $p, V, T$  mit den Funktionen  $p = f_p(\cdot), V = f_V(\cdot), T = f_T(\cdot)$  identifiziert, wie das bei Ingenieuren ja auch üblich ist.)

Für die *spezifische innere Energie*  $u := U/m$  gilt nach der Kettenregel<sup>6</sup> bei konstantem Volumen ( $v := V/m$  bezeichne das *spezifische Volumen*)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{\partial u}{\partial T}(T, v) \cdot \frac{dT}{dt}(t) + \frac{\partial u}{\partial v}(T, v) \cdot \frac{dv}{dt}(t) \\ &= c_v(T) \cdot \frac{dT}{dt}(t) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial v}(T, v)}_0 \cdot \frac{dv}{dt}(t) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Bei einem idealen Gas ist } \partial u / \partial v = 0 \\ \text{(Gay-Lussac'scher Überströmversuch)} \end{array} \right] \\ &= c_v(T) \cdot \frac{dT}{dt}(t) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit  $c_v(T)$  als *spezifischer Wärmekapazität bei konstantem Volumen*<sup>7</sup>. Setzt man den Ausdruck  $\frac{dU}{dt}(t) = m \frac{du}{dt}(t)$  unter Verwendung der *idealen Gasgleichung*

$$pV = mRT \quad \iff \quad p(t)V(t) = mRT(t) \quad (t \geq 0)$$

in die Gleichung für  $Q$  ein, so folgt

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \underbrace{(mc_v)}_{v_1} \frac{dT}{dt}(t) + \underbrace{\left( \frac{mRT(t)}{V(t)} \right)}_{v_2} \frac{dV}{dt}(t) \quad (t \geq 0).$$

Hieraus folgt durch Integration die gesamte Wärmezufuhr, die das Gas vom Zustand I in den Zustand II überführt. Ist diese Überführung vom Weg abhängig? Wenn ja, dann ist  $Q$  keine *Zustandsgröße*, sondern eine *Prozeßgröße*.

Wenn nicht, dann muß sich die rechte Seite als Gradient einer skalaren Funktion schreiben lassen, dazu ist die Integrabilitätsbedingung aus Satz 13.2 bei einfach zusammenhängendem Gebiet hinreichend. Wegen

$$\frac{\partial v_2}{\partial T}(T, V) = \frac{mR}{V} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_1}{\partial V}(T, V) = 0$$

ist diese aber nicht erfüllt, es ist  $\text{rot } \vec{v} = \text{rot} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Damit ist die Wärmezufuhr  $Q$  vom Weg abhängig, mithin eine *Prozeßgröße*. Je nach gewähltem Weg von I nach II, z.B.

(i) erst *isobar* ( $p = \text{const.}$ ), dann *isochor* ( $V = \text{const.}$ ) oder

<sup>6</sup>Formal korrekt müßte man bei der Kettenregel eine neue Variable einführen:  $u$  hängt *entweder* von  $t$  oder von  $T$  und  $v$  ab. Man könnte dann etwa wie folgt schreiben:

$$u(t) := \tilde{u}(T(t), v(t)) \quad \implies \quad \frac{du}{dt}(t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}(T(t), v(t)) \cdot \frac{dT}{dt}(t) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}(T(t), v(t)) \cdot \frac{dv}{dt}(t)$$

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit und in Anlehnung an die Behandlung in den Ingenieurwissenschaften soll das hier jedoch unterbleiben.

<sup>7</sup>Außer bei einatomigen idealen Gasen ist  $c_v(T)$  bei idealen Gasen allein temperaturabhängig, bei realen Gasen auch noch druckabhängig. Da diese Abhängigkeit rechnerisch sehr kompliziert ist, rechnet man in der Praxis meistens mit Mittelwerten – in der Regel auch wieder  $c_v$  genannt –, welche über einen geeigneten Temperaturbereich genommen werden unter der Bedingung, daß sich der Aggregatzustand dabei nicht ändert.

Objekt	Mathematik	Thermodynamik
Variablenvektor	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} T \\ V \end{pmatrix}$
Vektorfeld	$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$	$\vec{v}(T, V) = \begin{pmatrix} T \\ V \end{pmatrix}$
Kurvenintegral	$\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$	$\int_I^II \left( \begin{pmatrix} v_1(T, V) \\ v_2(T, V) \end{pmatrix}, d \begin{pmatrix} T \\ V \end{pmatrix} \right)$ $=$ $\int_I^II (v_1(T, V) dT + v_2(T, V) dV)$

Tabelle 13.1: Bezeichnungen in der Mathematik und in der Thermodynamik

(ii) erst *isotherm* ( $T = \text{const.}$ ) bis  $V_2$ , dann *isochor* ( $V = \text{const.}$ ) bis  $T_2$

(iii) etc.

wird jeweils eine verschiedene Wärmemenge benötigt.

### Bemerkung

In der Thermodynamik werden Kurvenintegrale für gewöhnlich etwas anders bezeichnet als in der Mathematik. Dieser bezeichnungstechnische Unterschied soll im folgenden kurz dargestellt werden, s. Tab. 13.1.

Betrachtet man jedoch die durch  $T$  dividierte Gleichung

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dQ}{dt}(t) = \underbrace{\frac{mc_v}{T(t)} \frac{dT}{dt}(t)}_{w_1} + \underbrace{\left( \frac{mR}{V(t)} \right) \frac{dV}{dt}(t)}_{w_2} \quad (t \geq 0),$$

so gilt hier

$$\frac{\partial w_2}{\partial T}(T, V) = \frac{\partial w_1}{\partial V}(T, V) = 0,$$

also gibt es ein Potential  $S = \phi(T, V)$  mit

$$(\vec{\nabla}\phi)(T, V) = \begin{pmatrix} w_1(T, V) \\ w_2(T, V) \end{pmatrix},$$

und es ist

$$\begin{aligned}
 \int_I^{II} \frac{1}{T} dQ &= \int_I^{II} \left( \left( \frac{mc_v}{T} \right), d \left( \begin{array}{c} T \\ V \end{array} \right) \right), \\
 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{T(t)} \frac{dQ}{dt}(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \frac{mc_v}{T(t)} \right), \left( \begin{array}{c} \dot{T}(t) \\ \dot{V}(t) \end{array} \right) \right) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \vec{\nabla} \phi(T(t), V(t)), \left( \begin{array}{c} \dot{T}(t) \\ \dot{V}(t) \end{array} \right) \right) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt}(T(t), V(t)) dt = \int_{S_I}^{S_{II}} d\phi = S_{II} - S_I
 \end{aligned}$$

unabhängig vom gewählten Weg. Die Funktion  $S = \phi(T, V)$  beschreibt den Zustand des Gases selbst, da der Weg, auf den das Gas in diesen Zustand gelangte, keinen Einfluß auf den Wert von  $S$  hat.  $S$  heißt *Entropie* und ist eine Zustandsgröße.

### Aufgabe

Für das Integral

$$\begin{aligned}
 \int_I^{II} \left( mc_v dT + \frac{mRT}{V} dV \right) &:= \int_I^{II} \left( \left( \frac{mc_v}{T} \right), d \left( \begin{array}{c} T \\ V \end{array} \right) \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \frac{mc_v}{T(t)} \right), \left( \begin{array}{c} \dot{T}(t) \\ \dot{V}(t) \end{array} \right) \right) dt
 \end{aligned}$$

zeige man die Wegabhängigkeit, indem man vom Zustand I in den Zustand II folgende Wege wählt, s. Abb. 13.11 und 13.12:

(i) isotherm, isochor

(ii) isochor, isotherm

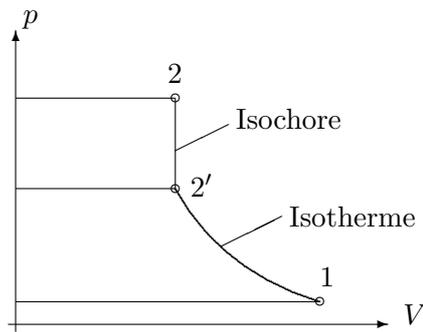


Abbildung 13.11: isotherm, isochor

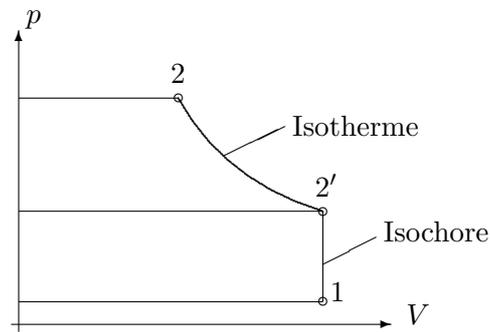


Abbildung 13.12: isochor, isotherm

**Hinweis**

(i) isotherm, isochor:

$$\begin{aligned}
 & \int_I^{II'} \left( mc_v dT + \frac{mRT_1}{V} dV \right) + \int_{II'}^{II} \left( mc_v dT + \frac{mRT}{V_2} dV \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \begin{array}{c} mc_v \\ \frac{mRT(t_1)}{V(t)} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ \dot{V}(t) \end{array} \right) \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \begin{array}{c} mc_v \\ \frac{mRT(t)}{V(t_2)} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \dot{T}(t) \\ 0 \end{array} \right) \right) dt \\
 &= \dots ?
 \end{aligned}$$

(ii) isochor, isotherm:

$$\begin{aligned}
 & \int_I^{II'} \left( mc_v dT + \frac{mRT}{V_1} dV \right) + \int_{II'}^{II} \left( mc_v dT + \frac{mRT_2}{V} dV \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \begin{array}{c} mc_v \\ \frac{mRT(t_1)}{V(t_1)} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \dot{T}(t) \\ 0 \end{array} \right) \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \begin{array}{c} mc_v \\ \frac{mRT(t_2)}{V(t)} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ \dot{V}(t) \end{array} \right) \right) dt \\
 &= \dots ?
 \end{aligned}$$

**13.7 Berechnung von wegunabhängigen Kurvenintegralen**

Ist ein Vektorfeld  $\vec{v}$  in einem Gebiet  $\mathcal{G}$  ein Potentialfeld (etwa, weil das Gebiet einfach zusammenhängend und  $\vec{v}$  wirbelfrei ist), so hängt der Wert des Kurvenintegrals  $\int_{\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$  nicht von der speziellen Kurve  $\mathcal{K}$  ab, wenn diese ganz in

$\mathcal{G}$  verläuft und den Anfangspunkt  $\vec{a}$  mit einem Punkt  $\vec{\xi}$  verbindet. Es läßt sich also *irgendeine* Kurve wählen, um den Wert

$$\phi(\vec{\xi}) := \int_{\vec{a}}^{\vec{\xi}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$$

zu bestimmen.

**Beispiel 13.16** (bestimmte Integration)

Sei  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein offenes Rechteck. Dann ist es am bequemsten, achsparallel von

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2 \rangle \quad \text{nach} \quad \vec{b} := \langle b_1, b_2 \rangle$$

zu integrieren, s. Abb. 13.13.

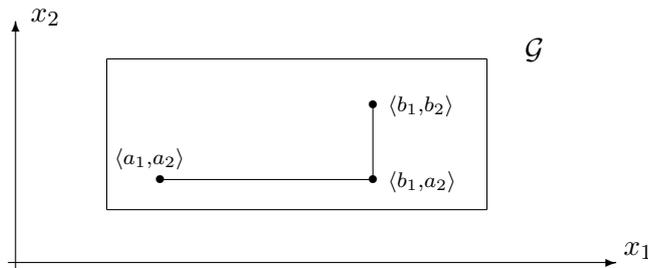


Abbildung 13.13: Achsparallele Integration innerhalb eines Rechtecks  $\mathcal{G}$

Dann erhält man

(a) Weg von  $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$  nach  $\langle b_1, a_2 \rangle$ :

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\langle a_1, a_2 \rangle}^{\langle b_1, a_2 \rangle} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^1 (\vec{v}[\vec{x}(t)], \dot{\vec{x}}(t)) dt \\ &= \int_0^1 v_1 \left[ \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 \end{pmatrix} \right] \cdot (b_1 - a_1) dt \\ [x_1(t) := a_1 + t(b_1 - a_1)] &= \int_{a_1}^{b_1} v_1(x_1, a_2) dx_1 \end{aligned}$$

(b) Weg von  $\langle b_1, a_2 \rangle$  nach  $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ :

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\langle b_1, a_2 \rangle}^{\langle b_1, b_2 \rangle} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^1 (\vec{v}[\vec{x}(t)], \dot{\vec{x}}(t)) dt \\ &= \int_0^1 v_2 \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{pmatrix} \right] \cdot (b_2 - a_2) dt \\ [x_2(t) := a_2 + t(b_2 - a_2)] &= \int_{a_2}^{b_2} v_2(b_1, x_2) dx_2\end{aligned}$$

(c) Gesamter Weg von  $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$  nach  $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ :

$$\phi(\vec{b}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{a_1}^{b_1} v_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^{b_2} v_2(b_1, t) dt$$

(d) Konkret:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &:= \mathbb{R}^2, \quad \vec{v}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} \\ \text{rot } \vec{v}(\vec{x}) &= D_1 v_2(\vec{x}) - D_2 v_1(\vec{x}) = 3x_1^2 - 3x_1^2 = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

$\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, also existiert eine

Stammfunktion  $\phi$ . Sei  $\vec{a} \in \mathcal{G}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{b}) &= \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} v_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^{b_2} v_2(b_1, t) dt \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} 3t^2 a_2 dt + \int_{a_2}^{b_2} b_1^3 dt \\
 &= a_2 [t^3]_{a_1}^{b_1} + b_1^3 [t]_{a_2}^{b_2} \\
 &= a_2 b_1^3 - a_2 a_1^3 + b_1^3 b_2 - b_1^3 a_2 \\
 &= b_1^3 b_2 - a_1^3 a_2 = [x_1^3 x_2]_{\langle a_1, a_2 \rangle}^{\langle b_1, b_2 \rangle}
 \end{aligned}$$

mit der Stammfunktion  $\phi(\vec{x}) := x_1^3 x_2$  ( $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ).

**Beispiel 13.17** (unbestimmte Integration)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos x_1 \sin(x_2^2 x_3) \\ 2x_2 x_3 (1 + \sin x_1) \cos(x_2^2 x_3) \\ x_2^2 (1 + \sin x_1) \cos(x_2^2 x_3) + 2x_3 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

Man stellt fest:

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D_2 v_3(\vec{x}) - D_3 v_2(\vec{x}) \\ D_3 v_1(\vec{x}) - D_1 v_3(\vec{x}) \\ D_1 v_2(\vec{x}) - D_2 v_1(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Übung!})$$

Da der gesamte Raum  $\mathbb{R}^3$  einfach zusammenhängend ist, ist die Voraussetzung von Satz 13.3 erfüllt, und  $\vec{v}$  ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine reellwertige Funktion  $\phi$  mit

$$\vec{v}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3).$$

Eine solche Funktion  $\phi$  soll nun durch unbestimmte Integration ermittelt werden. Dazu geht man schrittweise vor und fängt o.B.d.A. bei  $x_1$  an:

(1) Differentiation von  $\phi$  nach  $x_1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) &= v_1(\vec{x}) = \cos x_1 \sin(x_2^2 x_3) \\
 \longrightarrow \phi(\vec{x}) &= \sin x_1 \sin(x_2^2 x_3) + f_1(x_2, x_3)
 \end{aligned}$$

Die „Integrationskonstante“ (bzgl.  $x_1$ ) ist hier also eine Funktion der beiden restlichen Variablen  $x_2$  und  $x_3$ .

- (2) Die unter (1) ermittelte Funktion  $\phi$  wird jetzt nach  $x_2$  differenziert und das Ergebnis mit  $v_2(\vec{x})$  verglichen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\vec{x}) &= 2x_2x_3 \sin x_1 \cos(x_2^2x_3) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) \\ &\stackrel{!}{=} v_2(\vec{x}) = 2x_2x_3(1 + \sin x_1) \cos(x_2^2x_3) \quad \Longleftrightarrow \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) &= 2x_2x_3 \cos(x_2^2x_3) \\ f_1(x_2, x_3) &= \sin(x_2^2x_3) + f_2(x_3)\end{aligned}$$

mit der „Integrationskonstante“  $f_2(x_3)$ .

- (3) Das Ergebnis von (2) wird jetzt in (1) eingesetzt, und man erhält

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \sin x_1 \sin(x_2^2x_3) + f_1(x_2, x_3) \\ &= (1 + \sin x_1) \sin(x_2^2x_3) + f_2(x_3).\end{aligned}$$

- (4) Nun erfolgt eine Differentiation nach  $x_3$  und ein Vergleich mit  $v_3$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(\vec{x}) &= x_2^2(1 + \sin x_1) \cos(x_2^2x_3) + f'(x_3) \\ &\stackrel{!}{=} v_3(\vec{x}) = x_2^2(1 + \sin x_1) \cos(x_2^2x_3) + 2x_3 \quad \Longleftrightarrow \\ f_2'(x_3) &= 2x_3 \quad , \quad f_2(x_3) = x_3^2 + C\end{aligned}$$

mit der nun echten Integrationskonstante  $C$ .

- (5) Das Ergebnis von (4) wird jetzt in (3) eingesetzt, und man erhält eine Stammfunktion

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \sin x_1 \sin(x_2^2x_3) + f_2(x_3) \\ &= (1 + \sin x_1) \sin(x_2^2x_3) + x_3^2 + C.\end{aligned}$$

# Kapitel 14

## Oberflächenintegrale

Neben der Integration über ebene und räumliche Bereiche benötigt man in den Anwendungen häufig die Integration über gekrümmte Flächenstücke im Raum.

### Analogon

Die Ersetzung eines eindimensionalen Intervalles im  $\mathbb{R}^1$  durch eine „eindimensionale“ Menge im  $\mathbb{R}^n$  – einen Weg – führt vom gewöhnlichen eindimensionalen Riemann-Integral zum Kurvenintegral. Genauso wird die Ersetzung einer zweidimensionalen Menge im  $\mathbb{R}^2$  – etwa eines Rechteckes – durch eine „zweidimensionale“ Menge im  $\mathbb{R}^n$  (eine Fläche) von einem gewöhnlichen zweidimensionalen Riemann-Integral zu dem sog. *Oberflächenintegral* führen, s. Abb. 14.1.

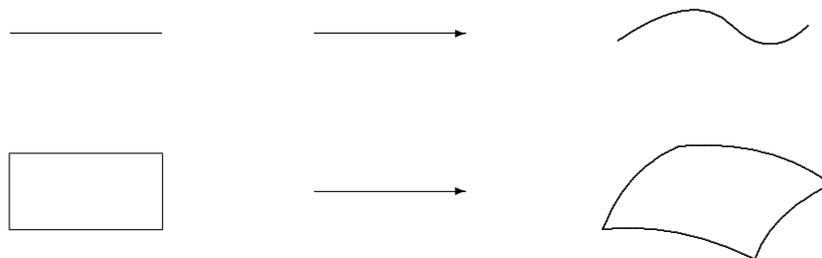


Abbildung 14.1: Kurve und gekrümmte Fläche im Raum

### Beispiel 14.1

Mit Hilfe einer Kugelkappe  $\mathcal{K}$  läßt sich ein räumlicher Winkelbereich definieren, s. Abb. 14.2.

Die von einer Antenne in diesen Winkelbereich abgestrahlte Energie kann man bestimmen, indem man über die Kappe die Energiedichte mißt und integriert.

## 14.1 Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ - Tangentialebene

Analog zum Kurvenbegriff muß aus der anschaulichen Vorstellung einer Fläche etwas gemacht werden, mit dem man rechnen kann. Die Vorstellung, man könne

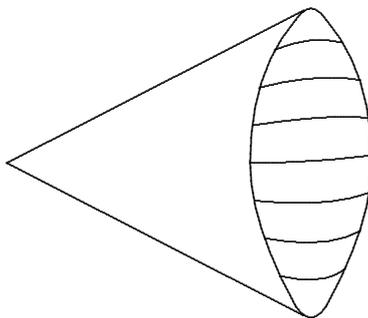


Abbildung 14.2: Räumlicher Winkelbereich

ein krummes Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$  glattbügeln, auf eine Ebene legen und so die Punkte des Flächenstückes mit einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  identifizieren, legt es nahe, Flächen im  $\mathbb{R}^3$  mit gewissen (Mengen von) Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$  zu identifizieren, analog zu den Kurven als Äquivalenzklassen von Wegen.

Für  $n > 3$  werden dann „Flächen“ durch Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^{n-1}$  in den  $\mathbb{R}^n$  dargestellt. Solche „Flächen“ sind in gewissem Sinne  $(n-1)$ -dimensional, man nennt sie *Hyperflächen*. In den Anwendungen benötigt man natürlich so gut wie ausschließlich den Fall  $n = 3$ , und daher sollte man sich alle der im folgenden eingeführten Begriffe auch im  $\mathbb{R}^3$  vorstellen. Da sich z.B. aber auch die regulären Kurven (s. Kapitel 13) in dieser Darstellung wiederfinden ( $n = 2$ ), soll dieser Abschnitt doch etwas allgemeiner abgehandelt werden.

Gebraucht werden nun vor allem solche Flächen, die „Randflächen“ von (dreidimensionalen) Gebieten sind, etwa die sechs Begrenzungsflächen eines Würfels. Daher werden im folgenden nur solche Flächen betrachtet, die lokal aussehen wie ein Stück des  $\mathbb{R}^2$ , also keine Ecken und Kanten haben. Die Übertragung der Bedingung

$$\dot{\vec{x}}(t) \neq 0 \quad (t \in [a, b])$$

für eine reguläre Kurve ist dann die Bedingung, daß die Darstellungen von Flächen maximalen Rang haben.

### Definition 14.1

Sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

- (i) Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  ein Gebiet (im Fall  $n = 2$  also ein offenes Intervall) und  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$ .  $\vec{p}$  heißt auf  $\mathcal{G}$  *regulär*, wenn gilt:

$$\text{rg } D\vec{p}(\vec{u}) = n - 1 \quad (\vec{u} \in \mathcal{G}) \quad \wedge \quad \vec{p} \text{ ist (global) injektiv.}$$

- (ii) Seien  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  Gebiete und  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{q} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}, \mathbb{R}^n)$  zwei reguläre Abbildungen.  $\vec{p}$  heißt *äquivalent* zu  $\vec{q}$ , wenn gilt:

Es existiert eine bijektive Abbildung (Abb. 14.3)

$$\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$$

mit  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}, \mathbb{R}^{n-1})$ ,  $\det D\phi(\vec{v}) \neq 0$  ( $\vec{v} \in \mathcal{H}$ ) und

$$\vec{p}(\phi(\vec{v})) = \vec{p}(\vec{u}) = \vec{q}(\vec{v}) \quad (\vec{v} \in \mathcal{H}).$$

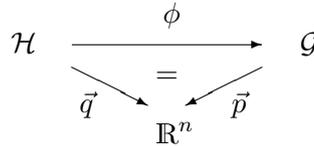


Abbildung 14.3: Äquivalente Darstellungen einer Fläche

### Bemerkung

- (i) Sind  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  reguläre Abbildungen,  $\phi$  wie oben, dann existiert die Umkehrabbildung

$$\phi^{-1} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H},$$

und es gilt  $\phi^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^{n-1})$ ,  $\det D\phi^{-1}(\vec{u}) \neq 0$  ( $\vec{u} \in \mathcal{G}$ ).

Damit ist die in Teil (ii) der letzten Definition erklärte Relation *symmetrisch*. Sie ist offensichtlich *reflexiv* ( $\phi = id$ ) und *transitiv* ( $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ ), insgesamt also eine Äquivalenzrelation.

- (ii) Im Fall  $n = 2$  mit  $\mathcal{G} = (a, b)$  ist

$$D\vec{p}(u) = (\vec{p}')'(u) \quad (u \in (a, b)),$$

und  $\text{rg } D\vec{p}(u) = 1$  bedeutet:

$$\vec{p}'(u) \neq 0 \quad (u \in (a, b)).$$

Bis auf den Unterschied, daß der Definitionsbereich von  $\vec{p}$  offen ist, ist dann  $\vec{p}$  eine reguläre Darstellung einer  $\mathcal{C}^1$ -Kurve im  $\mathbb{R}^2$ .

- (iii) In Definition 14.3 wird diese Definition dahingehend abgeschwächt, daß die geforderte Injektivität und Rangbedingung auf Nullmengen von  $\mathcal{G}$  nicht mehr zu gelten brauchen, also etwa auf dem Rand  $\dot{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$  nicht mehr.

### Definition 14.2

Sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Eine Äquivalenzklasse bzgl. der in der letzten Definition erklärten Äquivalenzrelation auf der Menge der regulären Abbildungen aus  $\mathbb{R}^{n-1}$  in den  $\mathbb{R}^n$  heißt eine *offene reguläre Hyperfläche* im  $\mathbb{R}^n$ , jeder Repräsentant heißt eine *reguläre Darstellung* dieser Hyperfläche.

**Bemerkung**

Sind  $\mathcal{F}$  eine offene reguläre Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  und  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$  eine reguläre Darstellung von  $\mathcal{F}$ , also  $\mathcal{F} = [\vec{p}]$  (Äquivalenzklasse), so schreibt man dafür wie bei Kurven

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{G}).$$

Oft ist es auch so, daß man von einer Darstellung ausgeht und die Fläche dann als Äquivalenzklasse dieser Darstellung definiert. Geometrisch bleibt natürlich die Vorstellung dieser Fläche wie zu Beginn des Abschnittes erhalten, d.h. man stellt sich als Fläche den Wertebereich einer ihrer Darstellungen vor. Das ist durchaus in Ordnung, solange klar ist, wie man mit dem Begriff mathematisch umzugehen hat. Für verschiedene Repräsentanten  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathcal{F}$  gilt ja insbesondere  $W(\vec{p}) = W(\vec{q})$ .

**Beispiele 14.2**

(i) Seien  $R > 0$  und

$$\mathcal{G} := \{ \langle x_1, x_2 \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < R^2 \}$$

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \quad (\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathcal{G})$$

Dann ist  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$  (Beweis?), und

$$\mathcal{F} : \langle x_1, x_2 \rangle \longmapsto \vec{p}(\vec{x}) := \langle x_1, x_2, \sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \rangle$$

ist eine reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

Geometrisch ist  $\mathcal{F}$  die obere Hälfte der Oberfläche der Kugel vom Radius  $R$  und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, wobei die „Äquatorlinie“ nicht mehr dazugehört.

**Zur Regularität von  $\mathcal{F}$ :**

Mit  $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathcal{G}$  ist

$$D\vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(\vec{u}) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(\vec{u}) \end{pmatrix}$$

mit  $\text{rg } D\vec{p}(\vec{u}) = 3 - 1 = 2$ . Offensichtlich ist  $\vec{p}$  auch global injektiv, also invertierbar.

**Aufgabe**

Welches ist die Umkehrabbildung?

(ii) Seien  $R > 0$  wie unter (i) und

$$\mathcal{G} := \{\langle \phi, \theta \rangle : \langle \phi, \theta \rangle \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)\}$$

$$\mathcal{F} : \langle \phi, \theta \rangle \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) := \langle R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \rangle.$$

Dann ist  $\mathcal{F}$  die Oberfläche der Kugel vom Radius  $R$  und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, wobei diesmal der „Nullmeridian“  $\{\langle \phi, \theta \rangle : \phi = 0, \theta \in [0, \pi]\}$  nicht mehr dazugehört, da  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  kein Gebiet ist. Auch diese Abbildung ist im Definitionsgebiet regulär.

### Bemerkung

(i) Der Graph einer differenzierbaren Funktion  $f : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$  ist eine glatte Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , welche sich auf verschiedene Arten parametrisieren läßt. Eine Möglichkeit ist jedenfalls die folgende:

Der „Fußpunkt“  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  eines jeden Flächenpunktes  $\langle x_1, x_2, f(x_1, x_2) \rangle \in \mathbb{R}^3$  liefert natürliche Koordinaten  $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$ . Die Parametrisierung ist dann gegeben durch

$$\vec{p}(u_1, u_2) := \langle u_1, u_2, f(u_1, u_2) \rangle \quad (\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle \in \mathcal{G}),$$

wie in (i) des letzten Beispiels (Beispiel 14.2) ausgeführt.

(ii) Die beiden Teile des letzten Beispiels deuten schon an, daß man mit regulären offenen Flächenstücken nicht auskommen wird:

In (i) geht die  $\mathcal{C}^1$ -Eigenschaft verloren, wenn man den Äquator mit dazunimmt.

In (ii) geht die Injektivität verloren, wenn man die gesamte Oberfläche der Kugel darstellen will. Zwar kann man hier auch  $\phi = 0$  noch zulassen, also den Nullmeridian mit dazunehmen, dann würden bei dieser Darstellung nur der Nordpol ( $\theta = 0$ ) und der Südpol ( $\theta = \pi$ ) fehlen. Allerdings wäre die Parametrisierung  $\vec{p}$  dann nicht in einem Gebiet erklärt: die Menge  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  ist nicht mehr offen!

Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt die Definition einer regulären Abbildung etwas abgeschwächt.

### Aufgabe

Seien  $r, R > 0$  mit  $r < R$ . Man zeige, daß

$$\begin{aligned} \vec{p}(\phi, \theta) &:= R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \left[ \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos \theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sin \theta \right] \\ &= \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\langle \phi, \theta \rangle \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)) \end{aligned}$$

eine reguläre Abbildung ist, somit

$$\mathcal{F} : \langle \phi, \theta \rangle \longmapsto \vec{p}(\phi, \theta) \quad (\langle \phi, \theta \rangle \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$$

ein reguläres offenes Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$  ist (der einmal „längs“ und einmal „quer“ aufgeschnittene Torus, s. Abb. 14.4). Man beachte, daß  $\theta$  hier der Polarwinkel des Querschnittskreises vom Radius  $r$  ist – daher  $\theta \in (0, 2\pi)$  – und nicht der von den Kugelkoordinaten her bekannte Polarwinkel aus  $(0, \pi)$ .

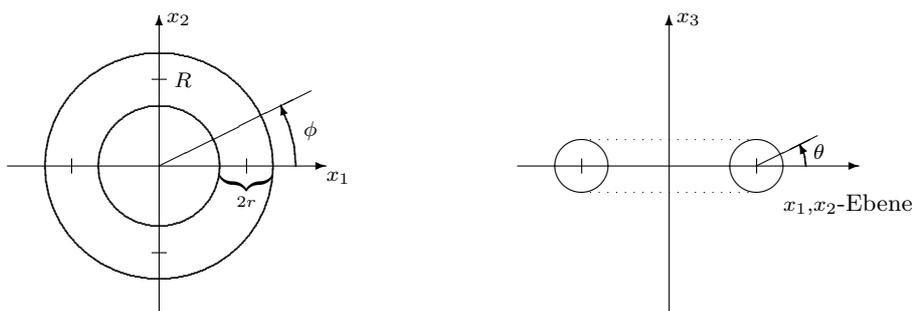


Abbildung 14.4: Längs- und Querschnitt eines Torus'

### Hinweis

Man berechne  $D\vec{p}(\phi, \theta)$  und zeige, daß für alle  $\langle \phi, \theta \rangle \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$  stets wenigstens zwei Zeilen linear unabhängig sind (nicht immer die gleichen!).

Im folgenden soll die sog. *Tangentialebene* an eine reguläre Fläche etwas näher untersucht werden. Viele der durchgeführten Betrachtungen lassen sich auch im Fall  $n > 3$  durchführen, das soll hier aber nicht geschehen.

Seien also  $n = 3$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{G})$$

eine offene reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

Seien  $\vec{u}_0 \in \mathcal{G}$  und  $\vec{x}_0 := \vec{p}(\vec{u}_0)$  ein Punkt auf dieser Fläche. Der Wertebereich der linearen Abbildung

$$D\vec{p}(\vec{u}_0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ist ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$  der Dimension 2, also eine Ebene durch den Koordinatenursprung  $O \in \mathbb{R}^3$ . Dieser Teilraum wird von den Spalten der Matrix  $D\vec{p}(\vec{u}_0)$  aufgespannt; nach Voraussetzung (Regularität) ist  $\text{rg } D\vec{p}(\vec{u}_0) = 2$ :

$$D\vec{p}(\vec{u}_0) = \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} D_1 p_1(\vec{u}_0) & D_2 p_1(\vec{u}_0) \\ D_1 p_2(\vec{u}_0) & D_2 p_2(\vec{u}_0) \\ D_1 p_3(\vec{u}_0) & D_2 p_3(\vec{u}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1}(\vec{u}_0) & \frac{\partial p_1}{\partial u_2}(\vec{u}_0) \\ \frac{\partial p_2}{\partial u_1}(\vec{u}_0) & \frac{\partial p_2}{\partial u_2}(\vec{u}_0) \\ \frac{\partial p_3}{\partial u_1}(\vec{u}_0) & \frac{\partial p_3}{\partial u_2}(\vec{u}_0) \end{pmatrix}.$$

Dieser Unterraum, am Punkt  $\vec{x}_0 = \vec{p}(\vec{u}_0)$  „angeheftet“, also die Ebene

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\vec{p}(\vec{u}_0)} &:= \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \vec{p}(\vec{u}_0) + D\vec{p}(\vec{u}_0)(\vec{v}), \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ geeignet} \} \\ &= \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \vec{p}(\vec{u}_0) + \sum_{i=1}^{3-1} v_i D_i \vec{p}(\vec{u}_0), v_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \} \end{aligned}$$

heißt *Tangentialebene* von  $\mathcal{F}$  an der Stelle  $\vec{x}_0 = \vec{p}(\vec{u}_0)$ , s. Abb 14.5.

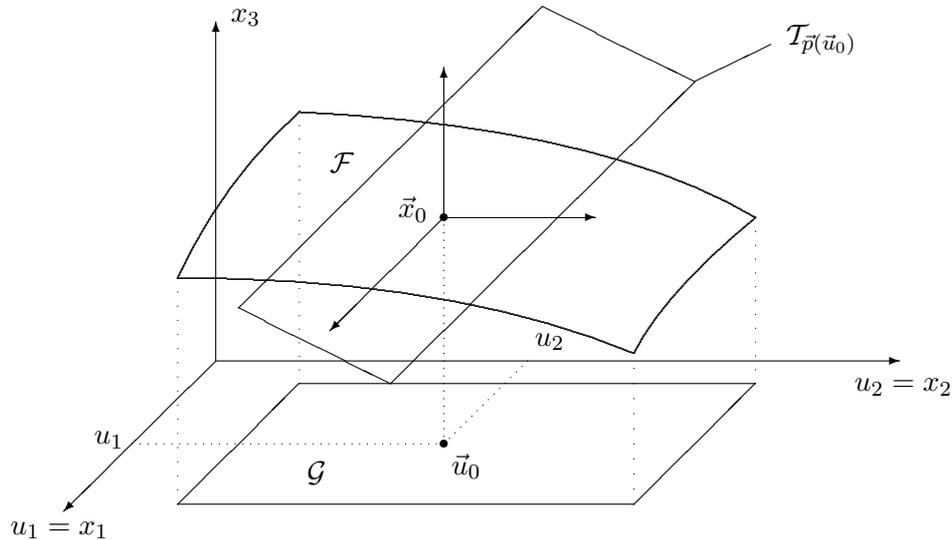


Abbildung 14.5: Tangentialebene am Flächenpunkt  $\vec{x}_0$

Für die Tangentialebene soll eine weitere Darstellung angegeben werden:

Die Matrix  $D\vec{p}(\vec{u}_0)$  hat den Rang 2, also sind ihre Spalten  $D_1\vec{p}(\vec{u}_0)$  und  $D_2\vec{p}(\vec{u}_0)$  linear unabhängig. Somit ist  $D_1\vec{p}(\vec{u}_0) \times D_2\vec{p}(\vec{u}_0) \neq \vec{0}$  (warum?), und ein Normaleneinheitsvektor zur Ebene  $\mathcal{T}_{\vec{p}(\vec{u}_0)}$  ist gegeben durch

$$\vec{n}(\vec{p}(\vec{u}_0)) := \frac{D_1\vec{p}(\vec{u}_0) \times D_2\vec{p}(\vec{u}_0)}{\|D_1\vec{p}(\vec{u}_0) \times D_2\vec{p}(\vec{u}_0)\|},$$

und die Tangentialebene läßt sich auch darstellen durch

$$\mathcal{T}_{\vec{p}(\vec{u}_0)} = \left\{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{x} - \vec{p}(\vec{u}_0), \vec{n}[\vec{p}(\vec{u}_0)] \right) = 0 \right\}.$$

Diese Darstellung der Tangentialebene heißt *Normalenform*. Da zusätzlich  $\|\vec{n}(\vec{p}(\vec{u}_0))\| = 1$  gilt, liegt hier die *Hesse'schen Normalenform* der Ebenengleichung vor.

### Beispiele 14.3

Es sollen Tangentialebenen und die zugehörigen Normalenvektoren zu den Flächen in den Beispielen 14.2 (i) und (ii) bestimmt werden.

- (i) Berechnet werden zwei linear unabhängige Vektoren der Tangentialebene

$\mathcal{T}_{\vec{p}(\vec{u}_0)}$ . Es ist mit  $\vec{x} = \vec{u} \in \mathcal{G}$ :

$$D_1 f(x_1, x_2) = \frac{-x_1}{\sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}}, \quad D_2 f(x_1, x_2) = \frac{-x_2}{\sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}},$$

$$D_1 \vec{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_1 f(\vec{u}) \end{pmatrix}, \quad D_2 \vec{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_2 f(\vec{u}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} -D_1 f(\vec{u}) \\ -D_2 f(\vec{u}) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 - (u_1^2 + u_2^2)}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sqrt{R^2 - (u_1^2 + u_2^2)} \end{pmatrix} \\ &= \vec{n}(\vec{p}(\vec{u})) \cdot \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\|. \end{aligned}$$

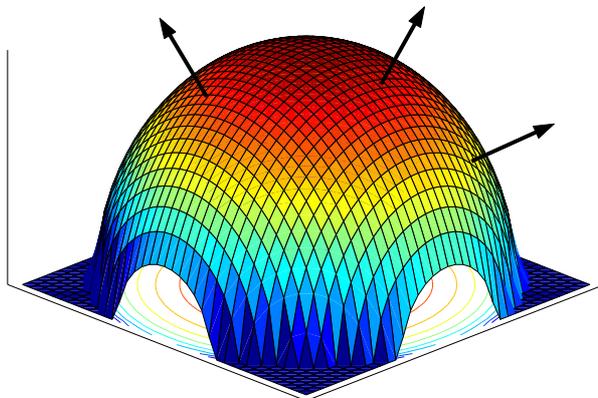


Abbildung 14.6: Obere Halbkugel mit äußerem Normalenvektorfeld

Der Normalenvektor der Tangentialebene an einen Punkt der (oberen Hälfte der) Kugeloberfläche hat also die gleiche Richtung wie der Ortsvektor des Punktes, an dem die Tangentialebene „angeheftet“ ist, in Übereinstimmung mit der geometrischen Vorstellung. Dieses Normalenvektorfeld zeigt auf der Kugeloberfläche nach „außen“, s. Abb. 14.6.

- (ii) Dieses Beispiel liefert genau dasselbe geometrische Objekt – die obere Halbkugelfläche – dieses Mal allerdings mit Hilfe von Kugelkoordinaten parametrisiert. Hier ist

$$\mathcal{G} := \left\{ \langle \phi, \theta \rangle : \langle \phi, \theta \rangle \in (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}) \right\},$$

$$\mathcal{F} : \langle \phi, \theta \rangle \longmapsto \langle R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \rangle.$$

Man erhält damit

$$D\vec{p}(\phi, \theta) = (D_1\vec{p}(\phi, \theta) \quad D_2\vec{p}(\phi, \theta)) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi & R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi & R \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -R \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \vec{n}(\vec{p}(\phi, \theta)) = \frac{D_1\vec{p}(\phi, \theta) \times D_2\vec{p}(\phi, \theta)}{\|D_1\vec{p}(\phi, \theta) \times D_2\vec{p}(\phi, \theta)\|} = \frac{-R^2 \sin \theta}{R^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dieses Normalenvektorfeld zeigt auf der Kugeloberfläche nach „innen“.

### Aufgabe

- (i) Man bestimme zwei linear unabhängige Vektoren der Tangentialebene für die Fläche aus der Aufgabe von p. 202.
- (ii) Man bestimme dazu ein Normalenvektorfeld.
- (iii) Man gebe eine Darstellung der Tangentialebene am Punkt  $\vec{p}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  als Punktmenge des  $\mathbb{R}^3$  an.

## 14.2 Flächeninhalt - Integrale über Flächen

Der Flächeninhalt  $|\mathcal{F}|$  einer krummen Fläche  $\mathcal{F}$  ist das zweidimensionale Analogon zur Länge  $|\mathcal{K}|$  einer gekrümmten Kurve  $\mathcal{K}$ . Daher liegt die folgende Definition nahe:

$$|\mathcal{F}| := \sup\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ ist ein der Fläche einbeschriebenes Polyeder}\}$$

Leider erweist sich dieser Ansatz als unbrauchbar, es gibt Gegenbeispiele:

### Beispiel 14.4 (Schwarz'scher Zylinder)

- (i) Die Mantelfläche eines Kreiszyllinders vom Radius 1 und der Höhe 1 besitzt nach konventionellen Maßstäben den Inhalt  $2\pi \cdot 1 = 2\pi$ .
- (ii) Benutzt man hingegen obige Definition, so läßt sich zu jeder Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ein dem Zylinder einbeschriebenes Polyeder  $\mathcal{P}_n$  finden mit der Eigenschaft  $|\mathcal{P}_n| \geq n$ , m.a.W.  $\sup\{|\mathcal{P}_n| : n \in \mathbb{N}\}$  existiert nicht.

Zur Definition des Inhaltes eines gekrümmten Flächenstückes muß man also anders vorgehen!

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$  eine reguläre Abbildung und

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{G})$$

eine offene reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

Sei  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}$  ein abgeschlossenes Rechteck. Das Bild  $\vec{p}(\mathcal{R})$  ist dann ein Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$ , es sei mit  $\mathcal{F}$  bezeichnet, s. Abb. 14.7.

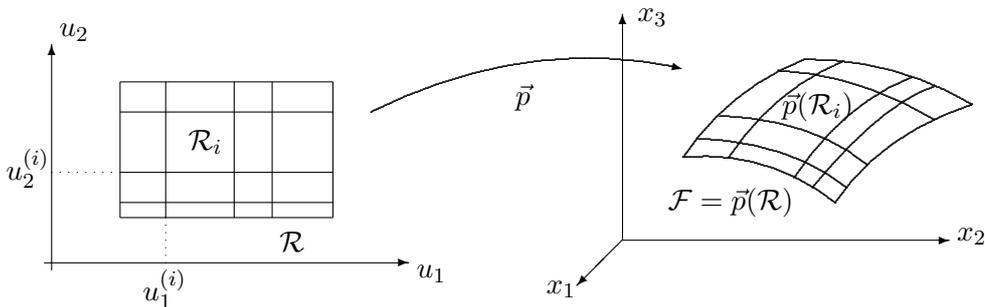


Abbildung 14.7: Gitternetz im  $\mathbb{R}^2$  und sein parametrisiertes Bild im  $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{R}$  wird nun durch achsparallele Linien in kleine Teilrechtecke  $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in J}$  zerlegt. Die Bilder dieser Linien bzgl. der Abbildung  $\vec{p}$  zerlegen dann das Bild  $\vec{p}(\mathcal{R})$  von  $\mathcal{R}$  in „kleine Flächenstücke“, die annähernd eben und von Parallelogrammgestalt sind, also „Fast-Parallelogramme“.

Nun wird versucht, den Flächeninhalt von  $\mathcal{F}$  dadurch zu approximieren, daß mit Hilfe der Darstellung  $\vec{p}$  eine Näherung für den Inhalt der kleinen Fast-Parallelogramme  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  berechnet und diese aufsummiert wird. Dazu wird ein  $\mathcal{R}_i$  und das zugehörige Bild  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  vergrößert gezeichnet, s. Abb. 14.8.

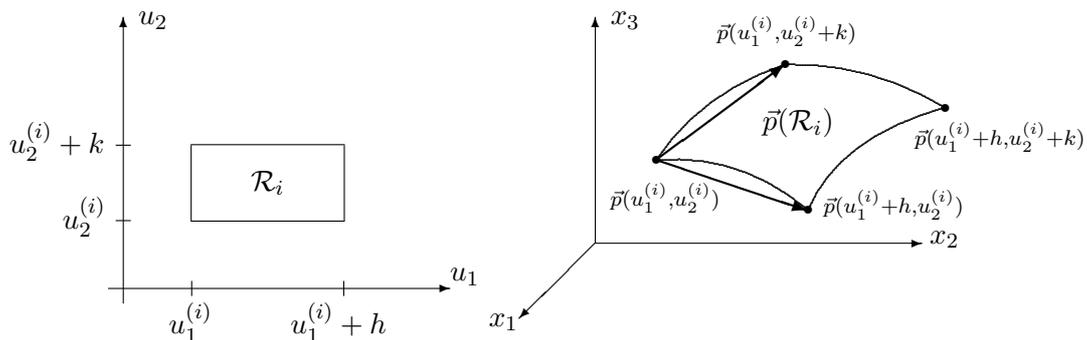


Abbildung 14.8: Einzelrechteck und Fast-Parallelogramm

Da  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  ein Fast-Parallelogramm ist, ist der „Flächeninhalt“  $|\vec{p}(\mathcal{R}_i)|$  von  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  etwa gleich dem (wohldefinierten) Flächeninhalt des von den beiden Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &:= \vec{p}(u_1^{(i)} + h, u_2^{(i)}) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \\ \vec{b} &:= \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)} + k) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \end{aligned}$$

aufgespannten Parallelogrammes, also gleich  $|\vec{p}(\mathcal{R}_i)| \approx \|\vec{a} \times \vec{b}\|$ .

$h$  und  $k$  sind klein, und  $\vec{p}$  ist differenzierbar, also gilt

$$\begin{aligned}\vec{a} &:= \vec{p}(u_1^{(i)} + h, u_2^{(i)}) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \approx D_1 \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \cdot h, \\ \vec{b} &:= \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)} + k) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \approx D_2 \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \cdot k.\end{aligned}$$

Man beachte die Schreibweise:

$$D_i \vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} D_i p_1(\vec{u}) \\ D_i p_2(\vec{u}) \\ D_i p_3(\vec{u}) \end{pmatrix},$$

so daß obige „Fast-Gleichheiten“ vektorielle „Fast-Gleichheiten“ für alle drei Komponenten von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned}|\vec{p}(\mathcal{R}_i)| &\approx \|\vec{a} \times \vec{b}\| \approx \|D_1 \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \cdot h \times D_2 \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \cdot k\| \\ &= \|D_1 \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \times D_2 \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})\| \cdot h \cdot k \\ &= \|D_1 \vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}^{(i)})\| \cdot |\mathcal{R}_i|.\end{aligned}$$

Bezeichnet man den (bisher nur anschaulich definierten!) „Flächeninhalt“ von  $\mathcal{F}$  mit  $|\mathcal{F}|$ , so ist

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i \in J} |\vec{p}(\mathcal{R}_i)| \approx \sum_{i \in J} \|D_1 \vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}^{(i)})\| \cdot |\mathcal{R}_i|.$$

Ein geeigneter Grenzprozeß für diese Riemann'sche Summe führt dann zu dem Integral

$$\int_{\mathcal{R}} \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u},$$

welches zur Definition des Flächeninhaltes von  $|\mathcal{F}|$  verwendet wird.

### Bemerkung

Sinnvoll ist diese Definition freilich erst dann, wenn der Wert eines solchermaßen definierten Integrals für äquivalente Darstellungen ein und derselben Fläche jeweils derselbe ist.

Eine weitere Schwierigkeit muß überwunden werden: Man möchte z.B. die Oberfläche einer Kugel mit Hilfe von Kugelkoordinaten parametrisieren können. Diese sind, als Abbildung von  $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$  in den  $\mathbb{R}^3$ , zwar injektiv, auf dem Rand von  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  – dem Nullmeridian – allerdings nicht mehr, wie in Beispiel 14.2 (ii) bereits näher ausgeführt.

Deswegen muß in der Definition einer regulären Fläche (Definition 14.1) der Begriff der regulären Abbildung abgeschwächt und der Begriff von Äquivalenz solcher Abbildungen so eingeführt werden, daß auch die Transformationsformel für Gebietsintegrale (Satz 12.14) noch anwendbar ist. Da man bei „nicht zusammenhängenden Flächenstücken“ jedes Teilstück einzeln behandeln kann, beschränke ich mich hier auf zusammenhängende Flächenstücke:

Es werden nur solche Darstellungen zugelassen, die auf Jordan-Bereichen  $\mathcal{M}$  definiert sind, deren offener Kern  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  zusammenhängend ist, also ein Gebiet.

Um nun diese Darstellung nicht allzu sehr mit mathematischen Details zu überfrachten, sei nur das Ergebnis erwähnt, wie denn die Definition einer regulären Abbildung (Definition 14.1) abgeschwächt werden kann:

### Definition 14.3

Eine Abbildung  $\vec{p}$  wie in Definition 14.1 soll im folgenden auch dann noch regulär heißen, wenn auf Nullmengen von  $\mathcal{M}$  die Injektivität und die geforderte Rangbedingung  $\text{rg } D\vec{p}(\vec{u}) = n - 1$  nicht mehr erfüllt sind. Insbesondere darf das auf dem Rand  $\dot{\mathcal{M}}$  von  $\mathcal{M}$  passieren, welcher ja eine Nullmenge ist.

### Satz 14.1

Seien  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  zwei Jordan-Bereiche im  $\mathbb{R}^3$  sowie  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}_1, \mathbb{R}^3)$  und  $\vec{q} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}_2, \mathbb{R}^3)$  zwei im Sinne von Definition 14.3 zueinander äquivalente reguläre Abbildungen. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}_1} \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} = \int_{\mathcal{M}_2} \|D_1\vec{q}(\vec{v}) \times D_2\vec{q}(\vec{v})\| d\vec{v}.$$

Der letzte Satz zeigt, daß der Wert des Integrals – der „Flächeninhalt“ von  $\mathcal{F} = W(\vec{p})$  – von der speziellen Parametrisierung unabhängig ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

### Definition 14.4

Seien  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Jordan-Bereich, also  $\mathcal{M}$  kompakt und  $\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{M}}$  eine Nullmenge. Seien  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  ein Gebiet und  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^3)$  eine reguläre Abbildung im Sinne von Definition 14.3. Sei

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$$

das dadurch definierte reguläre Flächenstück.

Dann ist der Flächeninhalt  $|\mathcal{F}|$  der Fläche  $\mathcal{F}$  definiert durch

$$|\mathcal{F}| := \int_{\mathcal{F}} do := \int_{\mathcal{M}} \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u}. \quad (14.1)$$

Üblich sind auch die Zeichen

$$\iint_{\mathcal{F}} do \quad \text{bzw.} \quad \oint_{\mathcal{F}} do \quad \text{oder} \quad \iint_{\mathcal{F}} do;$$

die letzten beiden für eine geschlossene Fläche  $\mathcal{F}$ .

### Bemerkung

- (i) Das Zeichen „ $do$ “, das unter dem Integral ersetzt wird durch die mit der Darstellung  $\vec{p}$  definierte Größe  $\|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u}$ , heißt (skalares) *Oberflächenelement*. Oft werden dafür auch die folgenden Zeichen verwendet:

$$\begin{aligned} dF & \quad (F : \text{Fläche}) \quad \text{oder} \\ dA & \quad (A : \text{Area}). \end{aligned}$$

- (ii) Das skalare Oberflächenelement  $do$  macht auch im Fall  $n = 2$  Sinn, also im Fall  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^2)$  mit  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{2-1} = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ . Ein solches „Flächenstück“ im  $\mathbb{R}^2$  ist dann nichts Anderes als ein Kurvenstück im  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{M} = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  geeignet), und das Oberflächenelement  $do = \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u}$  ist gleich dem Wegelement  $ds = \|D\vec{p}(t)\| dt = \|\dot{\vec{p}}(t)\| dt$ ; s. die Bemerkung auf p. 164.

### Beispiel 14.5

Seien  $R > 0$ ,  $\mathcal{M} := \{\vec{u} : \vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, \|\vec{u}\| \leq R\}$  und  $f$  definiert durch

$$f(u_1, u_2) := u_1^2 + u_2^2 \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}).$$

Durch

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \langle u_1, u_2, f(u_1, u_2) \rangle \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$$

ist dann ein reguläres Flächenstück definiert: das in der „Höhe“  $x_3 = R^2$  abgeschnittene Rotationsparaboloid, s. Abb. 14.9.

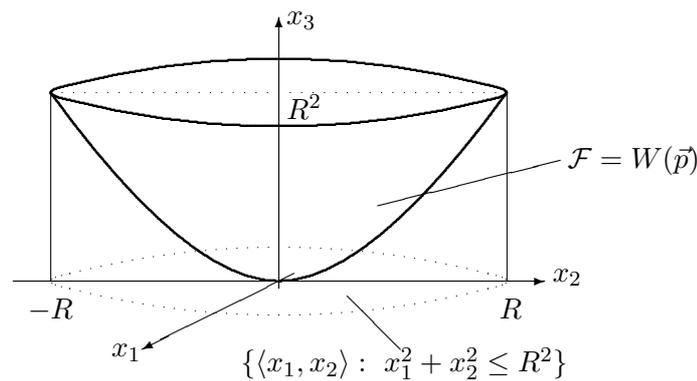


Abbildung 14.9: Rotationsparaboloid  $x_3 = x_1^2 + x_2^2$  der Höhe  $R^2$

$\mathcal{M}$  ist ein Jordan-Bereich,  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ . Eine Parametrisierung der Fläche lautet dann (s. Beispiel 14.2 und die daran anschließende Bemerkung)

$$\vec{p}(\vec{u}) := \langle u_1, u_2, f(u_1, u_2) \rangle \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 D\vec{p}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1 f(\vec{u}) & D_2 f(\vec{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u_1 & 2u_2 \end{pmatrix}, \\
 D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 \\ -2u_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| &= \sqrt{4u_1^2 + 4u_2^2 + 1} \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}).
 \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}| &= \int_{\mathcal{F}} do = \int_{\{\vec{u}: \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{u}\| \leq R\}} \sqrt{4u_1^2 + 4u_2^2 + 1} \, d(u_1, u_2) \\
 &= \int_{r=0}^R \left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1} \, d\varphi \right) r \, dr = 2\pi \int_{r=0}^R \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \\
 &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{6} \cdot [(4R^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1].
 \end{aligned}$$

Man beachte, daß sich dieses Ergebnis auch schon mit der eindimensionalen Integration hat ermitteln lassen. Im Abschnitt über die Berechnung von Mantelflächen von Rotationskörpern ließ sich  $|\mathcal{F}|$  unmittelbar mit der oben auch auftretenden Formel

$$|\mathcal{F}| = 2\pi \int_{r=0}^R r \cdot \sqrt{1 + h'(r)^2} \, dr = 2\pi \int_{r=0}^R r \sqrt{1 + (2r)^2} \, dr$$

berechnen, wobei  $g$  bzw.  $h$  die Polarkoordinatendarstellung von  $f$  bedeuten:

$$g(r, \varphi) := f(u_1, u_2) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 =: h(r).$$

### Beispiel 14.6

Sei  $\mathcal{K}$  eine Kappe einer Kugel vom Radius  $R$ , s. Abb. 14.10.

Eine Parametrisierung ist gegeben durch Kugelkoordinaten:

$$\vec{p}(\varphi, \theta) := \langle R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta \rangle$$

$$\text{mit } \mathcal{M} := \{ \langle \varphi, \theta \rangle : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0 \}$$

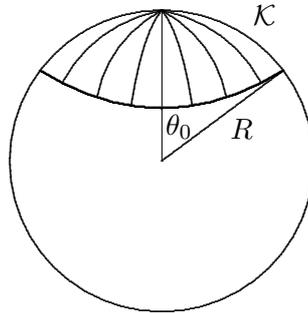


Abbildung 14.10: Fläche einer Kugelkappe

$$\begin{aligned}
 D_1 \vec{p}(\varphi, \theta) \times D_2 \vec{p}(\varphi, \theta) &= \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi \cos \theta \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &= -R^2 \cdot \sin \theta \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsvektor}}
 \end{aligned}$$

Damit wird das Oberflächenelement

$$do = \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} = R^2 \sin \theta d(\varphi, \theta),$$

und es folgt für den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}| &= \int_{\mathcal{F}} do = \int_{\mathcal{M}} R^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\
 &= R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \int_{\theta=0}^{\theta_0} \sin \theta d\theta \right) d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi R^2 (1 - \cos \theta_0).
 \end{aligned}$$

Für  $\theta_0 = \pi$  erhält man die Kugeloberfläche:

$$|\text{Kugeloberfläche}| = 2\pi R^2 [1 - (-1)] = 4\pi R^2.$$

Seien nun  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Jordan-Bereich und

$$\mathcal{F} : \vec{u} \mapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$$

ein reguläres Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$ . Auf der Fläche, genauer: auf  $W(\vec{p})$ , sei eine stetige reellwertige Funktion  $f$  definiert:  $f \in \mathcal{C}^0[W(\vec{p})]$ . Sie ist etwa interpretierbar als Flächenladungsdichte, also

$$f(\vec{x}) := \text{„} \lim_{|\mathcal{Q}(\vec{x})| \rightarrow 0} \text{“} \frac{\text{Gesamtladung auf } \mathcal{Q}(\vec{x})}{\text{Flächeninhalt von } \mathcal{Q}(\vec{x})},$$

wobei  $\mathcal{Q}(\vec{x})$  z.B. ein „Fast-Quadrat“ auf der Fläche  $\mathcal{F}$  mit  $\vec{x}$  als Mittelpunkt ist, s. Abb. 14.11.

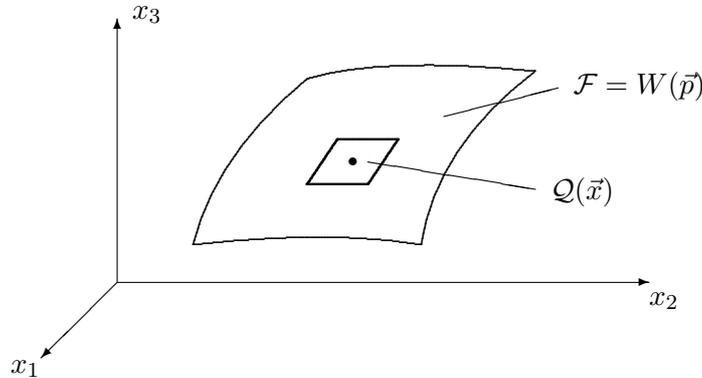


Abbildung 14.11: „Fast-Quadrat mit  $\vec{x}$  als Mittelpunkt

Man erhält dann eine Näherung für die Gesamtladung auf der Fläche, indem man  $\mathcal{M}$  als Rechteck voraussetzt und dieses in Teilrechtecke zerlegt, deren Bilder Fast-Parallelogramme auf der Fläche  $\mathcal{F} = W(\vec{p})$  sind. Eine mittlere Ladungsdichte auf einem solchen Flächenstückchen, multipliziert mit dessen Flächeninhalt, ergibt dann eine Näherung für die Ladung auf diesem Stückchen.

Mit den Bezeichnungen wie zu Beginn des Abschnittes erhält man dann als Näherung für die Gesamtladung auf der Fläche  $\mathcal{F}$ :

$$\sum_{i \in J} f[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})] \cdot |\vec{p}(\mathcal{R}_i)| \approx \sum_{i \in J} f[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})] \cdot \|D_1 \vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}^{(i)})\| \cdot |\mathcal{R}_i|.$$

Wie beim Flächeninhalt macht dann ein geeigneter Grenzprozeß aus der zweiten Summe das Integral

$$\int_{\mathcal{M}} f(\vec{p}(\vec{u})) \cdot \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u}.$$

Wieder ist, bei regulären Darstellungen, dieses Integral von der speziellen Darstellung der Fläche  $\mathcal{F}$  unabhängig, so daß man vereinbaren kann:

### Definition 14.5

Seien  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Jordan-Bereich. Seien  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  ein Gebiet und  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{\mathcal{M}}, \mathbb{R}^3)$  eine reguläre Abbildung im Sinne von Definition 14.3. Sei

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$$

das dadurch definierte reguläre Flächenstück.

Sei  $f$  eine auf der Fläche definierte und dort stetige Funktion, d.h.  $f \in \mathcal{C}^0[W(\vec{p})]$ . Dann wird das *Oberflächenintegral von  $f$  über der Fläche  $\mathcal{F}$*

definiert durch

$$\int_{\mathcal{F}} f(\vec{x}) \, do := \int_{\mathcal{M}} f(\vec{p}(\vec{u})) \cdot \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| \, d\vec{u}. \quad (14.2)$$

Üblich sind auch wieder die Zeichen

$$\iint_{\mathcal{F}} f(\vec{x}) \, do \quad \text{bzw.} \quad \oint_{\mathcal{F}} f(\vec{x}) \, do \quad \text{oder} \quad \oiint_{\mathcal{F}} f(\vec{x}) \, do;$$

die letzten beiden für eine geschlossene Fläche  $\mathcal{F}$ .

### Bemerkung

Analog zu Kurvenintegralen über stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven werden Integrale über Flächen, die aus endlich vielen Teilflächen mit regulären Darstellungen zusammengesetzt sind, als Summe der Integrale über die jeweiligen Einzelflächen definiert.

### Beispiel 14.7

Eine Ringkernspule besitze einen torusförmigen Querschnitt mit einer Seele vom Radius  $R$  und einem Querschnitt vom Radius  $r$ . Hat die Wicklung eine Stärke  $h$ , welche im Verhältnis zu  $r$  klein ist, so ist das Volumen dieser Wicklung annähernd  $h \times$  Oberfläche des Torus', und diese Oberfläche  $\mathcal{O}_{\text{Torus}}$  soll nun berechnet werden.

Eine Parametrisierung ist gegeben durch (vgl. die Aufgabe auf p. 202)

$$\begin{aligned} \vec{p}(\phi, \theta) &:= R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \left[ \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos \theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sin \theta \right] \\ &= \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad ((\phi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)) \\ \\ D_1\vec{p}(\phi, \theta) &= \begin{pmatrix} -(R + r \cos \theta) \sin \phi \\ (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ D_2\vec{p}(\phi, \theta) &= \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \\ \\ (D_1\vec{p} \times D_2\vec{p})(\phi, \theta) &= \begin{pmatrix} r(R + r \cos \theta) \cos \theta \cos \phi & - & 0 \\ 0 & + & r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \phi \\ \underbrace{r(R + r \cos \theta) \sin \theta \sin^2 \phi + r(R + r \cos \theta) \sin \theta \cos^2 \phi}_{r(R + r \cos \theta) \sin \theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(D_1\vec{p} \times D_2\vec{p})(\phi, \theta)\|^2 &= r^2(R + r \cos \theta)^2 \underbrace{\left( \underbrace{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi}_{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta \right)}_1 \\ &= [r(R + r \cos \theta)]^2, \end{aligned}$$

$$\|D_1\vec{p}(\phi, \theta) \times D_2\vec{p}(\phi, \theta)\| = r(R + r \cos \theta) \quad (\text{wegen } r < R)$$

Damit ist die gesamte Oberfläche des Torus' gegeben durch

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}_{\text{Torus}}| &= \int_{\text{Torus}} do = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta r(R + r \cos \theta) \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} [rR\theta + r^2 \sin \theta]_{\theta=0}^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \cdot 2\pi r R = (2\pi r) \cdot (2\pi R). \end{aligned}$$

### Bemerkung

Dahinter steckt die sog. *Zweite Guldin'sche Regel*:

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus Bogenlänge des Kurvenstückes (hier:  $2\pi r$ ) und der Länge des Weges (hier:  $2\pi R$ ), den der Schwerpunkt des Kurvenstückes (hier: der Mittelpunkt des kleinen Kreises) bei (einmaliger) Rotation zurücklegt.

Der folgende Satz besagt, daß man ein Volumenintegral über eine Kugel vom Radius  $R$  im  $\mathbb{R}^3$  auch dadurch berechnen kann, daß man die Oberflächenintegrale über Kugeloberflächen von Kugeln mit Radius  $r \in [0, R]$  mit „ $dr$  multipliziert und aufsummiert“, also bzgl.  $r$  von 0 bis  $R$  integriert. Im Grunde ist er also eine Art Prinzip von Cavalieri für Kugelkoordinaten; vgl. Satz 13.12.

Dabei werden die folgenden suggestiven Schreibweisen benutzt:

$$\begin{aligned} \int_{r_0 \leq \|\vec{x}\| \leq R} f(\vec{x}) d\vec{x} &:= \int_{\{\vec{x}: \vec{x} \in \mathbb{R}^3, r_0 \leq \|\vec{x}\| \leq R\}} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ \int_{\|\vec{x}\|=R} f(\vec{x}) do &:= \int_{\{\vec{x}: \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\|=R\}} f(\vec{x}) do \end{aligned}$$

**Satz 14.2**

Seien  $r_0, R \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq r_0 < R$  und  $f \in \mathcal{C}(\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, r_0 \leq \|\vec{x}\| \leq R\})$ . Dann gilt:

$$\int_{r_0 \leq \|\vec{x}\| \leq R} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{r_0}^R \left( \int_{\|\vec{x}\|=r} f(\vec{x}) d\sigma \right) dr = \int_{r_0}^R r^2 \left( \int_{\|\vec{\xi}\|=1} f(r \cdot \vec{\xi}) d\sigma \right) dr$$

**Folgerung**

Seien  $r_0, R \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq r_0 < R$  und  $f \in \mathcal{C}([r_0, R])$ . Dann gilt:

$$\int_{r_0 \leq \|\vec{x}\| \leq R} f(\|\vec{x}\|) d\vec{x} = \int_{r_0}^R r^2 f(r) dr \cdot \int_{\|\vec{\xi}\|=1} d\sigma = 4\pi \cdot \int_{r_0}^R r^2 f(r) dr$$

**Beispiel 14.8**

Dieses Beispiel behandelt ein uneigentliches mehrfaches Integral.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|\vec{x}\| \leq R} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \cdot \int_0^R r^2 \cdot e^{-r^2} dr \\ &\stackrel{(t=r^2)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \cdot \int_0^{R^2} t \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-(1/2)} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} t^{1/2} \cdot e^{-t} dt \quad [\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \ (x > 0)] \\ &= 2\pi \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

## 14.3 Orientierte Flächen - Fluß

Das für die Physik und Elektrotechnik wichtigste Oberflächenintegral ist das sog. *Flußintegral*: es mißt den Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche. Im Gegensatz zu dem im letzten Abschnitt definierten (skalaren) Oberflächenintegral handelt es sich hierbei um ein Flächenintegral, bei dem der Integrand ein Vektorfeld enthält.

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$ , also  $\vec{v}$  ein Vektorfeld, das als Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung interpretiert werden kann. Sei  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Rechteck,  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}, \mathbb{R}^3)$  eine reguläre Abbildung und

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{R})$$

ein reguläres Flächenstück, das ganz in  $\mathcal{G}$  liegt, d.h.  $W(\vec{p}) \subseteq \mathcal{G}$ .

**Voraussetzung**  $D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u}) \neq \vec{0} \quad (\vec{u} \in \mathcal{R})$

Diese Voraussetzung bedeutet, daß durch

$$\vec{n}[\vec{p}(\vec{u})] := \frac{D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})}{\|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\|} \quad (\vec{u} \in \mathcal{R}) \quad (14.3)$$

auf  $W(\vec{p})$  ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld definiert ist. Dieses ist bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Es soll diejenige Flüssigkeitsmenge bestimmt werden, welche bei dem durch  $\vec{v}$  definierten Strömungsfeld pro Zeiteinheit durch das Flächenstück  $\mathcal{F}$  strömt, und zwar positiv gerechnet, falls  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$  „auf derselben Seite von  $\mathcal{F}$ “ liegen, andernfalls negativ, s. Abb. 14.12. Das setzt insbesondere voraus, daß die Fläche  $\mathcal{F}$  „zwei Seiten“ hat, also *orientierbar* ist; s. Definition 14.6 weiter unten.

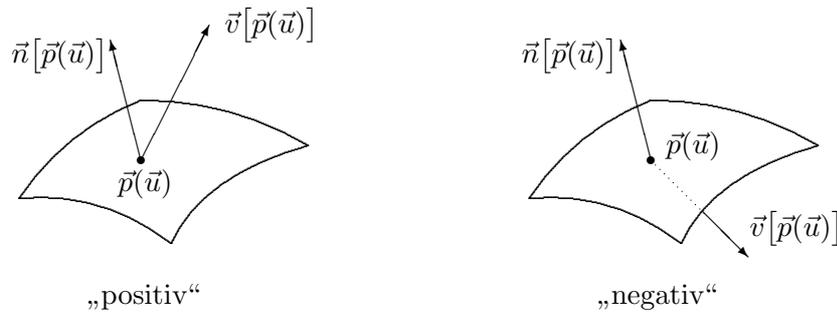


Abbildung 14.12: Positiv und negativ orientiertes Flächenstück

Sei, wie in Abb. 14.8 auf p. 207, das Flächenstück  $\mathcal{F}$  in Fast-Parallelelogramme zerlegt. In Abb. 14.13 wird wieder ein solches separat gezeichnet und diesmal auch der Geschwindigkeitsvektor der Strömung in das Bild  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  eingetragen.

Da  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  „klein“ ist, gilt

$$\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})] \approx \vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})] \quad (\vec{u} \in \mathcal{R}_i),$$

somit ist die pro Zeiteinheit durch  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  fließende Flüssigkeitsmenge ungefähr gleich dem Volumen des durch  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  und  $\vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})]$  erzeugten Spates, also über

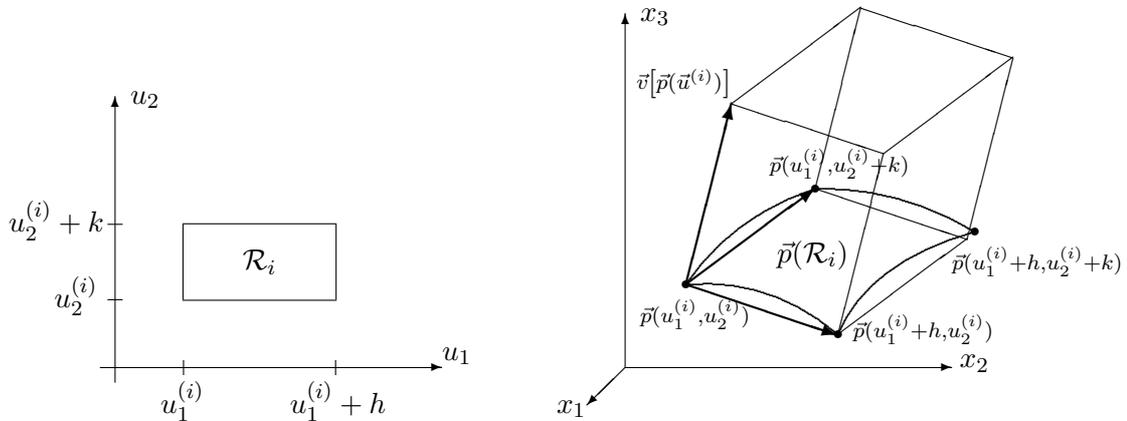


Abbildung 14.13: Einzelrechteck und Spatvolumen der pro Zeiteinheit durch die Grundfläche  $\vec{p}(\mathcal{R}_i)$  strömenden Flüssigkeitsmenge

das Spatprodukt<sup>1</sup> gegeben durch

$$\begin{aligned}
 |V_{\text{Spat}^{(i)}}| &= \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})], \vec{p}(u_1^{(i)} + h, u_2^{(i)}) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}), \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)} + k) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \right) \\
 &= \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})], [\vec{p}(u_1^{(i)} + h, u_2^{(i)}) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})] \times [\vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)} + k) - \vec{p}(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})] \right) \\
 &\approx \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})], D_1\vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \cdot h \times D_2\vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \cdot k \right) \\
 &= \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})], D_1\vec{p}(\vec{u}^{(i)}), D_2\vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \right) \cdot |\mathcal{R}_i| \\
 &\stackrel{(14.3)}{=} \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u}^{(i)})] \right) \cdot \|D_1\vec{p}(\vec{u}^{(i)}) \times D_2\vec{p}(\vec{u}^{(i)})\| \cdot |\mathcal{R}_i|.
 \end{aligned}$$

Das Volumen ist positiv, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{n} = D_1\vec{p} \times D_2\vec{p}$  auf derselben Seite der von  $D_1\vec{p}$  und  $D_2\vec{p}$  aufgespannten Ebene liegen (Abb. 14.12), sonst negativ.

Die Summation über alle Rechtecke der Zerlegung liefert eine Approximation des Integrals

$$\int_{\mathcal{R}} \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})] \right) \cdot \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u},$$

welches dann zur Definition des Flusses von  $\vec{v}$  durch die Fläche  $\mathcal{F}$  dient.

Zuvor muß aber geklärt werden, wie man im Raum  $\mathbb{R}^3$  die Seiten einer Fläche auszeichnet. Das geschieht einfach dadurch, daß man die gewünschte Orientierung der Fläche „mitnimmt“, d.h. in diesem Zusammenhang spielt nicht nur

<sup>1</sup>Das Spatprodukt der drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$  ( $\sim \mathbb{R}^3$ ) ist gegeben durch

$$V := (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}).$$

die Fläche  $\mathcal{F}$  selbst samt einer ihrer Parametrisierungen  $\vec{p}$  eine Rolle, sondern zusätzlich eine definierte Raumrichtung:

**Definition 14.6**

Sei  $\mathcal{F}$  ein reguläres Flächenstück mit der Parametrisierung

$$\mathcal{F} : \vec{u} \longmapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}).$$

- (i)  $\mathcal{F}$  heißt *orientierbar*, wenn sich in jedem Punkt  $\vec{x} \in W(\vec{p})$  ein Normalenvektor  $\vec{n}(\vec{x})$  so festlegen läßt, daß  $\vec{n}(\cdot)$  stetig von  $\vec{x}$  abhängt (also nicht plötzlich umschlägt).
- (ii) Das Paar  $\langle \mathcal{F}, \vec{n}(\cdot) \rangle$  heißt ein *orientiertes Flächenstück*, falls  $\vec{n}(\cdot)$  ein auf  $W(\vec{p})$  definiertes stetiges Normalenfeld ist.

**Beispiele 14.9**

Seien  $r > 0$  und  $\langle \phi, \theta \rangle \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ .

$$\mathcal{F}_1 : \langle \phi, \theta \rangle \longmapsto \vec{x} = \vec{p}(\phi, \theta) = \langle r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta \rangle$$

$$\vec{n}(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathcal{F}_1)$$

ist die Darstellung der Oberfläche der Kugel um den Nullpunkt vom Radius  $r$  mit der *äußeren* Normalen.

$$\mathcal{F}_2 : \langle \phi, \theta \rangle \longmapsto \vec{x} = \vec{p}(\phi, \theta) = \langle r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta \rangle$$

$$\vec{n}(\vec{x}) := -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathcal{F}_2)$$

ist eine Darstellung derselben Oberfläche, dieses Mal jedoch mit der *inneren* Normalen.  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$  sind als Flächenstücke gleich, als orientierte Flächenstücke aber verschieden.

Das Paradebeispiel einer nicht orientierbaren Fläche ist das sog. *Möbius-Band*, bei dem es kein „außen“ und kein „innen“ gibt wie z.B. bei einer Kugeloberfläche. Man erhält ein Möbius-Band, indem man einen Streifen Papier an den Längsseiten zusammenführt und verklebt, ihn zuvor aber um seine Längsachse um  $180^\circ$  verdreht. Läßt man hier eine Normale, an einem Punkt beginnend, einmal längs einer geschlossenen Linie um das Band laufen, so landet man am Anfangspunkt mit der zur ursprünglichen Normalen entgegengesetzt orientierten Normalen: es gibt kein auf dem Möbius-Band definiertes global stetiges Normalenfeld.

**Definition 14.7**

Sei  $\mathcal{F}$  ein orientiertes reguläres Flächenstück mit stetigem Normalenfeld im  $\mathbb{R}^3$ , also:

- $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein Jordan-Bereich,  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  ein Gebiet
- $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^3)$  sei eine reguläre Abbildung
- $\mathcal{F} : \vec{u} \mapsto \vec{p}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$
- $\vec{n}(\cdot) \in \mathcal{C}^0[W(\vec{p} \upharpoonright \overset{\circ}{\mathcal{M}})]$

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet, welches das Flächenstück  $\mathcal{F}$  enthält, d.h. es gelte  $W(\vec{p}) \subseteq \mathcal{G}$ , und sei  $\vec{v}$  ein stetiges Vektorfeld in  $\mathcal{G}$ .

Der *Fluß des Feldes*  $\vec{v}$  durch das Flächenstück  $\mathcal{F}$  ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do := \int_{\mathcal{M}} (\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})]) \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| \, d\vec{u} \quad (14.4)$$

### Bemerkung

- (i) Das Einheits-Normalenfeld einer regulären Fläche  $\mathcal{F}$

$$\vec{n}(\vec{p}(\vec{u})) = \eta \cdot \frac{D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})}{\|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\|} \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$$

$$(\eta = -1 \quad \text{oder} \quad \eta = +1)$$

ist bis auf das Vorzeichen über die Parametrisierung der Fläche bestimmbar. Insbesondere ist daher jedes reguläre Flächenstück  $\mathcal{F}$  über eine Parametrisierung  $\vec{p}$  orientierbar.

Es wird also nicht mehr gefragt, *welche* Orientierung der Fläche genommen wird, sondern man geht von einer *orientierten* Fläche aus und nimmt die dadurch definierte Orientierung.

- (ii) Im Flußintegral  $\int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do$  ist der Integrand die Normalkomponente des Vektorfeldes  $\vec{v}$ , also die Projektion von  $\vec{v}$  auf die jeweilige Normalenrichtung. Das unterstreicht noch einmal die Namensgebung „Flußintegral“.

- (iii) Der Ausdruck

$$\begin{aligned} d\vec{o} &:= \vec{n}(\vec{x}) \, do \\ &= \vec{n}(\vec{p}(\vec{u})) \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| \, d\vec{u} \\ &\stackrel{(14.3)}{=} D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u}) \, d\vec{u} \end{aligned}$$

heißt das *vektorielle Oberflächenelement*. Somit existiert auch die Schreibweise

$$\int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{o}) := \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) do.$$

- (iv) Der Integrand des Flußintegrals ist ein Spatprodukt, nämlich von der Form  $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$  und kann daher auch als Determinante geschrieben werden:

$$\int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) do = \int_{\mathcal{M}} \det \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})] \quad D_1\vec{p}(\vec{u}) \quad D_2\vec{p}(\vec{u}) \right) d\vec{u}$$

Diese Formel ist allerdings kein Fortschritt, wenn man etwa

$$do = \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u}$$

schon früher berechnet hat.

### Beispiel 14.10

Man berechne den Fluß des Vektorfeldes

$$\vec{v}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

durch die im ersten Oktanten gelegene Fläche der Ebene (Abb. 14.14)

$$\mathcal{E} := \{\vec{x} : \vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3, 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6\}.$$

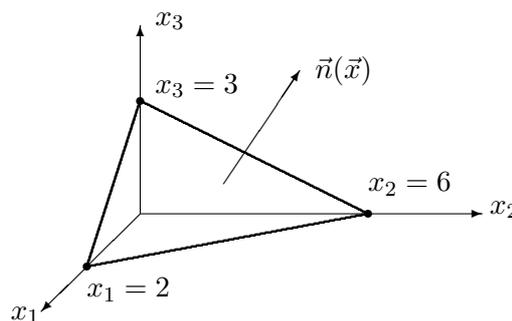


Abbildung 14.14: Teil einer Ebene im ersten Oktanten

### Lösung

- (i) Parametrisierung der Fläche:

$$\mathcal{M} := \{ \langle u_1, u_2 \rangle : u_1 \in [0, 2], 0 \leq u_2 \leq -\frac{6}{2}u_1 + 6 = -3u_1 + 6 \}$$

$\mathcal{M}$  ist die orthogonale Projektion der Fläche auf die  $\langle u_1, u_2 \rangle$ -Ebene, die als  $\langle x_1, x_2, 0 \rangle$ -Ebene angesehen werden kann:

$$\begin{aligned} \vec{p}: \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 3 - \frac{1}{2}(3u_1 + u_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die dritte Komponente ergibt sich dabei durch Auflösung der Ebenengleichung nach  $x_3$ .

(ii) Tangentialvektoren:

$$D_1 \vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad D_2 \vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(iii) Normalenvektor:

Dieses (reguläre) Flächenstück ist Teil einer Ebene, also sollte der Normalenvektor – das Normalenvektorfeld – ebenfalls konstant sein:

$$\begin{aligned} D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{n}(\vec{p}(\vec{u})) &= \frac{D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})}{\|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Aufgabe

Hätte man dieses Ergebnis schon aus der Darstellung der Ebene ablesen können? Wenn ja, wie und warum?

(iv) Auswertung des Vektorfeldes  $\vec{v}$  auf  $\vec{p}(\vec{u})$ :

$$\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})] = \begin{pmatrix} -6 + 3u_1 + u_2 \\ u_2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\vec{u} \in \mathcal{M})$$

(v) Berechnung des Integranden des Flußintegrals:

$$\begin{aligned} (\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})]) &= \frac{1}{\sqrt{14}} (-18 + 9u_1 + 3u_2 + u_2 + 8) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} (-10 + 9u_1 + 4u_2) \end{aligned}$$

(vi) Oberflächenelement:

$$do = \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| d\vec{u} = \frac{\sqrt{14}}{2} d\vec{u}$$

(vii) Vollständiges Flußintegral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) do &= \int_{\mathcal{M}} (\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})]) \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (-10 + 9u_1 + 4u_2) d\vec{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_{u_1=0}^2 du_1 \int_{u_2=0}^{-3u_1+6} du_2 (-10 + 9u_1 + 4u_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{u_1=0}^2 du_1 \left[ -10u_2 + 9u_1u_2 + 2u_2^2 \right]_{u_2=0}^{-3u_1+6} \\ &= \frac{1}{2} \int_{u_1=0}^2 du_1 (30u_1 - 60 - 27u_1^2 + 54u_1 + 18u_1^2 - 72u_1 + 72) \\ &= \frac{1}{2} \int_{u_1=0}^2 du_1 (-9u_1^2 + 12u_1 + 12) \\ &= \frac{1}{2} \left[ -3u_1^3 + 6u_1^2 + 12u_1 \right]_{u_1=0}^2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

### Beispiel 14.11

Wie groß ist der Fluß des homogenen elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

durch den Graphen der Funktion

$$f(u_1, u_2) := u_1u_2 + u_2^2$$

über der Kreisscheibe

$$\mathcal{M} := \{\vec{u} : \vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, u_1^2 + u_2^2 \leq 9\}?$$

**Lösung**

Benutzt wird die Parametrisierung

$$\mathcal{F} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \vec{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 u_2 + u_2^2 \end{pmatrix} \quad (\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle \in \mathcal{M})$$

Damit ist, s. Bemerkung (iv) auf p. 220:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} (\vec{E}(\vec{x}), d\vec{\sigma}) &= \iint_{\mathcal{M}} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ E_3 & u_2 & u_1 + 2u_2 \end{pmatrix} du_1 du_2 \\ &= \iint_{\mathcal{M}} E_3 du_1 du_2 = E_3 \cdot 9\pi. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Der Fluß hängt also gar nicht von der Funktion  $f$  (dem „Deckel“ des Zylinders) ab, er ist für alle Graphen über der Kreisscheibe  $\mathcal{M}$  gleich. Man mache sich anhand der elektrischen Feldlinien klar, daß man das auch erwarten sollte!

**Beispiel 14.12**

Man berechne den Fluß des Vektorfeldes

$$\vec{v}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3)$$

durch die Oberfläche des Kegels (s. Abb. 14.15)

$$\vec{p}(\vec{u}) = \vec{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \cos u_2 \\ u_1 \sin u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (0 \leq u_1 \leq 1; 0 \leq u_2 < 2\pi).$$

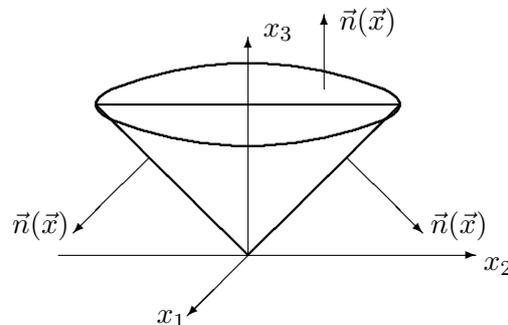


Abbildung 14.15: Kegel mit der Spitze im Ursprung und äußerem Normalenfeld

**Lösung**(1) Deckelfläche

(i) Parametrisierung:

$$\mathcal{M}_1 := \{ \langle u_1, u_2 \rangle : u_1 \in [0, 1], u_2 \in [0, 2\pi] \}$$

$$\vec{p}: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos u_2 \\ u_1 \sin u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Tangentialvektoren:

$$D_1 \vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 \vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Normalenvektor:

$$D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1(\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})}{\|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Auswertung des Vektorfeldes  $\vec{v}$  auf  $\vec{p}(\vec{u})$ :

$$\vec{v}(\vec{p}(\vec{u})) = \begin{pmatrix} u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}_1)$$

(v) Berechnung des Integranden des Flußintegrals:

$$\left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})] \right) = 1$$

(vi) Oberflächenelement:

$$do = \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\| d\vec{u} = u_1 d\vec{u}$$

(vii) Flußintegral der Deckelfläche:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) do &= \int_{\mathcal{M}_1} (\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})]) \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} u_1 d\vec{u} = \left( \int_{u_1=0}^1 u_1 du_1 \right) \cdot \left( \int_{u_2=0}^{2\pi} du_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

- (viii) Alternative Berechnung mit Hilfe der Determinante, s. Bemerkung (iv) auf p. 220:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do &= \int_{\mathcal{M}_1} \det \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})] \ D_1\vec{p}(\vec{u}) \ D_2\vec{p}(\vec{u}) \right) \, d\vec{u} \\
 &= \int_{\mathcal{M}_1} \det \begin{pmatrix} u_1 \sin u_2 & \cos u_2 & -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 & \sin u_2 & u_1 \cos u_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, du_1 \, du_2 \\
 &= \int_{\mathcal{M}_1} 1 \cdot [u_1 \cos^2 u_2 + u_1 \sin^2 u_2] \, d\vec{u} \\
 &= \int_{\mathcal{M}_1} u_1 \, d\vec{u} = \left( \int_{u_1=0}^1 u_1 \, du_1 \right) \cdot \left( \int_{u_2=0}^{2\pi} du_2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi,
 \end{aligned}$$

also dasselbe Ergebnis wie unter (vii).

## (2) Mantelfläche

- (i) Parametrisierung:

$$\mathcal{M}_2 := \{ \langle u_1, u_2 \rangle : u_1 \in [0, 1], u_2 \in [0, 2\pi) \}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{p}: \quad \mathcal{M}_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos u_2 \\ u_1 \sin u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- (ii) Tangentialvektoren:

$$D_1\vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_2\vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (iii) Normalenvektor:

$$\begin{aligned}
 D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} -u_1 \cos u_2 \\ -u_1 \sin u_2 \\ u_1(\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \cos u_2 \\ -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \\
 \frac{D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})}{\|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\|} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos u_2 \\ -\sin u_2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Diese Normale zeigt nach *innen* (testen für  $u_2 = \pi/2$  und  $u_2 = 3\pi/2$ ), also muß sie umorientiert werden:

$$\vec{n}(\vec{p}(\vec{u})) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist ein äußeres Einheitsnormalenvektorfeld auf dem Kegelmantel.

(iv) Auswertung des Vektorfeldes  $\vec{v}$  auf  $\vec{p}(\vec{u})$ :

$$\vec{v}(\vec{p}(\vec{u})) = \begin{pmatrix} u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}_2)$$

(v) Berechnung des Integranden des Flußintegrals:

$$\begin{aligned} \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})] \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2u_1 \sin u_2 \cos u_2 - u_1) \\ &= \frac{u_1}{\sqrt{2}} (\sin 2u_2 - 1) \end{aligned}$$

(vi) Oberflächenelement:

$$do = \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} = \left\| \begin{pmatrix} -u_1 \cos u_2 \\ -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\| d\vec{u} = u_1 \sqrt{2} d\vec{u}$$

(vii) Flußintegral der Mantelfläche:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) do &= \int_{\mathcal{M}_2} \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}[\vec{p}(\vec{u})] \right) \|D_1 \vec{p}(\vec{u}) \times D_2 \vec{p}(\vec{u})\| d\vec{u} \\ &= \int_{\mathcal{M}_2} \frac{u_1}{\sqrt{2}} (\sin 2u_2 - 1) u_1 \sqrt{2} d\vec{u} \\ &= \int_{u_1=0}^1 u_1^2 du_1 \int_{u_2=0}^{2\pi} (\sin 2u_2 - 1) du_2 \\ &= \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2} \cos 2u_2 - u_2 \right]_{u_2=0}^{2\pi} \\ &= -\frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

- (viii) Alternative Berechnung mit Hilfe der Determinante, s. Bemerkung (iv) auf p. 220:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do &= \int_{\mathcal{M}_2} \det \left( \vec{v}[\vec{p}(\vec{u})] \ D_1 \vec{p}(\vec{u}) \ D_2 \vec{p}(\vec{u}) \right) \, d\vec{u} \\
 &= \int_{\mathcal{M}_2} \det \begin{pmatrix} u_1 \sin u_2 & \cos u_2 & -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 & \sin u_2 & u_1 \cos u_2 \\ u_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \, du_1 \, du_2 \\
 &= \int_{\mathcal{M}_2} \left( u_1 [u_1 \cos^2 u_2 + u_1 \sin^2 u_2] - 1 \cdot [2 u_1^2 \sin u_2 \cos u_2] \right) \, d\vec{u} \\
 &= \int_{\mathcal{M}_2} u_1^2 (1 - \sin 2u_2) \, d\vec{u} \\
 &= \int_{u_1=0}^1 u_1^2 \, du_1 \int_{u_2=0}^{2\pi} (1 - \sin 2u_2) \, du_2 \\
 &= \frac{1}{3} \left[ u_2 + \frac{1}{2} \cos 2u_2 \right]_{u_2=0}^{2\pi} \\
 &= \frac{2}{3} \pi,
 \end{aligned}$$

also ein anderes Ergebnis als unter (vii). Warum?

### (3) Gesamtergebnis

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do &= \int_{\text{Deckelfläche}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do + \int_{\text{Mantelfläche}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do \\
 &= \pi - \frac{2}{3} \pi \\
 &= \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

### **Bemerkung**

Man mag es nicht glauben, aber mit dem im nächsten Kapitel vorgestellten *Gauß'schen Integralsatz* läßt sich dieses Beispiel sogar im Kopf ausrechnen!

# Kapitel 15

## Integralsätze

Seien  $[a, b]$  ein eindimensionales Intervall und  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Dann liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Aussage

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Qualitativ formuliert:

Das Integral der Ableitung  $f'$  von  $f$  über das *gesamte Intervall* ist bestimmt durch die Werte der Funktion  $f$  selbst auf dem *Rand des Intervalles*.

Der Wunsch: Ein mehrdimensionales Analogon.

Ist also z.B.  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit einem „vernünftigen“ Rand,  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$ , also  $f$  eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf  $\mathcal{G}$ , gilt dann

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) d\vec{x} = \begin{cases} \text{etwas, bei dem nur Werte von } f \text{ auf dem Rand} \\ \text{von } \mathcal{G} \text{ auftauchen, beispielsweise ein Integral über } \dot{\mathcal{G}}? \end{cases}$$

### 15.1 Divergenz und Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^3$

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^3$  und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$ . Seien  $\vec{\xi} \in \mathcal{G}$  und  $h > 0$  so klein, daß der Würfel

$$\mathcal{Q}_h(\vec{\xi}) := \{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, |x_i - \xi_i| \leq h \ (i \in \{1, 2, 3\}) \}$$

noch ganz in  $\mathcal{G}$  liegt.

$\dot{\mathcal{Q}}_h(\vec{\xi})$ , der Rand von  $\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})$ , ist die Vereinigung von sechs orientierten Flächenstücken  $\mathcal{F}_{\pm}^{(k)}$ , wobei die Normalenrichtungen jeweils so gewählt sind,

daß die Normalen ins Äußere von  $\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})$  weisen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm}^{(1)} &: \langle u_2, u_3 \rangle \mapsto \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \vec{p}(u_2, u_3) = \langle \xi_1 \pm h, u_2, u_3 \rangle \\ &(\langle u_2, u_3 \rangle \in \mathcal{M}_1 := \{ \langle u_2, u_3 \rangle : |u_i - \xi_i| \leq h, i \in \{2, 3\} \}) \\ &\text{mit dem Normalenfeld } \vec{n}_{\pm}^{(1)}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{x} \text{ auf } \mathcal{F}_{\pm}^{(1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm}^{(2)} &: \langle u_1, u_3 \rangle \mapsto \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \vec{p}(u_1, u_3) = \langle u_1, \xi_2 \pm h, u_3 \rangle \\ &(\langle u_1, u_3 \rangle \in \mathcal{M}_2 := \{ \langle u_1, u_3 \rangle : |u_i - \xi_i| \leq h, i \in \{1, 3\} \}) \\ &\text{mit dem Normalenfeld } \vec{n}_{\pm}^{(2)}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{x} \text{ auf } \mathcal{F}_{\pm}^{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm}^{(3)} &: \langle u_1, u_2 \rangle \mapsto \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \vec{p}(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2, \xi_3 \pm h \rangle \\ &(\langle u_1, u_2 \rangle \in \mathcal{M}_3 := \{ \langle u_1, u_2 \rangle : |u_i - \xi_i| \leq h, i \in \{1, 2\} \}) \\ &\text{mit dem Normalenfeld } \vec{n}_{\pm}^{(3)}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{x} \text{ auf } \mathcal{F}_{\pm}^{(3)}. \end{aligned}$$

Mit dieser Konvention gilt dann für den Rand des Würfels die Zerlegung (Abb. 15.1)

$$\dot{\mathcal{Q}}_h(\vec{\xi}) = \bigcup_{i=1}^3 (\mathcal{F}_+^{(i)} \cup \mathcal{F}_-^{(i)}).$$

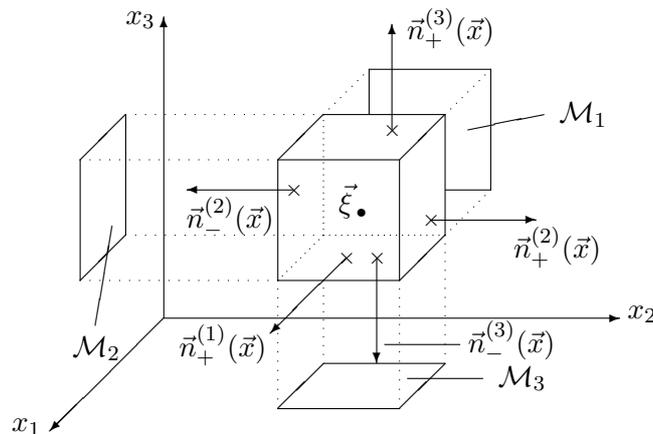


Abbildung 15.1: Parametrisierung der Randflächen eines Würfels

### Ziel

Charakterisierung des Flusses des Feldes  $\vec{v}$  durch die „geschlossene orientierte

Fläche“  $\dot{Q}_h(\vec{\xi})$  für kleine Werte von  $h$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{\dot{Q}_h(\vec{\xi})} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do \\
&= \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{\mathcal{F}_+^{(i)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_+^{(i)}(\vec{x})) \, do + \int_{\mathcal{F}_-^{(i)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_-^{(i)}(\vec{x})) \, do \right] \\
&= \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{\mathcal{M}_i} (\vec{v}[\vec{p}(\vec{u})], \vec{n}_+^{(i)}[\vec{p}(\vec{u})]) \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| \, d\vec{u} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathcal{M}_i} (\vec{v}[\vec{x}(\vec{u})], \vec{n}_-^{(i)}[\vec{p}(\vec{u})]) \|D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})\| \, d\vec{u} \right] \\
&= \int_{\mathcal{M}_1} \left( \vec{v}(\xi_1 + h, u_2, u_3), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \, du_2 \, du_3 \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}_1} \left( \vec{v}(\xi_1 - h, u_2, u_3), \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} \, du_2 \, du_3 \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}_2} \left( \vec{v}(u_1, \xi_2 + h, u_3), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \, du_1 \, du_3 \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}_2} \left( \vec{v}(u_1, \xi_2 - h, u_3), \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} \, du_1 \, du_3 \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}_3} \left( \vec{v}(u_1, u_2, \xi_3 + h), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \, du_1 \, du_2 \\
&\quad + \int_{\mathcal{M}_3} \left( \vec{v}(u_1, u_2, \xi_3 - h), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} \, du_1 \, du_2 \\
&=: I_1 + \dots + I_6 \quad (\text{Integrale der Reihenfolge nach numeriert!})
\end{aligned}$$

Für die ersten beiden Integrale erhält man

$$I_1 + I_2 = \int_{\mathcal{M}_1} [v_1(\xi_1 + h, u_2, u_3) - v_1(\xi_1 - h, u_2, u_3)] \, du_2 \, du_3.$$

Wegen  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$  ist  $v_1 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}) =: \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$ , und damit ist  $v_1$  in  $\vec{\xi}$  total

differenzierbar, also gilt mit  $x_2 = u_2, x_3 = u_3$ :

$$v_1(\xi_1 \pm h, x_2, x_3) = v_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \left( \vec{\nabla} v_1(\vec{\xi}), \begin{pmatrix} \pm h \\ x_2 - \xi_2 \\ x_3 - \xi_3 \end{pmatrix} \right) + o(h)^1,$$

und damit

$$v_1(\xi_1 + h, x_2, x_3) - v_1(\xi_1 - h, x_2, x_3) = \left( \vec{\nabla} v_1(\vec{\xi}), \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + o(h).$$

Bei der nachfolgenden Integration darf  $o(h)$  wie eine Konstante bzgl. der Variablen  $u_2$  und  $u_3$  behandelt werden; dies läßt sich mit geeigneten Abschätzungen rechtfertigen. Man erhält

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{\mathcal{M}_1} \left[ 2h \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) + 0 + 0 + o(h) \right] du_2 du_3 \\ &= \left[ 2h \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) + o(h) \right] \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{M}_1} du_2 du_3}_{=|\mathcal{M}_1|=(2h)^2} \\ &= \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) + \frac{o(h)}{2h} \right] \cdot (2h)^3 \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) \cdot |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})| + \frac{o(h)}{2h} \cdot |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})|. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{\xi}) \cdot |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})| + \frac{o(h)}{2h} |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})|, \\ I_5 + I_6 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\vec{\xi}) \cdot |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})| + \frac{o(h)}{2h} |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})|. \end{aligned}$$

Somit ist der Fluß des Vektorfeldes  $\vec{v}$  durch die Würfeloberfläche gegeben durch

$$\int_{\dot{\mathcal{Q}}_h(\vec{\xi})} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma = \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{\xi}) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\vec{\xi}) \right] \cdot |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})| + 3 \frac{o(h)}{2h} \cdot |\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})|,$$

und es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\dot{\mathcal{Q}}_h(\vec{\xi})} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma}{|\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})|} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k}(\vec{\xi}).$$

Es läßt sich darüberhinaus zeigen, daß ein entsprechend gebildeter Quotient den gleichen Grenzwert liefert, wenn  $\mathcal{Q}_h(\vec{\xi})$  ersetzt wird durch einen Spat oder

<sup>1</sup>Hiermit ist ein sog. *Landau-Symbol* definiert:  $o(h)$  bedeutet, daß der eigentlich dort stehende Ausdruck für  $h \rightarrow 0$  auch dann noch gegen Null geht, wenn man ihn vorher durch  $h$  dividiert.

eine Kugel mit  $\vec{\xi}$  als Mittelpunkt, welche sich für  $h \rightarrow 0$  auf  $\vec{\xi}$  „zusammenzieht“.

### Ergebnis

Der Fluß eines Vektorfeldes durch den Rand eines kleinen Würfels um  $\vec{\xi}$  ist in erster Näherung proportional zum Volumen des Würfels.

Der Proportionalitätsfaktor  $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{\xi}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{\xi}) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\vec{\xi})$  gibt eine Charakterisierung des Feldes an der Stelle  $\vec{\xi}$  in folgendem Sinne:

Ist er positiv, so fließt für alle hinreichend kleinen  $h$  aus  $Q_h(\vec{\xi})$  immer mehr heraus als hinein, d.h. bei  $\vec{\xi}$  liegt eine *Quelle* vor. Ist er negativ, so fließt in  $Q_h(\vec{\xi})$  mehr hinein als heraus, d.h. bei  $\vec{\xi}$  liegt eine *Senke* vor.

### Definition 15.1

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^n)$ . Dann heißt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

die *Divergenz* oder *Quelldichte* des Vektorfeldes  $\vec{v}$ .

### Bemerkung

Mit dem formalen Vektor Nabla

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

erhält man die Divergenz eines Feldes über ein formales Skalarprodukt:

$$\operatorname{div} \vec{v} = (\vec{\nabla}, \vec{v}).$$

Auf die notwendige Vorsicht beim Umgang mit diesem formalen Vektor sei nochmals hingewiesen, nicht alle sonst bekannten Rechenregeln gelten weiter; z.B. ist (Beweis ?)

$$(\vec{\nabla}, \vec{v}) \neq (\vec{v}, \vec{\nabla}).$$

### Eine physikalische Vorbetrachtung zum Gauß'schen Integralsatz

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$  und  $Q$  ein Würfel mit  $Q \subseteq \mathcal{G}$ .

$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x})$  gibt an jeder Stelle  $\vec{x} \in Q$  die Quelldichte an. Anschaulich ist zu erwarten, daß der Fluß durch den Rand  $\dot{Q}$  von  $Q$  bestimmt ist durch „Aufsummieren“

dessen, was im Inneren von  $\mathcal{Q}$  von den Quellen erzeugt und (negativ gezählt) von den Senken absorbiert wird. Dies aber müßte mit Hilfe der Divergenz von  $\vec{v}$  bestimmbar sein.

Dazu wird  $\mathcal{Q}$  in kleine Teilwürfel  $\{\mathcal{Q}_i\}_{i \in J}$  mit den Mittelpunkten  $\vec{x}^{(i)}$  zerlegt. Bezeichne  $\vec{n}^{(i)}(\cdot)$  das äußere Normalenfeld auf  $\dot{\mathcal{Q}}_i$ ,  $\vec{n}(\cdot)$  dasjenige auf  $\dot{\mathcal{Q}}$ . Wie zu Beginn des Abschnittes gezeigt, ist dann

$$\int_{\dot{\mathcal{Q}}_i} \left( \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}^{(i)}(\vec{x}) \right) d\sigma \approx \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}^{(i)}) \cdot |\dot{\mathcal{Q}}_i|.$$

Seien  $\mathcal{Q}_i$  und  $\mathcal{Q}_k$  zwei Teilwürfel, die eine Seitenfläche  $\mathcal{SF}$  gemeinsam haben, dann ist auf dieser Fläche (Abb. 15.2)

$$\vec{n}^{(i)}(\vec{x}) = -\vec{n}^{(k)}(\vec{x}).$$

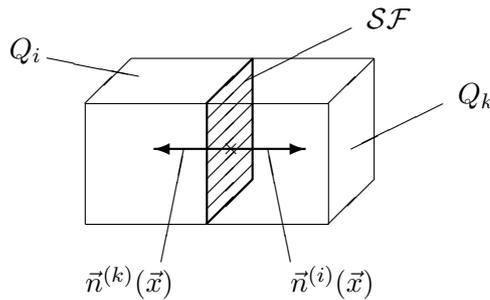


Abbildung 15.2: Gemeinsame Seitenfläche zweier Teilwürfel

Somit ist dann

$$\int_{\mathcal{SF}} \left( \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}^{(i)}(\vec{x}) \right) d\sigma = - \int_{\mathcal{SF}} \left( \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}^{(k)}(\vec{x}) \right) d\sigma.$$

Wird also  $\int_{\dot{\mathcal{Q}}_i} \left( \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}^{(i)}(\vec{x}) \right) d\sigma$  über alle  $i \in J$  aufsummiert, so addieren sich die Oberflächenintegrale über den jeweils „inneren“ Seitenflächen zu Null, und es bleiben nur die Integrale über denjenigen Seitenflächen übrig, die im Rand  $\dot{\mathcal{Q}}$  von  $\mathcal{Q}$  liegen. Dort stimmen aber die Normalen der jeweiligen Teilwürfel  $\dot{\mathcal{Q}}_i$  mit denen des Gesamtwürfels  $\dot{\mathcal{Q}}$  überein.

Man erhält somit

$$\sum_{i \in J} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}^{(i)}) \cdot |\dot{\mathcal{Q}}_i| \approx \sum_{i \in J} \int_{\dot{\mathcal{Q}}_i} \left( \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}^{(i)}(\vec{x}) \right) d\sigma = \int_{\dot{\mathcal{Q}}} \left( \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \right) d\sigma.$$

Die erste Summe ist eine Approximation für das (dreidimensionale) Bereichsintegral über der Divergenz von  $\vec{v}$ .

**Vermutung**

$$\int_{\mathcal{Q}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\hat{\mathcal{Q}}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do$$

Diese Gleichung ist der *Gauß'sche Integralsatz*, freilich nur für den Spezialfall eines Würfels als Integrationsbereich. Hierfür ist er auch leicht zu beweisen, wobei der Zusammenhang mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung klar erkennbar ist.

*Beweis des Gauß'schen Integralsatzes für einen Würfel*

Der Beweis verwendet im wesentlichen die Gedanken der Argumentation, die in der Motivation für den Gauß'schen Integralsatz zu Anfang dieses Kapitels vorgestellt wurde.

Seien  $\vec{\xi}$  der Mittelpunkt des Würfels  $\mathcal{Q}$  und  $h$  die halbe Kantenlänge, wie zu Beginn des Abschnittes. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{\mathcal{M}_1 \times [\xi_1 - h, \xi_1 + h]} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) \, d\vec{x} \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} \left( \int_{\xi_1 - h}^{\xi_1 + h} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) \, dx_1 \right) dx_2 \, dx_3 \\ \text{(Hauptsatz)} \quad &= \int_{\mathcal{M}_1} \left[ v_1(\xi_1 + h, x_2, x_3) - v_1(\xi_1 - h, x_2, x_3) \right] dx_2 \, dx_3 \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} \left[ \left( \vec{v}(\xi_1 + h, x_2, x_3), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \vec{v}(\xi_1 - h, x_2, x_3), \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] dx_2 \, dx_3 \\ &= \int_{\mathcal{F}_+^{(1)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_+^{(1)}(\vec{x})) \, do + \int_{\mathcal{F}_-^{(1)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_-^{(1)}(\vec{x})) \, do. \end{aligned}$$

Genauso folgen, mit jeweils anderer Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{\mathcal{F}_+^{(2)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_+^{(2)}(\vec{x})) \, do + \int_{\mathcal{F}_-^{(2)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_-^{(2)}(\vec{x})) \, do, \\ \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{\mathcal{F}_+^{(3)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_+^{(3)}(\vec{x})) \, do + \int_{\mathcal{F}_-^{(3)}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}_-^{(3)}(\vec{x})) \, do. \end{aligned}$$

Aufsummieren der Integrale ergibt dann

$$\int_{\mathcal{Q}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\dot{\mathcal{Q}}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do.$$

### Bemerkung

Im Fall  $n = 1$  ist der Gauß'sche Integralsatz für ein kompaktes Intervall  $[a, b]$  genau der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; die äußeren Normalen sind

$$n_+(b) := \vec{n}_+^{(1)} = 1 \quad , \quad n_-(a) := \vec{n}_-^{(1)} = -1,$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_a^b v'(x) \, dx = v(b) - v(a) \\ &= (v(b), n_+(b)) + (v(a), n_-(a)) \\ &=: \int_{\dot{\mathcal{Q}}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do \quad \text{mit } \dot{\mathcal{Q}} := \{a, b\}. \end{aligned}$$

Nun reicht es nicht, den Gauß'schen Satz nur für Würfel zur Verfügung zu haben. Die in der Einleitung gemachte physikalische Vorbetrachtung zum Gauß'schen Satz, daß die Quelledichte eines Vektorfeldes, über einem Gebiet aufintegriert, gleich dem Fluß des Feldes durch den Rand ist, muß für alle einigermaßen „vernünftige“ Gebiete mathematisch nachvollziehbar sein.

### Definition 15.2

Sei  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet.

(i)  $\mathcal{G}$  heißt *zulässig*, wenn gilt:

Der Rand  $\dot{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$  setzt sich zusammen aus endlich vielen orientierten regulären Flächenstücken

$$\mathcal{F}_k : \vec{u} \mapsto \vec{p}^{(k)}(\vec{u}) \quad (\vec{u} \in \mathcal{M}_k \subseteq \mathbb{R}^2, k \in \{1, \dots, N\}),$$

deren Normalenfelder  $\vec{n}^{(k)}(\cdot)$  ins Äußere von  $\mathcal{G}$  weisen.

(ii) Ist  $\mathcal{G}$  zulässig, so bezeichne  $\partial\mathcal{G}$  den *orientierten Rand* von  $\mathcal{G}$ .

(iii) Für ein Vektorfeld  $\vec{v} \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{G}}, \mathbb{R}^3)$  mit einem zulässigen Gebiet  $\mathcal{G}$  sei

$$\int_{\partial\mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do := \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{F}_k} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}^{(k)}(\vec{x})) \, do .$$

Ist  $\mathcal{G}$  ein zulässiges Gebiet, dann kann der Rand von  $\mathcal{G}$  da, wo die Seitenflächen  $\mathcal{S}_k := W(\vec{p}(\mathcal{M}_k))$  aufeinanderstoßen, Ecken und Spitzen haben. Beispiele für zulässige Gebiete im  $\mathbb{R}^3$  sind etwa Würfel, Pyramiden, Kugelkappen, etc.

„Innere Randpunkte“ dagegen sind nicht erlaubt, da man dort kein äußeres Normalenfeld definieren kann. So sind z.B. mit  $0 < r < R$

$$\begin{aligned} \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, 0 < \|\vec{x}\| < R\} & \quad \text{nicht zulässige - ,} \\ \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, r < \|\vec{x}\| < R\} & \quad \text{zulässige Gebiete im } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

### Aufgabe

Ist eine dreidimensionale Kugel ohne ihre Äquatorebene ein zulässiges Gebiet im  $\mathbb{R}^3$ ?

**Satz 15.1** (Gauß'scher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$ )

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein zulässiges Gebiet, also insbesondere beschränkt sowie  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\bar{\mathcal{G}}, \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt

$$\int_{\partial\mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x}. \quad (15.1)$$

Der Fluß eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes durch den nach außen orientierten Rand eines zulässigen Gebietes ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz dieses Feldes über das Gebiet.

### Beispiel 15.1

Seien  $h, R > 0$  und  $\mathcal{Z}$  der Zylinder

$$\mathcal{Z} := \{\vec{x} : \vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}$$

also mit dem Boden in der  $\langle x_1, x_2, 0 \rangle$ -Ebene.  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei das Vektorfeld, definiert durch

$$\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3).$$

Berechnet werden soll der Fluß von  $\vec{v}$  durch die Oberfläche des Zylinders,

$$F := \int_{\partial\mathcal{Z}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do.$$

Dazu muß die Oberfläche des Zylinders in drei Teilbereiche zerlegt werden. Bei dieser Zerlegung wird sich herausstellen, da man die auftretenden drei Oberflächenintegrale direkt berechnen kann, ohne den Umweg über eine explizite Parametrisierung wählen zu müssen:

(i) Bodenfläche  $\mathcal{B}$  des Zylinders  $\mathcal{Z}$ :

Die äußere Einheitsnormale und das Skalarprodukt mit  $\vec{v}$  sind

$$\vec{n}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

(ii) Deckelfläche  $\mathcal{D}$  des Zylinders  $\mathcal{Z}$ :

Hier ist

$$\vec{n}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = h,$$

also

$$\int_{\text{Deckelfläche}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, d\sigma = h \cdot \int_{\text{Deckelfläche}} d\sigma = h \cdot \pi R^2$$

(iii) Mantelfläche  $\mathcal{M}$  des Zylinders  $\mathcal{Z}$ :

Das äußere Einheits-Normalenvektorfeld läßt sich durch einfaches Hinsehen bestimmen:

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Natürlich läßt es sich auch durch eine Parametrisierung der Mantelfläche berechnen:

$$\vec{p}: (0, 2\pi) \times (0, h) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos u_1 \\ R \cdot \sin u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$D_1 \vec{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin u_1 \\ R \cdot \cos u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 \vec{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_1 \vec{p}(u_1, u_2) \times D_2 \vec{p}(u_1, u_2) &= \begin{pmatrix} -R \cdot \sin u_1 \\ R \cdot \cos u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \cdot \cos u_1 \\ R \cdot \sin u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{R} = R,$$

$$\begin{aligned} \int_{\text{Mantelfläche}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, d\sigma &= R \cdot \int_{\text{Mantelfläche}} d\sigma \\ &= R \cdot \int_{[0, 2\pi] \times [0, h]} R \, d(u_1, u_2) = R \cdot 2\pi R \cdot h \end{aligned}$$

(iv) Ergebnis von (i) - (iii):

$$\int_{\partial Z} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, d\sigma = 0 + \pi R^2 h + 2\pi R^2 h = 3\pi R^2 h$$

(v) Berechnung mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes:

$$\int_{\partial Z} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, d\sigma = \int_Z \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_Z 3 \, d\vec{x} = 3\pi R^2 h$$

Die Divergenz des Vektorfeldes ist hier konstant, daher ist die Berechnung des Flusses mit dem Volumenintegral über den Gauß'schen Satz sehr viel einfacher als die direkte Auswertung der Oberflächenintegrale. Allerdings ist die Berechnung auch dann oft einfacher, wenn die Divergenz nicht konstant ist; s. dazu das folgende Beispiel 15.2.

### Aufgabe

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes (Satz 15.1) berechne man den Fluß des Vektorfeldes aus Beispiel 14.12,

$$\vec{v}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3),$$

durch die Oberfläche des dort angegebenen Kegels im Kopf.

### Beispiel 15.2 (Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik)

Man betrachte das von einer Ladung  $Q$  im Punkt  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  erzeugte elektrostatische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}).$$

Es soll der Fluß dieses elektrischen Feldes durch die Oberfläche eines zulässigen Gebietes  $\mathcal{G}$  bestimmt werden. Für dieses Gebiet gibt es zwei Möglichkeiten:

- (i) es enthält die Ladung  $Q$  nicht      oder

(ii) es enthält die Ladung  $Q$ .

Zu (i):

Nach einer Hausaufgabe ist  $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$ , also folgt für ein solches Gebiet  $\mathcal{G}$  nach dem Gauß'schen Integralsatz

$$\int_{\partial \mathcal{G}} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) \, d\vec{x} = 0.$$

Zu (ii):

Schließt das Gebiet  $\mathcal{G}$  die Ladung  $Q$  ein, so ist der Gauß'sche Satz darauf nicht anwendbar, denn  $\vec{E}$  ist in  $\mathcal{G}$  nicht überall definiert, geschweige denn stetig differenzierbar. Man muß das Flußintegral also direkt ausrechnen.

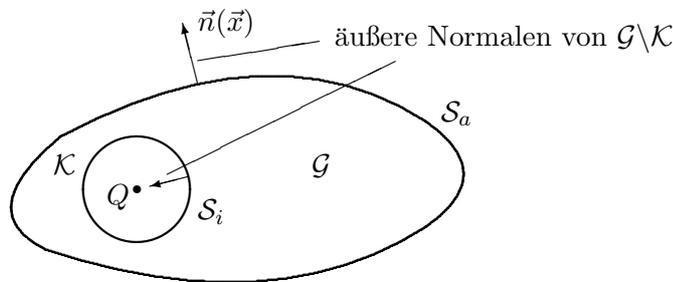


Abbildung 15.3: Aussparen einer Kugel um die Ladung  $Q$

Sei  $\mathcal{K}$  eine Kugel mit  $Q$  als Mittelpunkt und Radius  $r$ , welche ganz in  $\mathcal{G}$  enthalten ist. Der Differenzbereich  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{K}$  ist dann ein zulässiges Gebiet, er gestattet folglich die Anwendung des Gauß'schen Satzes, und in ihm gelten  $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0$  und (Abb. 15.3)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{K}} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x})}_0 \, d\vec{x} = \int_{\partial(\mathcal{G} \setminus \mathcal{K})} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do \\ &= \int_{S_a} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do + \int_{S_i} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do. \end{aligned}$$

Hierbei ist mit  $S_a$  der *äußere* (orientierte) Rand des Gebietes  $\mathcal{G}$  gemeint, mit  $S_i$  der *innere* (orientierte) Rand, also der Rand der ausgesparten Kugel  $\mathcal{K}$ . Man beachte hierbei die Orientierung der beiden Randkomponenten: auf beiden zählt der Fluß – von  $\mathcal{G}$  aus gesehen – positiv, weil der aus  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{K}$  herausweisende Normalenvektor in die kleine Kugel hinein weist.

Bleibt man hingegen bei der früher vereinbarten Konvention über die Parametrisierung von Kugeloberflächen – verwendet wird die äußere Normale, so daß der nach außen gerichtete Fluß positiv zählt –, so muß man für die kleine Kugel – jetzt von  $\mathcal{K}$  aus gesehen – die äußere Normale verwenden und erhält

$$0 = \int_{S_a} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do - \int_{\partial \mathcal{K}} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do,$$

also

$$\int_{S_a} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do = \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do.$$

Der Fluß durch den äußeren Rand  $S_a$  von  $\mathcal{G}$  ist somit gleich dem Fluß durch die kleine Kugeloberfläche  $\partial\mathcal{K}$ , kann demzufolge auch darüber berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{S_a} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do &= \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\mathcal{K}} \left( \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3}, \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} \right) \, do \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\mathcal{K}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^2} \, do = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\mathcal{K}} \frac{1}{r^2} \, do \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \int_{\partial\mathcal{K}} \, do = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4\pi r^2 \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

### Ergebnis

Der Gesamtfluß des elektrischen Feldes durch die geschlossene Oberfläche eines Gebietes wird durch die darin enthaltene elektrische Ladung verursacht, diese Ladung ist also eine „Quelle“ für die elektrischen Feldlinien.

Ist in einem Gebiet  $\mathcal{G}$  keine Ladung vorhanden, so ist der Fluß durch seine (geschlossene) Oberfläche  $\partial\mathcal{G}$  Null, und es gilt  $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = 0$  ( $\vec{x} \in \mathcal{G}$ ). Solche Gebiete heißen *quellenfrei*.

Schließt die Oberfläche von  $\mathcal{G}$  mehrere Punktladungen  $Q_i$  ein, so gilt für den gesamten Fluß

$$\int_{\partial\mathcal{G}} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i.$$

### Verallgemeinerung auf den Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung

Nun liege im Gebiet  $\mathcal{G}$  eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit einer stetigen *Raumladungsdichtefunktion*  $\rho$  vor:

$$\rho(\vec{x}) := \lim_{\Delta\vec{x} \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(\vec{x})}{\Delta\vec{x}} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

Hier liegt  $\vec{x}$  in dem kleinen Volumen  $\Delta\vec{x}$ , welches sich für  $\Delta\vec{x} \rightarrow 0$  auf den Punkt  $\vec{x}$  „zusammenzieht“. In dem kleinen Volumen  $\Delta\vec{x}$  ist die Ladung  $\Delta Q(\vec{x})$  dann ungefähr gleich  $\rho(\vec{x})\Delta\vec{x}$ :

$$\Delta Q(\vec{x}) \approx \rho(\vec{x})\Delta\vec{x}$$

Das ganze Gebiet  $\mathcal{G}$  wird nun zerlegt in kleine Volumina  $\Delta\vec{x}_i$  mit jeweils der Ladung  $\Delta Q(\vec{x}_i)$  ( $i \in J$ ):

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i \in J} \Delta\vec{x}_i,$$

so daß sich für die Gesamtladung  $Q$  in  $\mathcal{G}$  ergibt:

$$Q = \sum_{i \in J} \Delta Q(\vec{x}_i) \approx \sum_{i \in J} \rho(\vec{x}_i) \Delta\vec{x}_i.$$

Diese Summe ist eine Riemann'sche Summe für das Volumenintegral

$$Q = \lim_{|J| \rightarrow \infty} \sum_{i \in J} \Delta Q(\vec{x}_i) = \lim_{|J| \rightarrow \infty} \sum_{i \in J} \rho(\vec{x}_i) \Delta\vec{x}_i = \int_{\mathcal{G}} \rho(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Für den gesamten Fluß durch die orientierte Oberfläche von  $\mathcal{G}$  ergibt sich daher mit dem Gauß'schen Satz:

$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial\mathcal{G}} (\vec{E}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) do = \lim_{|J| \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i \in J} \Delta Q(\vec{x}_i) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \rho(\vec{x}) d\vec{x},$$

also

$$\int_{\mathcal{G}} \left( \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) - \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \right) d\vec{x} = 0.$$

Da diese Beziehung für beliebige Gebiete  $\mathcal{G}$  gilt, muß der Integrand aufgrund eines Stetigkeitsargumentes gleich Null sein. Man erhält im statischen (= zeitunabhängigen) Fall die *erste Maxwell'sche Gleichung* für das Vakuum in differentieller Form:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

Die Quelledichte der elektrischen Feldstärke ist die das Feld hervorrufoende Ladungsdichte.

### Verallgemeinertes Coulomb'sches Gesetz

Das von allen Ladungen  $\Delta Q(\vec{p}_i)$  erzeugte elektrostatische Feld im Aufpunkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{G}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \sum_{i \in J} \frac{\Delta Q(\vec{p}_i)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}_i}{\|\vec{x} - \vec{p}_i\|^3} \\ &\approx \sum_{i \in J} \frac{\rho(\vec{p}_i)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{p}_i}{\|\vec{x} - \vec{p}_i\|^3} \cdot \Delta\vec{p}_i \quad (\vec{x} \neq \vec{p}_i, i \in J). \end{aligned}$$

Diese Summe ist eine Riemann'sche Summe für das Volumenintegral

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \rho(\vec{p}) \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} d\vec{p} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{G})$$

Deutsch	Englisch
Integralsatz von Gauß	divergence theorem
Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik	Gauss' law

Tabelle 15.1: Übersetzungsschlüssel elektrostatischer Begriffe

des elektrischen Feldes  $\vec{E}(\vec{x})$  im Aufpunkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{G}$ , welches von der Raumladungsdichte  $\rho$  eines Gebietes  $\mathcal{G}$  erzeugt wird; man kann zeigen, daß bei stetiger Raumladungsdichte  $\rho$  für das Feld  $\vec{E}$  gilt:  $\vec{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$  (in jedem Kompaktum  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{G}$  ist das Integral gleichmäßig konvergent in  $\vec{x}$ ).

**Bemerkung**

In der englischsprachigen Literatur sind die Bezeichnungen etwas anders als hier im Deutschen eingeführt, das muß man beachten. Es gelten dort die Korrespondenzen von Tabelle 15.1.

**Beispiel 15.3**

Man berechne den Fluß des Vektorfeldes

$$\vec{v}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 + x_2^3 \\ x_3(x_1 - 3x_2^2) \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

aus der Kugel

$$\mathcal{K} := \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\| \leq 2\}.$$

**Lösung**

(i) Berechnung des Flußintegrals direkt:

Parametrisierung der Kugeloberfläche ( $\mathcal{M} := [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ )

$$S : \quad \vec{p}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \varphi \\ 2 \sin \theta \sin \varphi \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix} \quad (R = 2, \langle \varphi, \theta \rangle \in \mathcal{M})$$

$$D_1 \vec{p}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -2 \sin \theta \sin \varphi \\ 2 \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 \vec{p}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \cos \varphi \\ 2 \cos \theta \sin \varphi \\ -2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$D_1\vec{p}(\varphi, \theta) \times D_2\vec{p}(\varphi, \theta) = -(2^2 \sin \theta) \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -(2^2 \sin \theta) \cdot \vec{e}_r$$

Der so berechnete Normalenvektor weist nach innen, die äußere Einheitsnormale (das äußere Einheitsnormalenvektorfeld) ist

$$\vec{n}(\varphi, \theta) = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet sich der Fluß von  $\vec{v}$  aus der Kugel  $\mathcal{K}$  zu

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + 8 \sin^3 \theta \sin^3 \varphi \\ 2 \cos \theta (2 \sin \theta \cos \varphi - 12 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right) \cdot 2^2 \sin \theta \, d(\varphi, \theta) \\ & \quad \text{(Man beachte: } |\sin \theta| = \sin \theta \text{ für } \theta \in [0, \pi]) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[ 4 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi + 8 \sin^4 \theta \sin^4 \varphi \right. \\ & \quad \left. + 4 \sin \theta \cos^2 \theta \cos \varphi - 24 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \right] 4 \sin \theta \, d(\varphi, \theta) \\ &= \int_{\mathcal{M}} 16 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d(\varphi, \theta) + \int_{\mathcal{M}} 32 \sin^5 \theta \sin^4 \varphi \, d(\varphi, \theta) \\ & \quad + \int_{\mathcal{M}} 16 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \varphi \, d(\varphi, \theta) - \int_{\mathcal{M}} 96 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \, d(\varphi, \theta) \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta &= \int_0^\pi \sin \theta [1 - \cos^2 \theta] \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta + \int_0^\pi \cos^2 \theta [-\sin \theta] \, d\theta \\ &= -[\cos \theta]_0^\pi + \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \\ &= -(-1 - 1) + \frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta &= \frac{1}{4} \int_0^\pi [2 \sin \theta \cos \theta]^2 \, d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 2\theta \, d\theta \stackrel{(\alpha=2\theta)}{=} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \int_0^\pi \sin^4 \theta \, d\theta &= \int_0^\pi \sin \theta \cdot \sin^3 \theta \, d\theta \\
 &= \left[ -\cos \theta \cdot \sin^3 \theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos \theta \cdot 3 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \\
 &= 0 + \frac{3}{4} \int_0^\pi [2 \sin \theta \cos \theta]^2 \, d\theta \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin^2 2\theta \, d\theta \stackrel{(\alpha=2\theta)}{=} \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{3}{8} \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad \int_0^\pi \sin^5 \theta \, d\theta &= \int_0^\pi \sin \theta \cdot \sin^4 \theta \, d\theta \\
 &= \left[ -\cos \theta \cdot \sin^4 \theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos \theta \cdot 4 \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \\
 &= 0 + \int_0^\pi \sin \theta [2 \sin \theta \cos \theta]^2 \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \sin \theta \cdot \sin^2 2\theta \, d\theta \\
 &= \left[ -\cos \theta \cdot \sin^2 2\theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos \theta \cdot 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \cdot 2 \, d\theta \\
 &= 0 + 2 \int_0^\pi \cos \theta \sin 4\theta \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} [\sin(4\theta - \theta) + \sin(4\theta + \theta)] \, d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sin 3\theta \, d\theta + \int_0^{\pi} \sin 5\theta \, d\theta \\
&= -\left[\frac{1}{3} \cos 3\theta\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{5} \cos^5 \theta\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{3}(-1-1) - \frac{1}{5}(-1-1) = \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(e)} \quad \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \theta \, d\theta &= \int_0^{\pi} \sin^3 \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta - \int_0^{\pi} \sin^5 \theta \, d\theta \\
&\stackrel{\text{(a),(d)}}{=} \frac{4}{3} - \frac{16}{15} = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Nebenrechnung können die vier Integrale nun weiter ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 16 \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\
&\stackrel{\text{(c)}}{=} 16 \cdot \frac{3}{8} \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 32 \int_0^{\pi} \sin^5 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi \\
&\stackrel{\text{(d),(c)}}{=} 32 \cdot \frac{16}{15} \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} \pi = \frac{128}{5} \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 16 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \\
&\stackrel{\text{(b)}}{=} 16 \cdot \frac{3}{8} \pi \cdot \left[\sin \varphi\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= -96 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \\
&\stackrel{\text{(e)}}{=} -96 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{16}{15}\right) \pi = -\frac{128}{5} \pi
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^4 I_k = \frac{128}{5} \pi - \frac{128}{5} \pi = 0$$

(ii) Berechnung mit dem Gauß'schen Integralsatz:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = 0 + x_1 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2^2 = 2x_1,$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, d\sigma &= \int_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\mathcal{K}} 2x_1 \, d\vec{x} \\ &= \int_{r=0}^2 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \cdot \underbrace{|r^2 \sin \theta|}_{\text{Determinante}} \cdot \underbrace{r \sin \theta \cos \phi}_{2x_1} \\ &= \int_{r=0}^2 r^3 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= 2^4 \cdot [\sin \varphi]_0^{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

(iii) Berechnung im Kopf:

Der Integrand ist eine ungerade Funktion von  $\vec{x}$ , daher kann man auch ohne Rechnung erschließen, daß das Volumenintegral über die gesamte (symmetrisch zum Koordinatenursprung liegende) Kugel 0 ist.

Man beachte, daß der Fluß aus der Kugel 0 ist, obwohl die Divergenz des Vektorfeldes nicht global verschwindet: die Quellen und Senken des Feldes innerhalb der Kugel heben sich gerade auf.

## 15.2 Green'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$

Der Green'sche Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$  ist der Schlüssel zum Stokes'schen Integralsatz, ja er *ist* der Stokes'sche Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ . Weiterhin liefert er durch Wahl spezieller Vektorfelder eine Formel zur Berechnung einer Fläche durch Berechnung eines Kurvenintegrals längs ihres orientierten Randes sowie den Gauß'schen Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ .

Sei  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ . Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt dann

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a),$$

und davon wird jetzt wieder Gebrauch gemacht.

Sei  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Man betrachte das Doppelintegral von  $\frac{\partial p_2}{\partial x_1}$  über das Rechteck  $\mathcal{R}$  in Abb. 15.4.

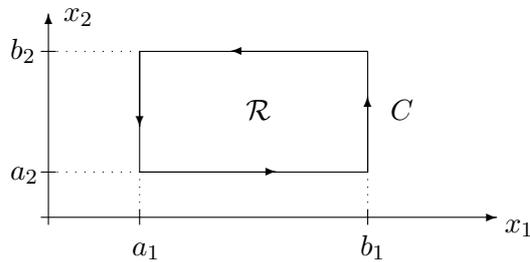


Abbildung 15.4: Integral entlang eines positiv orientierten Rechteckes

- (A) Zuerst wird das Doppelintegral als iteriertes Integral geschrieben und der Hauptsatz zur Integration über  $x_1$  herangezogen:

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial p_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} [p_2(b_1, x_2) - p_2(a_1, x_2)] dx_2$$

Analog folgt mit einer Integration über  $x_2$ :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} [p_1(x_1, b_2) - p_1(x_1, a_2)] dx_1$$

- (B) Als nächstes wird das Kurvenintegral  $\oint (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x})$  um die Randkurve des Rechteckes  $\mathcal{R}$  im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhreigersinn) ausgewertet.

1. Seite:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^1 \left( \begin{pmatrix} p_1(\vec{x}(t)) \\ p_2(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \int_0^1 p_1([a_1 + t(b_1 - a_1)], a_2) \cdot (b_1 - a_1) dt \\ \left[ \begin{array}{l} u_1 := a_1 + t(b_1 - a_1) \\ du_1 = (b_1 - a_1) dt \end{array} \right] &= \int_{a_1}^{b_1} p_1(u_1, a_2) du_1 \end{aligned}$$

2. Seite:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^1 \left( \begin{pmatrix} p_1(\vec{x}(t)) \\ p_2(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \int_0^1 p_2(b_1, [a_2 + t(b_2 - a_2)]) \cdot (b_2 - a_2) dt \\ \left[ \begin{array}{l} u_2 := a_2 + t(b_2 - a_2) \\ du_2 = (b_2 - a_2) dt \end{array} \right] &= \int_{a_2}^{b_2} p_2(b_1, u_2) du_2\end{aligned}$$

3. Seite:

$$\int_{\mathcal{C}_3} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) = - \int_{a_1}^{b_1} p_1(u_1, b_2) du_1$$

4. Seite:

$$\int_{\mathcal{C}_4} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) = - \int_{a_2}^{b_2} p_2(a_1, u_2) du_2$$

(C) Insgesamt ergibt sich der sog. *Green'sche Integralsatz* für ein Rechteck:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathcal{R}} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_{a_1}^{b_1} [p_1(u_1, a_2) - p_1(u_1, b_2)] du_1 + \int_{a_2}^{b_2} [p_2(b_1, u_2) - p_2(a_1, u_2)] du_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} [p_2(b_1, u_2) - p_2(a_1, u_2)] du_2 - \int_{a_1}^{b_1} [p_1(u_1, b_2) - p_1(u_1, a_2)] du_1 \\ &\stackrel{(A)}{=} \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right) d\vec{x}.\end{aligned}$$

Man betrachte nun eine von einer geschlossenen Kurve  $\mathcal{C}$  berandete Fläche  $\mathcal{F}$  in der  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene.  $\mathcal{F}$  läßt sich als geeigneter Grenzwert einer Folge  $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in J}$  kleiner Rechtecke approximieren, und für jedes dieser Teilrechtecke gilt der

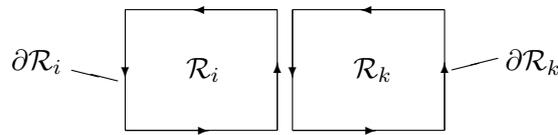


Abbildung 15.5: Gemeinsame Kanten innerer Teilrechtecke

Green'sche Satz. Die Kurvenintegrale über die gemeinsamen Ränder heben sich jedoch wegen der unterschiedlichen Orientierung auf, s. Abb. 15.5.

Übrig bleibt nur das Kurvenintegral über die äußere orientierte Randkurve  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{R}$ .

Es müssen jetzt wieder zulässige Gebiete definiert werden, also Analoga im  $\mathbb{R}^2$  zu den zulässigen Gebieten im  $\mathbb{R}^3$ , s. Definition 15.2.

### Definition 15.3

Sei  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet.

(i)  $\mathcal{G}$  heißt *zulässig*, wenn gilt:

Der Rand  $\dot{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$  setzt sich zusammen aus endlich vielen regulären Kurvenstücken

$$\mathcal{C}_k : t \longmapsto \vec{p}^{(k)}(t) \quad (t \in [a_k, b_k], k \in \{1, \dots, N\}),$$

deren Normalenfelder  $\vec{n}^{(k)}(\cdot)$  ins Äußere  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G}$  von  $\mathcal{G}$  weisen.

(ii) Ist  $\mathcal{G}$  zulässig, so bezeichne  $\partial\mathcal{G}$  den *orientierten Rand* von  $\mathcal{G}$ , wobei der Durchlaufssinn jeweils so ist, daß das Gebiet  $\mathcal{G}$  in bezug auf die äußere Normale in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird, also „links“ bezüglich der Wegrichtung ist.

(iii) Für ein Vektorfeld  $\vec{v} \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{G}}, \mathbb{R}^2)$  mit einem zulässigen Gebiet  $\mathcal{G}$  sei

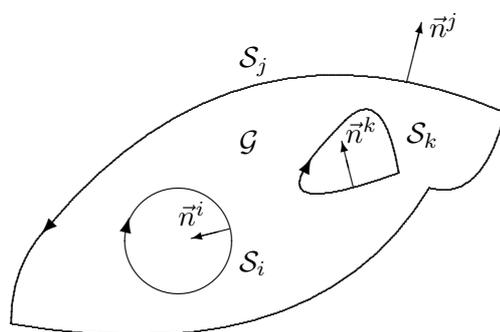
$$\int_{\partial\mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) := \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{C}_k} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}).$$

Ist  $\mathcal{G}$  ein zulässiges Gebiet, dann kann der Rand von  $\mathcal{G}$  da, wo die Kurvenstücke  $\mathcal{C}_k := W(\vec{p}([a_k, b_k]))$  aufeinanderstoßen, Ecken und Spitzen haben, also z.B. aussehen wie in Abb. 15.6.

### Satz 15.2 (Green'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ )

$\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein zulässiges Gebiet mit dem orientierten Rand  $\partial\mathcal{G}$ . Sei  $\vec{p} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ . Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{G}} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right) d\vec{x} = \oint_{\partial\mathcal{G}} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}). \quad (15.2)$$

Abbildung 15.6: Zulässiges Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  (Orientierung bereits eingetragen)

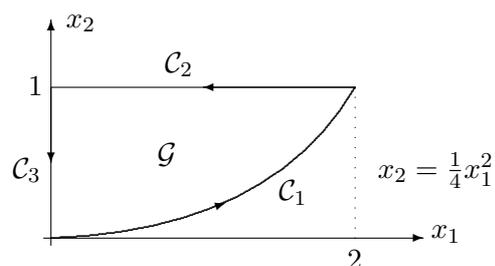
Das Kurvenintegral ist dabei, entsprechend der obigen Konvention über die Orientierung, im Gegenuhrzeigersinn zu nehmen.

#### Beispiel 15.4

Gegeben sei das Vektorfeld (interpretierbar als Kraftfeld)

$$\vec{v}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2),$$

welches entlang der geschlossenen Kurve aus Abb. 15.7 zu integrieren ist.

Abbildung 15.7: Zum Green'schen Satz im  $\mathbb{R}^2$ 

(a) Integration längs der einzelnen Kurvenstücke:

(i) Integration längs  $C_1$ :

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{4}t^2 \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2])$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_1} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^2 (\vec{v}[\vec{x}(t)], \dot{\vec{x}}(t)) dt \\
&= \int_0^2 \left( \left( \begin{array}{c} \frac{1}{4}t^3 \\ -\frac{1}{16}t^4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2}t \end{array} \right) \right) dt \\
&= \int_0^2 \left( \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{32}t^5 \right) dt = \left[ \frac{1}{16}t^4 - \frac{1}{192}t^6 \right]_0^2 \\
&= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(ii) Integration längs  $\mathcal{C}_2$ :

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2])$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_2} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^2 (\vec{v}[\vec{x}(t)], \dot{\vec{x}}(t)) dt \\
&= \int_0^2 \left( \left( \begin{array}{c} 2-t \\ -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) \right) dt \\
&= \int_0^2 (t-2) dt = -2
\end{aligned}$$

(iii) Integration längs  $\mathcal{C}_3$ :

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 1])$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_3} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^1 (\vec{v}[\vec{x}(t)], \dot{\vec{x}}(t)) dt \\
&= \int_0^1 \left( \left( \begin{array}{c} 0 \\ -t^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right) \right) dt \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \oint_{\mathcal{C}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{C}_i} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{3} = -1$$

(b) Auswertung des Kurvenintegrals mit Hilfe des Green'schen Integralsatzes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right) d\vec{x} &= \int_{\mathcal{G}} (0 - x_1) d\vec{x} = - \int_{\mathcal{G}} x_1 d\vec{x} \\ &= - \int_0^2 dx_1 \int_{\frac{1}{4}x_1^2}^1 dx_2 x_1 = - \int_0^2 \left( x_1 - \frac{1}{4}x_1^3 \right) dx_1 \\ &= - \left[ \frac{x_1^2}{2} - \frac{1}{16}x_1^4 \right]_0^2 = - (2 - 1) = -1 \end{aligned}$$

### 15.2.1 Flächenberechnung mittels eines Kontourintegrals

Für das spezielle Vektorfeld

$$\vec{p}(\vec{x}) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2)$$

ist

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) = 1,$$

und es folgt aber mit der (o.B.d.A. einfachen, d.h.  $N = 1$ ) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \vec{x} : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

aus dem Green'schen Integralsatz (Satz 15.2) das Ergebnis

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}| &= \int_{\mathcal{G}} 1 d\vec{x} = \int_{\mathcal{G}} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right) d\vec{x} = \oint_{\partial \mathcal{G}} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{G}} \left( \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, d\vec{x} \right) = \frac{1}{2} \int_a^b \left( \begin{pmatrix} -x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \right) dt. \end{aligned}$$

Der Inhalt einer Fläche  $\mathcal{G}$  läßt sich also durch ein Kontourintegral bestimmen. Das wurde früher bei den Planarimetern zur Flächenberechnung benutzt.

#### Beispiel 15.5 (Flächeninhalt einer Ellipse)

Seien  $a, b > 0$  und

$$\mathcal{E} := \left\{ \vec{x} : \vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{b} \right)^2 < 1 \right\},$$

das Innere einer Ellipse. Der orientierte Rand  $\partial \mathcal{E}$  ist dann dargestellt durch die Funktion

$$\varphi \longmapsto \vec{x}(\varphi) := \langle a \cos \varphi, b \sin \varphi \rangle \quad (\varphi \in [0, 2\pi]).$$

Mit der Darstellung des Flächeninhaltes des letzten Beispiels erhält man dann

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}| &= \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{E}} \left( \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, d\vec{x} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} -x_2(\varphi) \\ x_1(\varphi) \end{pmatrix}, \dot{\vec{x}}(\varphi) \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} -b \sin \varphi \\ a \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix} \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cdot b (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \pi \cdot a b \quad (= \pi a^2 \text{ für } a = b)
 \end{aligned}$$

### Aufgabe

Warum zeigt die Normale von Beispiel 15.5 nach außen, und wie sieht sie aus?

### 15.2.2 Gauß'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$

Sei  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Man setze

$$\vec{p}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} p_1(\vec{x}) \\ p_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(\vec{x}) \\ v_1(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann ist für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) = \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}).$$

Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein zulässiges Gebiet (Definition 15.3) und  $\dot{\mathcal{G}}$  sein Rand mit einer (o.B.d.A. einfachen, d.h.  $N = 1$ ) Parametrisierung  $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$  ( $t \in [a, b]$ ). Ist der Rand aus mehreren ( $N > 1$ ) differenzierbaren Komponenten zusammengesetzt, so muß man ihn gemäß Definition 15.3 (iii) stückweise betrachten. Dann ist  $\dot{\vec{x}}(t)$  für  $t \in [a, b]$  ein Tangentenvektor und

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(\vec{x}(t)) &:= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \left[ \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \right]
 \end{aligned}$$

die nach außen gerichtete Einheitsnormale, s. Abb. 15.8.

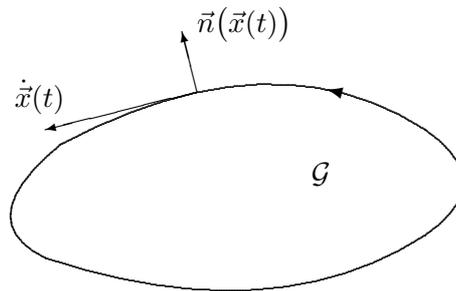


Abbildung 15.8: Zulässiges Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  mit äußerem Normalenfeld und Tangente in Durchlaufrichtung

Mit diesen Bezeichnungen erhält man aus dem Green'schen Integralsatz (Satz 15.2)

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial \mathcal{G}} (\vec{p}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_a^b (\vec{p}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t)) dt \\
 &= \int_a^b \left( \begin{pmatrix} -v_2(\vec{x}(t)) \\ v_1(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \right) dt \\
 &= \int_a^b \left( \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}(t)) \\ v_2(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) \end{pmatrix} \right) dt \\
 &= \int_a^b (\vec{v}(\vec{x}(t)), \vec{n}(\vec{x}(t))) \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} dt \\
 &= \oint_{\partial \mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) ds
 \end{aligned}$$

mit dem skalaren Wegelement (s. die Bemerkung auf p. 164)

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} dt = \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Damit folgt aus der Green'schen Formel (15.2) der *Satz von Gauß* in der Dimension  $n = 2$ :

**Satz 15.3** (Gauß'scher Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ )

$\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein zulässiges Gebiet mit dem orientierten Rand  $\partial \mathcal{G}$ . Sei  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ , also  $\vec{v}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $\mathcal{G}$ . Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} = \oint_{\partial \mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) ds.} \quad (15.3)$$

**Interpretation**

Die Interpretation des zweidimensionalen Gauß'schen Satzes ist genau dieselbe wie im dreidimensionalen Fall:

Der Fluß eines ebenen Vektorfeldes durch den Rand eines zweidimensionalen Gebietes, hier also das Kurvenintegral über der Normalkomponente des Vektorfeldes  $\vec{v}$  längs  $\partial\mathcal{G}$ , ist gegeben durch das Integral der Quelldichte  $\operatorname{div} \vec{v}$  über das gesamte Gebiet. Ist der Fluß positiv, so fließt aus  $\mathcal{G}$  immer mehr heraus als hinein, d.h. in  $\mathcal{G}$  liegen *Quellen* vor. Ist er negativ, so fließt in  $\mathcal{G}$  mehr hinein als heraus, d.h. in  $\mathcal{G}$  liegen *Senken* vor.

**Beispiel 15.6**

Seien  $a, b > 0$  und  $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$  das vom Intervall  $[-a, a]$  auf der  $x$ -Achse und der oberen Hälfte der Ellipse

$$\mathcal{E} := \left\{ \vec{x} : \vec{x} = \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 < 1 \right\}$$

berandete Gebiet (cf. Beispiel 15.5).

Dann ist  $\mathcal{E}$  ein zulässiges Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ , denn mit Hilfe von sog. *elliptischen Koordinaten*

$$\vec{e}(r, \varphi) := \langle ra \cos \varphi, rb \sin \varphi \rangle \quad (r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi])$$

ist  $\mathcal{E} = \vec{e}([0, 1] \times [0, \pi])$ .

**Aufgabe**

- (i) Mit geeigneten Kurven gebe man eine Darstellung des orientierten Randes  $\partial\mathcal{E}$  an.
- (ii) Mit dem Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) := \vec{v}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$$

berechne man das Kurvenintegral  $\oint_{\partial\mathcal{E}} (\vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) ds$ .

- (iii) Man verifiziere den Gauß'schen Satz durch Berechnung von  $\int_{\mathcal{E}} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x}$ .

**15.2.3 Stokes'scher Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$** 

Sei  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Man setze  $\vec{p} := \vec{v}$  in der Green'schen Formel. Dann folgt mit der Definition der zweidimensionalen Rotation (Definition 13.9)

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(\vec{x}) = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}).$$

Damit folgt aus dem Green'schen Integralsatz

**Satz 15.4** (Stokes'scher Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ )

$\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein zulässiges Gebiet mit dem orientierten Rand  $\partial\mathcal{G}$ . Sei  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^2)$ . Dann gilt<sup>2</sup>:

$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \oint_{\partial\mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}). \quad (15.4)$$

### Bemerkung

Die Green'sche Formel *ist* also der Stokes'sche Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ . Damit hat man jetzt einen ganz einfachen Beweis des Satzes 13.3, daß in einfach zusammenhängenden Gebieten aus  $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$  folgt, daß  $\vec{v}$  ein konservatives Vektorfeld ist, die Kurvenintegrale also wegunabhängig sind.

Seien  $\mathcal{C}$  eine doppelpunktfreie stückweise reguläre Kurve in  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}_1$  das von  $\mathcal{C}$  berandete Gebiet. Dann ist  $\mathcal{G}_1$  ein zulässiges Gebiet und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\bar{\mathcal{G}}_1, \mathbb{R}^2)$ . Mit dem Stokes'schen Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$  folgt dann

$$0 = \int_{\mathcal{G}_1} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \oint_{\partial\mathcal{G}_1} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \pm \oint_{\mathcal{C}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$$

(je nach Orientierung von  $\mathcal{C}$ ). Solche Vektorfelder  $\vec{v}$  sind damit Potentialfelder.

## 15.3 Stokes'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

Die Definition für die Rotation eines Vektorfeldes,  $\operatorname{rot} \vec{v}$ , hat in zwei und drei Dimensionen dieselbe Bezeichnung:

<sup>2</sup>Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$  eine zulässige Fläche,  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$ . Sei  $\Delta\mathcal{G}$  ein kleines zulässiges Flächenstück, über welches sich  $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x})$  nicht wesentlich ändert, so ist

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Delta\mathcal{G}} \vec{v}(\vec{x}), d\vec{x} &= \int_{\Delta\mathcal{G}} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{x} \approx \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\xi}) \cdot \int_{\Delta\mathcal{G}} d\vec{x} = \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\xi}) \cdot |\Delta\mathcal{G}| \\ \longrightarrow \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\xi}) &\approx \frac{1}{|\Delta\mathcal{G}|} \oint_{\partial\Delta\mathcal{G}} \vec{v}(\vec{x}), d\vec{x} \end{aligned}$$

mit  $\vec{\xi}$  als Punkt der Fläche  $\Delta\mathcal{G}$ . Im Grenzfall hat man dann eine exakte Gleichung, welche auch zur Definition der Rotation benutzt werden kann:

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{\xi}) := \lim_{\Delta\mathcal{G} \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta\mathcal{G}|} \oint_{\partial\Delta\mathcal{G}} \vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}$$

(i) für ein (zweidimensionales) Gebiet  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$ :

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = D_1 v_2(\vec{x}) - D_2 v_1(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

(ii) für ein (dreidimensionales) Gebiet  $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{w} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ :

$$\operatorname{rot} \vec{w}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D_2 w_3(\vec{x}) - D_3 w_2(\vec{x}) \\ D_3 w_1(\vec{x}) - D_1 w_3(\vec{x}) \\ D_1 w_2(\vec{x}) - D_2 w_1(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (\vec{x} \in \mathcal{H})$$

In diesem Abschnitt werden aber die beiden Vektorfelder der Rotation simultan gebraucht und müssen deshalb in der Bezeichnung auch unterschieden werden. Sie werden daher momentan mit  $\operatorname{rot}_2 \vec{v}$  und  $\operatorname{rot}_3 \vec{w}$  bezeichnet.

Der Stokes'sche Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$  setzt ein Kurvenintegral entlang des Randes einer zulässigen ebenen Fläche in Beziehung zum zweidimensionalen Integral der Rotation über die Fläche selbst:

$$\oint_{\partial \mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{rot}_2 \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{rot}_2 \vec{v}(\vec{x}) d(x_1, x_2).$$

Die  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene des  $\mathbb{R}^2$  wird jetzt aufgefaßt als  $\langle x_1, x_2, 0 \rangle$ -Ebene und damit als Teil des  $\mathbb{R}^3$ . Seien dann  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^3$  und das Vektorfeld  $\vec{w}$  definiert durch

$$\vec{w}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} w_1(\vec{x}) \\ w_2(\vec{x}) \\ w_3(\vec{x}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \\ w_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad \left( \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \right).$$

Einerseits kann man mit Hilfe des Normaleneinheitsvektors

$$\vec{n} := \vec{e}_3^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nun schreiben

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_2 \vec{v}(x_1, x_2) &= D_1 v_2(x_1, x_2) - D_2 v_1(x_1, x_2) \\ &= D_1 w_2(x_1, x_2, x_3) - D_2 w_1(x_1, x_2, x_3) \\ &= \left( \begin{pmatrix} D_2 w_3(\vec{x}) - D_3 w_2(\vec{x}) \\ D_3 w_1(\vec{x}) - D_1 w_3(\vec{x}) \\ D_1 w_2(\vec{x}) - D_2 w_1(\vec{x}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (\operatorname{rot}_3 \vec{w}(\vec{x}), \vec{n}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{H}), \end{aligned}$$

andererseits gilt für jede Kurve  $\mathcal{C}$  in der  $\langle x_1, x_2, 0 \rangle$ -Ebene mit einer (o.B.d.A. einfachen) Parametrisierung, also

$$\mathcal{C} : \quad \vec{x}(t) := \langle x_1(t), x_2(t), 0 \rangle \quad (t \in [a, b])$$

für die Skalarprodukte die Beziehung

$$\left( \vec{w}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right) = \left( \vec{v}(x_1(t), x_2(t)), \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \right)$$

und damit die Gleichung

$$\int_{\mathcal{C}} (\vec{w}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\mathcal{C}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}).$$

Für das spezielle dreidimensionale Vektorfeld  $\vec{w}$  läßt sich der zweidimensionale Stokes'sche Satz (Satz 15.4) daher schreiben als

$$\oint_{\partial \mathcal{G}} (\vec{w}(\vec{x}), d\vec{x}) = \oint_{\partial \mathcal{G}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\mathcal{G}} \text{rot}_2 \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{G}} (\text{rot}_3 \vec{w}(\vec{x}), \vec{n}) d\vec{x}.$$

Man beachte dabei, daß die Normale  $\vec{n}$  hier so orientiert ist, daß der Umlauf in mathematisch positiver Richtung – also links herum – zu erfolgen hat.

Der Stokes'sche Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$  ist nun eine Verallgemeinerung dieses „ebenen“ Sachverhaltes auf beliebige (offene oder geschlossene) zulässige Flächen(stücke) im  $\mathbb{R}^3$  und ihre Randkurve. Natürlich muß die Normale an eine solche Fläche nicht notwendig mehr konstant sein, sondern kann mit  $\vec{x}$  über die Fläche variieren, man hat dann ein stetiges Normalenvektorfeld  $\vec{x} \mapsto \vec{n}(\vec{x})$  ( $\vec{x} \in \mathcal{F}$ ).

Eine Fläche  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^3$  wird, wie stets, als parametrisiertes Bild einer Fläche  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  angesehen,

$$\mathcal{F}: \vec{p}: \mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

und, entsprechend einer Zerlegung von  $\mathcal{M}$ , mit dem Bild des zugehörigen Gitternetzes versehen, s. Abb. 15.9.

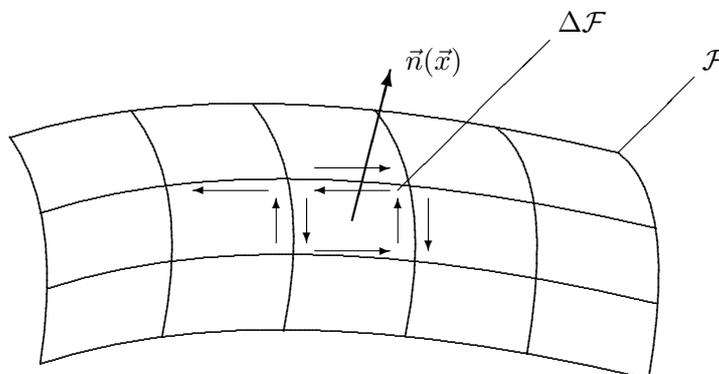


Abbildung 15.9: Übertragung eines Gitternetzes in  $\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{F}$

Die Orientierung des Randes  $\partial\mathcal{G}$  eines zulässigen Gebietes in der Ebene (Definition 15.3) ist derart gewählt, daß dieser im mathematisch positiven Sinne (entgegen der Uhrzeigerichtung) durchlaufen wird, d.h. daß das Gebiet während des Durchlaufens links davon liegt.

Bei einer Fläche im Raum ist kein solcher Umlaufssinn mehr auf natürliche Weise ausgezeichnet; man mache sich das an einer räumlichen Fläche klar, etwa an einer Halbkugelschale. Bedingt durch die Parametrisierung  $\vec{p}$ , zeichnet jedoch das vektorielle Oberflächenelement

$$d\vec{o} = D_1\vec{p}(\vec{u}) \times D_2\vec{p}(\vec{u})$$

eine Seite der Fläche als „Oberfläche“ aus: von dieser Seite aus wird die mathematisch positive Umlaufrichtung für die Randkurve gewählt.

Man hat dann für jedes der kleinen Teilflächenstücke die Beziehung

$$\oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} (\vec{w}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\Delta\mathcal{F}} (\text{rot}_3 \vec{w}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma = \int_{\Delta\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{w}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma$$

(ab jetzt wird wieder „rot“ für „rot<sub>3</sub>“ geschrieben). Wenn alle diese Gleichungen addiert werden, so erhält man

$$\sum_{\text{alle } \Delta\mathcal{F}} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} (\vec{w}(\vec{x}), d\vec{x}) = \sum_{\text{alle } \Delta\mathcal{F}} \int_{\Delta\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{w}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma = \int_{\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{w}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma.$$

Aus Abb. 15.9 liest man ab, daß sich die Kurvenintegrale entlang der im Inneren von  $\mathcal{F}$  verlaufenden Randkurven verschiedener Teilflächen  $\Delta\mathcal{F}_i$  und  $\Delta\mathcal{F}_k$  gerade aufheben, da diese für aneinander grenzende Teilflächen umgekehrt orientiert sind. Übrig bleibt nur die äußere Randkurve  $\partial\mathcal{F}$  der gesamten Fläche  $\mathcal{F}$ , und man erhält den *Stokes'schen Satz im  $\mathbb{R}^3$* :

**Satz 15.5** (Stokes'scher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$ )

Sei  $\mathcal{F}$  ein zulässiges orientiertes Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Normalenfeld  $\vec{n}(\cdot)$ . Seien  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet, das das Flächenstück umfaßt und  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt:

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma.$$

Die Zirkulation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes um die orientierte Randkurve einer zulässigen Fläche ist gegeben durch den Fluß der Rotation dieses Vektorfeldes durch die Fläche selbst.

**Bemerkung**

- (i) Beide Integrale in Satz 15.5 hängen von der „Orientierung“ ab: Beim Oberflächenintegral kommt es darauf an, in welche Richtung die Normale zeigt, beim Randintegral auf den Umlaufssinn. Eine Änderung beider ergibt jeweils eine Änderung des Vorzeichens. Durch die Vereinbarung über die Randorientierung sind beide so gekoppelt, daß der Satz richtig ist.
- (ii) Man beachte, daß der Stokes'sche Satz keine Aussage darüber macht, *welche* Fläche von der gegebenen Randkurve eingeschlossen wird, solange sie nur zulässig ist. Es ist also möglich, die Fläche unter Beibehaltung ihres Randes „stetig zu verbiegen“, ohne den Wert der Zirkulation zu ändern; s. dazu die verschiedenen Berechnungen im folgenden Beispiel.

**Beispiel 15.7**

Gegeben seien  $R > 0$  und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 4x_2 \\ x_1 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \quad (\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3).$$

Man berechne die Zirkulation des Vektorfeldes  $\vec{v}$  entlang des Grundkreises  $\mathcal{GK}$  der oberen Halbkugel

$$\mathcal{HK} := \{ \vec{x} : \vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_3 \geq 0 \}.$$

**Lösung**

- (i) Kurvenintegral des Vektorfeldes  $\vec{v}$  entlang des Grundkreises  $\mathcal{GK}$ :

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi)).$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\vec{x})(t) &= \begin{pmatrix} 4R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
\oint_{\mathcal{G}\mathcal{K}} (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} 4R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t - 3 \sin^2 t) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt - 3R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\
&= 0 - 3R^2 \cdot \pi \\
&= -3\pi R^2
\end{aligned}$$

- (ii) Evaluation des Oberflächenintegrals über die Fläche der oberen Halbkugel und Benutzung des Stokes'schen Integralsatzes. Da der Grundkreis in (i) im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird, muß jetzt die äußere Normale genommen werden. Mit

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}\mathcal{K}} (\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma &= \int_{\mathcal{H}\mathcal{K}} \frac{-3x_3}{\|\vec{x}\|} d\sigma \\
&= -3 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta R^2 \sin \theta \cdot \frac{R \cos \theta}{R} \\
&= -3R^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \\
&= -3\pi R^2 \left[ -\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\
&= -3\pi R^2
\end{aligned}$$

- (iii) Evaluation des Oberflächenintegrals über den Grundkreis  $\mathcal{G}\mathcal{K}$  in der  $\langle x_1, x_2, 0 \rangle$ -Ebene und Benutzung des Stokes'schen Integralsatzes, wieder mit der nach „oben“ orientierten Normale:

$$\int_{\mathcal{G}\mathcal{K}} (\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do = \int_{\mathcal{G}\mathcal{K}} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \, do = -3 \int_{\mathcal{G}\mathcal{K}} do = -3 \cdot \pi R^2$$

### Ergebnis

Man darf sich die von der Kurve eingespannte Fläche aussuchen, durch welche der Fluß berechnet werden soll!

### Beispiel 15.8 (Ampère'sches Gesetz oder Durchflutungsgesetz)

Man betrachte das von einem elektrischen Leiter im Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  erzeugte magnetische Feld (vgl. dazu das analoge Beispiel 15.2, das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik)

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1^2 + x_2^2 \neq 0, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Es soll die Arbeit dieses magnetischen Feldes längs des Randes einer geschlossenen regulären Fläche  $\mathcal{F}$  bestimmt werden. Für diese Fläche gibt es zwei Möglichkeiten:

- (i) sie enthält den Leiter nicht      oder
- (ii) sie enthält den Leiter.

Zu (i):

Nach einer Hausaufgabe ist  $\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0}$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1^2 + x_2^2 = 0)\}$ , also folgt für eine in einem solchen Gebiet  $\mathcal{G}$  enthaltene Fläche  $\mathcal{F}$  nach dem Stokes'schen Integralsatz

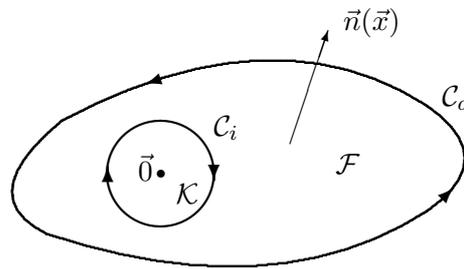
$$0 = \int_{\mathcal{F}} \underbrace{(\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))}_{\vec{0}} \, do = \oint_{\partial\mathcal{F}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}).$$

Zu (ii):

Schließt die Fläche  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^3$  den Leiter ein, so ist der Stokes'sche Integralsatz darauf nicht anwendbar, denn  $\vec{H}$  ist in  $\mathcal{G}$  nicht überall definiert, geschweige denn stetig differenzierbar. Man muß also das Kontourintegral direkt ausrechnen.

Sei  $\mathcal{K}$  ein Kreis mit  $\vec{0}$  als Mittelpunkt, welcher ganz in  $\mathcal{F}$  enthalten ist. Für den Differenzbereich  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{K}$  gilt dann  $\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0}$  und (Abb. 15.10)

$$0 = \int_{\partial(\mathcal{F} \setminus \mathcal{K})} (\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do = \int_{\mathcal{C}_a} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) + \int_{\mathcal{C}_i} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}).$$

Abbildung 15.10: Aussparen eines Kreises um den Leiter bei  $\vec{0}$ 

Hierbei ist mit  $\mathcal{C}_a$  der *äußere* (orientierte) Rand der Fläche  $\mathcal{F}$  gemeint, mit  $\mathcal{C}_i$  der *innere* (orientierte) Rand, also der Rand des ausgesparten Kreises  $\mathcal{K}$ . Man beachte hierbei die Orientierung der beiden Randkomponenten in Abb. 15.10: bzgl. der aus der Zeichenebene nach oben zeigenden Normalenrichtung ist der Durchlaufssinn stets so, daß das Gebiet  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{K}$  zur Linken liegt.

Verwendet man hingegen auch für die Randkurve  $\mathcal{K}$  des kleinen Kreises  $\mathcal{K}$  diejenige Durchlaufsrichtung – dieses Mal von  $\mathcal{K}$  aus gesehen –, welche zur Normalen der Fläche  $\mathcal{F}$  korrespondiert, so ändert sich bei diesem Kurvenintegral das Vorzeichen, und man erhält

$$0 = \int_{\mathcal{C}_a} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) - \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}),$$

also

$$\int_{\mathcal{C}_a} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}).$$

Die Arbeit des Magnetfeldes entlang entlang des äußeren Randes  $\mathcal{C}_a$  von  $\mathcal{F}$  ist gleich der Arbeit des Feldes entlang der (positiv orientierten) Peripherie des kleinen Kreises  $\mathcal{K}$ , und kann somit hierüber berechnet werden. Mit der üblichen Parametrisierung einer positiv orientierten Kreislinie folgt dann:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_a} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) &= \int_{\partial\mathcal{K}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{R^2} dt \\ &= I. \end{aligned}$$

**Ergebnis**

Die Gesamtarbeit des magnetischen Feldes entlang der geschlossenen Peripherie einer Fläche wird durch den das Magnetfeld erzeugenden Strom verursacht, der Strom ist also ein „Wirbel“ für die magnetischen Feldlinien.

Ein von einem Gleichstrom der Stärke  $I$  durchflossener Leiter mit einem Stromfluß entlang der positiven  $x_3$ -Achse erzeugt um sich herum in einem Gebiet  $\mathcal{G}$  ein ringförmiges Magnetfeld<sup>3</sup> (cf. Beispiele 13.9 und 13.13), für welches das *Ampère'sche Gesetz* in Integralform gilt:

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) = I.$$

So wie das Gauß'sche Gesetz zur Berechnung elektrischer Felder, so ist das Ampère'sche Gesetz zur Berechnung magnetischer Felder nützlich.

Sei  $\vec{j}(\vec{x})$  der (stetige) *Stromdichtevektor*<sup>4</sup> am Ort  $\vec{x}$ . Dann gilt für den dadurch generierten Stromfluß  $I$  in einer beliebigen Richtung durch eine Fläche  $\mathcal{F}$  sowie das dadurch erzeugte (stetig differenzierbare) Magnetfeld  $\vec{H}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} (\vec{j}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do &= I \\ &\stackrel{\text{(Ampère'sches Gesetz)}}{=} \oint_{\partial\mathcal{F}} (\vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}) \\ &\stackrel{\text{(Stokes'scher Satz)}}{=} \int_{\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{H}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) \, do. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{\mathcal{F}} \left( [\vec{j}(\vec{x}) - \text{rot } \vec{H}(\vec{x})], \vec{n}(\vec{x}) \right) \, do = 0$$

für jede Fläche  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Mit einem Stetigkeitsargument folgt hieraus die zweite Maxwell'sche Gleichung (*Ampère'sches Gesetz* in Differentialform)

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

Die Queldichte der magnetischen Feldstärke ist die das Feld hervorrufoende Stromdichte.

<sup>3</sup>In der Physik ist  $\int_{\mathcal{C}} \vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}$  die *magnetische Spannung*. Ist  $\mathcal{C}$  eine geschlossene Kurve, so spricht man bei  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}(\vec{x}), d\vec{x}$  von *Ringspannung*.

<sup>4</sup>Darunter versteht man die (positive) Ladungsmenge  $\rho(\vec{x})$ , welche eine Einheitsfläche am Ort  $\vec{x}$  pro Zeiteinheit in Richtung  $\vec{v}$  senkrecht durchströmt:  $\vec{j}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \cdot \vec{v}$

**Beispiel 15.9** (Faraday'sches Induktionsgesetz)

Aus der dritten Maxwell'schen Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (\langle \vec{x}, t \rangle \in \mathcal{G} \times [0, T])$$

erhält man durch Integration über eine Fläche  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} (\vec{B}(\vec{x}, t), \vec{n}(\vec{x})) \, do &= \int_{\mathcal{F}} \left( - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{x}, t), \vec{n}(\vec{x}) \right) \, do \\ &= \int_{\mathcal{F}} (\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t), \vec{n}(\vec{x})) \, do \\ &\stackrel{\text{(Stokes'scher Satz)}}{=} \oint_{\partial \mathcal{F}} (\vec{E}(\vec{x}, t), d\vec{x}) \end{aligned}$$

Dies ist das *Faraday'sche Induktionsgesetz*:

Die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche  $\mathcal{F}$  ist bis aufs Vorzeichen gleich der elektrischen Ringspannung.

**Bemerkung**

Das Faraday'sche Induktionsgesetz in integraler Form ist doch etwas allgemeiner als dasjenige in differentieller Form. Nach der differentiellen Formulierung äußert sich eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes in Wirbeln des elektrischen Feldes. Nach dem Stokes'schen Satz werden daher die Wirbel im gesamten Gebiet – die elektrische Ringspannung – verknüpft mit der Änderung des magnetischen Flusses durch die Gesamtfläche.

Der magnetische Fluß kann sich aber auch bei zeitlich konstantem Magnetfeld ändern, etwa dadurch, daß sich die Größe der durchströmten Fläche zeitlich ändert (Generator), ein Phänomen, welches sich aus der differentiellen Formulierung nicht ergibt.

**Beispiel 15.10** (Vektorpotential)

Ein in einem Gebiet  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v}$  heißt *wirbelfrei*, falls  $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$  ( $\vec{x} \in \mathcal{G}$ ). Ist  $\mathcal{G}$  einfach zusammenhängend, so ist diese Bedingung der Wirbelfreiheit hinreichend für die Existenz einer skalaren Stammfunktion  $f$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ einfach zusammenhängend} \quad \wedge \quad \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}) \\ \iff \quad \bigvee_{f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})} \bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} \vec{v}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} f)(\vec{x}). \end{aligned}$$

Beispielweise lautet im statischen (= zeitunabhängigen) elektrischen Fall eine Maxwell-Gleichung (Faraday's Induktionsgesetz)  $\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$  ( $\vec{x} \in \mathcal{G}$ ), so daß,

einfacher Zusammenhang von  $\mathcal{G}$  vorausgesetzt, damit die Existenz eines skalaren elektrostatischen Potentials  $\phi$  mit

$$\vec{E}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla}\phi)(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

gegeben ist.

Im magnetischen Fall geht das in dieser Weise nicht, da das magnetische Feld nicht wirbelfrei ist (Ampère'sches Gesetz):

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

mit dem Stromdichtevektor  $\vec{j}(\vec{x})$  am Ort  $\vec{x}$ . Aufgrund der *Quellenfreiheit* des Magnetfeldes  $\vec{B}$  ( $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = 0$  ( $\vec{x} \in \mathcal{G}$ )) – das ist die vierte Maxwell'sche Gleichung – läßt sich jedoch zeigen, daß man ein sog. *Vektorpotential* konstruieren kann, d.h. eine Funktion  $\vec{A} \in C^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)$  mit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

### Aufgabe

Man zeige  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = 0$  ( $\vec{x} \in \mathcal{G}$ ).

Die Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}) \quad \Longrightarrow \quad \bigvee_{\vec{A} \in C^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}^3)} \bigwedge_{\vec{x} \in \mathcal{G}} \vec{B}(\vec{x}) = (\operatorname{rot} \vec{A})(\vec{x})$$

erfordert jedoch, daß  $\mathcal{G}$  einfach zusammenhängend ist in dem Sinne, daß sich jede geschlossene *Fläche* – nicht nur jede geschlossene *Kurve* – auf einen Punkt zusammenziehen läßt, ohne daß dabei  $\mathcal{G}$  verlassen wird;  $\mathcal{G}$  heißt dann *raumartig einfach zusammenhängend*. Beispielsweise ist das Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kugeln raumartig nicht einfach zusammenhängend.

### Beispiel 15.11 (Aharonov-Bohm Effekt<sup>5</sup>)

Betrachtet wird der Versuch der Beugung von Elektronen an einem Doppelspalt, wobei auf einem Detektor hinter der Doppelspalt-Blende ein Interferenzmuster der Häufigkeit der auftretenden Elektronen entsteht.

Um den Effekt zu verstehen, betrachte man Abb. 15.11. In diesem Versuch steht eine Wand mit zwei Spalts im Weg von Elektronen, die von einer Quelle vor der Wand ausgesandt und von einem Detektor dahinter registriert werden. Vor, zwischen oder hinter dem Doppelspalt befindet sich senkrecht zur Zeichenebene eine von Strom durchflossene Spule, welche in ihrem Inneren ein Magnetfeld aufweist. Der Fluß des Magnetfeldes  $\vec{B}$  ist gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G})$$

<sup>5</sup>Y. Aharonov und D. Bohm: „Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory“ Phys. Rev. (Ser. 2) **115**, 485-491 (1959)

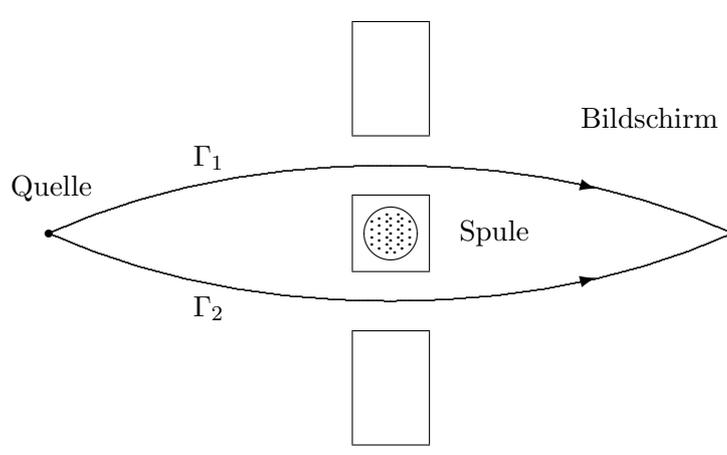


Abbildung 15.11: Beugung von Elektronen an einem Doppelspalt, zwischen denen sich eine Spule befindet. Das Magnetfeld steht senkrecht auf der Zeichenebene und ist auf das Innere der Spule beschränkt. Die Elektronen bewegen sich nur im feldfreien Raum.

mit dem Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{x})$ . Wichtig ist dabei, daß sich das Magnetfeld in einem Raumgebiet befindet, das von den Elektronen nicht passiert wird bzw. umgekehrt, auf ihrem Weg von der Elektronenquelle zum Bildschirm laufen die Elektronen stets durch ein Raumgebiet, in welchem kein Magnetfeld herrscht, also stets  $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{0}$  gilt.

Dennoch „fühlen“ die Elektronen das Magnetfeld, es kommt zu einer Verschiebung des Interferenzmusters!

In der Quantenmechanik werden die einzelnen Elektronen durch *Wellenfunktionen*  $\psi(\vec{x}, t)$  beschrieben, deren Betragsquadrate  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$  die *Wahrscheinlichkeitsdichteamplituden* des Auftretens am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  der durch sie beschriebenen Elektronen darstellen. Weiter wird dort gezeigt, daß die Phasendifferenz der auf dem Bildschirm auftretenden Wellenfunktionen durch das Magnetfeld  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  um den Wert

$$q \cdot \left[ \int_{\Gamma_1} (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{x}) - \int_{\Gamma_2} (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{x}) \right]$$

verändert wird, wobei  $q$  die Ladungsmenge der von der Quelle emittierten Partikel bedeutet. Vordergründig gesehen, hängt also die Phasenverschiebung von dem Vektorpotential  $\vec{A}$  ab und nicht von dem (physikalisch bedeutsamen) Magnetfeld  $\vec{B}$ .

Der Aharonov-Bohm Effekt besitzt kein klassisches Analogon. In der klassischen Physik sind skalare und vektorielle elektromagnetische Potentiale lediglich mathematische Hilfsmittel, welche sich nicht physikalisch messen lassen und daher keine (physikalische) Bedeutung haben. Nur das elektrische und magnetische Feld sind „physikalische“ Felder.

Hier, in der Quantenmechanik, scheint zum ersten Mal eine direkte Wirkung eines Vektorpotentials zu erkennen sein. Diese Ansicht ist jedoch irrig, und das

soll im folgenden ausgeführt werden. Das mathematische Hilfsmittel dazu ist der Integralsatz von Stokes.

Unter Umkehrung der Durchlaufungsrichtung des Weges  $\Gamma_2$  lassen sich die obigen Kurvenintegrale umschreiben in

$$q \cdot \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{x}) =: q \cdot \oint_{\Gamma} (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{x}),$$

wobei  $\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2$  jetzt einen geschlossenen Weg bezeichnet. Auf das letzte Integral läßt sich der Stokes'sche Integralsatz anwenden, und man erhält

$$q \cdot \oint_{\Gamma} (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{x}) = q \cdot \int_{\mathcal{G}} (\text{rot } \vec{A}(\vec{x}), d\vec{\sigma}) = q \cdot \int_{\mathcal{G}} (\vec{B}(\vec{x}), d\vec{\sigma}),$$

wobei  $\mathcal{G}$  die (eine) in den geschlossenen Weg  $\Gamma$  eingespannte Fläche bedeutet.

Damit ist ersichtlich, daß die Phasenverschiebung des Aharonov-Bohm Effektes allein vom Fluß  $\vec{B}$  des wirksamen Magnetfeldes abhängt. Eine Abhängigkeit der im Vektorpotential  $\vec{A}$  zusätzlich enthaltenen Information – das Vektorpotential  $\vec{A}$  ist nur bis auf einen additiven Gradienten bestimmt – läßt sich nicht beobachten.

### Aufgabe

Man studiere den Aharonov-Bohm Effekt im Internet.

### Beispiel 15.12

Im folgenden wird ein „Beweis“ geführt, daß es keinen Magnetismus gibt.<sup>6</sup>

Eine der Maxwell'schen Gleichungen besagt, daß ein Magnetfeld in einem beliebigen Gebiet  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^3$  quellenfrei ist:

$$\text{div } \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

Unter Benutzung des Gauß'schen Integralsatzes (Satz 15.1) folgt daraus für die Oberfläche  $\mathcal{S}$  von  $\mathcal{G}$

$$\int_{\mathcal{S}} (\vec{B}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma = \int_{\mathcal{G}} \text{div } \vec{B}(\vec{x}) d\vec{x} = 0.$$

Die Quellenfreiheit von  $\vec{B}$  garantiert die Existenz eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  (s. auch Beispiele 15.10 und 15.11) mit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

Kombination der letzten beiden Gleichungen liefert

$$\int_{\mathcal{S}} (\text{rot } \vec{A}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma = 0.$$

<sup>6</sup>G. Arfken: Amer. J. Phys., 27, 526 (1959)

Auf dieses Ergebnis wird nun der Stokes'sche Integralsatz (Satz 15.5) angewandt, und man erhält

$$\oint_C (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{x}) = \int_S (\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})) d\sigma = 0.$$

Das Kurvenintegral ist damit wegunabhängig. Wenn jetzt zusätzlich vorausgesetzt wird, daß das Gebiet  $\mathcal{G}$  einfach zusammenhängend ist, dann ist diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz eines skalaren Potentials  $\phi$ :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \operatorname{grad} \phi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

Da die Rotation eines Gradienten stets verschwindet, kann man schließen, daß  $\vec{B} = \vec{0}$  ist:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = (\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi)(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathcal{G}).$$

Wo steckt der Fehler?

# Stichwortverzeichnis

- Äquipotentialfläche, 33, 60
- Äquipotentiallinien, 33
- Äquivalenzklasse, 161, 200
- Äquivalenzrelation, 161, 200
- äquivalent, 199
- $D_k f(\vec{\xi})$ , 30
- $D_{\vec{u}} f(\vec{\xi})$ , 36
- $H_f$ , 76
- $(C^k(\mathcal{G}))^m$ , 75
- $(C^\infty(\mathcal{G}))^m$ , 75
- $\dot{U}_\varepsilon(\vec{\xi})$ , 8
- $\frac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial \vec{u}}$ , 36
- $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\xi})$ , 30
- $\frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{\xi})$ , 30
- grad, 32
- $\iiint_{\mathcal{I}}$ , 110
- $\iint_{\mathcal{I}}$ , 110
- $\int_{\mathcal{I}} f(\vec{x}) d\vec{x}$ , 109
- $C^k(\mathcal{G})$ , 75
- $C^\infty(\mathcal{G})$ , 75
- $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ , 110
- $\iint_{\mathcal{F}} do$ , 210
- $\iint_{\mathcal{F}} f(\vec{x}) do$ , 214
- $\oint_C (\vec{v}(\vec{x}), d\vec{x})$ , 175, 177
- $\oint_{\mathcal{F}} do$ , 209
- $\oint_{\mathcal{F}} f(\vec{x}) do$ , 214
- $\partial\mathcal{G}$ , 236, 250
- $\varepsilon$ -Umgebung
  - $n$ -dimensionale, 8
  - punktierte, 8
- $\vec{\nabla} f(\xi)$ , 32
- $d\vec{o}$ , 220
- $do$ , 210
- $f_{x_k}(\vec{\xi})$ , 30
- $o(h)$ , 163, 232
- $c_v$ , 190
- $ds$ , 164
- abgeschlossen, 8, 11
- abgeschlossene Hülle, 10
- Abgleichbedingung, 28
- Ableitung einer Funktion in Polarkoordinaten, 62
- Ableitungsmatrix, 47
- Approximationsfunktion, 87
- Arbeitsintegral, 169
- Aufpunkt, 33, 242
- ausgezeichnete Zerlegungsfolge, 106
- Ausgleichsgerade, 87
- Ausschöpfung, 137
- Azimut, 100, 154
- Bereichsintegral, 115
- beschränkt, 8
- Besetzung, 107
- charakteristische Funktion, 128
- Coulomb-Kraft, 172
- degeneriert, 85
- Dichtefunktion, 19
- Differential
  - totales, 27, 54
  - unvollständiges, 54
  - vollständiges, 54
- Differentialform, 54
- Differenzierbarkeit
  - totale, 43
- Divergenz, 233
- doppelpunktfrei, 160
- Eigenwerte, 86
- einfach zusammenhängend, 188

- elektrisches Feld, 34  
 Ellipsoid, 4  
 elliptische Koordinaten, 256  
 Energieintegral, 169  
 Entropie, 192  
 Euklidischer Raum, 6  
 Extremum  
   relatives, 80  
 Feinheit  
   einer Zerlegung, 106  
 Feld  
   elektrisches, 172  
 Fläche, 106  
   im  $\mathbb{R}^3$ , 2  
 Flächenelement, 110  
 Flächenstück  
   orientiertes, 219  
 Fluß  
   eines Feldes, 220  
 Folge  
   im  $\mathbb{R}^n$ , 12  
 Fortsetzung, 18  
 Funktionaldeterminante, 147  
 Funktionalmatrix, 47  
 Gebiet, 10  
   einfach zusammenhängendes, 267  
   raumartig einfach zusammenhängendes, 267  
   zulässiges, 236, 250  
 geschlossener Weg, 160  
 Gradient, 32  
 Gradientenfeld, 34, 179  
 Häufungspunkt, 10  
 Höhenlinien, 3  
 Hesse'sche Matrix, 76  
 Hesse'sche Normalenform, 51, 204  
 Hyperebene, 125  
 Hyperfläche, 199, 200  
 ideale Gasgleichung, 190  
 Induktionsgesetz  
   Faraday'sches, 266  
 Inhalt, 128, 129  
   eines Intervalles, 106  
 Integrabilitätsbedingungen, 181  
 Integral, 109  
   iteriertes, 115  
   oberes, 109  
   unteres, 109  
 integrierbar, 109  
 Intervall  
    $n$ -dimensionales, 7  
   abgeschlossenes  $n$ -dimensionales, 105  
   halboffenes  $n$ -dimensionales, 105  
   kompaktes  $n$ -dimensionales, 105  
   offenes  $n$ -dimensionales, 105  
 Jacobi-Matrix, 47  
 Jordan-Bereich, 124  
 Jordan-meßbar, 129  
 Jordan-Nullmenge, 123  
 kanonische Darstellung, 165  
 Kardioide, 148  
 kompakt, 10  
 konservatives Vektorfeld, 177  
 Kontourintegral, 177  
 Konvergenz  
   einer Vektorfolge, 12  
 konvex, 67  
 Koordinatenfunktion, 21  
 Koordinatenfunktionen, 21  
 Koordinatenlinien, 102  
 Koordinatentransformation, 95  
 Kraftfeld, 167  
 kritischer Punkt, 83  
 Kugelkoordinaten, 100, 154  
 kugelsymmetrisch, 40  
 Kurvenintegral  
   erster Art, 166  
   zweiter Art, 170  
 Kurvenlänge, 163  
 Länge  
   einer Kurve, 163  
 Landau-Symbol, 163, 232  
 Linearisierung, 51  
 Möbius-Band, 219  
 Maß, 129  
   eines Intervalles, 106  
 magnetische Spannung, 175, 265

- Maximum  
   globales, 80  
   relatives, 80  
 Maxwell'sche Gleichung  
   dritte, 266  
   erste, 242  
   zweite, 265  
 meßbar, 129  
 meßbarer Bereich, 124  
 Minimum  
   relatives, 80  
 Mittelwert  
   empirischer, 89  
  
 Nabla-Operator, 35  
 Nabla-Vektor, 35  
 Niveaufläche, 33  
 Niveaukurve, 33  
 Niveaumenge, 33  
 Norm  
   einer Zerlegung, 106  
   Euklidische, 6  
 Normalbereich, 119, 120, 122  
 Normalenform, 204  
 Normalenvektor, 51  
 Normalgleichung, 90  
 Normalgleichungen, 88  
 Nullmenge, 123  
  
 Oberflächenelement  
   skalares, 210  
   vektorielles, 221  
 Oberflächenintegral, 214  
 Obersumme, 107  
 offen, 8, 11  
 offener Kern, 10  
 Ordinatenmenge, 130  
   verallgemeinerte, 131  
 orientierbar, 219  
 orientierter Rand, 236, 250  
  
 parabolisches Hyperboloid, 3  
 Parametrisierung  
   mit der Bogenlänge, 165  
   natürliche, 165  
 partiell differenzierbar, 29  
 Partielle Ableitung, 27  
   partielle Ableitung höherer Ordnung, 74  
   partielle Stetigkeit, 20  
 Partition, 106  
 Pfaff'sche Form, 54  
 Polarwinkel, 100, 101, 154  
 Potential, 33, 34, 179  
   kugelsymmetrisches, 60  
 Potentialfeld, 34, 257  
 Probeladung, 5  
 Projektion  
   auf die  $i$ -te Koordinate, 21  
 Prozeßgröße, 190  
  
 Quader  
    $n$ -dimensionaler, 7  
 Quelldichte, 233  
 Quelle, 233, 256  
 quellenfrei, 241  
  
 Rand, 10  
   orientierter, 236, 250  
 Raumladungsdichtefunktion, 241  
 Regressionsgerade, 87  
 regulär, 199, 209  
 reguläre Kurve, 161  
 Repräsentant  
   einer Kurve, 161  
 Richtungsableitung, 36  
 Riemann'sche Summe, 107  
 Riemann-meßbar, 129  
 Ringspannung, 175, 265  
 Rotation, 182  
  
 Sattelpunkt, 3, 85  
 Senke, 233, 256  
 Skalarfeld, 34, 178  
 Skalarprodukt, 6  
 spezifische Wärmekapazität, 190  
 Sphäre, 7  
 Spur, 5  
   eines Weges, 160  
 stückweise reguläre Kurve, 162  
 Stammfunktion, 34, 179  
 stetig, 18  
 Stromdichtevektor, 265, 267  
  
 Tangentialebene, 26, 50, 203, 204

- Teilintervall
  - einer Zerlegung, 106
- Teilpunkte
  - einer Zerlegung, 106
- Toleranzintervall, 71
- Topologie
  - des  $\mathbb{R}^n$ , 6
- Totales Differential, 44
- Trendgerade, 87
  
- Umgebung, 8
- Untersumme, 107
  
- Vektorfeld, 34, 166
- Vektorpotential, 267
- Verfeinerung, 108
- Volumen, 106
- Volumenelement, 110
  
- Weg, 160
- Wegelement
  - skalares, 164, 255
  - vektorielles, 171
- wirbelfrei, 183, 186, 187, 266
  
- Zerlegung, 106, 168
- Zerlegungsfolge
  - ausgezeichnete, 106
- zulässiges Gebiet, 236, 250
- zusammenhängend, 8, 176
- Zustandsgröße, 190
- Zwischenpunktsystem, 107
- Zwischensumme, 107
- Zylinderkoordinaten, 99, 150
- zylindrischer Bereich, 119, 120, 122