

# Lineare Algebra

Prof. Dr. A. Raphaélian  
Fachbereich 1 - Ingenieurwissenschaften I  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung und Definition, Beispiele . . . . .	1
1.2	Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Dimension . . . . .	13
1.3	Teilräume . . . . .	21
1.4	Euklidische und Unitäre Räume . . . . .	24
1.4.1	Einführung . . . . .	24
1.4.2	Skalarprodukt und Norm . . . . .	27
1.4.3	Geometrische Interpretation des Standard-Skalarproduktes in den Räumen $\mathbb{V}^2$ und $\mathbb{V}^3$ . . . . .	31
1.4.4	Schwarz'sche Ungleichung und Dreiecksungleichung . . . . .	33
1.4.5	Normierte Räume . . . . .	35
1.4.6	Orthogonalität . . . . .	37
1.4.7	Komponentendarstellung eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis . . . . .	40
1.5	Zusammenfassung . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Geometrie der Ebene und des Raumes</b>	<b>45</b>
2.1	Parameterdarstellung von Geraden . . . . .	46
2.2	Parameterdarstellung von Ebenen . . . . .	50
2.3	Vektorprodukt und Spatprodukt im $\mathbb{V}^3$ . . . . .	54
2.3.1	Abstand paralleler Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	60
2.4	Normalendarstellung von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	62
2.4.1	Normalendarstellung und Parameterdarstellung . . . . .	62
2.4.2	Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung . . . . .	65
2.4.3	Abstand windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	69
2.5	Pseudovektoren oder axiale Vektoren . . . . .	75
2.6	Zusammenfassung . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>80</b>
3.1	Definition und Beispiele . . . . .	80
3.2	Wertebereich, Kern und Invertierbarkeit . . . . .	84
3.3	Zusammenfassung . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Matrizen</b>	<b>95</b>
4.1	Matrixdarstellungen linearer Abbildungen . . . . .	95
4.2	Rechenregeln für Matrizen . . . . .	99

4.2.1	Addition und Skalare Multiplikation . . . . .	99
4.2.2	Multiplikation von Matrizen . . . . .	100
4.3	Matrixdarstellung beliebiger linearer Abbildungen . . . . .	106
4.4	Beispiele ausgezeichneter Matrizen . . . . .	109
4.5	Rang einer Matrix . . . . .	112
4.6	Invertierung einer Matrix . . . . .	117
4.7	Zusammenfassung . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>121</b>
5.1	Grundbegriffe und Beispiele . . . . .	121
5.2	Struktur der Lösungsmenge . . . . .	123
5.3	Gauß'scher Algorithmus . . . . .	127
5.3.1	Quadratisches lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Koeffizientenmatrix . . . . .	127
5.3.2	Beliebiges lineares Gleichungssystem . . . . .	130
5.4	Zusammenfassung . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Determinanten</b>	<b>141</b>
6.1	Zweireihige Determinanten . . . . .	141
6.2	Determinanten höherer Ordnung . . . . .	143
6.3	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	145
6.4	Invertierung einer Matrix mit Hilfe von Determinanten . . . . .	147
6.5	Cramer'sche Regel . . . . .	150
6.6	Zusammenfassung . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Anwendungen in Geometrie und Mechanik</b>	<b>151</b>
7.1	Flächeninhalt eines ebenen $n$ -Eckes . . . . .	151
7.1.1	Flächeninhalt eines Dreiecks ( $n = 3$ ) . . . . .	151
7.1.2	Flächeninhalt eines ebenen $n$ -Eckes . . . . .	152
7.2	Statisches Gleichgewicht . . . . .	154
7.3	Koordinatentransformationen . . . . .	160
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>161</b>

# Kapitel 1

## Vektorräume

### 1.1 Einführung und Definition, Beispiele

Vektorräume sind ein Hauptgegenstand der Linearen Algebra. Ihre Elemente heißen Vektoren, und um in mathematisch einwandfreier Weise zu klären, was Vektoren sind, müßte man also zuerst den Begriff eines Vektorraumes erklären.

Einen Vektorraum könnte ich jetzt formal definieren:

Unter einem Vektorraum versteht man eine Menge  $V$  mit den folgenden Eigenschaften . . . .

Ich tue das hier jedoch (noch) nicht und beschreibe anhand eines einführenden Beispiels, wie solch eine Definition denn auszusehen hätte. Dazu werden, ausgehend von der „üblichen“ Vorstellung des Vektorbegriffes, Eigenschaften hergeleitet, welche Vektoren „normalerweise“ haben. Diese Eigenschaften werden dann in den formalen Rang einer Definition erhoben.

#### Beispiel 1.1

Ein Flugzeug fliege nach Norden mit einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h (gemessen bei Windstille). Es wehe ein konstanter Westwind von 50 km/h.

- Welche Bahn über dem Boden beschreibt das Flugzeug tatsächlich ?
- Wo wird es nach einer Stunde ankommen ?

Zur Darstellung des tatsächlichen Weges (über Grund) des Flugzeuges sowie seiner Position habe ich als „gerichtete Größen“ Pfeile benutzt, welche auch „Vektoren“ genannt werden. Dabei macht man die folgenden Beobachtungen, s. Abb. 1.1:

- (1) Die Richtung der verwendeten Pfeile gibt die Richtung des Flugzeuges bzw. die des Windes an; ihre Länge ist ein Maß für die jeweilige Geschwindigkeit (über Grund). Man vergleiche dazu die englischen Bezeichnungen:

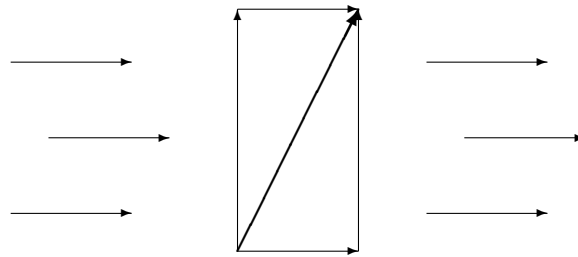


Abbildung 1.1: Bahn des Flugzeuges bei 50 km/h Westwind

- velocity : gerichtete Geschwindigkeit
  - speed : Maß für die Größe der Geschwindigkeit
- (2) Man kann einen Pfeil parallel zu sich verschieben, ohne daß er sich ändert. Mehr noch, zumindest der Wind läßt sich durch viele Pfeile auf einmal darstellen.
  - (3) Wenn man den „Flugzeugpfeil“ und einen „Windpfeil“ am selben Punkt abträgt, so kann man die tatsächliche Bahn des Flugzeuges über Grund mittels der Parallelogrammregel ermitteln (Kräfteparallelogramm). Der resultierende Pfeil wird Summe der anderen beiden Pfeile genannt.
  - (4) Man kann durch Multiplikation mit positiven Zahlen die Länge der Pfeile verändern und durch Multiplikation mit  $-1$  deren Richtung umkehren. Beispielsweise führt ein Ostwind von 25 km/h zu dem Bild aus Abb. 1.2.

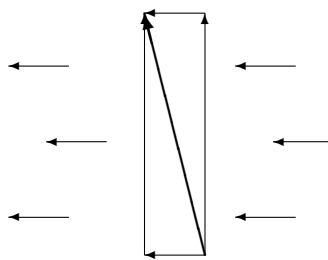


Abbildung 1.2: Bahn des Flugzeuges bei 25 km/h Ostwind

### Ergebnis

Der hier zu schaffende „Vektorraum“, also diejenige Konstruktion, deren Elemente „Vektoren“ sein sollen und mit der man die oben dargestellte Situation beschreiben kann, muß mindestens so beschaffen sein, daß man seine Elemente sinnvoll addieren und mit Zahlen multiplizieren kann. Weiterhin muß es einen „Nullvektor“ geben (Wind der Stärke 0) sowie zu jedem „Vektor“ einen im Sinne der Addition inversen „Vektor“ (man denke an das Kräfteparallelogramm).

Diese Forderungen führen zu der folgenden abstrakten Definition eines Vektorraumes:

**Definition 1.1**

Seien  $V$  eine nichtleere Menge und  $\mathbb{K}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , d.h.  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Gegeben seien die folgenden beiden Abbildungen:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ \langle a, b \rangle &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ \langle \lambda, a \rangle &\longmapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

- (i) Das Quadrupel  $\langle V, +, m, \mathbb{K} \rangle$  heißt *Vektorraum* oder *linearer Raum* über (dem Körper)  $\mathbb{K}$ , falls gilt:

Add.:  $\langle V, + \rangle$  ist eine kommutative Gruppe.

$$\begin{aligned} \text{Mult.:} \quad \lambda(\mu a) &= (\lambda\mu)a \\ 1 \cdot a &= a \end{aligned} \quad (\lambda \in \mathbb{K}, a \in V)$$

$$\begin{aligned} \text{Dist.:} \quad \lambda \cdot (a + b) &= \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \\ (\lambda + \mu)a &= \lambda a + \mu a \end{aligned} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K}, a, b \in V)$$

- (ii) Ist  $\langle V, +, m, \mathbb{K} \rangle$  ein Vektorraum, so heißen die Abbildungen

$+$  : *Addition*,

$m$  : *Skalarenmultiplikation*

$V$  heißt *Trägermenge*, Elemente von  $V$  heißen *Vektoren* (auch: Elemente oder Punkte des linearen Raumes), die Elemente von  $\mathbb{K}$  heißen *Skalare*.

- (iii) Trägermengenkonvention: Ist  $\langle V, +, m, \mathbb{K} \rangle$  ein Vektorraum und ist aus dem Kontext klar, wie „+“ und „m“ definiert sind, so spricht man kurz (aber inkorrekt) vom *Vektorraum*  $V$ , man identifiziert also die Menge mit der strukturierten Menge.

**Bemerkung**

- (i) Es ist nicht notwendig, daß  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  gilt, man kann hier beliebige andere Zahlkörper zulassen. In der Informatik beispielsweise wird als Skalarenkörper manchmal der Körper  $\mathbb{K} := \langle \{0, 1\}, +, \cdot \rangle$  verwendet, der *binäre Zahlenkörper*.
- (ii) Statt „Vektorraum über  $\mathbb{R}$ “ sagt man auch „reeller Vektorraum“, statt „Vektorraum über  $\mathbb{C}$ “ spricht man auch von einem „komplexen Vektorraum“.

**Beispiel 1.2** (Standardbeispiel)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Das für diese Lehrveranstaltung wichtigste Beispiel ist der  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  der (angeordneten)  $n$ -Tupel von Elementen aus  $\mathbb{K}$ , also der Elemente  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , welche man in diesem Kontext meistens als Spalten schreibt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \langle x_1, \dots, x_n \rangle \quad (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}).$$

Die Menge dieser sog. *Spaltenvektoren* bezeichne ich im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  mit dem Symbol  $\mathbb{V}^n$ :

$$\mathbb{V}^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n \text{ geeignet} \right\}.$$

Auf dieser Menge wird nun eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt, und zwar „elementweise“ wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n \right)$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \quad \left( \lambda \in \mathbb{K}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n \right),$$

Man kann jetzt leicht nachweisen, daß die Menge  $\mathbb{V}^n$  der reellen Spalten mit der so definierten Addition und skalaren Multiplikation einen reellen Vektorraum bildet, also die Gesetze von Definition 1.1 erfüllt; zu Übungszwecken sei dieser Nachweis empfohlen! Der Nullvektor ist gegeben durch

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

und der zu einem Vektor  $v \in \mathbb{V}^n$  (bzgl. der Addition) inverse Vektor lautet

$$-v := \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}.$$

Im Spezialfall  $n = 1$  reduzieren sich die beiden soeben definierten Vektorraumoperationen auf die Addition und Multiplikation im Zahlkörper  $\mathbb{R}$ ; die Spaltenklammern werden dann weggelassen, der Vektorraum  $\mathbb{V}^1$  also mit  $\mathbb{R}$  identifiziert.

**Aufgabe**

Welche der folgenden beiden Mengen bildet bzgl. der im letzten Beispiel definierten Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum?

$$(i) \quad K := \left\{ x : x \in \mathbb{V}^3, x = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\},$$

$$(ii) \quad L := \left\{ x : x \in \mathbb{V}^3, x = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\} ?$$

Der Vektorraum  $\mathbb{V}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  geeignet) tritt in dieser Vorlesung häufig auf, selbst wenn man ihn nicht mit geometrischen Vorstellungen in Verbindung bringen kann; beispielsweise bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems von fünf Gleichungen mit vier Unbekannten. Im Falle  $n = 2$  oder  $n = 3$  gestattet er jedoch eine geometrische Interpretation. Dazu

**Beispiel 1.3**

Gegeben seien drei an einem Punkt angreifende Kräfte  $f_1, f_2$  und  $f_3$ . Welche Richtung und Stärke hat die gesamte an diesem Punkt angreifende Kraft  $f_G$ ?

Die drei angreifenden Kräfte können durch drei Pfeile unterschiedlicher Längen, welche die Größe der jeweiligen Einzelkräfte repräsentieren, dargestellt werden, s. Abb. 1.3. Die Gesamtkraft läßt sich dann geometrisch als Resultierende, rechnerisch als Summe der Einzelkräfte darstellen:<sup>1</sup>

$$f_G = f_1 + f_2 + f_3.$$

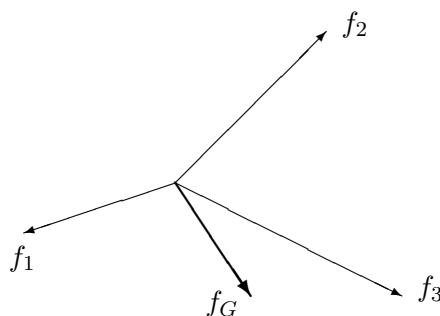


Abbildung 1.3: Resultierende Gesamtkraft

<sup>1</sup>In der Physik sind bei Kräften auch andere Bezeichnungen üblich. Unsere Kraft  $f$  wird dort mit dem Symbol  $\vec{f}$  oder mit  $\mathbf{f}$  bezeichnet.



**Bemerkung**<sup>2</sup>

(Zusammenhang zwischen dem Punktraum  $\mathbb{R}^n$  und dem Vektorraum  $\mathbb{V}^n$ )

In der Mengenlehre sind die geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen eingeführt worden:

$$\mathbb{R}^n := \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \};$$

hier nun führe ich den Vektorraum  $\mathbb{V}^n$  ebenfalls als (geordnetes)  $n$ -Tupel reeller Zahlen ein, welche aus Gründen, die sich später als praktisch erweisen werden, statt nebeneinander untereinander geschrieben und statt in spitze Klammern in runde Klammern eingepackt werden:

$$\mathbb{V}^n := \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dieser Bezeichnungsunterschied kann nun aber nicht so wesentlich sein, als daß es sich lohnt, dafür überhaupt zwei verschiedene Begriffe zu kreieren. Der Unterschied muß also woanders liegen, und das ist gar nicht so einfach zu erklären.

Bis jetzt ist  $\mathbb{R}^n$  eine Menge (von waggerechten  $n$ -Tupeln) ohne Struktur,  $\mathbb{V}^n$  hingegen ist eine Menge (von senkrechten  $n$ -Tupeln) mit Struktur, nämlich mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation versehen, also, wie wir gesehen haben, ein Vektorraum. Nun gut, mit einer analogen elementweisen Definition läßt sich die Menge  $\mathbb{R}^n$  auch zu einem Vektorraum machen:

$$\begin{aligned} \langle x_1, \dots, x_n \rangle + \langle y_1, \dots, y_n \rangle &:= \langle x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n \rangle \\ &(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \langle x_1, \dots, x_n \rangle &:= \langle \lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n \rangle, \\ &(\lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Diese Definition führt dann zum Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ , und in der Literatur ist es daher oft üblich, die beiden Räume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{V}^n$  miteinander zu identifizieren. Das kann jedoch, gerade für Anfänger, zu erheblichen Vorstellungsschwierigkeiten führen, und deshalb soll hier zwischen dem „Punktraum“  $\mathbb{R}^n$  und dem Vektorraum  $\mathbb{V}^n$  unterschieden werden.

Der Unterschied hängt damit zusammen, daß es einen Raum gibt, der in der Natur von überragender Bedeutung und gleichsam allgegenwärtig ist, während ihn die Lineare Algebra als mathematisches Objekt gar nicht kennt, nämlich den realen physikalischen Raum, in dem wir uns alle befinden. Wenn man in diesem realen physikalischen Raum einen bestimmten Punkt als Bezugspunkt auszeichnet (je nach Versuch beispielsweise einen Punkt auf dem Tisch eines Labors oder den Sonnenmittelpunkt bei astronomischen Betrachtungen), dann kann man diesem Punkt das Element

<sup>2</sup>Diese Bemerkung entstammt dem Buch „Lineare Algebra“ von Klaus Jänich.

$\langle 0, 0, 0 \rangle$  des  $\mathbb{R}^3$  zuordnen; man nennt diesen Bezugspunkt dann den *Koordinatenursprung*. Damit hat man dann jedem anderen Punkt  $P$  des physikalischen Raumes durch seine Koordinaten  $P_1, P_2, P_3$  bzgl. des gewählten Koordinatenursprungs und bzgl. einer gewählten Längeneinheit das Element  $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet, also den physikalischen Anschauungsraum mit der Menge  $\mathbb{R}^3$  identifiziert. Insofern spricht man dann von dem „Raum“  $\mathbb{R}^3$  als dem physikalischen Anschauungsraum und hat damit eine physikalische Interpretation des „Raumes“  $\mathbb{R}^3$  gefunden, nämlich diejenige als „Punktraum“.

Die Interpretation des Vektorraumes  $\mathbb{V}^3$  – oder allgemein:  $\mathbb{V}^n$  – ist eine andere, diese soll jetzt entwickelt werden. Um das Ergebnis vorwegzunehmen: die Elemente des Raumes  $\mathbb{V}^n$  werden als das interpretiert, was man auch als „freie Vektoren“ bezeichnet, also Objekte, denen eine Länge und eine Richtung zukommt, jedoch kein sog. „Angriffspunkt“.

### Definition 1.2

Sei

$$v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

also  $v \in \mathbb{V}^n$ . Dann definiert  $v$  eine Abbildung

$$v: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

durch die Abbildungsvorschrift

$$v(x) := \langle x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Diese Abbildung heißt *Translation* oder *Verschiebung* des  $\mathbb{R}^n$ . Sie wird mit dem Spaltenvektor  $v$  identifiziert und daher mit demselben Symbol bezeichnet. Man kann also sagen:

Ein Vektor  $v$  ist eine Translation des  $\mathbb{R}^n$ .

### Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$ (Abb. 1.4 und 1.5)

Ein Vektor bewirkt also eine Verschiebung *aller* Punkte des Raumes  $\mathbb{R}^n$ ; die Verschiebung wird durch einen Pfeil veranschaulicht. Ausdrücklich sei aber bemerkt, daß der Pfeil nicht der Vektor, sondern nur dessen lokale (d.h. am Punkt  $x = \langle x_1, x_2 \rangle$  abgetragene) Veranschaulichung der durch den Vektor  $v$  definierten Verschiebung ist.

Jedes Punktepaar  $\langle a_1, a_2 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle$  mit

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= v_1 \\ b_2 - a_2 &= v_2 \end{aligned}$$

definiert dieselbe Translation.

Die Länge und Richtung des Vektors  $v$  sind dann mathematisch beschreibbar:

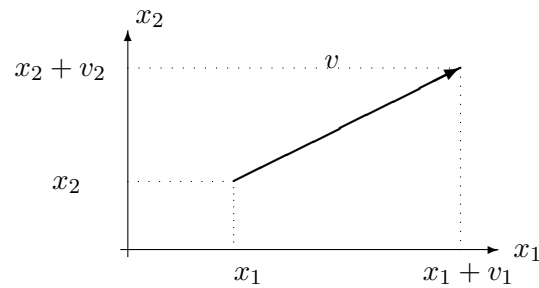


Abbildung 1.4: Vektor als Translation

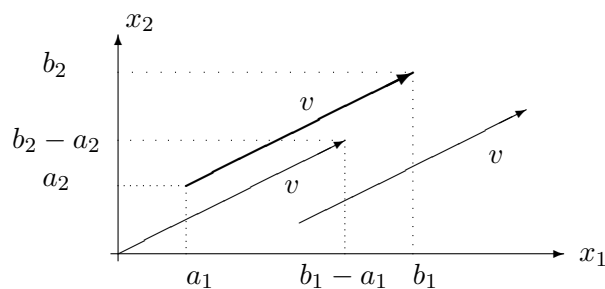


Abbildung 1.5: Vektor als Translation

Länge:  $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Richtung:  $\tan \phi = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \quad (0 \leq \phi < 2\pi, \phi \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}).$

Man spricht dann davon, daß der Vektor  $v$  am Punkt  $x$  *abgetragen* wird. Wird  $v$  am Nullpunkt des  $\mathbb{R}^n$  abgetragen, also am Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned} v(0) &= v(0, \dots, 0) \\ &= \langle 0 + v_1, \dots, 0 + v_n \rangle \\ &= \langle v_1, \dots, v_n \rangle, \end{aligned}$$

so stimmen die Komponenten des Vektors  $v$  mit den Koordinaten  $v(0)$  des Endpunktes des am Nullpunkt abgetragenen Vektors  $v$  überein. Damit läßt sich der Vektorraum  $\mathbb{V}^n$  durch den Punktraum  $\mathbb{R}^n$  veranschaulichen, s. Abb. 1.6 im Fall  $n = 2$ :

Auf diese Weise hat man (mathematisch) eine Möglichkeit,  $\mathbb{V}^n$  und  $\mathbb{R}^n$  miteinander zu identifizieren:

$$\begin{aligned} I : \quad \mathbb{V}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto I(v) := \langle v_1, \dots, v_n \rangle. \end{aligned}$$

Im Falle  $n = 2$  ist eine Translation eindeutig bestimmt

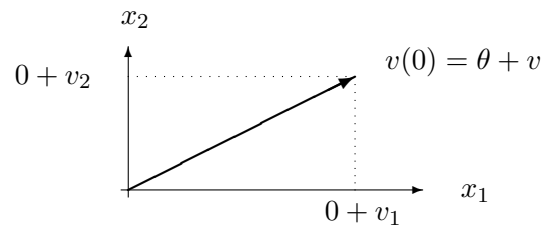


Abbildung 1.6: Veranschaulichung des Vektorraums  $\mathbb{V}^2$  durch den Punkttraum  $\mathbb{R}^2$

- geometrisch : durch das Zeichnen eines einzigen Pfeiles in der Ebene,
- analytisch : durch die Angabe eines einzigen Punktepaars.

Man nennt einen solchen Pfeil bzw. (und dies für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ ) ein solches Punktetupel dann einen *Repräsentanten* der Translation. Die Translation selbst – oder der Vektor – ist dann die Gesamtheit aller Pfeile gleicher Richtung und gleicher Länge; diese dürfen parallel verschoben werden.

### Definition 1.3

- (i) Seien  $X := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  und  $Y := \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ . Dann wird definiert:

$$\vec{XY} := \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

$\vec{XY}$  ist also diejenige Translation, die den Punkt  $X$  in den Punkt  $Y$  verschiebt:

$$\vec{XY}(X) = Y.$$

- (ii) Diejenige Translation, welche den Ursprung  $O$  in den Punkt  $X$  verschiebt, also  $\vec{OX}$ , heißt der *Ortsvektor* von  $X$ .

Der Name „Ortsvektor“ eines Punktes  $X$  ist in der Literatur nicht einheitlich definiert. Manchmal wird nur der spezielle Repräsentant  $\langle O, X \rangle$  der Translation  $\vec{OX}$ , also der „Pfeil“ vom Ursprung  $O$  zum Punkt  $X$ , als Ortsvektor von  $X$  bezeichnet. In diesem Fall kann man  $\langle O, X \rangle$  mit dem Punkt  $X$ , genauer: mit seinem Koordinatentupel  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  identifizieren, wie oben im Fall  $n = 2$  durchgeführt.

Diese Definition gefällt mir aber nicht, weil dann ein Ortsvektor ein anderes Objekt ist als ein Vektor aus dem Raum  $\mathbb{V}^n$ , und man könnte beide beispielsweise nicht mehr addieren.

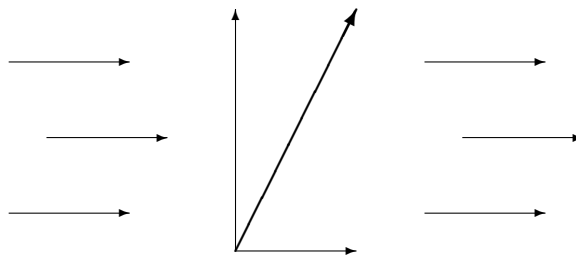


Abbildung 1.7: Bahn des Flugzeuges bei 50 km/h Westwind

### Rückkehr zu unserem Ausgangsbeispiel

Der Geschwindigkeitsvektor des Flugzeuges wird durch diejenige Translation dargestellt, welche den Startpunkt des Flugzeuges in seinen Endpunkt verschiebt. Der Startpunkt selbst wird näherungsweise (die Erdoberfläche ist gekrümmt) als Punkt des  $\mathbb{R}^2$  interpretiert, und der Geschwindigkeitsvektor wird am Startpunkt abgetragen.

Der Wind wird ebenfalls durch einen Vektor repräsentiert, also durch eine Translation und damit durch eine Gesamtheit von Pfeilen gleicher Länge und gleicher Richtung. Betrachtet man den speziellen Repräsentanten dieser Translation, welcher den Startpunkt verschiebt, so erhält man den resultierenden Geschwindigkeitsvektor des Flugzeuges nach der Parallelogrammregel, also die tatsächliche Bahn des Flugzeuges über Grund.

### Beispiele 1.4

Neben dem Standardbeispiel des Vektorraumes  $\mathbb{V}^n$  der Spalten gibt es Beispiele von Vektorräumen, die aus Funktionen bestehen, welche auf einem gemeinsamen Definitionsbereich erklärt sind und ggfs. einige Zusatzeigenschaften haben. In diesen Beispielen seien stets  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $\mathcal{I}$  ein reelles Intervall.

- (i)  $\mathbb{P}_n := \{p : p \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq n\}$
- (ii)  $\mathbb{F}_1 := \{f : f \text{ ist eine Funktion mit } D(f) = \mathcal{I}\}$
- (iii)  $\mathbb{F}_2 := \{f : f \text{ ist eine stetige Funktion mit } D(f) = \mathcal{I}\}$
- (iv)  $\mathbb{F}_3 := \{f : f \text{ ist eine differenzierbare Funktion mit } D(f) = \mathcal{I}\}$

Daß man diese Mengen zu Vektorräumen machen kann, liegt daran, daß man ihre jeweiligen Elemente addieren und mit Zahlen multiplizieren kann und mit dem Ergebnis stets wieder in der Ausgangsmenge landet. Für (i) sei das einmal exemplarisch nachgewiesen:

Seien  $p, q, r \in \mathbb{P}_n$ , und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Summe dieser beiden Abbildungen elementweise definiert, d.h.

$$\begin{aligned} D(p+q) &:= D(p) \cap D(q) & , & & (p+q)(x) &:= p(x) + q(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ D(\lambda \cdot p) &:= D(p) & , & & (\lambda \cdot p)(x) &= \lambda \cdot p(x) & (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Bei der Addition zweier Polynome vom Grad  $\leq n$  bzw. der Multiplikation eines Polynoms vom Grad  $\leq n$  mit einer Zahl erhält man wieder ein Polynom vom Grad  $\leq n$ . Damit sind die in Definition 1.1 geforderten Operationen „+“ und „ $\cdot$ “ sinnvoll definiert. Es bleibt jetzt die Aufgabe, die restlichen dort angegebenen Bedingungen nachzuweisen.

Der folgende Nachweis wird dem Anfänger insofern undurchsichtig erscheinen, als er/sie sich fragt, was bei diesem Beweis eigentlich vorausgesetzt und was bewiesen wird. Hat man das aber einmal richtig verstanden, dann ist zur weiteren Behandlung von sog. Funktionenräumen als Vektorräumen der wesentliche Schritt bereits getan. In allen Schritten wird der Beweis einfach dadurch geführt, daß die für reelle Zahlen gültigen Gesetze auf die Verknüpfung von Funktionen übertragen werden.

1. Addition:

$\langle \mathbb{P}_n, + \rangle$  ist eine kommutative Gruppe:

$p \in \mathbb{P}_n, q \in \mathbb{P}_n \Rightarrow (p + q) \in \mathbb{P}_n$ , wie eben gesehen;

$[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)] \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $(p + q) + r = p + (q + r)$ .

Das Nullpolynom  $\theta$ , d.h. dasjenige Polynom vom Grad  $n$ , dessen Koeffizienten alle gleich 0 sind, ist in  $\mathbb{P}_n$  das neutrale Element bzgl. der Addition.

Das zu einem Polynom  $p$  vom Grad  $\leq n$  bzgl. der Addition inverse Polynom ist dasjenige Polynom  $q$ , welches aus  $p$  dadurch entsteht, daß alle Koeffizienten mit  $-1$  multipliziert werden. Dann erhält man nämlich

$p(x) + q(x) = p(x) + (-p(x)) = p(x) - p(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $p + q = p + (-p) = o$  (Nullpolynom);

$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = (q + p)(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $p + q = q + p$ .

2. Multiplikation:

$\lambda \cdot [\mu \cdot p(x)] = (\lambda \cdot \mu) \cdot p(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $\lambda \cdot (\mu \cdot p) = (\lambda \cdot \mu) \cdot p$

$1 \cdot p(x) = p(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $1 \cdot p = p$

3. Distributivgesetze:

$\lambda \cdot [p(x) + q(x)] = \lambda \cdot p(x) + \lambda \cdot q(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $\lambda \cdot (p + q) = \lambda \cdot p + \lambda \cdot q$

$(\lambda + \mu) \cdot p(x) = \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot p(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ ,

also gilt:  $(\lambda + \mu) \cdot p = \lambda \cdot p + \mu \cdot p$ .

### Aufgabe

Welche der folgenden beiden Mengen läßt sich durch Einführung der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Polynomen (s. oben) zu einem Vektorraum machen?

- (i)  $M := \{p : p \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq n, p(0) = 0\}$  ,  
(ii)  $N := \{p : p \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq n, p(0) = 1\}$  ?

Der Begriff „Vektorraum“ ist das Herz der sog. *Linearen Algebra*, also demjenigen Teilgebiet der Algebra, bei dem es um das Lösen von einer oder mehreren linearen Gleichungen oder Ungleichungen geht.

### Beispiel 1.5

Man betrachte den in Abb. 1.8 skizzierten Gleichstromkreis mit drei Ohm'schen Widerständen und einer Spannungsquelle mit der Gleichspannung  $U$ .

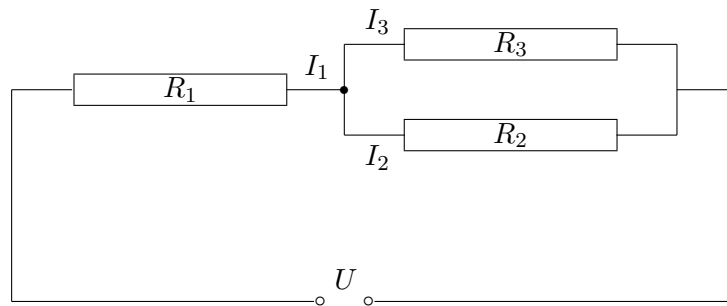


Abbildung 1.8: Gleichstromkreis mit drei Widerständen

Gesucht sind die Teilströme  $I_1, I_2, I_3$  in Abhängigkeit von den Widerständen  $R_1, R_2, R_3$  und der Spannung  $U$ . Mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{Knotenpunktregel:} \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{Maschenregel:} \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 = U \\ \text{Maschenregel:} \quad R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{array}$$

Dieses System linearer Gleichungen läßt sich in Form einer Matrix-Vektor-Gleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix},$$

also in der Form  $A \cdot x = b$ .

Wenn man weiß, daß  $A$  invertierbar ist und die inverse Matrix  $A^{-1}$  kennt, so läßt sich die Lösung ( $\sim$  der „Lösungsvektor“) sofort hinschreiben:

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

Die inverse Matrix erhält man

- mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder
- mit Hilfe von Determinanten und Adjunkten.

Im vorliegenden Beispiel ergibt sich mit der Abkürzung

$$\det(A) := -(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)$$

für die sog. *Determinante* der Matrix  $A$  die inverse Matrix zu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} -R_2R_3 & -(R_2 + R_3) & R_2 \\ R_1R_3 & -R_3 & -R_1 \\ R_1R_2 & -R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix}.$$

und damit die (hier: eindeutig bestimmte) Lösung des linearen Gleichungssystems zu

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{U}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \begin{pmatrix} R_2 + R_3 \\ R_3 \\ R_2 \end{pmatrix}.$$

In der weiteren Vorlesung werden die folgenden Probleme behandelt:

- Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen („Spalten“ werden auf „Spalten“ abgebildet)
- Beschreibung der linearen Abbildungen durch Matrizen
- Invertierung von Matrizen (zum Zwecke des)
- Lösen eines linearen Gleichungssystems

## 1.2 Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Dimension

Sind drei Vektoren aus  $\mathbb{V}^3$  parallel zu einer Ebene (d.h. lassen sich drei Repräsentanten in einer Ebene zeichnen), so lassen sich diese durch geeignetes Verlängern, Verkürzen oder Umkehren der Richtung zu einem geschlossenen Streckenzug zusammenbauen, s. Abb. 1.9.

In diesem Beispiel gilt also

$$2 \cdot a + 1 \cdot b - \frac{3}{2} \cdot c = \theta.$$

Trivialerweise gilt für je drei Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  stets:

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = \theta.$$



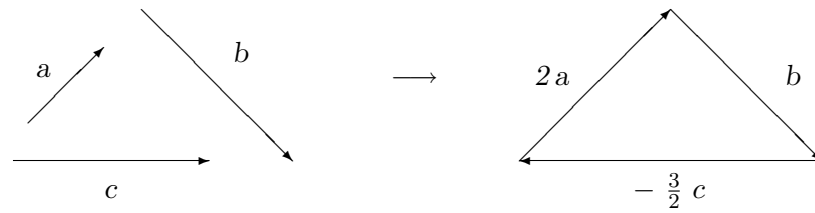


Abbildung 1.9: Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Vektoren, mit denen man den Nullvektor noch auf eine andere Weise „erzeugen“ kann, ohne daß alle Koeffizienten gleich Null sind, werden *linear abhängig* genannt. Ist eine weitere Darstellung des Nullvektors außer dieser sog. „trivialen“ Darstellung nicht möglich, so heißen diese Vektoren *linear unabhängig*. Die drei Vektoren aus der Zeichnung sind somit linear abhängig. Formal sieht die Definition wie folgt aus:

**Definition 1.4**

Seien  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_m \in V$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ .

(i) Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$$

heißt eine *Linearkombination* der Vektoren  $a_1, \dots, a_m$ .

(ii) Die Vektoren  $a_1, \dots, a_m$  heißen *linear abhängig*, falls es Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  gibt mit der folgenden Eigenschaft:

- (a)  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = \theta$
- (b)  $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle \neq \langle 0, \dots, 0 \rangle$

(iii) Die Vektoren  $a_1, \dots, a_m$  heißen *linear unabhängig*, wenn sie nicht linear abhängig sind.

**Bemerkung**

In den Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  heißen linear abhängige Vektoren auch *kollinear*, in  $\mathbb{V}^3$  heißen linear abhängige Vektoren auch *komplanar*.

Wie läßt sich der Begriff „Lineare Unabhängigkeit“ positiv ausdrücken, also ohne Rückgriff auf sein Gegenteil, die „Lineare Abhängigkeit“? Die lineare Abhängigkeit ist eine Aussageform der Gestalt

$$LA \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_x [ A(x) \wedge \neg B(x) ]$$

mit

$$\begin{aligned} A(x) & : \iff \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = \theta, \\ B(x) & : \iff \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle = \langle 0, \dots, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Dann erhält man mit Hilfe logisch äquivalenter Aussageformen für die lineare Unabhängigkeit die Aussageform:

$$\begin{aligned} LU & : \iff \neg LA \\ & \equiv \neg \left( \bigvee_x [ A(x) \wedge \neg B(x) ] \right) \\ & \equiv \bigwedge_x (\neg [ A(x) \wedge \neg B(x) ]) \\ & \equiv \bigwedge_x [ \neg A(x) \vee B(x) ] \\ & \equiv \bigwedge_x [ A(x) \Rightarrow B(x) ]. \end{aligned}$$

Damit ist schon der erste Teil des folgenden Satzes bewiesen:

**Satz 1.1**

- (i) Positive Formulierung der linearen Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_m \text{ sind linear unabhängig} & \iff \\ \bigwedge_{\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}} \left[ \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = \theta \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right] & \end{aligned}$$

- (ii) Eigenschaft der linearen Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_m \text{ sind linear abhängig} & \iff \\ \bigvee_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigvee_{\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}} a_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \lambda_j a_j & \end{aligned}$$

*Beweis*

Zu (i): Siehe die Ausführungen vor diesem Satz.

Zu (ii): Die Aussage ist, daß sich im Falle der linearen Abhängigkeit *einer* der Vektoren aus den anderen linear kombinieren läßt. Der Beweis ist überhaupt nicht schwer, allerdings sehr formal. An diesem kleinen

Beweis teste man, ob man den Begriff der linearen Abhängigkeit verstanden hat und beobachte, wie ein formaler mathematischer Beweis einmal aussieht.

„ $\implies$ “:

Seien  $a_1, \dots, a_m$  linear abhängig. Sei  $k \in \{1, \dots, m\}$  so gewählt, daß gilt:

$$\lambda_k \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = \theta.$$

Dann läßt sich diese Summe von Vektoren nach  $a_k$  auflösen:

$$\begin{aligned} a_k &= \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right) a_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) a_{k-1} \\ &\quad + \left(-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right) a_{k+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_m}{\lambda_k}\right) a_m. \end{aligned}$$

„ $\impliedby$ “:

Es gelte  $a_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \lambda_j a_j$ , dann ist mit

$$\lambda_k := -1 \neq 0 \quad \text{auch} \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = \theta,$$

also sind die  $a_1, \dots, a_m$  linear abhängig.

### Aufgabe

Nach Aussage (ii) des letzten Satzes kann in einer Menge von linear abhängigen Vektoren einer als Linearkombination der anderen dargestellt werden. Darf man sich aussuchen, *welchen* Vektor man als Linearkombination der jeweils anderen darstellen will?

### Beispiele 1.6

(i) Die folgenden drei Vektoren des  $\mathbb{V}^3$  sind linear unabhängig:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b + \nu \cdot c = \theta$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ & \nu & = 0 \\ \lambda - \mu & = & 0 \end{array}$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$\lambda = \mu = \nu = 0.$$

(ii) Die folgenden drei Vektoren des  $\mathbb{V}^3$  sind linear abhängig:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Der zu (i) analoge Ansatz

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y + \nu \cdot z = \theta$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \lambda + 4\mu + 7\nu & = & 0 \\ 2\lambda + 5\mu + 8\nu & = & 0 \\ 3\lambda + 6\mu + 9\nu & = & 0, \end{array}$$

welches lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist. Subtraktion der zweiten Gleichung vom zweifachen der ersten bzw. Subtraktion der dritten Gleichung vom dreifachen der ersten liefern die beiden identischen Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 3\mu + 6\nu & = & 0 \\ 6\mu + 12\nu & = & 0. \end{array}$$

Daraus ergeben sich insgesamt die Lösungen

$$\lambda = \nu, \quad \mu = -2\nu, \quad \nu = \nu,$$

welche sich auch als Vektor  $v \in \mathbb{V}^3$  schreiben lassen:

$$v := \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wahl von  $\nu = 1$  beispielsweise ergibt

$$1 \cdot x + (-2) \cdot y + 1 \cdot z = \theta.$$

Wenn (!) ein Vektor  $b$  aus anderen Vektoren linear kombinierbar ist, so kann das i.a. auf mannigfache Weise geschehen, nicht jedoch, wenn zur Linearkombination eine Menge von linear unabhängigen Vektoren verwendet wird:

**Satz 1.2**

Seien  $V$  ein Vektorraum,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_m \in V$  linear unabhängig und sei der Vektor  $b \in V$  eine Linearkombination der  $a_i$ , also

$$b = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$$

mit geeigneten Zahlen  $\lambda_i$ . Dann sind diese Zahlen  $\lambda_i$  eindeutig bestimmt.

*Beweis*

Für  $b$  gebe es zwei Linearkombinationen aus den Vektoren  $a_1, \dots, a_m$ , also

$$b = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^m \mu_k a_k,$$

dann ist

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k - \sum_{k=1}^m \mu_k a_k = \sum_{k=1}^m (\lambda_k - \mu_k) a_k = \theta,$$

und aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $a_k$  folgt das Verschwinden aller Koeffizienten, also

$$\lambda_k = \mu_k \quad (k \in \{1, \dots, m\}).$$

**Beispiel 1.7**

Man betrachte den Vektorraum  $V = \mathbb{V}^2$  und in ihm die Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren  $a, b, c$  sind linear abhängig, daher läßt sich der Vektor  $x$  auf mannigfache Weise als Linearkombination dieser Vektoren darstellen. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} x &= 4a + 2b + 0c \\ &= 3a + 1b + 1c \\ &= 2a + 0b + 2c \\ &= \dots \end{aligned}$$

Betrachtet man hingegen die Vektoren  $b, c$ , so sind diese nun linear unabhängig, und der Vektor  $x$  läßt sich nur auf genau eine Weise aus ihnen linear kombinieren. Auf welche?

Bis jetzt hat man damit das folgende Ergebnis:

Mit einer Anzahl gegebener Vektoren  $a_1, \dots, a_m$  lassen sich andere Vektoren darstellen, sich also als Linearkombinationen von jenen ausdrücken. Sind die für diese Darstellung verwendeten Vektoren  $a_1, \dots, a_m$  zudem linear unabhängig, so ist die Darstellung eines Vektors sogar eindeutig, d.h. die sog. *Komponenten* dieser Linearkombination sind eindeutig bestimmt.

Es wäre wünschenswert, wenn es eine Menge  $\{a_1, \dots, a_m\}$  von Vektoren in  $V$  gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- Jeder Vektor aus  $V$  läßt sich als Linearkombination der  $a_1, \dots, a_m$  schreiben;
- Für jeden Vektor aus  $V$  ist die Darstellung als Linearkombination *eindeutig* bestimmt.

Nach Satz 1.2 läßt sich das erreichen, falls es gelingt, jeden Vektor als Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren darzustellen. Dazu die folgende

**Definition 1.5**

Seien  $V$  ein Vektorraum,  $m \in \mathbb{N}$  und  $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq V$ . Wenn sich jeder Vektor aus  $V$  als (nicht notwendig eindeutige) Linearkombination der  $a_k$  schreiben läßt, falls es also zu jedem  $a \in V$  Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  gibt mit  $a = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k$ , so heißt die Menge  $\{a_1, \dots, a_m\}$  ein *Erzeugendensystem* von  $V$ .

**Definition 1.6**

- (i) Ein Erzeugendensystem von  $V$ , welches aus linear unabhängigen Vektoren besteht, heißt eine *Basis*.
- (ii) Wenn  $V$  eine endliche Basis besitzt, so hat jede Basis dieselbe endliche Anzahl von Elementen. Diese eindeutig bestimmte Zahl heißt die *Dimension* von  $V$ , geschrieben:  $\dim V$ .
- (iii)  $V$  heißt *endlich-dimensional*, wenn es ein Erzeugendensystem aus endlich vielen Elementen gibt.
- (iv)  $V$  heißt *unendlich-dimensional*, wenn es zu jeder Zahl  $k \in \mathbb{N}$   $k$  linear unabhängige Elemente gibt.
- (v) Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\dim V := n$  und  $B := \{a_1, \dots, a_n\}$  eine Basis von  $V$ . Für  $x \in V$  heißen die nach Satz 1.2 eindeutig bestimmten Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mit

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

die *Komponenten* von  $x$  bzgl. der Basis  $B$ ,  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  heißt das *Koordinaten -  $n$  - Tupel* von  $x$  bzgl. der Basis  $B$ .

**Bemerkung**

Eine Basis ist also ein Erzeugendensystem, welches aus linear unabhängigen Vektoren besteht. In einem Vektorraum kann es – und wird es i.a. auch – mehrere Basen geben, welche nach dem letzten Satz alle dieselbe Anzahl von Elementen haben. Die Komponentendarstellung eines Vektors ändert sich i.a., wenn man ihn als Linearkombination von Elementen einer anderen Basis darstellt. Wie sie sich ändert, wird im allgemeinen Fall im Kapitel über Basistransformationen abgehandelt; für spezielle Fälle siehe die folgenden Beispiele.

**Beispiele 1.8**

- (i) Zuerst ein Beispiel aus dem Vektorraum  $V := \mathbb{V}^2$ :

$$E := \{e_1, e_2\} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$g := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad g = 8 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2.$$

$$F := \{f_1, f_2\} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$g := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad g = 5 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2.$$

Im ersten Fall ist das Koordinatentupel von  $g$  gleich  $\langle 8, 2 \rangle$ ,  $g$  hat also bzgl. der Basis  $E$  die Komponenten 8 und 2; im zweiten Fall ist das Koordinatentupel von  $g$  gleich  $\langle 5, 3 \rangle$ , derselbe Vektor  $g$  hat also bzgl. der Basis  $F$  die (anderen) Komponenten 5 und 3.

- (ii) Im folgenden Beispiel geht es um sog. *Matrizen* (Singular: *Matrix*); das sind rechteckig angeordnete Zahlenschemata. Im Moment muß man darüber nur wissen, daß die Positionen, an denen die einzelnen Zahlen stehen, nicht verändert werden dürfen; analog zu den Komponenten von Vektoren im Vektorraum  $\mathbb{V}^n$ . Matrizen mit gleich vielen Zeilen wie Spalten bezeichnet man als *quadratische Matrizen*.

Im folgenden geht es um quadratische  $(2 \times 2)$ -Matrizen:

$$V := \mathbb{M}_{2 \times 2}^{\mathbb{R}} := \{A : A \text{ ist eine reelle } (2 \times 2)\text{-Matrix}\}.$$

Man kann zeigen (wie?), daß  $\mathbb{M}_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$  bzgl. der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation ein reeller Vektorraum ist mit  $\dim \mathbb{M}_{2 \times 2}^{\mathbb{R}} = 2 \cdot 2 = 4$ , und

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist in diesem Vektorraum eine Basis.

(iii)

$$W := \mathbb{M}_{2 \times 2}^{\mathbb{C}} := \{A : A \text{ ist eine komplexe } (2 \times 2)\text{-Matrix}\}$$

ist analog zum Vektorraum  $V$  aus Beispiel (ii) ein komplexer linearer Raum. Die dort definierte Menge  $B$  ist auch eine Basis von  $W$ .

Eine andere Basis ist hier gegeben durch

$$\begin{aligned} D &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad \{\text{Pauli'sche Spinmatrizen}\} \end{aligned}$$

Die lineare Unabhängigkeit erhält man wie im vorangegangenen Beispiel, also ist  $\dim W = 4$ , also ist  $D$  eine Basis von  $\mathbb{M}_{2 \times 2}^{\mathbb{C}}$ .

(iv) Seien  $n$  eine natürliche Zahl und

$$\mathbb{P}_n := \{p : p \text{ ist ein reelles Polynom vom Grad } \leq n\}.$$

In  $\mathbb{P}_n$  sind die folgenden beiden Mengen jeweils Basen:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{1, x, \dots, x^n\}, \\ B_2 &:= \{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+\dots+x^n\}. \end{aligned}$$

Gemeint sind natürlich die *Funktionen*, welche die jeweils angegebenen Elemente als Werte haben. Die Tatsache, daß  $\mathbb{P}_n$  ein linearer Raum und  $B_1$  linear unabhängig ist, bildet die Grundlage des Koeffizientenvergleiches für Polynome von gleichem Grad.

### 1.3 Teilräume

Teilräume von Vektorräumen, auch *Untervektorräume* oder *Unterräume* genannt, sind, grob gesprochen, Teilmengen von Vektorräumen, welche selbst Vektorräume sind. Fundamental für Vektorräume ist, daß man in ihnen eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren erklären kann, m.a.W. diese Operationen, auf Elemente eines Vektorraumes  $V$  angewandt, führen nicht aus  $V$  heraus.

#### Definition 1.7

Seien  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ .

(i) Sei  $U \subseteq V$ .  $U$  heißt ein *Teilraum* von  $V$ , falls gilt:

- (a)  $u, v \in U \implies u + v \in U$
- (b)  $u \in U, \lambda \in \mathbb{K} \implies \lambda u \in U$



d.h.  $U$  ist „abgeschlossen“ gegenüber Addition und Multiplikation mit Skalaren.

Das abgeschlossene Quadrat  $Q := \{x : x \in \mathbb{V}^2, \max(|x_1|, |x_2|) \leq 1\}$  (Abb. 1.10) ist kein Teilraum, da für die dort angegebenen Vektoren  $a, b \in \mathbb{V}^2$  gilt:  $a, b \in Q$ , aber  $a + b \notin Q$ .

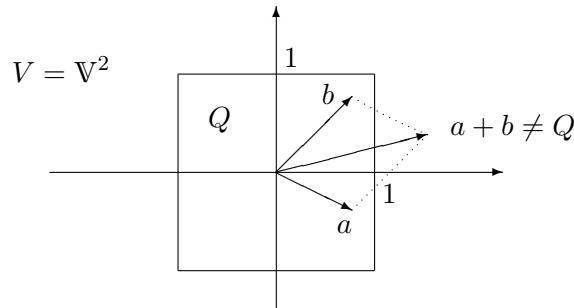


Abbildung 1.10: Teilmenge, aber kein Teilraum

(ii) Sei  $M \subseteq V$ . Dann heißt

$$LH(M) := \left\{ x : x \in V, \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, a_1, \dots, a_n \in M \text{ mit } x = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \right\}$$

die *lineare Hülle* von  $M$ . Die lineare Hülle von  $M$  ist also die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus  $M$ .

### Beispiele 1.9

(i)  $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ , dann ist

$$LH(M) = \left\{ x : x \in \mathbb{V}^3, x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

(ii) Seien  $p_0, p_1$  und  $p_2$  die drei Polynome, definiert durch

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1 && (x \in \mathbb{R}) \\ p_1(x) &:= x && (x \in \mathbb{R}) \\ p_2(x) &:= x^2 && (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

dann ist  $LH(\{p_0, p_1, p_2\}) = \mathbb{P}_2$ .

Der nächste Satz sagt aus, daß es sich bei den eingeführten Größen tatsächlich um Vektorräume handelt:

**Satz 1.3**

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ .

- (i) Sei  $U \subseteq V$ , dann gilt:  
 $U$  ist ein Teilraum von  $V \iff$   
 $U$  ist mit der Addition und Skalarmultiplikation von  $V$  ein Vektorraum.
- (ii) Sei  $M \subseteq V$ , dann ist  $LH(M)$  ein Teilraum von  $V$ , genannt *der von  $M$  aufgespannte Teilraum*.
- (iii) Sei  $U \subseteq V$ , dann gilt:  
 $U$  ist ein Teilraum von  $V \iff LH(U) = U$
- (iv) Sind  $n := \dim V$ ,  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$ ,  
 so ist  $LH(\{b_1, \dots, b_n\}) = V$ .

*Beweisidee*

Beim Beweis von (i) muß gezeigt werden, daß die auf  $U$  restringierten (= eingeschränkten) Operationen „+“ und „·“ die Vektorraumgesetze erfüllen. Zum Nachweis der übrigen Behauptungen kann dann (i) benutzt werden, um zu zeigen, daß die Bildung der entsprechenden Linearkombination nicht aus der jeweiligen Menge hinausführt. Behauptung (iv) sagt im wesentlichen aus, daß eine Basis ein Erzeugendensystem von  $V$  ist.

**Beispiele 1.10**

- (i)  $\{\theta\}$  und  $V$  selbst sind extreme Teilräume von  $V$ , die sog. *trivialen Teilräume*.
- (ii) Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  und

$$U_k := \{x : x \in \mathbb{V}^n, x = (x_1, \dots, x_n)^T, x_k = 0\}.$$

Dann ist  $U_k$  ein Teilraum von  $\mathbb{V}^n$ .

- (iii) Sei  $\mathbb{M}_{2 \times 2}$  der Vektorraum der (reellen oder komplexen)  $(2 \times 2)$ -Matrizen und  $N_k$  die Menge derjenigen Matrizen aus  $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ , die an der  $k$ -ten Stelle eine 0 haben, ( $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  geeignet). Dann ist  $N_k$  ein Teilraum von  $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ . Im „Grunde“, also von der mathematischen Struktur her, gibt es keinen Unterschied zwischen  $\mathbb{V}^4$  und  $\mathbb{M}_{2 \times 2}$  sowie zwischen  $U_k$  aus (ii) und  $N_k$ .
- (iv) Ist  $m < n$ , so ist  $\mathbb{P}_m$  ein echter Teilraum von  $\mathbb{P}_n$  (Polynome vom Grad  $\leq n$ ).

In der Theorie der linearen Gleichungssysteme begegnet man dem Begriff eines *affinen Teilraumes* oder einer *linearen Mannigfaltigkeit*.

**Definition 1.8**

Seien  $V$  ein Vektorraum,  $W$  ein Teilraum von  $V$ ,  $x_0 \in V$ . Die Menge

$$A := x_0 + W := \{x_0 + y : y \in W\}$$

heißt *affiner Teilraum* von  $V$ . Man erhält also einen affinen Teilraum  $A$  von  $V$  dadurch, daß man den Teilraum  $W$  um den Vektor  $x_0$  „verschiebt“, s. Abb. 1.11.

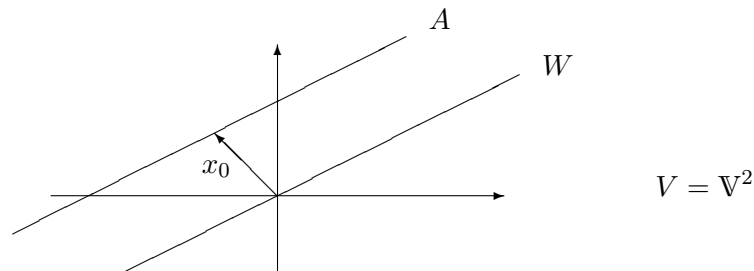


Abbildung 1.11: Affiner Teilraum

Zumindest anschaulich klar ist der folgende Satz:

**Satz 1.4**

Seien  $A_1 := x_1 + W_1$ ,  $A_2 := x_2 + W_2$  zwei affine Teilräume von  $V$ . Dann gilt (Abb. 1.12):

$$A_1 = A_2 \iff [ W_1 = W_2 \wedge (x_2 - x_1) \in W_1 ]$$

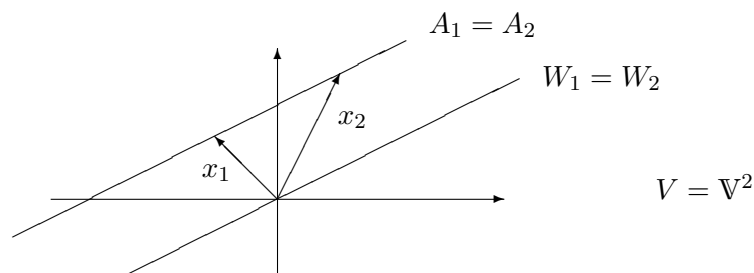


Abbildung 1.12: Affiner Teilraum

## 1.4 Euklidische und Unitäre Räume

### 1.4.1 Einführung

Wenn man geometrische oder physikalische Probleme studieren will, bei denen auch Längen oder Winkel eine Rolle spielen, dann reichen die Vektorraumdaten

allein für eine Beschreibung nicht mehr aus, man muß den Vektorraum mit einer „Zusatzstruktur“ versehen. Diese Zusatzstruktur ist das *Skalarprodukt*. Hiermit ist jedoch nicht die skalare Multiplikation

$$m : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

gemeint, sondern eine neu zu definierende Abbildung

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

Mit Hilfe dieser Zusatzstruktur wird es dann beispielsweise möglich sein, die anschauliche Bedeutung von „aufeinander senkrecht stehen“ zu mathematisieren. Genauer:

Der in den geometrisch zugänglichen Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  bekannte Begriff des aufeinander senkrecht Stehens läßt sich so mit Hilfe des Skalarproduktes ausdrücken, daß er auf beliebige mit einem Skalarprodukt versehene Vektorräume übertragbar ist.

### Beispiel 1.11

Man betrachte ein homogenes Kraftfeld und verschiebe einen Körper entlang eines geradlinigen Weges gegen das Kraftfeld, etwa: Hochheben eines Gegenstandes der Masse  $m$  nahe der Erdoberfläche, wenn das Gravitationsfeld in dem Bereich der Erdoberfläche hier als homogen angesehen wird, s. Abb. 1.13.

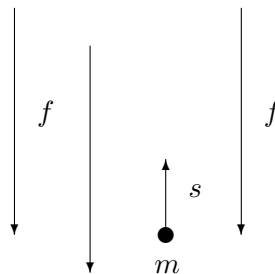


Abbildung 1.13: Verschieben eines Körpers gegen ein Kraftfeld, parallel zu den Kraftlinien

Dabei macht man die folgenden Feststellungen:

Die zu leistende Arbeit  $W$  ist

- linear in der Größe des Kraftfeldes:  $W \sim \text{Größe}(f)$  und
- linear in der Länge des Weges der Verschiebung:  $W \sim \text{Länge}(s)$ .

Eine zu zwei Größen proportionale Größe ist auch proportional zum Produkt beider:

$$W \sim \text{Größe}(f) \cdot \text{Länge}(s),$$

also

$$W = \lambda \cdot \text{Größe}(f) \cdot \text{Länge}(s)$$

mit einer geeigneten Zahl  $\lambda$ . Wird der in der entstehenden Gleichung auftretende Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  zu Eins normiert, so kann man dafür schreiben:

$$W = \|f\| \cdot \|s\|$$

mit der Abkürzung  $\|\cdot\|$  für die geometrische Länge der Vektoren  $f, s \in \mathbb{V}^3$ .

Wird der Körper nicht parallel zu den Kraftlinien verschoben, sondern in einem Winkel dazu, so spielt nur die Komponente des Kraftfeldes in Richtung der Verschiebung eine Rolle, s. Abb. 1.14.

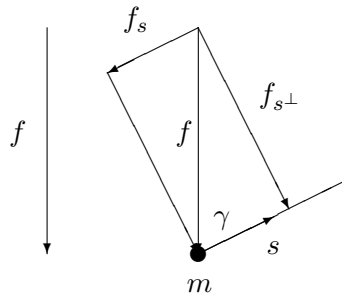


Abbildung 1.14: Verschieben eines Körpers gegen ein Kraftfeld, nicht parallel zu den Kraftlinien

$$W = \|f_s\| \cdot \|s\| = \|f\| \cdot \|s\| \cdot \cos \gamma.$$

### Bemerkung

In dem Beispiel aus Abb. 1.14 ist  $\gamma$  der Winkel zwischen  $s$  und  $-f$ . Somit wird tatsächlich die gegen das Kraftfeld zu verrichtende Arbeit berechnet. Benutzt man stattdessen den Winkel

$$\delta := \pi - \gamma,$$

also den Winkel zwischen  $f$  und  $s$ , so berechnet man die Arbeit, welche das Kraftfeld für die Verschiebung des Körpers leistet; diese ist hier negativ.

Zur Beschreibung dieses physikalischen Sachverhaltes wird jetzt eine neue Struktur in den Vektorraum eingeführt, das *Skalarprodukt* oder *innere Produkt* zweier Vektoren. Dieses Skalarprodukt erfüllt die in dem Beispiel aufgetretene Linearitätsbeziehung und gestattet in den „geometrischen“ Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  die oben angesprochene Interpretation der Kraftkomponenten.

## 1.4.2 Skalarprodukt und Norm

### Definition 1.9

- (i) Sei  $V$  ein *reeller* Vektorraum.

Ein *Skalarprodukt* in  $V$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} s : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle a, b \rangle &\longmapsto s(a, b) =: (a, b) \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1)  $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
- (2)  $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
- (3)  $(a, b) = (b, a)$
- (4)  $(a, a) > 0 \quad (a \neq \theta)$

jeweils für alle  $a, b, c \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (ii) Sei  $V$  ein *komplexer* Vektorraum.

Ein *Skalarprodukt* in  $V$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} s : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle a, b \rangle &\longmapsto s(a, b) =: (a, b) \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1)  $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
- (2)  $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
- (3)  $(a, b) = \overline{(b, a)}$
- (4)  $(a, a) > 0 \quad (a \neq \theta)$

jeweils für alle  $a, b, c \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

### Bemerkung

- (i) In beiden Fällen wurde nicht *das* Skalarprodukt definiert, sondern *ein* Skalarprodukt. In einem Vektorraum gibt es nämlich nicht *das* Skalarprodukt, sondern jede Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften heißt ein Skalarprodukt.

(ii) Während im reellen Fall ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) gilt:

$$(a, \lambda b) \stackrel{(3)}{=} (\lambda b, a) \stackrel{(2)}{=} \lambda(b, a) \stackrel{(3)}{=} \lambda(a, b),$$

so ist das Analogon im komplexen Fall ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ):

$$(a, \lambda b) \stackrel{(3)}{=} \overline{(\lambda b, a)} \stackrel{(2)}{=} \overline{\lambda(b, a)} = \bar{\lambda} \overline{(b, a)} \stackrel{(3)}{=} \bar{\lambda}(a, b).$$

(iii) Warum unterscheidet man reelle und komplexe Vektorräume? Die Antwort liegt im Gesetz (4): man will erreichen, daß in beiden Fällen das Skalarprodukt „eines Elementes mit sich“ eine reelle Zahl ist.

(iv) Die Konvention bei komplexen Vektorräumen ist nicht einheitlich. Manchmal wird statt

$$(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$$

die Bedingung

$$(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$$

vereinbart. Aufgrund von (ii)(3) folgt dann

$$(\lambda a, b) = \bar{\lambda}(a, b) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

(v) **Aufgabe**

Anhand der Bedingungen (i) (4) bzw. (ii) (4) der Definition eines Skalarproduktes zeige man, daß gilt:

$$(a, a) = 0 \quad \implies \quad a = \theta \quad (a \in V).$$

### Beispiele 1.12

(i) Skalarprodukt im Vektorraum  $\mathbb{V}^n$ :

$$\text{Für } a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

werde definiert:

$$(a, b) := \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k.$$

**Beispiel**

$$V := \mathbb{V}^4, \quad a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad (a, b) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) = -6.$$

### Aufgabe

Man beweise, daß es sich bei dieser Abbildung um ein reelles Skalarprodukt handelt, daß also die vier ein Skalarprodukt definierenden Eigenschaften gelten. Dieses Skalarprodukt heißt das *übliche* oder *Standard-Skalarprodukt* im Raum  $\mathbb{V}^n$ .

- (ii) Betrachtet man das komplexe Analogon zum Raum  $\mathbb{V}^n$ , also die Menge aller Spalten mit  $n$  Zeilen und komplexen Komponenten, so müßte man das Analogon zum Standard-Skalarprodukt durch

$$(a, b) := \sum_{k=1}^n a_k \cdot \overline{b_k}$$

definieren.

- (iii) Dieses Beispiel ist nur mit Vorkenntnissen aus der Analysis zu verstehen. Im Vektorraum  $\mathbb{P}_n$  der reellen oder komplexen Polynome definiere man

$$(p, q) := \int_{-1}^{+1} p(x) \cdot \overline{q(x)} dx \quad (p, q \in \mathbb{P}_n).$$

Mit den (vielleicht aus der Schule noch) bekannten Regeln zur Behandlung bestimmter Integrale kann man nachweisen, daß dadurch auf  $\mathbb{P}_n$  ein Skalarprodukt erklärt ist.

### Aufgabe

Kenntnisse der Integrationsregeln vorausgesetzt, ist der Nachweis von drei der vier Skalarprodukt-Regeln sehr einfach, nur beim Nachweis einer Regel muß man ein etwas dickeres Brett bohren. Bei welcher Regel und worin genau liegt das Problem?

### Aufgabe

Man zeige, daß ein Skalarprodukt den Wert Null hat, wenn einer der beiden Vektoren  $a$  oder  $b$  der Nullvektor ist.

Vektorräume mit Skalarprodukt haben mehr „Struktur“ als solche ohne, daher lassen sich für sie auch mehr Aussagen formulieren. Daher bekommen diese Vektorräume einen Namen:



**Definition 1.10**

- (i) Ein Paar  $\langle V, (\cdot, \cdot) \rangle$ , bestehend aus einem reellen Vektorraum mit einer endlichen Basis und einem (reellen) Skalarprodukt heißt ein *Euklidischer Raum*.
- (ii) Ein Paar  $\langle V, (\cdot, \cdot) \rangle$ , bestehend aus einem komplexen Vektorraum mit einer endlichen Basis und einem (komplexen) Skalarprodukt heißt ein *unitärer Raum*.

**Bemerkung**

Ein unendlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Prä-Hilbert-Raum*, meistens *Prähilbertraum* geschrieben. Im Moment beschäftigen wir uns nur mit endlichdimensionalen Vektorräumen, später treten jedoch auch Prähilberträume auf (Fourierreihen).

**Definition 1.11**

Sei  $\langle V, (\cdot, \cdot) \rangle$  ein Euklidischer oder ein unitärer Raum, sei  $a \in V$ . Dann versteht man unter der *Norm* von  $a$  die nichtnegative reelle Zahl

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)}.$$

**Beispiel 1.13**

Im Vektorraum  $\mathbb{V}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  geeignet), versehen mit dem Standardskalarprodukt, erhält man für  $a \in \mathbb{V}^n$ :

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Für  $n \in \{2, 3\}$  ist das gerade der Abstand des Punktes  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  vom Ursprung, somit die Länge eines (und damit eines jeden) Repräsentanten von  $a$ , s. Abb. 1.15.

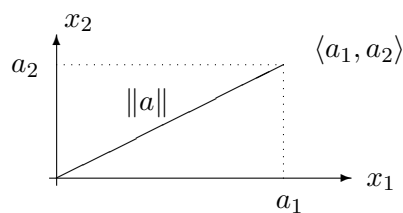


Abbildung 1.15: Abstand zweier Punkte im  $\mathbb{V}^2$  = Länge eines Vektors

### 1.4.3 Geometrische Interpretation des Standard-Skalarproduktes in den Räumen $\mathbb{V}^2$ und $\mathbb{V}^3$

Ich verwende die geometrische Interpretation der Räume  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  als Raum der Translationen der Ebene  $\mathbb{R}^2$  bzw. des Punktraumes  $\mathbb{R}^3$  mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem. In diesen Räumen läßt sich das Standardskalarprodukt geometrisch interpretieren.

Dazu werden zwei analoge Betrachtungen durchgeführt: einmal abstrakt, wo ausschließlich die definierenden Eigenschaften eines Skalarproduktes benutzt werden (Abb. 1.16), das andere Mal konkret auf unsere Anschauungsräume  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  bezogen (Abb. 1.17).

- (1) Seien  $a, b \in \mathbb{V}^2$  (analog im  $\mathbb{V}^3$ ) und  $\gamma$  derjenige geometrische Winkel zwischen  $0^0$  und  $180^0$ , den Repräsentanten von  $a$  und  $b$  bilden, deren Pfeilanzfang am gleichen Punkt ist. Da Repräsentanten einer Translation parallel sind, ist dieser Winkel  $\gamma$  von der Wahl der Repräsentanten unabhängig.

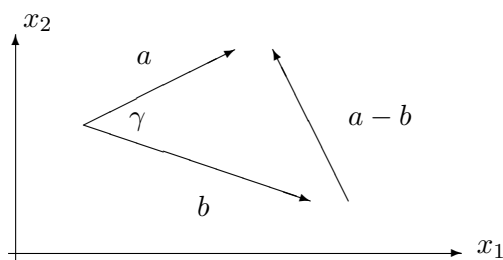


Abbildung 1.16: Winkel beim Skalarprodukt

Sei  $c := a - b$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \|c\|^2 &= (c, c) = (a - b, a - b) \\
 &= (a, a) - (a, b) - (b, a) + (b, b) \\
 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2(a, b).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

- (2) (Kosinus-Satz der ebenen Geometrie)

Seien  $a, b, c \in \mathbb{V}^2$  und  $h, p, q \in \mathbb{R}$ . Man betrachte das Dreieck mit den Seitenlängen  $\|a\|$ ,  $\|b\|$ , und  $\|c\|$ .

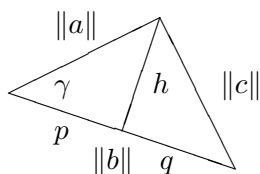


Abbildung 1.17: Kosinussatz der ebenen Geometrie

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 1.17 erhält man

$$\begin{aligned} p &= \|a\| \cdot \cos \gamma \\ \|a\|^2 &= h^2 + p^2 \\ \|c\|^2 &= h^2 + q^2 \\ \|b\| &= p + q \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|c\|^2 - \|a\|^2 &= q^2 - p^2 = (q+p)(q-p) \\ &= \|b\| \cdot (\|b\| - 2p) \\ &= \|b\|^2 - 2\|b\|\|a\| \cos \gamma \\ \longrightarrow \|c\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|b\|\|a\| \cos \gamma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aus (1.1) und (1.2) zusammen folgt für  $a, b \in \mathbb{V}^2$ :

$$(a, b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \gamma. \tag{1.3}$$

Analoges gilt für  $a, b \in \mathbb{V}^3$ . In  $\mathbb{V}^n$  mit  $n > 3$  existiert kein geometrischer Winkel mehr!

### Bemerkung

- (i) Wo in der obigen Herleitung wird vorausgesetzt, daß in den Räumen  $\mathbb{V}^2$  bzw.  $\mathbb{V}^3$  das *Standard*-Skalarprodukt benutzt wird, also die Gestalt

$$(a, b) = \sum_{k=1}^{2,3} a_k b_k ?$$

- (ii) Man erinnere sich jetzt an das Problem des Einleitungsbeispiels, das darin bestand, zur Berechnung der physikalischen Arbeit einen neuen Begriff bereitzustellen. Die Arbeit  $W$ , die erforderlich ist, eine Probemasse  $m = 1$  in einem homogenen Kraftfeld  $f$  eine Weglänge  $s$  zu transportieren, ist gegeben durch

$$W = \|f\| \cdot \|s\| \cdot \cos \gamma.$$

Ersichtlich läßt sich diese Arbeit nun über das Skalarprodukt definieren:

$$W = (f, s).$$

- (iii) Diese *anschauliche* Interpretation von Länge und Winkel funktioniert nur in den Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$ . Nichtsdestotrotz läßt sich das (bzw. ein!) Skalarprodukt verwenden, um in abstrakten Funktionenräumen analoge Begriffsbildungen einzuführen und mit ihnen zu rechnen. Diese sind dann der obigen geometrischen Interpretation allerdings nicht mehr direkt zugänglich.

**Beispiel 1.14** Seien

$$a := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dann sind

$$(a, b) = 4 \cdot (-5) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -14,$$

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{20},$$

$$\|b\| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{35}.$$

Daraus erhält man den von  $a$  und  $b$  eingeschlossenen Winkel  $\gamma$  zu

$$\cos \gamma = \frac{(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|} = \frac{-14}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{35}} = -\frac{\sqrt{7}}{5},$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right) = 2,1284 \quad , \quad \gamma^0 = 122^0.$$

#### 1.4.4 Schwarz'sche Ungleichung und Dreiecksungleichung

Die beiden folgenden Ungleichungen sind fundamental für das Abschätzen von Skalarprodukten.

**Satz 1.5** (Schwarz'sche Ungleichung)

Seien  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder über  $\mathbb{C}$  und  $(\cdot, \cdot)$  ein Skalarprodukt in  $V$ . Sei  $\|\cdot\|$  die aus dem Skalarprodukt induzierte Norm, also

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)} \quad (a \in V).$$

Dann gilt:

$$|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad (a, b \in V).$$

**Folgerung**

Sind  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n$ , so lautet die Schwarz'sche

Ungleichung ausgeschrieben:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}.$$

Im Falle  $V \in \{\mathbb{V}^2, \mathbb{V}^3\}$  bedeutet die Schwarz'sche Ungleichung wegen

$$(a, b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \gamma$$

die bekannte Aussage

$$|\cos \gamma| \leq 1.$$

### Aufgabe

Mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung läßt sich zeigen, daß es sich bei der Menge

$$l^2 := \left\{ a : a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

um einen Vektorraum handelt, daß also mit  $a, b \in l^2$  auch  $(a + b) \in l^2$  und  $(\lambda a) \in l^2$  gilt.

### Lösung

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2 &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n |a_k b_k| + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \\ &\leq \|a\|^2 + 2\|a\| \|b\| + \|b\|^2 \\ &= (\|a\| + \|b\|)^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist unabhängig von  $n$ , damit also auch die linke. Somit gilt:

$$\|a + b\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^2 < \infty,$$

also  $(a + b) \in l^2$ .

### Satz 1.6 (Dreiecksungleichung)

Sei  $V$  ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt für die daraus induzierte Norm die Ungleichung

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (a, b \in V).$$

*Beweis*

Seien  $a, b \in V$ . Dann gilt mit der Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \|a + b\|^2 &= (a + b, a + b) \\
 &= (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) \\
 &= \|a\|^2 + 2\Re(a, b) + \|b\|^2 \\
 &\leq \|a\|^2 + 2|(a, b)| + \|b\|^2 \\
 &\leq \|a\|^2 + 2\|a\| \|b\| + \|b\|^2 \\
 &= (\|a\| + \|b\|)^2
 \end{aligned}$$

Radizieren der Ungleichung liefert die Behauptung.

### Bemerkung

In  $\mathbb{V}^2$  oder  $\mathbb{V}^3$  hat die Dreiecksungleichung die anschauliche Interpretation, von der ihr Name stammt, nämlich daß die Summe der Längen zweier Seiten eines Dreiecks größer ist als die Länge der dritten Seite, s. Abb. 1.18.

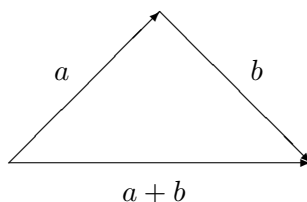


Abbildung 1.18: Dreiecksungleichung

### 1.4.5 Normierte Räume

Die in Vektorräumen mit Skalarprodukt definierbare Abbildung

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

hat die Eigenschaften einer sog. *Norm* (s. die nachfolgende Definition). Es gibt nun auch Vektorräume, in denen zwar eine Norm (eine Art „Länge“) erklärt ist, welche jedoch nicht über ein Skalarprodukt definiert werden kann.

#### Definition 1.12

(i) Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder über  $\mathbb{C}$ . Eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 a &\longmapsto \|a\|
 \end{aligned}$$

heißt eine *Norm* auf  $V$ , wenn für alle  $a \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  folgende Bedingungen gelten:

- (1)  $\|a\| \geq 0$ ,  $\|a\| = 0 \iff a = \theta$
- (2)  $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
- (3)  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ .
- (ii) Sind  $V$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Norm auf  $V$ , so heißt das Paar  $\langle V, \|\cdot\| \rangle$  (oder wieder nur  $V$  statt  $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ ) ein *normierter Raum*.

### Beispiele 1.15

- (i) Faßt man  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  selbst als Vektorräume auf, so ist der absolute Betrag eine Norm.
- (ii) Ist  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt,  $\|\cdot\| \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  definiert durch

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)} \quad (a \in V),$$

so ist  $V$  ein normierter Raum, insbesondere also auch  $\mathbb{V}^n$ . Eine andere Norm auf  $\mathbb{V}^n$  ist beispielsweise definiert durch

$$\|a\|_\infty := \max(\{|a_1|, \dots, |a_n|\}) \quad (a \in \mathbb{V}^n).$$

- (iii) Auf  $\mathbb{P}_n$  sind durch

$$\|p\|_2 := \left( \int_{-1}^{+1} |p(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (p \in \mathbb{P}_n)$$

und durch

$$\|p\|_\infty := \sup_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \quad (p \in \mathbb{P}_n)$$

zwei verschiedene Normen definiert.

### Aufgabe

- (i) Man zeige, daß es sich bei den Abbildungen von (ii) und (iii) jeweils um Normen handelt.
- (ii) Sei  $V$  ein Vektorraum und  $a \in V, a \neq \theta$ . Mit welcher Zahl  $\lambda$  muß man  $a$  multiplizieren, damit der entstehende Vektor  $b := \lambda a$  die Norm 1 hat?
- Hinweis: Definition 1.12 (i) (2).

### 1.4.6 Orthogonalität

Zur Einführung wird der Euklidische Raum  $V = \mathbb{V}^3$  und das auf  $V$  definierte Standard-Skalarprodukt betrachtet.

1. Sind  $a = \theta \vee b = \theta$ , so gilt für jeden Vektorraum und jedes Skalarprodukt

$$(a, b) \underset{(a=\theta)}{=} (0 \cdot a, b) = 0 \cdot (a, b) = 0.$$

2. Seien

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann sind  $a, b \neq \theta$ , trotzdem gilt:  $(a, b) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = 0$ .

Aufgrund der in  $\mathbb{V}^3$  gültigen Beziehung

$$(a, b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \gamma$$

gilt dann wegen  $\|a\| \neq 0, \|b\| \neq 0$ :

$$\cos \gamma = 0,$$

also  $\gamma = \pi/2$ .

Damit gilt  $(a, b) = 0$  genau dann, wenn die Repräsentanten beider Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Man beachte den Unterschied zur Nullteilerfreiheit eines Produktes in einem Zahlkörper  $\mathbb{K}$ . Dort gilt:

$$a \cdot b = 0 \quad \implies \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0 \quad (a, b \in \mathbb{K}).$$

Durch die letzte Beziehung ist es gelungen, den geometrischen Begriff des „aufeinander-senkrecht-Stehens“ allein mit Hilfe eines Skalarproduktes zu definieren, also eine Definition zu geben, welche das Konzept des Winkels nicht mehr benutzt. So etwas kann man dann auf Vektorräume verallgemeinern, in welchen zwar ein Skalarprodukt definiert ist, in denen der geometrische Begriff „Winkel“ jedoch keinen Sinn mehr ergibt.

#### Definition 1.13

Sei  $V$  ein Euklidischer oder ein unitärer Raum.

- (i) Seien  $a, b \in V$ .  $a$  und  $b$  heißen *orthogonal* (bzgl. des gegebenen Skalarproduktes), geschrieben  $a \perp b$ , wenn gilt:  $(a, b) = 0$ .
- (ii) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_i \in V$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ .



- (a)  $\{a_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$  heißt ein *Orthogonalsystem*, abgekürzt: *OGS*, falls gilt:

$$\begin{aligned} a_i &\neq \theta && (i \in \{1, \dots, n\}) \\ (a_i, a_j) &= 0 && (i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j). \end{aligned}$$

- (b)  $\{a_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$  heißt ein *Orthonormalsystem*, abgekürzt: *ONS*, falls gilt:<sup>3</sup>

$$(a_i, a_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

- (iii) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$ . Wenn  $B$  ein ONS ist, so heißt  $B$  eine *Orthonormalbasis*, abgekürzt: *ONB*.

### Beispiele 1.16

- (i) In  $\mathbb{V}^3$  bilden die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine ONB, wie man sofort nachrechnet.

- (ii) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und Elemente  $e_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) aus  $\mathbb{V}^n$  (Menge der Translationen des  $\mathbb{R}^n$ , also Spaltenvektoren) definiert durch

$$e_j := e_j^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (j\text{-te Zeile}).$$

Dann ist  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ein ONS in  $\mathbb{V}^n$ , denn es ist

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

- (iii) Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . In  $\mathcal{C}^0([a, b])$  mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]))$$

<sup>3</sup>Bei dem Ausdruck  $\delta_{ij}$  handelt es sich um das sog. *Kronecker-Symbol*.

ist die Funktionenmenge

$$\left\{ u_k : u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \cos kx \quad \text{oder} \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cdot \sin kx, \right. \\ \left. x \in [a, b], k \in \mathbb{N} \text{ geeignet} \right\}$$

ein ONS, wie später im Analysis-Teil gezeigt werden wird.

### Aufgabe

Man zeige, daß ein ONS stets auch ein OGS ist. Wann gilt die Umkehrung?

### Bemerkung

- (i) Bis auf Teil (iii) von Definition 1.13 wird kein Gebrauch davon gemacht, daß  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. (i) und (ii) dieser Definition gelten also auch in Prähilberträumen.
- (ii) Im nächsten Satz wird gezeigt, daß die Elemente eines OGS linear unabhängig sind. Falls  $n := \dim V$ , so ist ein OGS also genau dann eine Basis, wenn es  $n$  Elemente enthält. Umgekehrt kann im Falle  $n := \dim V$  ein OGS natürlich höchstens  $n$  Elemente besitzen.

### Satz 1.7

Seien  $V$  ein Prähilbertraum,  $n \in \mathbb{N}$  sowie

$$S := \{a_i : a_i \in V, i \in \{1, \dots, n\} \text{ geeignet}\}$$

ein OGS in  $V$ .

### Beh.

Sei  $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ . Dann sind je  $k$  verschiedene Elemente aus  $S$  linear unabhängig.

### Beweis

Seien  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$ , und es gelte  $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = \theta$ . Dann ist zu zeigen, daß daraus folgt, daß alle Koeffizienten gleich Null sind. Sei nun  $a_k$

einer der Koeffizienten, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &= (\theta, a_k) \\
 &= \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j, a_k \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \underbrace{(a_j, a_k)}_{\delta_{jk} \cdot \|a_k\|^2} \\
 &= 0 + \dots + \lambda_k \cdot \underbrace{(a_k, a_k)}_{\|a_k\|^2} + \dots + 0 \\
 &= \lambda_k \cdot \|a_k\|^2.
 \end{aligned}$$

Kein Vektor  $a_k$  des OGS  $S$  kann der Nullvektor sein (warum nicht?), also ist  $\|a_k\| \neq 0$  für jedes  $k$ , also muß  $\lambda_k = 0$  sein. Diese Betrachtung läßt sich nacheinander für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  einzeln durchführen, woraus sich letztendlich ergibt, daß die  $a_k$  linear unabhängig sind.

### Folgerung

In einem Vektorraum der Dimension  $n$  hat jedes Orthonormalsystem höchstens  $n$  Elemente.

### 1.4.7 Komponentendarstellung eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis

Die Komponenten eines Vektors bzgl. einer ONB besitzen eine besonders einfache Darstellung, welche sich in unseren „Anschauungsräumen“  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  auch geometrisch interpretieren läßt.

#### Satz 1.8 (Spektralsatz; allereinfachste Form)

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein Euklidischer oder unitärer Raum der Dimension  $n$ . Sei  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB in  $V$ .

**Beh.** 
$$x = \sum_{k=1}^n (x, b_k) b_k \quad (x \in V)$$

In Worten: Die Komponenten eines Vektors  $x$  bzgl. der ONB  $B$  sind gerade die Skalarprodukte von  $x$  mit den Basiselementen  $b_k$ .

*Beweis*

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \quad (x \in V),$$

also folgt für  $k \in \{1, \dots, n\}$  durch skalare Multiplikation mit  $b_k$ :

$$(x, b_k) = \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j, b_k \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot (b_j, b_k) = \lambda_k.$$

**Bemerkung**

Ist  $V \in \{\mathbb{V}^2, \mathbb{V}^3\}$ , so stellen die Komponenten  $\lambda_k = (x, b_k)$  gerade die senkrechten Projektionen von  $x$  auf die Basisvektoren  $b_k$  dar, s. Abb. 1.19.

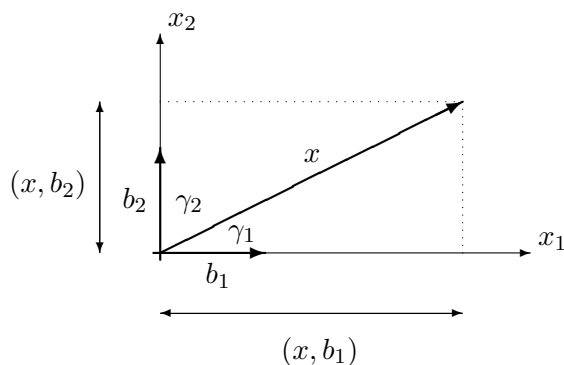


Abbildung 1.19: Komponentendarstellung eines Vektors bzgl. einer ONB

$$(x, b_k) = \|x\| \cdot \underbrace{\|b_k\|}_1 \cdot \cos \gamma_k = \|x\| \cdot \cos \gamma_k \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

**Beispiel 1.17**

$$B := \{b_1, b_2, b_3\} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Orthonormalbasis im Raum  $\mathbb{V}^3$ . Der Vektor

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \cdot b_j$$

besitzt bzgl.  $B$  die Komponenten

$$\lambda_1 = (x, b_1) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{0}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = (x, b_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\lambda_3 = (x, b_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} = 0$$

**Definition 1.14**

Die Kosinus der Winkel, die ein Vektor  $x \in \mathbb{V}^2$  oder  $x \in \mathbb{V}^3$  mit den Basisvektoren  $b_1, b_2, b_3$  einschließt, heißen die *Richtungskosinus* von  $x$ .

Man erhält somit die Darstellung (für  $n = 3$ ):

$$x = \sum_{k=1}^3 \lambda_k b_k = \sum_{k=1}^3 (x, b_k) b_k = \sum_{k=1}^3 \|x\| \cdot \underbrace{\|b_k\|}_1 \cdot \cos \gamma_k \cdot b_k = \|x\| \cdot \sum_{k=1}^3 \underbrace{\cos \gamma_k}_{\text{Zahl}} \underbrace{b_k}_{\text{Vektor}}.$$

Weiterhin gilt:

$$\cos \gamma_k = \frac{(x, b_k)}{\|x\| \cdot \|b_k\|} = \frac{(x, b_k)}{\|x\|},$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \cos^2 \gamma_k &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{k=1}^3 (x, b_k)^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i,j=1}^3 (x, b_i)(x, b_j) \underbrace{(b_i, b_j)}_{\delta_{ij}} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \left( \sum_{i=1}^3 (x, b_i) b_i, \sum_{j=1}^3 (x, b_j) b_j \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} (x, x) = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Anschaulich ist klar, daß die Beziehung

$$\frac{1}{\|x\|^2} \sum_{k=1}^3 (x, b_k)^2 = 1$$

gilt, also

$$\sum_{k=1}^3 (x, b_k)^2 = \|x\|^2,$$

handelt es sich hier doch gerade um den Satz des Pythagoras.

Der Beweis des letzten Satzes wurde aber in einer Form geführt, daß er auf beliebige Euklidische Räume übertragbar ist:

- (i) Für jedes ONS  $\{b_1, \dots, b_m\}$  und jeden Vektor  $x \in V$  gilt die *Bessel'sche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^m (x, b_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

- (ii) Das ONS ist genau dann *vollständig*, also eine ONB, wenn für jedes  $x \in V$  die *Parseval'sche Gleichung* gilt:

$$\sum_{k=1}^m (x, b_k)^2 = \|x\|^2.$$

Die Parseval'sche Gleichung ist somit eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

### Bemerkung

Die Entwicklungskoeffizienten  $\lambda_k = (x, b_k)$  eines Vektors  $x$  bzgl. eines Orthonormalsystems heißen auch seine *Fourier-Koeffizienten*. Eine *Fourier-Reihe* ist die Entwicklung einer auf dem reellen Intervall  $[a, b]$  periodischen Funktion  $f$  nach dem in Beispiel 1.16 (iii) angegebenen unendlichen ONS.

Die Fourier-Koeffizienten eines Vektors  $x$  besitzen dabei die folgende Minimalitätseigenschaft:

Gegeben seien ein reeller Vektorraum  $V$ , ein Vektor  $x \in V$  und ein ONS  $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$ . Wie müssen die Koeffizienten  $\lambda_k$  in der Entwicklung  $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k b_k$  beschaffen sein, damit der Ausdruck

$$\left\| x - \sum_{k=1}^m \lambda_k b_k \right\|$$

minimal wird?

Zur Beantwortung dieser Frage läßt sich auch das Quadrat der Norm untersuchen (warum?). Man erhält mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^m \lambda_k b_k \right\|^2 &= \left( x - \sum_{k=1}^m \lambda_k b_k, x - \sum_{k=1}^m \lambda_k b_k \right) \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot (x, b_k) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^m [\lambda_k - (x, b_k)]^2 - \sum_{k=1}^m (x, b_k)^2 \end{aligned}$$

Hieraus kann man sofort erkennen, daß die rechte Seite dann am kleinsten wird, wenn  $\lambda_k = (x, b_k)$  für alle  $k \in \{1, \dots, m\}$  ist.

## 1.5 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Lineare Unabhängigkeit und - Abhängigkeit von Vektoren
- Basis
- Dimension
- Standard-Skalarprodukt in den Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$
- Zusammenhang mit Winkeln in den Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$
- Euklidische Norm in den Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$
- Orthogonalität in den Räumen  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$
- Komponentendarstellung eines Vektors bzgl. einer Orthonormalbasis

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Idee des Begriffes eines Vektorraumes
- Andere Beispiele von Vektorräumen
- Teilraum eines Vektorraumes
- Dreiecksungleichung

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Funktionenräume als Beispiele von Vektorräumen
- Skalarprodukt und Norm in Funktionenräumen
- Schwarz'sche Ungleichung
- Normierte Räume

## Kapitel 2

# Geometrie der Ebene und des Raumes

Neben den Punkten bilden die Geraden und Ebenen die einfachsten und wichtigsten Objekte in den Punkträumen  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ . Zu ihrer Beschreibung werden die im letzten Kapitel eingeführten Translationen benutzt, um für sie eine exakte mathematische Definition anzugeben, mit welcher sich auch rechnen läßt.

Die hier eingeführten Techniken spielen bei der Darstellung von Objekten auf dem Bildschirm eine Rolle, mannigfache Anwendungen treten in der Computergraphik auf, etwa bei Programmentwicklungen von CAD-Systemen.

Im folgenden wird *versucht*, die folgende Schreibweise einzuhalten:

- Große lateinische Buchstaben:  $X, Y, P, Q, \dots$  für Punkte des Ortsraumes  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ .
- Kleine lateinische Buchstaben:  $a, b, u, v, \dots$  für Translationen des Ortsraumes, also für Vektoren aus  $\mathbb{V}^2$  oder  $\mathbb{V}^3$ .
- Der Zusammenhang zwischen Punkten des Ortsraumes  $\mathbb{R}^k$  und Vektoren (Translationen) aus  $\mathbb{V}^k$  ( $k \in \{2, 3\}$ ) wird mit Hilfe der Ortsvektoren hergestellt:

$$x = \vec{OX}, \quad \text{etc.}$$

- Kleine griechische Buchstaben:  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  für reelle Zahlenparameter.

Manchmal treten jedoch auch indizierte Größen auf, die eine andere Bedeutung haben; welche, das geht aus dem jeweiligen Kontext hervor:

$$X = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3, \dots$$



## 2.1 Parameterdarstellung von Geraden

Seien  $P := \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$  und  $p := \vec{OP} := \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix}$ . Der Vektor  $p$  heißt *Ortsvektor* von  $P$ . Dieser Vektor läßt sich als Translation interpretieren:

$$\vec{OP}(O) = P.$$

### Definition 2.1

- (i) Seien  $P \in \mathbb{R}^3$  und  $p := \vec{OP}$ , also  $p$  der Ortsvektor von  $P$ . Sei  $v \in \mathbb{V}^3, v \neq \theta$ . Die Punktmenge ( $x := \vec{OX}$ )

$$g := \{X : X \in \mathbb{R}^3, x = p + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}$$

ist eine Gerade im Raum. Man nennt diese Darstellung *Parameterdarstellung* der Geraden,  $v$  heißt ihr *Richtungsvektor*, s. Abb. 2.1.

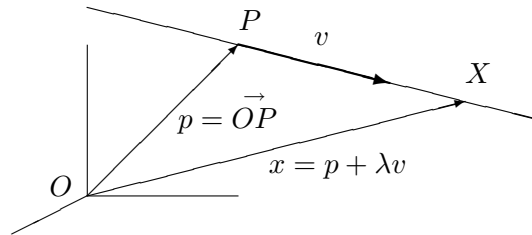


Abbildung 2.1: Parameterdarstellung von Geraden

- (ii) Seien  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  und  $\vec{PQ} := q - p$ . Dann ist die Punktmenge

$$\begin{aligned} g &:= \{X : X \in \mathbb{R}^3, x = p + \lambda \vec{PQ}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\} \\ &= \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \vec{PQ}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\} \end{aligned}$$

ist für  $P \neq Q$  eine Gerade im Raum. Man nennt diese Darstellung die *Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung*.

- (iii) Die Punktmenge

$$\overline{PQ} := \{X : X \in \mathbb{R}^3, x = p + \lambda \vec{PQ}, \lambda \in [0, 1] \text{ geeignet}\}$$

ist eine Strecke im Raum, und zwar die Verbindungsstrecke zwischen  $P$  und  $Q$ , s. Abb. 2.2.

### Beispiele 2.1

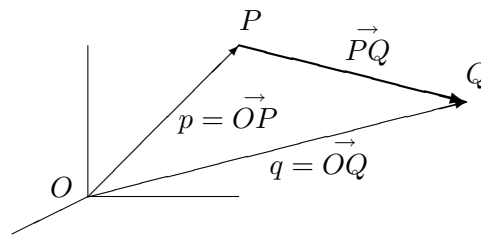


Abbildung 2.2: Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung

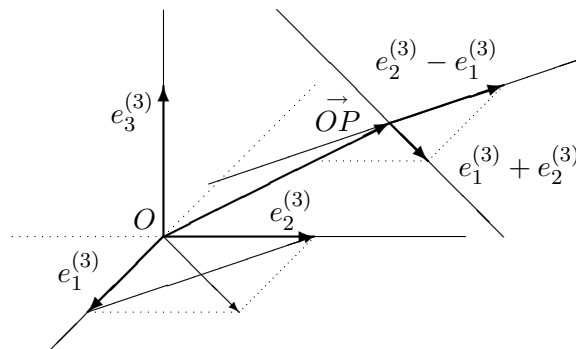


Abbildung 2.3: Verschobene Diagonalen des Einheitsquadrates

- (i) Man bestimme die Gleichungen derjenigen Geraden durch den Punkt  $P := \langle -1, 2, 1 \rangle$ , welche parallel zu den Diagonalen des durch  $e_1^{(3)}$  und  $e_2^{(3)}$  aufgespannten Quadrates verlaufen, s. Abb. 2.3.

$$g_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$g_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

In einigen Büchern wird an dieser Stelle die folgende inkorrekte Schreibweise verwendet:

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Links steht ein Element des  $\mathbb{R}^3$ , rechts eins des  $\mathbb{V}^3$ !

(ii) Liegen die Punkte  $P := \langle -1, 10, 7 \rangle$  oder  $Q := \langle 1, 6, 2 \rangle$  auf der Geraden

$$g := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}?$$

Wenn  $P$  auf  $g$  liegt, muß es eine Zahl  $\lambda_P$  geben mit der Eigenschaft

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_P \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das entstehende lineare Gleichungssystem wird gelöst für  $\lambda_P = 3$ .

$Q$  liegt nicht auf der Geraden  $g$ .

### Definition 2.2

Seien  $k \in \{2, 3\}$ ,  $P, Q \in \mathbb{R}^k$ ,  $a, b \in \mathbb{V}^k \setminus \{\theta\}$ ,

$$g_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^k, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda a, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$g_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^k, \vec{OX} = \vec{OQ} + \lambda b, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$g_1$  heißt *parallel* zu  $g_2$   $:\Leftrightarrow$   $a$  und  $b$  sind linear abhängig.

### Satz 2.1

Unter den Voraussetzungen von Definition 2 gilt:

$$g_1 = g_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \parallel g_2 \quad \wedge \quad g_1 \cap g_2 \neq \emptyset.$$

### Beispiel 2.2

Sind die folgenden beiden Geraden gleich?

$$g_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$g_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig, also sind beide Geraden parallel. Wenn zwei parallele Geraden einen Punkt gemeinsam haben, so sind sie gleich. Man zeigt nun, daß  $Q := \langle 0, 2, 6 \rangle$  auf  $g_1$  liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1.$$

### Zusammenhang mit der Geradendarstellung in der Analysis

In der Analysis sieht die Funktionsgleichung einer Geraden etwas anders aus. Natürlich werden dort wie hier dieselben geometrischen Objekte dargestellt; der entsprechende Zusammenhang soll nun hergestellt werden. Dazu wird eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  betrachtet, s. Abb. 2.4.

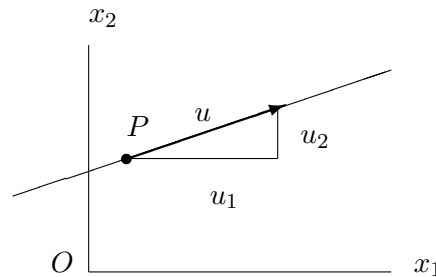


Abbildung 2.4: Geradendarstellung in der Analysis

$$g := \{X : X \in \mathbb{R}^2, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}$$

Aus dieser Darstellung erhält man die  $\mathbb{V}^2$ -Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1 &:= p_1 + \lambda u_1 \\ x_2 &:= p_2 + \lambda u_2. \end{aligned}$$

$u_1$  und  $u_2$  können nicht beide Null sein (warum nicht?); sei etwa  $u_1 \neq 0$ . Dann folgt

$$\lambda = \frac{x_1 - p_1}{u_1}$$

$$x_2 = p_2 + \frac{x_1 - p_1}{u_1} u_2 = \frac{u_2}{u_1} x_1 + p_2 - \frac{u_2}{u_1} p_1 =: m x_1 + n,$$

und damit die Darstellung einer Geraden im  $\mathbb{R}^2$ , wie sie in der Analysis üblich ist. Ist  $u_1 = 0$  und  $u_2 \neq 0$ , so muß man nach  $x_1$  auflösen und erhält analog

$$x_1 = \frac{u_1}{u_2} x_2 + p_1 - \frac{u_1}{u_2} p_2.$$

Umkehrung: Eine Gerade in der Form

$$y = m x + n$$

besitzt die folgende vektorielle Darstellung:

$$\begin{aligned}x &= \lambda \\y &= \lambda m + n,\end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Parameterdarstellung von Ebenen

Eine Ebene soll als Punktmenge des  $\mathbb{R}^3$  beschrieben werden. Die Vorgehensweise wird dabei derjenigen des letzten Abschnittes nachempfunden.

**Definition 2.3** (Parameterdarstellung von Ebenen)

- (i) Seien  $P \in \mathbb{R}^3$  und  $a, b \in \mathbb{V}^3$  zwei Vektoren, welche linear unabhängig sind (die durch  $a$  und  $b$  definierten Geraden sind nicht parallel).

Die Punktmenge

$$E := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda a + \mu b, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}$$

ist eine Ebene im Raum, s. Abb. 2.5. Man nennt diese Darstellung die *Parameterdarstellung* der Ebene  $E$  und sagt,  $a$  und  $b$  spannen die Ebene  $E$  auf.

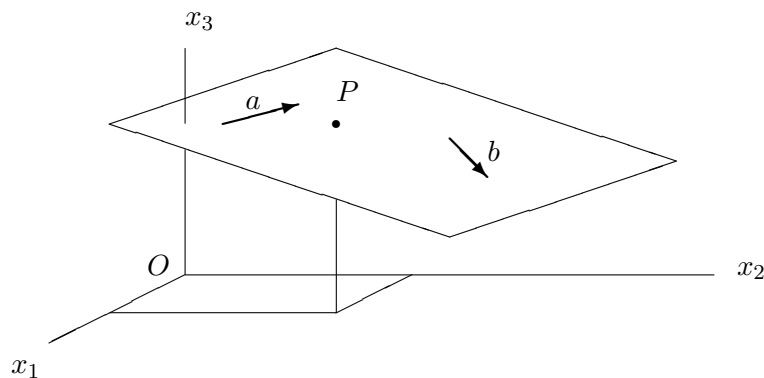


Abbildung 2.5: Parameterdarstellung der Ebenengleichung

- (ii) Seien  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$  drei voneinander verschiedene Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist die Punktmenge

$$E := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP}_1 + \lambda \vec{P_1P_2} + \mu \vec{P_1P_3}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}$$

eine Ebene im Raum, s. Abb. 2.6. Diese Darstellung heißt *Drei-Punkte-Form* der Ebenengleichung.

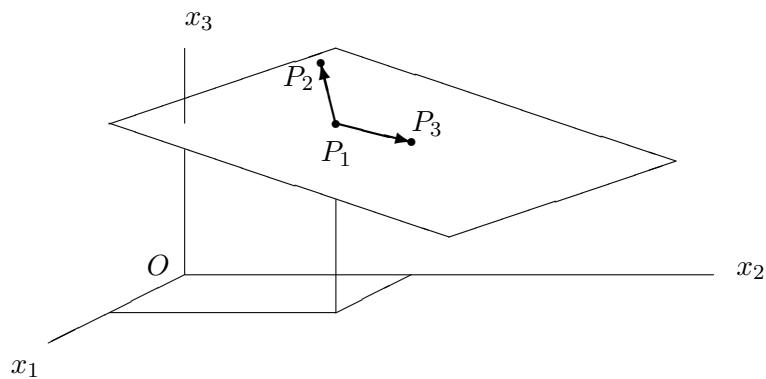


Abbildung 2.6: Drei-Punkte-Form einer Ebene

**Definition 2.4**

Seien  $P, Q \in \mathbb{R}^3$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{V}^3$ ,  $a$  und  $b$  bzw.  $c$  und  $d$  seien linear unabhängig. Seien

$$E_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda a + \mu b, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$E_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OQ} + \lambda c + \mu d, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$E_1 \text{ heißt parallel zu } E_2 \quad :\Leftrightarrow \quad LH(\{a, b\}) = LH(\{c, d\})$$

**Satz 2.2**

Unter den Voraussetzungen von Definition 4 gilt:

$$E_1 = E_2 \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \parallel E_2 \quad \wedge \quad E_1 \cap E_2 \neq \emptyset.$$

**Bemerkung**

Zum Nachweis der Bedingung  $LH(\{a, b\}) = LH(\{c, d\})$  genügt es etwa,  $\{c, d\} \subseteq LH(\{a, b\})$  nachzuweisen, wenn  $c$  und  $d$  linear unabhängig sind (warum?). Das bedeutet jeweils den Nachweis, daß  $\{c, a, b\}$  und  $\{d, a, b\}$  linear abhängig sind.

**Beispiel 2.3**

Sind die folgenden beiden Ebenen parallel oder sogar gleich ?

$$E_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$E_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

Die drei Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Ebenso sind die drei Vektoren  $a, b$  und  $d := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}$

linear abhängig, damit sind  $E_1$  und  $E_2$  also parallel.

Zur Prüfung der Gleichheit muß etwa für

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

der Vektor  $\vec{OP} - \vec{OQ}$  ebenfalls in der Ebene liegen. Nun sind die drei Vektoren

$$\{(\vec{OP} - \vec{OQ}), a, b\}$$

ebenfalls linear abhängig, d.h. beide Ebenen sind sogar gleich.

### Bemerkung

- (i) Zwei Geraden in einer Ebene sind parallel (u.U. sogar gleich) oder sie schneiden sich in genau einem Punkt. Auskunft darüber gibt das  $2 \times 2$ -lineare Gleichungssystem (LGS), das man erhält, wenn man beide Geraden gleichsetzt. Dabei gilt:

- (a) LGS lösbar  $\iff g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$   
 (b) LGS eindeutig lösbar  $\iff g_1 \cap g_2 \neq \emptyset \wedge g_1$  und  $g_2$  nicht parallel  
 (c) LGS unlösbar  $\iff g_1$  und  $g_2$  parallel und verschieden

- (ii) Für zwei Geraden im Raum gilt mit einem  $3 \times 2$ -linearen Gleichungssystem analog:

- (a) LGS lösbar  $\iff g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$   
 (b) LGS eindeutig lösbar  $\iff g_1 \cap g_2 \neq \emptyset \wedge g_1$  und  $g_2$  nicht parallel  
 (c) LGS unlösbar  $\iff g_1$  und  $g_2$  parallel und verschieden  
 oder windschief

Zwei Geraden im Raum, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind, heißen *windschief*.

(iii) Für zwei Ebenen im Raum untersucht man das  $3 \times 3$ -lineare Gleichungssystem, das man erhält, wenn man beide Ebenen gleichsetzt:

- (a) LGS lösbar  $\iff E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$   
 (b) LGS eindeutig lösbar  $\iff$  Dieser Fall kommt nicht vor!  
 (c) LGS unlösbar  $\iff E_1$  und  $E_2$  parallel und verschieden

Wenn sich zwei nicht parallele Ebenen im Raum schneiden, dann in einer Schnittgeraden, eine eindeutige Lösung des LGS kann also nicht existieren.

#### Beispiel 2.4

Man bestimme die Schnittgerade der folgenden beiden Ebenen:

$$E_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

$$E_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$

Gleichsetzen der beiden Ortsvektoren von  $E_1$  und  $E_2$  liefert ein lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen für vier Unbekannte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \iff \\ \begin{aligned} \lambda - \sigma &= 3 - 2 = 1 \\ \lambda + \mu - 2\rho &= 1 - 0 = 1 \\ \mu + \sigma &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

Solch ein Gleichungssystem kann nicht eindeutig lösbar sein, man kann nur zwei der Parameter eliminieren, so daß eine Beziehung zwischen den anderen beiden Parametern übrigbleibt.



Rechnerisch nützt uns diese Beziehung nur dann, wenn sie zwischen zwei Parametern derselben Ebene besteht, eine Beziehung zwischen Parametern verschiedener Ebenen ist deshalb unmittelbar nicht zu gebrauchen. So kann man beispielsweise die erste und die dritte Gleichung addieren und erhält

$$\lambda + \mu = -1 \quad \longrightarrow \quad \lambda = -1 - \mu.$$

Diesen Wert für  $\lambda$  kann man in die Gleichung der Ebene  $E_1$  einsetzen und erhält die Gleichung der Schnittgeraden zu

$$\begin{aligned} g &:= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (1+\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\} \\ &= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}. \end{aligned}$$

### 2.3 Vektorprodukt und Spatprodukt im $\mathbb{V}^3$

Im  $\mathbb{R}^3$  sei ein Körper um den Punkt  $P$  frei drehbar gelagert. Am Punkt  $Q$  greife eine Kraft an, repräsentiert durch eine Translation

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

also durch einen Vektor des  $\mathbb{V}^3$ , s. Abb. 2.7.

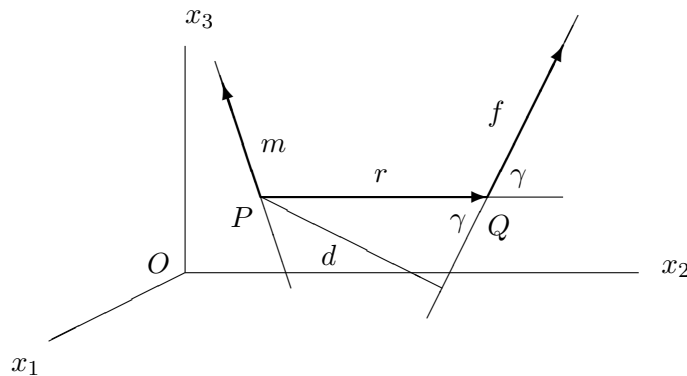


Abbildung 2.7: Drehmoment als Vektorprodukt

Der Punkt  $Q$  ist in bezug auf  $P$  durch den Vektor  $r := \vec{PQ}$  festgelegt. Aus der Physik ist bekannt, daß die Kraft  $f$  ein Drehmoment  $m$  bewirkt, dessen Betrag gleich dem Produkt aus Abstand  $d$  der Wirkungslinie der Kraft  $f$  vom Drehpunkt  $P$  und dem Betrag  $\|f\|$  der Kraft ist („Drehmoment = Hebelarm  $\times$  Kraft“):

$$\|m\| = d \cdot \|f\|.$$

Aufgrund der trigonometrischen Beziehung  $d = \|r\| \cdot \sin \gamma$  folgt daraus die Beziehung

$$\|m\| = \|r\| \cdot \|f\| \cdot \sin \gamma.$$

Damit ist noch nichts über die Lage der Drehachse im Raum und die Drehrichtung gesagt. Diese möchte man auch mit erfassen und stellt infolgedessen das Drehmoment  $m$  als Vektor aus dem  $\mathbb{V}^3$  dar:

$$m := r \times f$$

und fordert, daß  $m$  die Richtung der Drehachse hat und so orientiert ist, daß die Drehung im mathematisch negativen Sinne (Uhrzeigersinn) erfolgt, wenn man „in Richtung von  $m$ “ schaut; m.a.W. die Drehung soll „rechtsherum“ erfolgen. Etwas genauer formuliert bedeutet dies:

Zu zwei gegebenen Vektoren  $r, f \in \mathbb{V}^3$  ist ein dritter Vektor  $m \in \mathbb{V}^3$  gesucht, der die folgenden Eigenschaften hat:

- (i)  $\|m\| = \|r\| \cdot \|f\| \cdot \sin \gamma$
- (ii)  $m \perp r$  und  $m \perp f$
- (iii)  $r, f, m$  bilden (in dieser Reihenfolge!) ein „Rechtssystem“.

Unter Zugrundelegung von „sinnvollen“ Zusatzannahmen werden jetzt Bedingungen hergeleitet, die unser Drehmomentvektor erfüllen muß. Danach werden diese Bedingungen dann als Definition verwendet, und es wird gezeigt, daß sie auch hinreichend sind, um das Gewünschte zu leisten.

Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, daß die Koordinateneinheitsvektoren

$$e_1^{(3)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in dieser Reihenfolge ein „Rechtssystem“ bilden: wird der erste Vektor auf kürzestem Weg in den zweiten gedreht, so verläuft die Drehachse in Richtung des dritten Vektors, s. Abb. 2.8.

Die Orientierung des Vektors, der sich aus dem Kreuzprodukt  $a \times b$  im dreidimensionalen Raum ergibt, kann auch mit der sog. *Rechte-Hand-Regel* oder *Dreifinger-Regel* veranschaulicht werden. Dabei zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des Vektors  $a$  und der Zeigefinger in Richtung des Vektors  $b$ ; Daumen und Zeigefinger liegen dabei in einer Ebene mit der Handfläche. Der Mittelfinger steht  $90^\circ$  ab und zeigt in Richtung des sich aus dem Vektorprodukt ergebenden Vektors  $a \times b$ , s. Abb. 2.9.

Gemäß der oben aufgestellten Forderungen (ii) und (iii) muß dann insbesondere gelten:

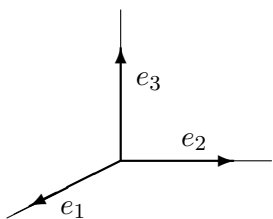


Abbildung 2.8: Rechtssystem

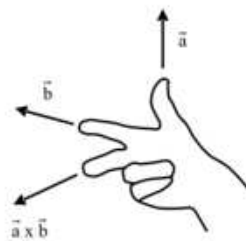


Abbildung 2.9: Rechte-Hand-Regel

$$e_1 \times e_2 = e_3$$

$$e_2 \times e_1 = -e_3$$

$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$e_3 \times e_2 = -e_1$$

$$e_3 \times e_1 = e_2$$

$$e_1 \times e_3 = -e_2$$

$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = \theta$$

Fordert man schließlich noch die folgenden (physikalisch gerechtfertigten) Distributivgesetze

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$$(\alpha a) \times (\beta b) = \alpha\beta(a \times b),$$

so erhält man für die zwei Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^3 :$$

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= a_1b_1(e_1 \times e_1) + a_1b_2(e_1 \times e_2) + a_1b_3(e_1 \times e_3) \\ &\quad + a_2b_1(e_2 \times e_1) + a_2b_2(e_2 \times e_2) + a_2b_3(e_2 \times e_3) \\ &\quad + a_3b_1(e_3 \times e_1) + a_3b_2(e_3 \times e_2) + a_3b_3(e_3 \times e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Definition 2.5**

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 &\longrightarrow \mathbb{V}^3 \\ \langle a, b \rangle : &\longmapsto a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heißt *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt*, manchmal auch *äußeres Produkt* der beiden Vektoren  $a$  und  $b$ .

**Beispiel 2.5**

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \implies a \times b = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Satz 2.3**

Das Vektorprodukt erfüllt die drei in der Einführung aufgezählten Forderungen.

*Beweis*

(i) Norm von  $a \times b$ :

$$\begin{aligned} \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot \sin^2 \gamma &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \gamma) \\ &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot \cos^2 \gamma \\ &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a, b)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \left( \sum_{k=1}^3 a_k b_k \right)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= \|a \times b\|^2. \end{aligned}$$

(ii)  $(a \times b, a) = (a \times b, b) = 0$  (Rechnen! Das ist das Spatprodukt, s. Def. 2.6), also gilt:  $a \times b \perp a$  und  $a \times b \perp b$ .

(iii)  $a, b$  und  $a \times b$  bilden nach Konstruktion ein Rechtssystem.

**Interpretation**

$A := \|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \gamma$  stellt den Flächeninhalt des von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms dar, s. Abb. 2.10.

Analog stellt  $D := \frac{1}{2} \cdot \|a \times b\|$  den Flächeninhalt des von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Dreieckes dar, s. Abb. 2.10.

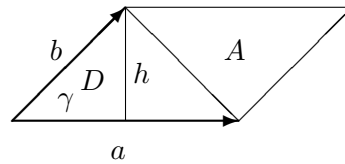


Abbildung 2.10: Flächeninhalt eines Parallelogrammes und Dreieckes

**Bemerkung**

Das im folgenden eingeführte *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* zweier Vektoren ist *ausschließlich* in dem speziellen Vektorraum  $V = \mathbb{V}^3$  sinnvoll!

**Definition 2.6**

(i) Die Abbildung

$$s : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle a, b, c \rangle : \longmapsto s(a, b, c) := (a, b, c) := (a \times b, c)$$

heißt *Spatprodukt* oder *gemischtes Produkt* der Vektoren  $a, b$  und  $c$ .

(ii) Seien  $a, b, c \in \mathbb{V}^3$ .

$$\langle a, b, c \rangle \text{ bildet ein Rechtssystem} \iff (a, b, c) > 0$$

Diese Definition ist so vereinbart, daß  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  ein Rechtssystem bildet; darauf ist beim Zeichnen zu achten.

**Beispiel 2.6**

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \implies$$

$$(a \times b, c) = \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = -21 + 48 - 27 = 0$$

**Satz 2.4**

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{V}^3, \lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

(i)  $a \times b = -b \times a$

(ii)  $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$

- (iii)  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- (iv)  $a \times b \perp a \quad \wedge \quad a \times b \perp b$
- (v)  $a \times (b \times c) = b(a, c) - c(a, b)$
- (vi)  $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$  (zyklische Vertauschung)  
 $(b, a, c) = (a, c, b) = (c, b, a) = -(a, b, c)$
- (vii)  $(a \times b, c \times d) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$
- (viii)  $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a, b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2 \gamma$
- (ix)  $a \times b = \theta \iff a, b$  sind linear abhängig
- (x)  $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$  sind linear abhängig
- (xi) Sind  $a, b$  linear unabhängig, dann bildet  $\langle a, b, a \times b \rangle$  ein Rechtssystem.

### Aufgabe

Gilt für je zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{V}^3$  die Beziehung

$$\frac{a \times b}{\|a \times b\|} = \frac{a}{\|a\|} \times \frac{b}{\|b\|} ?$$

### Geometrische Veranschaulichung des Spatproduktes

Seien  $a, b, c \in \mathbb{V}^3$  linear unabhängig und der Winkel  $\gamma$  zwischen  $a \times b$  und  $c$  sei kleiner als  $\pi/2$  ( $\langle a, b, c \rangle$  bilden dann ein Rechtssystem). Das Spatprodukt läßt sich dann deuten als Volumen des von (Repräsentanten von)  $a, b, c$  aufgespannten Spates (auch: Parallelfach, Parallelepipid, Parallelotop), s. Abb. 2.11, denn:

- Der Flächeninhalt des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogrammes ist

$$A = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \gamma = \|a \times b\|.$$

- Mit  $\gamma := \angle(a \times b, c)$  ist die Höhe  $h$  des Spates gegeben durch

$$h = \|c\| \cdot \cos \gamma.$$

- Damit berechnet sich das Volumen des Spates zu

$$V = A \cdot h = \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot \cos \gamma = (a \times b, c) = (a, b, c).$$

Damit wird die Aussage (vi) des letzten Satzes klar: Invarianz des Spates gegenüber zyklischer Vertauschung.  $\langle a, b, c \rangle, \langle b, c, a \rangle$  und  $\langle c, a, b \rangle$  definieren dieselben Spate, also haben sie auch dasselbe Volumen. Vertauscht man dagegen  $a$  und  $b$ , führt also eine nicht-zyklische Vertauschung durch, so ist

$$(b, a, c) = (b \times a, c) = -(a \times b, c) = -(a, b, c).$$

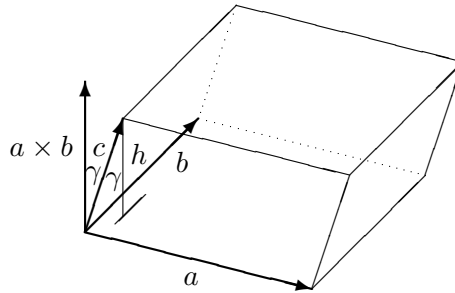


Abbildung 2.11: Spat

Auch (x) läßt sich geometrisch interpretieren: Sind  $a, b, c \neq \theta$ , so kann das Spatprodukt  $(a, b, c)$  nur dann gleich Null sein, wenn das Volumen des entsprechenden Spates gleich Null ist. Das bedeutet aber, daß der Spat zu einer Fläche entartet ist, mithin  $a, b, c$  in einer Ebene liegen und folglich linear abhängig sind:

$$(a, b, c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b, c \text{ sind linear abhängig.}$$

### Aufgabe

Wie berechnet sich das Volumen eines Tetraeders?

### 2.3.1 Abstand paralleler Geraden im $\mathbb{R}^3$

#### Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Seien  $P_1 \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{V}^3$ ,  $u \neq \theta$  und die Gerade  $g$  definiert durch

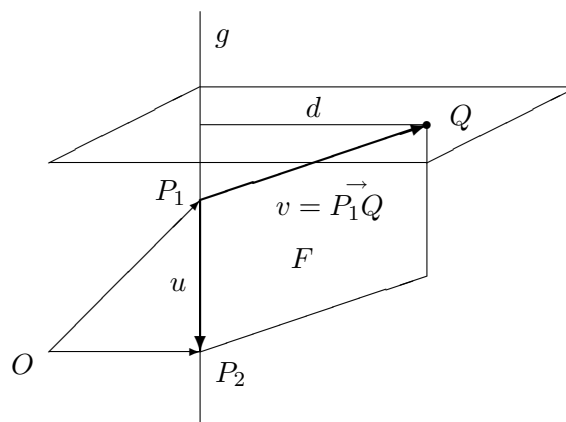
$$g := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP}_1 + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$

Sei  $Q \in \mathbb{R}^3$ . Gesucht ist der Abstand  $d$  des Punktes  $Q$  von der Geraden  $g$ , d.h. die kürzeste aller Entfernungen (warum existiert diese?) zwischen  $Q$  und einem Punkt auf  $g$ .

Dazu wählt man einen von  $P_1$  verschiedenen Punkt  $P_2$  auf  $g$ , etwa den mit dem Ortsvektor  $\vec{OP}_2 := \vec{OP}_1 + u$ , und betrachtet das von den beiden Vektoren  $u = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$  und  $v := \vec{P}_1Q$  aufgespannte Parallelogramm, s. Abb. (2.12); dessen Höhe ist gleich dem gesuchten Abstand  $d$ .

Für die Fläche  $F$  des Parallelogrammes gilt  $F = d \cdot \|u\| = \|u \times v\|$ , und der gesuchte Abstand  $d$  des Punktes  $Q$  von der Geraden  $g$  berechnet sich damit zu

$$\text{dist}(Q, g) := d = \frac{\|u \times v\|}{\|u\|} = \frac{\|u \times \vec{P}_1Q\|}{\|u\|} = \|u^0 \times \vec{P}_1Q\|. \quad (2.1)$$

Abbildung 2.12: Abstand des Punktes  $Q$  von der Geraden  $g$ **Beispiel 2.7**

Gesucht ist der Abstand des Punktes  $Q := \langle 0, 5, 6 \rangle$  von der Geraden

$$g := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

**Lösung**

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|u\| = \sqrt{18},$$

$$\vec{P_1Q} = \vec{OQ} - \vec{OP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$u \times \vec{P_1Q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix}, \quad \|u \times \vec{P_1Q}\| = 18\sqrt{2}$$

$$\longrightarrow d = \frac{\|u \times v\|}{\|u\|} = \frac{\|u \times \vec{P_1Q}\|}{\|u\|} = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = 6$$

**Abstand zweier paralleler Geraden im  $\mathbb{R}^3$** 

Seien  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{V}^3$ ,  $u \neq \theta$  und die beiden parallelen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  definiert durch

$$g_1 := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP_1} + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\},$$

$$g_2 := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP_2} + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$



Der Abstand dieser beiden Geraden ist definiert als die kürzeste aller Entfernungen zwischen  $g_1$  und  $g_2$ . Wegen der Parallelität ist das gleich der kürzesten aller Entfernungen zwischen einem beliebigen Punkt auf  $g_1$  – etwa  $P_1$  – und einem Punkt auf  $g_2$ .

Damit kann die Formel des letzten Absatzes verwendet werden, und es ergibt sich für den Abstand der beiden Geraden  $g_1$  und  $g_2$ :

$$\text{dist}(g_1, g_2) := d = \frac{\|u \times (\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2)\|}{\|u\|} = \|u^0 \times (\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2)\|.$$

## 2.4 Normalendarstellung von Ebenen im $\mathbb{R}^3$

### 2.4.1 Normalendarstellung und Parameterdarstellung

Seien  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $a, b \in \mathbb{V}^3$  zwei linear unabhängige Vektoren, (die durch  $a$  und  $b$  definierten Geraden sind nicht parallel) und  $E$  die durch sie definierte Ebene

$$E := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda a + \mu b, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$

#### Definition 2.7

Ein Vektor  $n \in \mathbb{V}^3$  heißt *senkrecht* zu  $E$   $:\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{P_1, P_2 \in E} n \perp \vec{P_1 P_2} \quad \text{d.h.} \quad \bigwedge_{P_1, P_2 \in E} (n, \vec{P_1 P_2}) = 0.$$

$n$  heißt also senkrecht zur Ebene  $E$ , wenn  $n$  senkrecht zu jedem „Richtungsvektor in der Ebene“ ist. Anschaulich ist klar, daß es einen solchen Vektor gibt. Aus der Ortsvektor-Darstellung liest man nun ab:

$$(\vec{OX} - \vec{OP}, n) = 0 \quad (X \in \mathbb{R}^3),$$

da ja  $n$  zu jedem Vektor in der Ebene senkrecht ist; insbesondere also zu  $a$  und zu  $b$ . Damit gilt:

$$E \subseteq \{X : X \in \mathbb{R}^3, (\vec{OX} - \vec{OP}, n) = 0\}.$$

Daß diese Inklusion sogar eine Gleichheit ist, ist die Aussage des folgenden Satzes. M.a.W., die rechte Seite obiger Inklusion enthält nicht nur die Ebene  $E$ , sondern sie enthält auch nicht mehr als sie.

**Satz 2.5**

- (i) Seien
- $P \in \mathbb{R}^3$
- ,
- $a, b \in \mathbb{V}^3$
- linear unabhängig und

$$E := \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda a + \mu b, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\},$$

$E$  ist also eine Ebene. Dann gibt es einen Vektor  $n \in \mathbb{V}^3, n \neq \theta$  (Normalenvektor), so daß gilt:

$$E = \{X : X \in \mathbb{R}^3, (\vec{OX} - \vec{OP}, n) = 0\}.$$

- (ii) Seien
- $P \in \mathbb{R}^3$
- ,
- $n \in \mathbb{V}^3$
- ,
- $n \neq \theta$
- und

$$F := \{X : X \in \mathbb{R}^3, (\vec{OX} - \vec{OP}, n) = 0\}.$$

Dann ist  $F$  eine Ebene, d.h. es existieren zwei linear unabhängige Vektoren  $a, b \in \mathbb{V}^3$ , so daß gilt:

$$F = \{X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda a + \mu b, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$

*Beweisidee*

Wann immer man sich beim Beweis einen zu zwei Vektoren des  $\mathbb{V}^3$  senkrechten Vektor verschaffen will, läßt sich das mit Hilfe des Vektorproduktes bewerkstelligen.

**Definition 2.8**

- (i) Die parameterfreie Darstellung einer Ebene
- $E$
- mit Hilfe eines Normalenvektors
- $n$
- ,

$$E := \{X : X \in \mathbb{R}^3, (\vec{OX} - \vec{OP}, n) = 0\},$$

heißt *Normalenform* oder *Normalendarstellung* der Ebene  $E$ .

- (ii) Ist
- $n$
- ein Normaleneinheitsvektor, gilt also
- $\|n\| = 1$
- , so spricht man von der
- Hesse'schen Normalenform*
- <sup>1</sup>
- der Ebenendarstellung.

**Bemerkung**

<sup>1</sup>Ludwig Otto Hesse (1811-1874). Er lehrte 1845-1856 in Königsberg, 1856-1869 in Heidelberg und ab 1869 an der TH München. Die nach ihm benannte Hesse-Form fand er 1865.

- (i) Ist  $n := \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor einer Ebene  $E$ ,  $X \in \mathbb{R}^3$ , so lassen sich in der Gleichung

$$(\vec{OX} - \vec{OP}, n) = 0$$

die Skalarprodukte ausrechnen, und man erhält mit  $\vec{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  die Gleichung

$$\begin{aligned} (\vec{OX} - \vec{OP}, n) &= (\vec{OX}, n) - (\vec{OP}, n) \\ &=: x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 - c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die folgende Darstellung für  $E$ :

$$E = \{X : X \in \mathbb{R}^3, x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 - c = 0\}.$$

Genau dann, wenn der Koordinatenursprung nicht in der Ebene liegt, ist  $c \neq 0$ , und die Gleichung läßt sich wie folgt schreiben:

$$E = \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \frac{x_1}{c/n_1} + \frac{x_2}{c/n_2} + \frac{x_3}{c/n_3} = 1 \right\}.$$

Diese Form der Ebenengleichung heißt *Achsenabschnittsform*, weil die Ebene die drei Koordinatenachsen jeweils an den Stellen  $x_i = c/n_i$  schneidet ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ), s. Abb. 2.13.

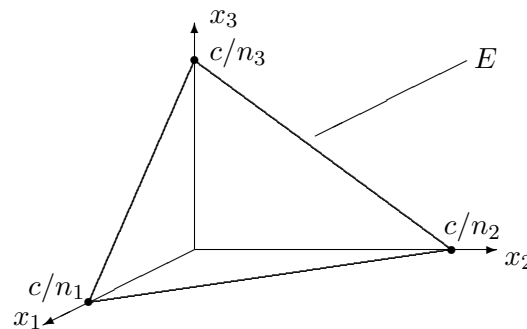


Abbildung 2.13: Achsenabschnittsform der Ebenengleichung

- (ii) Sind umgekehrt  $U := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \neq \langle 0, 0, 0 \rangle$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so ist durch die Punktmenge

$$\{X : X \in \mathbb{R}^3, x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 - c = 0\}$$

eine Ebene definiert, und der Vektor  $u := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  ist ein Normalenvektor dieser Ebene.

(iii) Analog zu den Ausführungen dieses Abschnittes lassen sich Normalendarstellungen für Geraden im  $\mathbb{R}^2$  angeben: jede Gerade ist durch einen Punkt und einen Normalenvektor eindeutig bestimmt.

Im  $\mathbb{R}^3$  funktioniert das allerdings nicht mehr: zu einer Geraden im Raum existieren unendlich viele Normalenvektoren; nämlich alle, die in derjenigen Ebene liegen, zu der die Gerade eine Normale ist.

### Beispiel 2.8

Sei  $E$  die Ebene

$$E := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

Man erhält einen Normalenvektor  $n$  an  $E$  z.B. durch das Vektorprodukt der beiden die Ebene aufspannenden Richtungsvektoren

$$n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Normalenform von  $E$  lautet demnach

$$\begin{aligned} E &= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 1 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist noch nicht die Hesse'sche Normalenform; diese erhält man durch Normierung des Normalenvektors:

$$E = \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{3} = 0 \right\}.$$

### 2.4.2 Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung

Im folgenden soll eine anschauliche Interpretation der Hesse'schen Normalenform der Ebenengleichung gegeben werden.

**Satz 2.6**

Vorgelegt sei die Hesse'sche Normalenform einer Ebenengleichung:

$$E := \{X : X \in \mathbb{R}^3, (\vec{OX}, n^0) - d = 0\}$$

mit einem Normaleneinheitsvektor  $n^0$ . Ist  $d > 0$ , so gilt:  $\text{dist}(E, O) = d$ , und  $n^0$  zeigt vom Nullpunkt zur Ebene, s. Abb. 2.14.

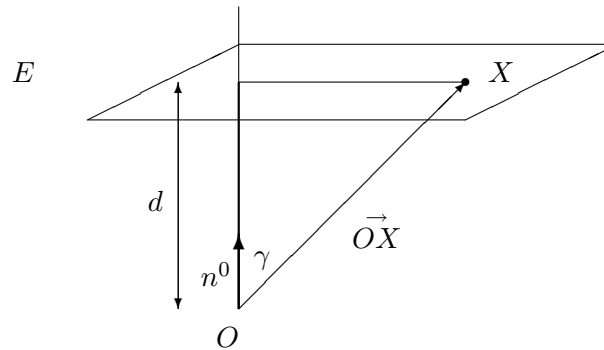


Abbildung 2.14: Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung

*Beweis*

Die Ebene  $E$  besteht aus genau solchen Punkten  $X$  des  $\mathbb{R}^3$ , deren senkrechte Projektion (*Orthogonalprojektion*) auf die durch  $n^0$  definierte Gerade die Länge  $d$  aufweist:

$$X \in E \iff (\vec{OX}, n^0) = \|\vec{OX}\| \cdot 1 \cdot \cos \angle(\vec{OX}, n^0) = d$$

**Problem**

Wie berechnet man aus der (Hesse'schen) Normalenform die Parameterform der Ebenengleichung?

**Beispiel 2.9**

$$E := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{3} = 0 \right\}.$$

(i) Man benötigt einen Punkt  $P \in E$ . Die Hesse-Form bedeutet die Gleichung

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung wird etwa gelöst durch die Werte

$$p_1 := 2, \quad p_2 := 2, \quad p_3 := 1$$

$$\longrightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Man benötigt zwei linear unabhängige Richtungsvektoren  $a, b$  senkrecht zu  $n^0$ .
- (a) Man könnte so vorgehen wie unter (i), indem man sich zwei weitere Punkte auf der Ebene beschafft und aus den drei Punkten zwei Richtungsvektoren bestimmt; hier müßte man aufpassen, daß man nicht zufällig drei Punkte wählt, welche auf einer Geraden liegen.
- (b) Man könnte zwei zu  $n^0$  senkrechte und linear unabhängige Vektoren erraten, beispielsweise

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:  $a \perp n^0$ ,  $b \perp n^0$ .

- (c) In der zuletzt durchgeführten „Konstruktion“ gilt nicht  $a \perp b$ . Will man auch das noch erreichen, so kann man  $b$  etwa durch das Vektorprodukt von  $n^0$  und  $a$  definieren:

$$b := n^0 \times a.$$

Im folgenden soll der Abstand eines Punktes  $Q$  aus  $\mathbb{R}^3$  von einer Ebene  $E$  bestimmt werden. Anschaulich kann man dazu wie folgt vorgehen:

1. Konstruktion einer Geraden  $g$  durch  $Q$  mit Richtung  $n$ ; hier ist  $n$  ein Normalenvektor an die Ebene  $E$ ;
2.  $P := g \cap E$ ; hierzu ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen;
3.  $\text{dist}(Q, E) = \text{dist}(Q, P) = \|\vec{OQ} - \vec{OP}\| = \|\lambda \cdot n\|$  mit dem Wert  $\lambda$  aus 2.

Unter Verwendung der Hesse'schen Normalenform

$$E = \{X : X \in \mathbb{R}^3, \quad (\vec{OX}, n^0) - d = 0\}$$

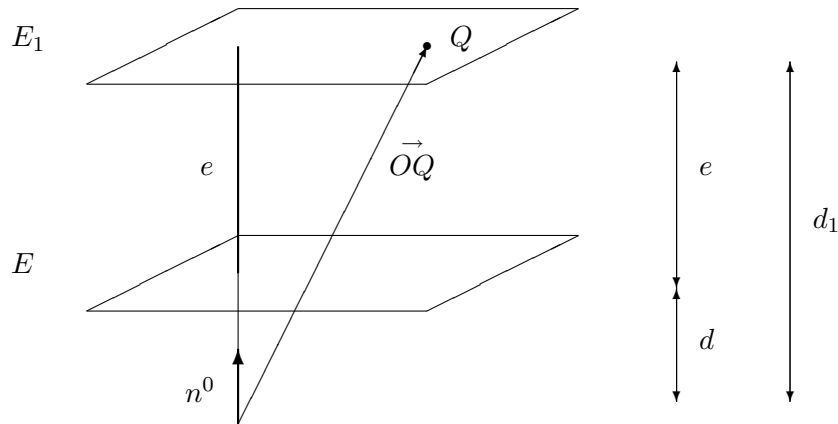
der Ebenengleichung für  $E$  läßt sich der Abstand allerdings sehr viel einfacher berechnen.

Dazu denkt man sich eine Hilfsebene  $E_1$  durch  $Q$ , parallel zu  $E$ , s. Abb. 2.15. Ihre Gleichung in der Hesse'schen Normalenform lautet

$$E_1 = \{X : X \in \mathbb{R}^3, \quad (\vec{OX}, n^0) - d_1 = 0\}.$$

Falls  $d_1 \geq 0$ , so ist  $d_1 := (\vec{OQ}, n^0)$  der Abstand der Ebene  $E_1$  vom Nullpunkt. Der gesuchte Abstand von  $Q$  zu  $E$  berechnet sich dann zu

$$e := d_1 - d = (\vec{OQ}, n^0) - d$$

Abbildung 2.15: Abstand des Punktes  $Q$  von der Ebene  $E$ 

und kann, je nach Lage von  $Q$ , auch Null oder negativ sein.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Hesse'schen Normalenform für  $E$ , so folgt der

### Satz 2.7

- (i) Den Abstand  $dist(Q, E)$  des Punktes  $Q$  von  $E$  erhält man, indem man  $\vec{OQ}$  in die linke Seite der Hesse'schen Normalenform von  $E$  einsetzt und vom Ergebnis den Betrag nimmt.
- (ii)  $e := (\vec{OQ}, n^0) - d$  ist positiv, wenn der Punkt  $Q$  und der Nullpunkt auf verschiedenen Seiten der Ebene  $E$  liegen, andernfalls negativ bzw. Null, wenn  $Q$  auf  $E$  liegt.

### Beispiel 2.10

Gegeben seien die Ebene

$$E = \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) + 9 = 0 \right\}$$

sowie der Punkt  $Q := \langle 5, 1, 12 \rangle$ . Man berechne den Abstand  $dist(Q, E)$ .

### Lösung

1. Übergang zur Hesse'schen Normalenform:

$$E = \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) - 3 = 0 \right\}$$

2. Einsetzen des Punktes  $Q$  in die Hesse-Form:

$$e := \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) - 3 = 9 - 3 = 6$$

3. Es ist  $e = 6 > 0$ , also ist  $\text{dist}(Q, E) = |e| = e = 6$ , damit liegen  $Q$  und der Nullpunkt auf verschiedenen Seiten der Ebene  $E$ .

### 2.4.3 Abstand windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Seien  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ ,  $u, v \in \mathbb{V}^3$ ,  $u, v$  linear unabhängig und die beiden (windschiefen) Geraden  $g_1$  und  $g_2$  definiert durch

$$g_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP}_1 + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\},$$

$$g_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \vec{OP}_2 + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

Die beiden Paare von Geraden ( $g_1$  und  $g'_2$ ) bzw. ( $g_2$  und  $g'_1$ ) spannen zwei parallele Ebenen auf, deren Abstand  $e$  der gesuchte Abstand der beiden windschiefen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  ist, s. Abb. 2.16.

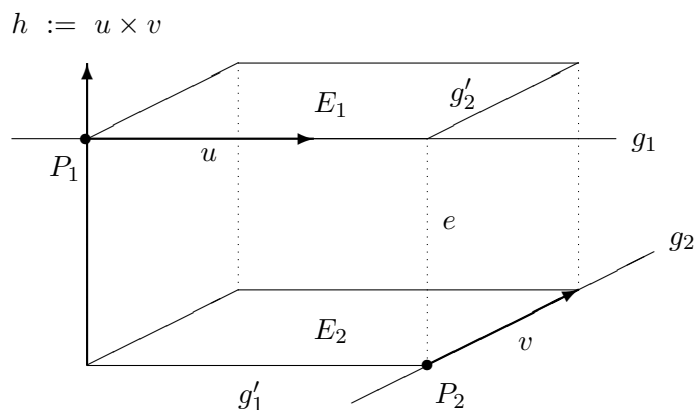


Abbildung 2.16: Abstand zweier windschiefer Geraden

Der Abstand zweier paralleler Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  ist definiert als Abstand eines beliebigen Punktes auf  $E_2$  zur Ebene  $E_1$ , etwa des Punktes  $P_2$ . Er lässt sich z.B. durch Einsetzen von  $P_2$  in die Hesse'sche Normalenform von  $E_1$  berechnen.

#### Beispiel 2.11

Welches ist der Abstand der beiden folgenden Geraden im  $\mathbb{R}^3$ ,

$$g_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}$$



und

$$g_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}?$$

**Lösung**

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also ist  $n := \frac{1}{3} \tilde{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor an die aus den Richtungsvektoren der beiden Geraden  $g_1$  und  $g_2$  gebildete Ebene durch  $P_1$ , und die Hesse'sche Normalenform von  $E_1$  lautet

$$\begin{aligned} E_1 &:= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - 2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \left( \vec{OX}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \frac{2}{\sqrt{14}} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

$$P_2 = \langle -2, 1, -6 \rangle \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(g_1, g_2) &= \text{dist}(E_1, E_2) = \text{dist}(E_1, P_2) \\ &= \left| \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \frac{2}{\sqrt{14}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-6 + 2 + 6 - 2) \right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der Abstand beider Geraden ist also 0, d.h. die Geraden haben genau einen Schnittpunkt. Dieser ist gegeben durch

$$S := g_1 \cap g_2 = \{ \langle -1, 1, -3 \rangle \} \neq \emptyset.$$

**Bemerkung**

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  als Abstand der beiden Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  läßt sich auch durch eine Formel ausdrücken, in der das Spatprodukt auftritt. Dazu wird noch einmal analysiert, wie man auf das letzte Ergebnis gekommen ist:

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(g_1, g_2) &= \text{dist}(E_1, P_2) \\
 &= \left| \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \frac{2}{\sqrt{14}} \right| \\
 &= \left| \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right| \\
 &= \left| \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right| \\
 &= \left| \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-9 + 6 + 3) \right| \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Damit erhält man die Formel

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(g_1, g_2) &= \frac{|(\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2, n)|}{\|n\|} \\
 &= \frac{|(u \times v, \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2)|}{\|u \times v\|} \\
 &= \frac{|(u, v, \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2)|}{\|u \times v\|}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit  $n := u \times v$  als Vektorprodukt der Richtungsvektoren der beiden Geraden  $g_1$  und  $g_2$ . (2.2) bedeutet dann den Betrag des (mit dem Faktor  $\frac{1}{\|u \times v\|}$  versehenen) Spatproduktes der drei Vektoren  $u, v, \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2$ .

**Bemerkung**

In diesem Zusammenhang vergleiche man noch einmal Formel (2.1) und Abb. 2.12 mit Formel (2.2) und Abb. 2.16: im ersten Fall ist der Abstand (die „Höhe“) gegeben als Quotient von Parallelogrammfläche und Grundseite, im zweiten als Quotient von Spatvolumen und Grundfläche.

**Beispiel 2.12**

Ein Cargo-Lifter<sup>2</sup> befinde sich exakt 584 m westlich und 812 m südlich des Berliner Fernsehturms in 344 m Höhe über Grund (die Daten beziehen sich auf den Mittelpunkt des Lifters). Der Kapitän möchte den Alexanderplatz überqueren und geht auf Kurs in Richtung Fernsehturm, s. Abb. 2.17. Pro Sekunde drifte der Lifter geradlinig um 3 m nach Osten und um 4 m nach Norden, dabei sinke er um 1 m. Der Querdurchmesser des Lifters betrage 24 m.

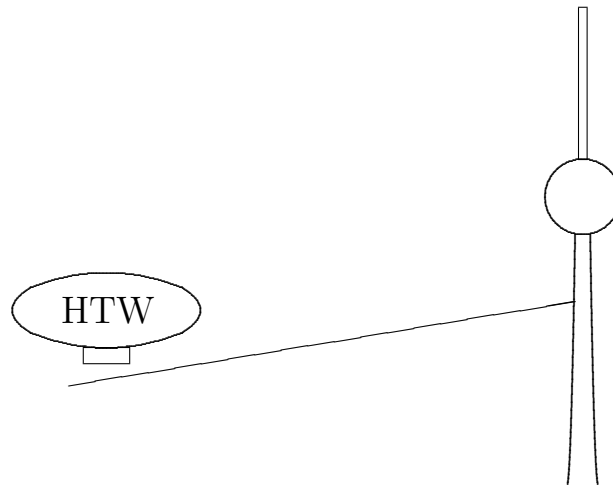


Abbildung 2.17: Flug eines Cargo-Lifters zum Fernsehturm am Alexanderplatz

Kommt der Lifter am Turm vorbei oder nicht, wenn man die Annahme macht, daß

- (i) der Turm einen konstanten Durchmesser von 18 m hat;
- (ii) der Durchmesser des Turmes mit der Höhe abnimmt nach der Formel  $d(h) = 20 - \frac{1}{2}\sqrt{h}$  ?

**Lösung**

Das Problem läuft darauf hinaus, den Abstand zweier windschiefer Geraden im  $\mathbb{R}^3$  zu bestimmen: der Fluggerade des Lifters und der Vertikale, in welcher der Fernsehturm liegt. Der Turmfußpunkt wird dabei als Koordinatenursprung verwendet, die  $x_1$ -Achse verlaufe von Westen nach Osten, die  $x_2$ -Achse von Süden nach Norden.

Dann ist die Fluggerade des Lifters gegeben durch

$$l := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} -584 \\ -812 \\ 344 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\},$$

<sup>2</sup>Dieses nette Beispiel entstammt dem Schulbuch „Leistungskurs Mathematik 13.1“ von Bigalke/Köhler aus dem Cornelsen-Verlag.

die Gerade des Fernsehturmes durch

$$t := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

Der Normalenvektor  $n$  an beide Geraden lautet

$$n := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Nach (2.2) berechnet sich der Abstand der beiden windschiefen Geraden zu

$$\begin{aligned} \text{dist}(g_1, g_2) &= \frac{|(\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2, n)|}{\|n\|} \\ &= \frac{1}{5} \left| \left( \begin{pmatrix} -584 \\ -812 \\ 344 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \frac{-100}{5} \right| = 20. \end{aligned}$$

Der Lifter hat einen halben Querdurchmesser von  $24/2 \text{ m} = 12 \text{ m}$ , der Turm einen Radius von  $18/2 \text{ m} = 9 \text{ m}$ . Es ist  $20 < 12 + 9 = 21$ , d.h. bei diesem Kurs und diesen Maßen kommt der Lifter *nicht* am Turm vorbei.

- (ii) Hier sind die beiden Punkte  $L$  und  $T$  auf den Geraden  $l$  und  $t$  zu bestimmen, welche den minimalen Abstand definieren. Dazu muß die Höhe  $h$  ermittelt werden, in der der Lifter am Turm vorbeifliegt. Dabei gilt:

- $L$  auf  $l$  ist der Schnittpunkt der Fluggeraden des Lifters mit derjenigen Ebene  $E_T$ , welche durch den Normalenvektor  $n$  an Fluggerade und Fernsehturm und dem Richtungsvektor des Fernsehturmes definiert ist und die einen Punkt des Turmes enthält, beispielsweise seinen Fußpunkt;
- $T$  auf  $t$  ist der Schnittpunkt der Geraden des Turmes mit derjenigen Ebene  $E_L$ , welche durch den Normalenvektor  $n$  an Fluggerade und Fernsehturm und der Fluggeraden des Lifters definiert ist und die einen Punkt der Flugbahn des Lifters enthält, beispielsweise ihren Startpunkt.

Hier soll zuerst  $L$  berechnet werden. Dazu seien

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^0 := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung der Ebene  $E_T$  in der Hesse'schen Normalenform lautet dann

$$E_T = \left\{ X : X \in \mathbb{R}^3, \quad \left( \vec{OX}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - 0 = 0 \right\}.$$

In diese Gleichung ist die Fluggerade des Lifters einzusetzen und nach dem Parameter  $\lambda$  aufzulösen:

$$\left( \begin{pmatrix} -584 \\ -812 \\ 344 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{-584 \cdot 3 - 812 \cdot 4 + 25\lambda}{5} = 0$$

$$\iff 25\lambda = 1752 + 3248 = 5000$$

$$\iff \lambda = 200$$

Die Größe  $\lambda = 200$  ist die Zeit in Sekunden, die der Lifter von seinem Startpunkt bis zum Punkt  $L$  mit dem geringsten Abstand vom Turm unterwegs ist. Damit ist dieser Punkt  $L$  gegeben durch den Vektor

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} -584 \\ -812 \\ 344 \end{pmatrix} + 200 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

Den korrespondierenden Punkt auf dem Fernsehturm erhält man mit Hilfe des Normaleneinheitsvektors  $n^0$  und des unter (i) schon berechneten Abstandes zu

$$\vec{OT} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 144 \end{pmatrix} - \frac{20}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

Natürlich hätte man diesen korrespondierenden Punkt  $\langle 0, 0, 144 \rangle$  auf dem Fernsehturm hier auch durch die einfachere Überlegung gewinnen können, daß der oben ermittelte Normalenvektor  $v$  als dritte Komponente eine Null aufweist, mithin waagrecht verläuft, so daß die Höhe  $h = 144$  aus  $\vec{OL}$  unmittelbar abgelesen werden kann.

In der Höhe  $h = 144$  m hat der Turm nach Voraussetzung eine Stärke von

$$d(h) = \left( 20 - \frac{1}{2}\sqrt{h} \right) \text{ m} = \left( 20 - \frac{1}{2}12 \right) \text{ m} = 14 \text{ m},$$

also einen Radius von 7 m. Jetzt ist  $20 > 12 + 7 = 19$ , d.h. unter dieser Annahme kommt der Lifter nun am Turm vorbei.

## 2.5 Pseudovektoren oder axiale Vektoren

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{V}^n$  die Menge aller Spalten mit  $n$  Zeilen. Da  $\mathbb{V}^n$  die Eigenschaften eines Vektorraumes besitzt – unbeschränkte Addition und Multiplikation mit Skalaren – werden seine Elemente – die Spalten – Vektoren genannt. Diese lassen sich als Translationen des Raumes  $\mathbb{R}^n$  interpretieren. Im  $\mathbb{R}^3$  beispielsweise gilt bezüglich eines gewählten Bezugspunktes  $O := \langle 0, 0, 0 \rangle$  und eines kartesischen Koordinatensystems mit den Basisvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

daß die Translation (der Vektor)  $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  jeden Punkt  $x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  des  $\mathbb{R}^3$  in den Punkt  $\langle x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3 \rangle$  verschiebt.

In der Physik definiert man Vektoren in der Regel anders. Man stellt dort nicht die abstrakten Eigenschaften eines Vektorraumes (Addition und Multiplikation mit Skalaren) in den Vordergrund sondern die Objekte selbst. Ihr Verhalten gegenüber Transformationen des Koordinatensystems (genauer: Transformationen der zugrundeliegenden Basis) sollte dann so sein, daß zwar ihre jeweiligen Darstellungsdaten bzgl. der neuen Basis geändert werden, nicht aber die Objekte selbst: diese bleiben unter einer Basistransformation invariant. Daher möchte man nur solche Objekte als physikalisch „sinnvoll“ auszeichnen und Vektoren nennen, welche gegenüber Koordinatentransformationen das „richtige“ Verhalten aufweisen.

### Beispiel 2.13 (Inversion oder Paritätstransformation im $\mathbb{R}^3$ )<sup>3</sup>

Führt man die folgende Koordinatentransformation durch:

$$x_1 \rightarrow x'_1 := -x_1, \quad x_2 \rightarrow x'_2 := -x_2, \quad x_3 \rightarrow x'_3 := -x_3,$$

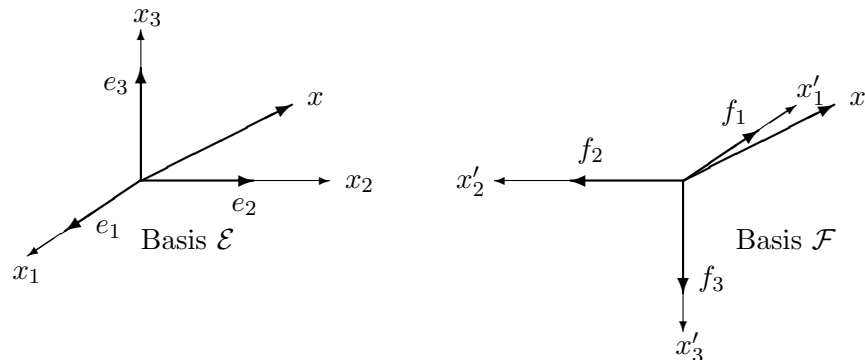
so bedeutet das eine Spiegelung der Koordinatenachsen am Nullpunkt, s. Abb. 2.18.

Die Basisvektoren  $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$  gehen über in die neue Basis  $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ , definiert durch

$$f_1 := -e_1, \quad f_2 := -e_2, \quad f_3 := -e_3.$$

<sup>3</sup>Unter der *Paritätstransformation* versteht man die Transformation von einem rechtshändigen in ein linkshändiges Koordinatensystem oder umgekehrt. Es handelt sich dabei um eine Raumspiegelung, welche sich durch räumliche Drehung des Koordinatensystems nicht erreichen läßt. Die Orts- und Impulsvektoren ändern bei einer Paritätstransformation ihr Vorzeichen.

Eine Paritätstransformation hat stets die Determinante  $-1$ , ist also nicht durch eine Rotation darstellbar. In zwei Dimensionen ist eine Inversion des Koordinatensystems daher *keine* Paritätstransformation und daher nicht dasselbe wie eine Rotation um  $180^\circ$ . Hier würde eine Paritätstransformation entweder nur  $x_1$  durch  $-x_1$  oder  $x_2$  durch  $-x_2$  ersetzen, nicht beide gleichzeitig.

Abbildung 2.18: Paritätsinversion des Koordinatensystems im  $\mathbb{R}^3$ 

(i) „gewöhnlicher“ Vektor:

Bezüglich der alten und der neuen Basis ist der Vektor  $x = x'$  gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \\ &= 0 \cdot f_1 - 2 \cdot f_2 - 1 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Der Vektor  $x$  in der realen Welt bleibt unverändert, nur seine Koordinaten (= Komponenten bzgl. einer Basis) bzgl. der neuen Basis ändern sich:  $x = x'$ .

(ii) Vektorprodukt:

In der Physik sind der Ortsvektor  $r$  und der Geschwindigkeitsvektor  $v$  Vektoren, die sich bei Spiegelungen im Sinne von (i) „richtig“ transformieren, der „Drehimpulsvektor“  $L := r \times p$  ist jedoch kein Vektor, denn er hat ein anderes Transformationsverhalten, s. Abb. 2.19.

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \implies r' = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \implies p' = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$$

$$L = r \times p = \begin{pmatrix} r_2 p_3 - r_3 p_2 \\ r_3 p_1 - r_1 p_3 \\ r_1 p_2 - r_2 p_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \implies$$

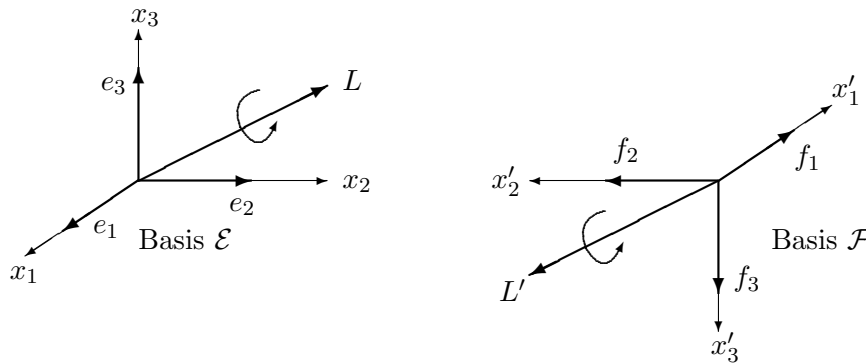


Abbildung 2.19: Paritätsinversion des Koordinatensystems im  $\mathbb{R}^3$

$$L' = r' \times p' = \begin{pmatrix} r'_2 p'_3 - r'_3 p'_2 \\ r'_3 p'_1 - r'_1 p'_3 \\ r'_1 p'_2 - r'_2 p'_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} r_2 p_3 - r_3 p_2 \\ r_3 p_1 - r_1 p_3 \\ r_1 p_2 - r_2 p_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

An Abb. 2.19 erkennt man, daß jetzt  $L \neq L'$  ist. Die Drehrichtung von  $L'$  ergibt sich aus der Tatsache, daß  $\mathcal{F}$  ein Linkssystem ist.

**Beispiel 2.14** (Spiegelung an einer Ebene)

(i) Führt man die folgende Koordinatentransformation durch:

$$x_1 \rightarrow x'_1 := x_1 \quad , \quad x_2 \rightarrow x'_2 := -x_2 \quad , \quad x_3 \rightarrow x'_3 := x_3,$$

so läßt sich diese alternativ als eine Spiegelung des gesamten Raumes an der  $\langle x_1, x_3 \rangle$ -Ebene auffassen, s. Abb. 2.20.

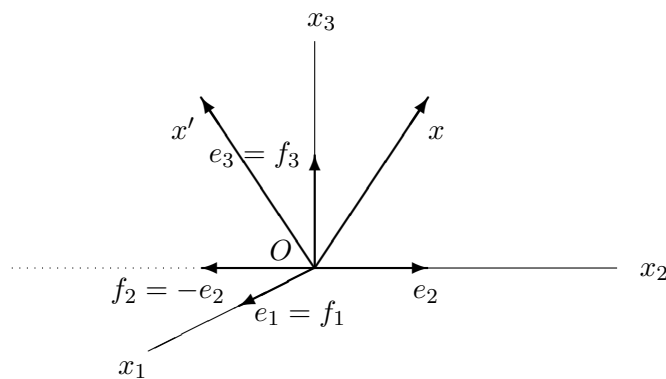


Abbildung 2.20: Spiegelung des Raumes an der  $\langle x_1, x_3 \rangle$ -Ebene

Die Basisvektoren  $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$  gehen über in die neue Basis  $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ , definiert durch

$$f_1 := e_1 \quad , \quad f_2 := -e_2 \quad , \quad f_3 := e_3.$$



Bezüglich der alten und der neuen Basis ist der Vektor  $x$  gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \\ &= 0 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

(ii) **Aufgabe**

Man berechne für diese Koordinatentransformation die Komponenten des Drehimpulsvektors  $L = r \times p$  bzgl. der transformierten Basis  $\mathcal{F}$ ; das Ergebnis ist in Abb. 2.21 zu sehen.

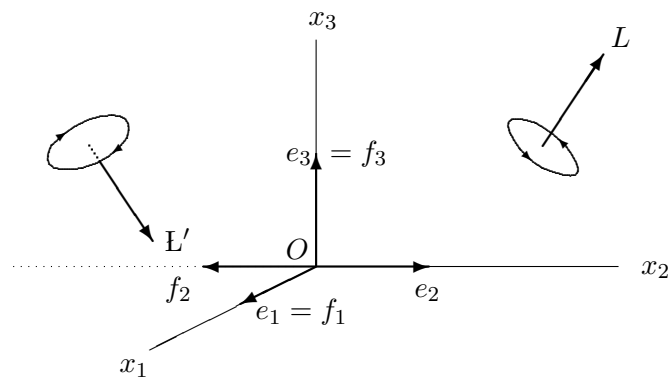


Abbildung 2.21: Spiegelung des Raumes an der  $\langle x_1, x_3 \rangle$ -Ebene

**Definition 2.9**

- (i) Vektoren, die unter linearen Koordinatentransformationen invariant bleiben, heißen *polare Vektoren*.
- (ii) Vektoren, deren Transformationsverhalten sich unter linearen Koordinatentransformationen ändert, heißen *Pseudo- oder axiale Vektoren*.

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , der Drehimpuls  $L$ , das Magnetfeld  $B$  und jedes Vektorprodukt  $a \times b$  zweier (polarer) Vektoren  $a$  und  $b$  sind Pseudovektoren.

**Bemerkung**

Tatsächlich sind alle diese mit Hilfe des Vektorproduktes erzeugten „axialen Vektoren“ keine Vektoren, sondern andere Objekte, sog. *Tensoren*; in gewisser Weise sind das lineare Abbildungen. Als Tensor dargestellt, besitzen diese

Größen automatisch das richtige Verhalten gegenüber Koordinatentransformationen.

So ist das Vektorprodukt  $a \times x$  eigentlich der Tensor

$$a \times x = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

welcher als lineare Abbildung

$$\begin{array}{lcl} a : & \mathbb{V}^3 & \longrightarrow \mathbb{V}^3 \\ & x & \longmapsto a \times x \end{array}$$

des Vektors  $x$  angesehen werden kann.

Von Nachteil ist, daß die physikalischen Tensorgleichungen weniger kompakt sind als die entsprechenden Pseudovektorgleichungen. Als abkürzende Schreibweise haben die Pseudovektoren daher durchaus eine Berechtigung, insbesondere, weil sie sich im  $\mathbb{R}^3$  auch anschaulich darstellen lassen, die zugehörigen Tensoren sind allerdings physikalisch tiefergründiger.

Man kann beispielsweise einen Impulsvektor  $p$  und einen Drehimpulsvektor  $L$  nicht sinnvoll addieren:

$$p + L = ?$$

Die Summe beider ist kein sinnvolles physikalisches Objekt mehr.<sup>4</sup>

## 2.6 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Parameterdarstellung von Geraden im  $\mathbb{R}^3$
- Parameterdarstellung von Ebenen im  $\mathbb{R}^3$
- Schnitte von Geraden-Geraden, Geraden-Ebenen und Ebenen-Ebenen im  $\mathbb{R}^3$
- Vektorprodukt und Spatprodukt im  $\mathbb{V}^3$
- Normalendarstellung von Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ , Hesse'sche Normalenform
- Abstandsberechnungen von parallelen Geraden und Ebenen bzw. windschiefen Geraden

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

---

<sup>4</sup>Die große Ausnahme ist die sog *schwache Wechselwirkung* in der Physik, welche z.B. für den radioaktiven  $\beta$ -Zerfall verantwortlich ist. Hier unterscheidet die Natur in der Tat zwischen einem rechtshändigen - und einem linkshändigen Koordinatensystem.

# Kapitel 3

## Lineare Abbildungen

### 3.1 Definition und Beispiele

In den bisherigen Ausführungen wurde gleichzeitig stets *ein* Vektorraum behandelt und in ihm gewisse Objekte studiert, etwa:

- Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren
- Basen, Dimension
- Orthogonalität (bei Vorliegen eines Skalarproduktes)

Jetzt sollen *zwei* Vektorräume  $V_1$  und  $V_2$  gleichzeitig betrachtet und Beziehungen zwischen ihnen studiert werden. Solche Beziehungen werden durch Abbildungen von  $V_1$  nach  $V_2$  hergestellt, und es sollen hier die einfachsten untersucht werden, die *linearen Abbildungen*.

#### Beispiel 3.1

Seien  $V_1 := \mathbb{V}^3$ ,  $V_2 := \mathbb{V}^2$  und die Abbildung  $P$  definiert durch:

$$P: V_1 \longrightarrow V_2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung  $P$  hat folgende Eigenschaften:

- (i) Additivität:

$$\begin{aligned} P(x + y) &= P\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = P\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= P(x) + P(y) \quad (x, y \in V_1) \end{aligned}$$

(ii) Homogenität:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda x) &= P\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = P\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}\right) \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \cdot P(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in V_1)
 \end{aligned}$$

### Bemerkung

$P$  ist die Projektion entlang der dritten Achse, denn offenbar ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 P : & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

„nicht sehr verschieden“ von  $P$ .

Ein Vektorraum besteht aus

- einer Menge  $V$
- einer Addition  $+$  :  $V \times V \longrightarrow V$
- einer Skalarenmultiplikation  $m$  :  $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$
- einer Menge (8) von Axiomen

Die Abbildung  $P$  aus dem einführenden Beispiel ist nun mit der Addition und der Skalarenmultiplikation in dem Sinne verträglich, daß es egal ist, ob man die Vektoren aus  $V_1$  zuerst addiert bzw. mit  $\lambda$  multipliziert und sie danach abbildet oder ob man sie zuerst abbildet und danach die Bilder in  $V_2$  addiert bzw. mit  $\lambda$  multipliziert.

### Definition 3.1

Seien  $V_1$  und  $V_2$  Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{K}$  und  $T$  eine Abbildung von  $V_1$  nach  $V_2$ .

$T$  heißt *linear* oder *lineare Abbildung*:  $\iff$

$$\bigwedge_{\substack{u, v \in V_1 \\ \lambda \in \mathbb{K}}} \begin{array}{l} T(u + v) = T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) = \lambda T(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 \times V_1 & \xrightarrow{\text{Addition in } V_1} & V_1 \\
 \langle u, v \rangle & & u + v \\
 \text{Lineare} \downarrow \text{Abbildung } T & & \text{Lineare} \downarrow \text{Abbildung } T \\
 V_2 \times V_2 & \xrightarrow{\text{Addition in } V_2} & V_2 \\
 \langle T(u), T(v) \rangle & & T(u) + T(v) = T(u + v)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times V_1 & \xrightarrow{\text{Multiplikation mit } \lambda \text{ in } V_1} & V_1 \\
 \langle \lambda, u \rangle & & \lambda \cdot u \\
 T \downarrow & & \downarrow T \\
 \mathbb{K} \times V_2 & \xrightarrow{\text{Multiplikation mit } \lambda \text{ in } V_2} & V_2 \\
 \langle \lambda, T(u) \rangle & & \lambda \cdot T(u) = T(\lambda \cdot u)
 \end{array}$$

Abbildung 3.1: Zur Linearität einer Abbildung

Man beachte, daß in der Definition bei der Anwendung der Abbildung  $T$  auf der linken Seite „+“ und „·“ als Operationen in  $V_1$  zu verstehen sind, bei der Anwendung von  $T$  auf der rechten Seite dagegen in  $V_2$ , s. Abb. 3.1.

### Definition 3.2

Seien  $V_1$  und  $V_2$  zwei Vektorräume. Die Menge aller linearen Abbildungen von  $V_1$  nach  $V_2$  wird mit  $LA(V_1, V_2)$  bezeichnet.

### Beispiele 3.2

(i)

$$\begin{array}{ccc}
 T_1 : & \mathbb{V}^3 & \longrightarrow & \mathbb{V}^2 \\
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 T_2 : & \mathbb{V}^3 & \longrightarrow & \mathbb{V}^1 = \mathbb{R} \\
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1 - 2x_2 + 5x_3
 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 T_3 : \quad \mathbb{V}^2 &\longrightarrow \mathbb{V}^3 \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 T_4 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 \langle a, b \rangle &\longmapsto a + bi
 \end{aligned}$$

(v) Sei  $T_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Welche Eigenschaft muß  $T_5$  haben, damit es eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen  $\mathbb{V}^1 = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  ist?

Hinweis:  $T_5(x) = T_5(x \cdot 1) \quad (x \in \mathbb{R})$

### Aufgabe

Man begründe, warum die Abbildungen

$$W(x) := \sqrt{x} \quad (x \geq 0),$$

$$L(x) := \ln x \quad (x > 0),$$

$$S(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

...

nichtlineare Abbildungen sind, und wie sich die Nicht-Linearität auswirkt.

(vi) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{P}_n := \{p : p \text{ ist Polynom mit Grad } p \leq n\}$ . Man definiere zwei Abbildungen  $D$  und  $I$  durch

$$D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$$

$$(D(p))(x) := a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$I : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{n+1}$$

$$(I(p))(x) := a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$$

jeweils für  $p \in \mathbb{P}_n$ , also mit geeigneten Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  dann für

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (vii) Die folgende Abbildung ist ein Beispiel einer nichtlinearen Abbildung. Warum?

$$T_7 : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

- (viii) Dieses Beispiel behandelt einen Vektorraum mit nicht endlicher Dimension; man sagt, solch ein Raum sei *unendlichdimensional*.

$$\mathbb{V}^\infty := \{x : x = (x_1, x_2, \dots), x_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet, } i \in \mathbb{N}\}$$

$$R, L : \mathbb{V}^\infty \longrightarrow \mathbb{V}^\infty$$

$$((x_1, x_2, \dots)) := (0, x_1, x_2, \dots) \quad (x \in \mathbb{V}^\infty)$$

$$((x_1, x_2, \dots)) := (x_2, x_3, \dots) \quad (x \in \mathbb{V}^\infty)$$

$R$  und  $L$  sind sog. *shift-Operatoren*. Diese spielen in der Quantenmechanik bei der Behandlung des Harmonischen Oszillators eine große Rolle.

### 3.2 Wertebereich, Kern und Invertierbarkeit

Im folgenden sollen einige Eigenschaften von linearen Abbildungen notiert werden, die vor allem in Hinblick auf die Matrizenrechnung und die Behandlung linearer Gleichungssysteme ausgewählt sind.

#### Definition 3.3

Seien  $V_1$  und  $V_2$  Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{K}$  sowie  $T$  eine lineare Abbildung von  $V_1$  nach  $V_2$ .

- (i)  $N(T) := \{u : u \in V_1, T(u) = \theta\}$  heißt *Nullraum* oder *Kern* von  $T$ .
- (ii)  $\dim N(T)$  heißt *Defekt* der linearen Abbildung  $T$ , geschrieben:  $\text{def } T$ .
- (iii)  $\dim W(T)$  heißt *Rang* der linearen Abbildung  $T$ , geschrieben:  $\text{rg } T$ .

#### Bemerkung

- (i) In der englischen Literatur wird Rang mit „rank“ bezeichnet. Das ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff „range of  $T$ “, der englischen Bezeichnung für den Wertebereich  $W(T)$  von  $T$ .

- (ii) Damit (ii) und (iii) der letzten Definition einen Sinn ergeben, müssen  $N(T)$  ein Teilraum von  $V_1$  und  $W(T)$  ein Teilraum von  $V_2$  sein; siehe dazu den folgenden Satz, Teile (i) und (ii).

**Satz 3.1**

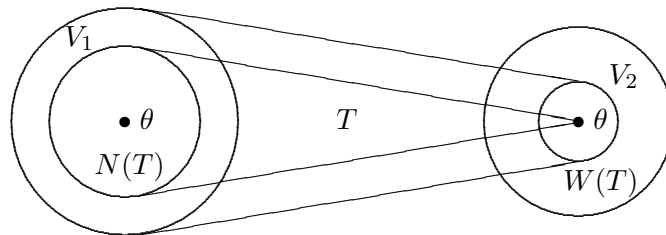
Seien  $V_1$  und  $V_2$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$  sowie  $T$  eine lineare Abbildung von  $V_1$  nach  $V_2$ . Dann gilt:

- (i)  $\theta \in N(T)$ ,  $N(T)$  ist ein Teilraum von  $V_1$ .  
(ii)  $W(T)$  ist ein Teilraum von  $V_2$ .  
(iii) Ist  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V_1$ , so ist  
 $W(T) = LH(\{T(b_1), \dots, T(b_n)\})$ .  
(iv)  $\dim V_1 = \dim W(T) + \dim N(T)$ .

**Bemerkung**

Nach (iii) gilt:  $\dim W(T) \leq n = \dim V_1$ . Wenn  $\dim W(T)$  also echt kleiner ist als  $\dim V_1$ , dann sind „einige Vektoren“ aus  $V_1$  von  $T$  in die Null von  $V_2$  abgebildet worden, s. Abb. 3.2.

Nach (i) bilden diese Vektoren ebenfalls einen Teilraum, und zwar einen Untervektorraum von  $V_1$ . Wie „groß“ dieser ist, d.h. welche Dimension er hat, darüber gibt (iv) Auskunft, der sog. *Dimensionssatz für lineare Abbildungen*.



$$\begin{array}{cccc}
 V_1 : & N(T) : & T : & W(T) : \\
 \dim = n & \dim = k & \text{Rang } n - k & \dim = n - k
 \end{array}$$

Abbildung 3.2: Graphische Veranschaulichung des Dimensionssatzes

*Beweis*

- (i)  $T(\theta) = T(0 \cdot \theta) = 0 \cdot T(\theta) = \theta$ .  
Der Beweis der Teilraumeigenschaft von  $N(T)$  sei als Übung empfohlen.  
(ii) Seien  $y_1, y_2 \in W(T)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann existieren dazu Urbilder  $x_1, x_2 \in V_1$ , also  $T(x_1) = y_1$ ,  $T(x_2) = y_2$ . Dann gilt:



- $y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2) \in W(T)$
- $\lambda y_1 = \lambda T(x_1) = T(\lambda x_1) \in W(T)$

(iii)  $W(T) \supseteq LH(\{T(b_1), \dots, T(b_n)\})$  :  
folgt aus (ii).

$W(T) \subseteq LH(\{T(b_1), \dots, T(b_n)\})$  :

Sei  $y \in W(T)$ . Dann existiert ein  $x \in V_1$  mit  $x = T(y)$ . Da  $B$  eine Basis von  $V_1$  ist, läßt sich  $x$  bzgl. der Basiselemente entwickeln:

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k \quad \text{mit geeigneten } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Dann gilt nach (ii):

$$y = T(x) = T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k T(b_k) \in LH(\{T(b_1), \dots, T(b_n)\}).$$

(iv) Sei  $B_N := \{x_1, \dots, x_k\}$  eine Basis von  $N(T)$ . Man ergänze diese Basis zu einer Basis  $B := \{x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_r\}$ ,  $r = n - k$  von  $V_1$ . Man bilde

$$y_i := T(z_i) \quad (i \in \{1, \dots, r\})$$

und zeige, daß

$$B_W := \{y_1, \dots, y_r\} \quad (i \in \{1, \dots, r\})$$

eine Basis von  $W(T)$ , also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist. Dieser Beweis sei als Übung empfohlen. Damit gilt dann

$$\dim W(T) = r = n - k = \dim V_1 - \dim N(T).$$

### Beispiel 3.3

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $e_k$  definiert durch

$$e_k := e_k^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (k\text{-te Zeile})$$

für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist  $B := \{e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)}\}$  die Standardbasis des Vektorraumes  $\mathbb{V}^3$ .

(i) Im Einführungsbeispiel dieses Kapitels ist dann

$$P(e_1^{(3)}) = e_1^{(2)} \quad , \quad P(e_2^{(3)}) = e_2^{(2)} \quad , \quad P(e_3^{(3)}) = \theta,$$

somit also

$$LH(\{P(e_1^{(3)}), P(e_2^{(3)}), P(e_3^{(3)})\}) = LH(\{e_1^{(2)}, e_2^{(2)}\}),$$

und mit Aussage (iii) des letzten Satzes gilt dann  $\dim W(P) = 2 < 3$ . Weiterhin ist  $N(P) = LH(\{e_3^{(3)}\})$ , also  $\dim N(P) = 1$ , und nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen folgt

$$\dim \mathbb{V}^3 = 3 = 2 + 1 = \dim W(P) + \dim N(P).$$

(ii) In Beispiel 3.2 (ii) gilt:

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{V}^3 &= 3 \\ \dim W(T_2) &= \dim \mathbb{R} = 1 . \\ \dim N(T_2) &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$T_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad , \quad T_2\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

und die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, also eine Basis von  $N(T_2)$ :

$$N(T_2) = LH\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

(iii) **Aufgabe**

Wie sehen die obigen Überlegungen für Beispiele 3.2 (v) und (vi) aus?

Eine beliebige Abbildung wird durch die Angabe aller ihrer Werte eindeutig definiert. Hat die Abbildung hingegen besondere Eigenschaften, so reichen manchmal schon weniger Werte hin: so ist z.B. eine Gerade im Raum (Polynom ersten Grades) durch die Angabe von nur zwei Punkten definiert und eindeutig

bestimmt. Etwas allgemeiner ist ein Polynom  $n$ -ten Grades schon durch  $n + 1$  Punkte, durch welche es verläuft, definiert und eindeutig bestimmt ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Ein solches Verhalten gibt es auch bei linearen Abbildungen. Der folgende Satz zeigt, daß eine lineare Abbildung schon dann als Abbildung auf dem ganzen Vektorraum definiert und eindeutig bestimmt ist, wenn man sie nur auf einer Basis definiert.

### Satz 3.2

Seien  $V_1, V_2$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V_1$  und  $T : V_1 \rightarrow V_2$  eine lineare Abbildung, von der nur die Werte auf  $B$  bekannt sind:

$$w_k = T(v_k) \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

### Beh.

$T$  ist auf ganz  $V_1$  bekannt und eindeutig bestimmt.

### Beweis

(i) Existenz:

Sei  $x \in V_1$ . Da  $B$  eine Basis ist, gibt es (bzgl.  $B$ ) eindeutig bestimmte Koeffizienten  $\lambda_k$  von  $x$  mit der Eigenschaft

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k.$$

Damit gilt:

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k T(v_k),$$

und das Bild von  $x$  unter  $T$  in  $V_2$  ist definiert.

(ii) Eindeutigkeit:

Seien dazu  $S_1$  und  $S_2$  zwei lineare Abbildungen mit der Eigenschaft

$$S_1(v_k) = S_2(v_k) = T(v_k) \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= S_1\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k S_1(v_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k T(v_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k S_2(v_k) \\
 &= S_2\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) \\
 &= S_2(x).
 \end{aligned}$$

### Frage

Wo gehen die Basiseigenschaften von  $B$ ,

- Lineare Unabhängigkeit
- Erzeugendensystem

in die Beweisführung ein ?

### Bemerkung

Dieser Satz beinhaltet einen bedeutsamen Sachverhalt:

Die gesamte Information über eine lineare Abbildung ist in den Bildern der Basisvektoren enthalten.

Anders ausgedrückt:

Man braucht eine lineare Abbildung nur auf einer Basis zu definieren, dann ist sie automatisch überall definiert.

### Beispiel 3.4

Für  $m, n \in \mathbb{N}$  betrachte man eine lineare Abbildung  $T : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$ . Um  $T$  anzugeben, reicht es zu sagen, was  $T$  mit den Basisvektoren  $e_k^{(n)}$  macht. Nun ist  $T(e_k^{(n)})$  für jedes  $k$  ein  $m$ -Tupel, und die Menge

$$\{T(e_k^{(n)}) : k \in \{1, \dots, n\}\}$$

besteht aus  $n$   $m$ -Tupeln  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{V}^m$ , also insgesamt  $n \cdot m$  Zahlen aus  $\mathbb{K}$ , in denen die lineare Abbildung  $T$  gleichermaßen codiert ist.

Das ist der Grund, weshalb man mit linearen Abbildungen in Computern so effektiv rechnen kann und bestrebt ist, nach Möglichkeit durch theoretische Überlegungen nichtlineare Probleme auf lineare Probleme zu reduzieren.

### Beispiel 3.5

Seien  $V_1 := V_2 := \mathbb{V}^3$  und  $B := \{e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)}\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{V}^3$ . Gemäß dem letzten Satz sei die lineare Abbildung  $T : V_1 \rightarrow V_2$  durch Angabe auf einer Basis von  $V_1$  definiert durch

$$T(e_1^{(3)}) : = e_2^{(3)}$$

$$T(e_2^{(3)}) : = -e_1^{(3)}$$

$$T(e_3^{(3)}) : = \theta$$

Wie läßt sich die Wirkung von  $T$  beschreiben?

### Lösung

Sei dazu  $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 v_k e_k^{(3)}$ . Dann gilt:

$$T(v) = \sum_{k=1}^3 v_k T(e_k^{(3)}) = v_1 e_2^{(3)} - v_2 e_1^{(3)} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wirkung von  $T$  ist also die folgende:

- Ein Vektor  $v \in \mathbb{V}^3$  wird auf die  $\langle e_1, e_2 \rangle$ -Ebene projiziert.
- Diese Projektion wird danach um  $\pi/2$  im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) gedreht.

$T$  läßt sich also beschreiben als Komposition (Hintereinanderausführung) zweier linearer Abbildungen  $P$  und  $D$ :  $T = D \circ P$ .

Der nächste Satz beinhaltet, daß auch eine solche Komposition linearer Abbildungen wieder eine lineare Abbildung ergibt:

### Satz 3.3

Seien  $V_1, V_2, V_3$  lineare Räume über  $\mathbb{K}$  und seien

$$T : V_1 \longrightarrow V_2 \quad , \quad S : V_2 \longrightarrow V_3$$

jeweils lineare Abbildungen. Dann ist auch

$$ST := S \circ T : V_1 \longrightarrow V_3$$

eine lineare Abbildung.

*Beweis*

Übung.

### Beispiel 3.6

Man betrachte Beispiel 3.2 (v). Nach dem letzten Satz sind mit den linearen Abbildungen

$$D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1} \quad \text{und} \quad I : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{n+1}$$

auch die beiden folgenden Abbildungen linear:

$$D \circ I : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n \quad \text{und} \quad I \circ D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n.$$

Weiterhin gilt:

$$id_{\mathbb{P}_n} = D \circ I \neq I \circ D.$$

Die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme steht in direktem Zusammenhang mit der Invertierbarkeit der sie beschreibenden linearen Abbildungen.

Zur Erinnerung:

Für jede – auch nichtlineare – Abbildung  $f$  gilt:

$$f \text{ ist invertierbar auf } W(f) \iff f \text{ ist injektiv, also bijektiv auf } W(f).$$

Zum Nachweis der Invertierbarkeit einer linearen Abbildung  $T$  müssen daher Kriterien angegeben werden, unter denen auf die Injektivität von  $T$  geschlossen werden kann.

Eine injektive lineare Abbildung darf keine zwei verschiedenen Elemente auf dasselbe Bild abbilden, insbesondere darf sie keine zwei verschiedenen Elemente auf die  $\theta$  abbilden. Da nun eine lineare Abbildung  $T$  das Element  $\theta$  stets auf  $\theta$  abbildet (warum ?), folgt für eine solche Abbildung sofort:

$$T \text{ ist injektiv} \implies N(T) = \{\theta\}.$$

Für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen *gleicher* Dimension gilt nun wesentlich mehr:

### Satz 3.4

Seien  $V_1, V_2$  lineare Räume über  $\mathbb{K}$  mit  $n := \dim V_1 = \dim V_2$ . Sei  $T : V_1 \rightarrow V_2$  eine lineare Abbildung.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $T$  ist invertierbar auf  $W(T)$ .
- (ii)  $T$  ist injektiv.
- (iii)  $N(T) = \{\theta\}$  (def  $T = 0$ )
- (iv)  $\dim W(T) = n$  (rg  $T = n$ )
- (v)  $T$  ist surjektiv.
- (vi)  $T$  ist bijektiv.

*Beweis*

Der folgende Beweis wird in Form eines sog. *Ringschlusses* geführt.

(i)  $\iff$  (ii):

Diese Aussage gilt für jede Abbildung.

(ii)  $\implies$  (iii):

Siehe die Bemerkung vor dem Satz.

(iii)  $\implies$  (iv):

Dimensionssatz für lineare Abbildungen:

$$n = \dim N(T) + \dim W(T) = 0 + n$$

(iv)  $\implies$  (v):

Jede Basis  $B$  von  $W(T)$  ist auch Basis von  $V_2$ , also gilt:  $W(T) = LH(B) = V_2$ .

(v)  $\implies$  (vi):

Ist  $T$  surjektiv, so ist  $W(T) = V_2$ , und damit gilt  $\dim W(T) = \dim V_2 = n$ . Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen ist dann  $N(T) = \{\theta\}$ . Damit folgt die Injektivität von  $T$  aus der folgenden Argumentation:

Für alle  $u, v \in V_1$  gelte  $T(u) = T(v)$

$$\longrightarrow T(u - v) = T(u) - T(v) = \theta$$

$$\longrightarrow (u - v) \in N(T) = \{\theta\}$$

$$\longrightarrow (u - v) = \theta$$

$$\longrightarrow u = v$$

Somit ist  $T$  auch injektiv, folglich also bijektiv.

(vi)  $\implies$  (i):

Trivial.

### Bemerkung

Dieser Satz gilt nur in Räumen endlicher Dimension. In Beispiel 3.2 (vii) gilt  $N(R) = \{\theta\}$ , es ist jedoch trotzdem  $W(R) \subsetneq \mathbb{V}^\infty$ , denn es gibt kein  $x \in \mathbb{V}^\infty$  mit der Eigenschaft  $R(x) = (1, 0, 0, \dots)$ .

### Definition 3.4

Seien  $V_1, V_2$  lineare Räume über  $\mathbb{K}$ .

$V_1$  heißt *isomorph* zu  $V_2$  :  $\iff$

es existiert eine bijektive lineare Abbildung  $T : V_1 \rightarrow V_2$ .

Jede solche Abbildung heißt dann ein (Vektorraum-) *Isomorphismus*.

### Bemerkung

(i) Ist  $V_1$  isomorph zu  $V_2$ , dann ist auch  $V_2$  isomorph zu  $V_1$ , denn:

$$\implies \begin{array}{ll} T & : V_1 \rightarrow V_2 \quad \text{linear und bijektiv} \\ T^{-1} & : V_2 \rightarrow V_1 \quad \text{linear und bijektiv:} \end{array}$$

Seien  $u := T(x)$ ,  $v := T(y) \in V_2$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T^{-1}(u + v) &= T^{-1}[T(x) + T(y)] = T^{-1}[T(x + y)] \\ &= (T^{-1} \circ T)(x + y) = x + y = T^{-1}(u) + T^{-1}(v) \\ \text{(b)} \quad T^{-1}(\lambda u) &= T^{-1}[\lambda T(x)] = T^{-1}[T(\lambda x)] \\ &= (T^{-1} \circ T)(\lambda x) = \lambda x = \lambda T^{-1}(u) \end{aligned}$$

(ii)  $\text{bijektiv} \iff \text{injektiv} \wedge \text{surjektiv}$

$T \in LA(V_1, V_2)$  ist also ein Isomorphismus

$\iff$

$$N(T) = \{\theta\} \quad \wedge \quad W(T) = V_2$$

(iii) Es läßt sich zeigen, daß  $V_1$  und  $V_2$  genau dann isomorph sind, wenn sie dieselbe Dimension haben. Mit anderen Worten, mathematisch, d.h. bis auf Isomorphie, gibt es nur einen Vektorraum der Dimension  $n$ , etwa den Raum  $\mathbb{V}^n$ .

Die überragende Rolle dieses Raumes bei praktischen Berechnungen wird im nächsten Kapitel verständlich, wenn Matrizen behandelt werden.



### 3.3 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Definition und Beispiele von linearen Abbildungen von  $\mathbb{V}^n$  nach  $\mathbb{V}^m$
- Beispiele nichtlinearer Abbildungen, Abgrenzung von linearen Abbildungen zu nichtlinearen Abbildungen

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Wertebereich, Kern und Invertierbarkeit linearer Abbildungen

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Warum sind lineare Abbildungen so „wertvoll“?
- Was bedeutet der Begriff „Linearisierung einer Abbildung“?

# Kapitel 4

## Matrizen

Matrizen gestatten es, das „Rechnen“ mit linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen auf das Rechnen mit Zahlen zurückzuführen.

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $T : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$  eine lineare Abbildung. Diese lineare Abbildung ist überall bekannt, wenn bekannt ist, wie die Bilder der Elemente einer Basis von  $\mathbb{V}^n$  aussehen. Genauer:

Ist  $B := \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \mathbb{V}^n$  eine Basis, so braucht man nur die Menge

$$\{v_k : v_k = T(u_k), k \in \{1, \dots, n\}\} \subseteq \mathbb{V}^m$$

zu kennen, also  $n$   $m$ -Tupel  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{V}^m$ , also  $n \cdot m$  Zahlen aus  $\mathbb{K}$ .

Dieser Sachverhalt soll jetzt quantitativ untersucht werden.

### 4.1 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Seien  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$ , also  $T$  aus der Menge der linearen Abbildungen von  $\mathbb{V}^n$  nach  $\mathbb{V}^m$ .

$$e_j^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (j\text{-te Zeile})$$

ist für  $j \in \{1, \dots, n\}$  ein Vektor der Standardbasis von  $\mathbb{V}^n$ .

Es ist  $a_j := T(e_j^{(n)}) \in \mathbb{V}^m$ , also

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Damit ergibt sich für das Bild eines Vektors  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j^{(n)} \in \mathbb{V}^n$ :

$$\begin{aligned}
 T(x) &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j^{(n)}\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j T(e_j^{(n)}) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j a_j = \sum_{j=1}^n x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i^{(m)}\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) e_i^{(m)} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^m.
 \end{aligned}$$

#### Definition 4.1

- (i) Ein  $n \cdot m$  - Tupel von Elementen aus  $\mathbb{K}$ ,

$$\langle a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn} \rangle,$$

geschrieben in der rechteckigen Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt eine  $m \times n$  - Matrix über  $\mathbb{K}$ .

- (ii) Die Menge der  $m \times n$  - Matrizen wird mit  $\mathbb{M}_{m \times n}^{\mathbb{K}}$  oder auch mit  $\mathbb{M}_{m \times n}$  bezeichnet.

#### Bemerkung

- (i) Eine  $m \times n$ -Matrix hat  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.  
(ii) Das Element  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  in der Matrix  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$  steht in der  $i$ -ten Zeile (von oben gezählt) und  $j$ -ten Spalte (von links gezählt):

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \end{array} \right) \leftarrow i\text{-te Zeile (von oben)} \\ \uparrow \\ j\text{-te Spalte (von links)} \end{array}$$

$a_{ij}$  heißt *Koeffizient* der Matrix  $A = (a_{ij})$ .

(iii) Sind  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}$ , so gilt

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}),$$

denn gemäß der Definition als (rechteckig dargestellten)  $n \cdot m$ -Tupeln kann man die Gleichheit von Matrizen auf die Gleichheit von  $p$ -Tupeln zurückführen.

(iv) Zur linearen Abbildung  $T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$  „gehört“ die Matrix

$$J(T) := A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{array}{ccc} J : LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m) & \longrightarrow & \mathbb{M}_{m \times n} \\ T & \longmapsto & J(T) = A, \end{array}$$

welche als Spalten gerade die Bilder der Einheitsvektoren  $e_j^{(n)}$  hat:

$$T(e_j^{(n)}) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i^{(m)} = a_{1j} e_1^{(m)} + \cdots + a_{mj} e_m^{(m)},$$

und die hier auftretenden Koeffizienten erscheinen als  $j$ -te Spalte der zu  $T$  gehörenden Matrix  $A$ . Weiterhin ist die folgende Regel ersichtlich:

$\begin{array}{l} \text{Spaltenzahl} = \text{Dimension des Urbildraumes} \\ \text{Zeilenzahl} = \text{Dimension des Bildraumes} \end{array}$
--

- (v) Die zur linearen Abbildung  $T$  „gehörende“ Matrix  $A := J(T)$  ist basisabhängig: wählt man in  $\mathbb{V}^n$  und  $\mathbb{V}^m$  andere Basen, nach denen man die Urbildvektoren  $x$  und die Bildvektoren  $T(x)$  entwickelt, so erhält man andere Matrizen.

Im Moment soll das hier jedoch (noch) nicht getan werden. Aus diesem Grunde kann man die Abbildung  $T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$  mit der Matrix  $J(T) = A \in \mathbb{M}_{m \times n}$  identifizieren und sagen,  $T$  ist die Matrix  $A$ . Diese Identifikation läuft darauf hinaus, die Abbildung  $J$  zu unterdrücken.

- (vi) Im Moment werden nur Matrizendarstellungen linearer Abbildungen zwischen den speziellen Vektorräumen  $\mathbb{V}^n$  und  $\mathbb{V}^m$  behandelt. Wie man diese Definition auf andere Vektorräume erweitert, wird später an einem Spezialfall angedeutet werden, s. Abschnitt 4.4.3.

### Beispiel 4.1

Sei  $T$  die lineare Abbildung, definiert durch

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V}^2 &\longrightarrow \mathbb{V}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es soll die zu  $T$  bzgl. den Standardbasen gehörende Matrix  $A := J(T)$  berechnet werden:

$$T(e_1^{(2)}) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1^{(2)} + 0 \cdot e_2^{(2)}$$

$$T(e_2^{(2)}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1^{(2)} + 1 \cdot e_2^{(2)}$$

$$\longrightarrow A = J(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das folgende Beispiel zeigt, daß die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix selbstverständlich nicht immer quadratisch sein muß:

### Beispiel 4.2

Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V}^2 &\longrightarrow \mathbb{V}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist linear. Die Matrix  $A = J(T)$  bzgl. der Standardbasen berechnet sich aus

$$\begin{aligned} T(e_1^{(2)}) &= T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot e_1^{(3)} + 1 \cdot e_2^{(3)} + 2 \cdot e_3^{(3)} \\ T(e_2^{(2)}) &= T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -4 \cdot e_1^{(3)} + 2 \cdot e_2^{(3)} + -5 \cdot e_3^{(3)} \\ \text{zu } A &= J(T) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 4.2 Rechenregeln für Matrizen

### 4.2.1 Addition und Skalare Multiplikation

Im Raum  $\mathbb{M}_{m \times n}$  sollen jetzt eine Addition der Elemente und eine Multiplikation mit Zahlen aus  $\mathbb{K}$  so eingeführt werden, daß

- die Summe  $A + B$  der beiden Matrizen  $A$  und  $B$  gerade diejenige Matrix ist, welche zur Summe  $T + S$  der entsprechenden linearen Abbildungen gehört:

$$J(T + S) = J(T) + J(S),$$

- das skalare Vielfache  $\lambda A$  der Matrix  $A$  gerade diejenige Matrix ist, welche zum skalaren Vielfachen  $\lambda T$  der linearen Abbildung  $T$  gehört:

$$J(\lambda T) = \lambda J(T).$$

Seien  $T, S \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$  und gelte

$$T(e_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad S(e_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}, \quad (k \in \{1, \dots, n\}),$$

dann ist für  $k \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} (T + S)(e_k^{(n)}) &= T(e_k^{(n)}) + S(e_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} + b_{mk} \end{pmatrix}, \\ (\lambda T)(e_k^{(n)}) &= \lambda T(e_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{1k} \\ \vdots \\ \lambda a_{mk} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

**Ergebnis**

Die zur linearen Abbildung  $T + S$  gehörende Matrix  $J(T + S)$  hat als Spalten die Summe der Spalten von  $J(T)$  und  $J(S)$ . Diese Matrix erhält man also durch „gliedweise“ Addition der Matrizen  $J(T)$  und  $J(S)$ . Analoges gilt für die Multiplikation mit einem Skalar.

**Definition 4.2**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{K}$  ein Zahlkörper. Im Vektorraum  $\mathbb{M}_{m \times n}$  werden eine Addition und eine Skalarenmultiplikation folgendermaßen erklärt:

$$\begin{aligned}
 + : \quad \mathbb{M}_{m \times n} \times \mathbb{M}_{m \times n} &\longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n} \\
 \langle A, B \rangle &\longmapsto A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \\
 \cdot : \quad \mathbb{K} \times \mathbb{M}_{m \times n} &\longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n} \\
 \langle \lambda, A \rangle &\longmapsto \lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Satz 4.1**

$(\mathbb{M}_{m \times n}, +, \cdot, \mathbb{K})$  ist ein linearer Raum der Dimension  $m \cdot n$ . Die Nullmatrix ist das neutrale Element bzgl. der Addition.

*Beweis*

Übung.  $\mathbb{M}_{m \times n} \cong \mathbb{V}^{m \cdot n}$

**4.2.2 Multiplikation von Matrizen**

Lineare Abbildungen lassen sich nicht nur addieren oder mit einer Zahl multiplizieren, sondern sie lassen sich auch komponieren (nacheinander ausführen).

Seien  $T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$  und  $S \in LA(\mathbb{V}^l, \mathbb{V}^n)$ . Dann läßt sich die Abbildung

$$TS := T \circ S : \mathbb{V}^l \longrightarrow \mathbb{V}^m$$

betrachten, welche als Komposition linearer Abbildungen ebenfalls linear ist.

**Problem**

Wenn  $A$  und  $B$  die zu  $T$  und  $S$  gehörenden Matrizen sind, welche Matrix gehört dann zu  $TS$ ?

**Lösung**

Das „Produkt“ der Matrizen  $A$  und  $B$ , und das wird gerade so definiert, daß es die Matrix der Abbildung  $TS$  ist.

Seien

$$S(e_j^{(l)}) = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad (j \in \{1, \dots, l\}),$$

$$T(e_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad (k \in \{1, \dots, n\}),$$

dann folgt

$$\begin{aligned} (TS)(e_j^{(l)}) &= T(S(e_j^{(l)})) = T\left(\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} T(e_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} \sum_{i=1}^m a_{ik} e_i^{(m)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} e_i^{(m)} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} \quad (j \in \{1, \dots, l\}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

mit  $c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ . Diese Betrachtung motiviert die folgende

**Definition 4.3** (Matrizenprodukt)

Die Matrizen  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{M}_{n \times l}$  seien definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix},$$



dann wird das *Matrizenprodukt* von  $A$  und  $B$  definiert durch

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{M}_{m \times n} \times \mathbb{M}_{n \times l} &\longrightarrow \mathbb{M}_{m \times l} \\ \langle A, B \rangle &\longmapsto A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l\}).$$

### Bemerkung

- (i) Das Produkt  $A \cdot B$  zweier Matrizen ist *nur* dann definiert, wenn gilt:

Spaltenzahl des linken Faktors = Zeilenzahl des rechten Faktors.

Gemäß der Einführung von Matrizen als einer Darstellung für lineare Abbildungen ist das aber klar:

Die Dimension des Urbildraumes der zweiten Abbildung ist die Spaltenzahl des linken Faktors. Diese muß übereinstimmen mit der Dimension des Bildraumes der ersten Abbildung, also der Zeilenzahl des rechten Faktors.

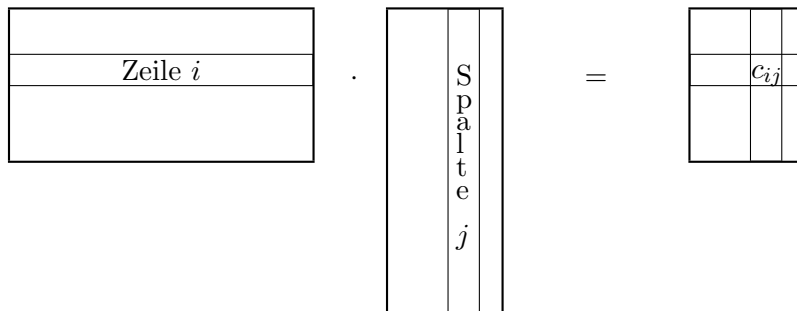
- (ii) Der Koeffizient  $c_{ij}$  der Produktmatrix  $A \cdot B$  ist zu berechnen, indem man die  $i$ -te Zeile von  $A$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $B$  elementweise multipliziert; das heißt genauer:

Das Element  $c_{ij}$  entsteht, indem die  $i$ -te Zeile von  $A$  und die  $j$ -te Spalte von  $B$  als Elemente von  $\mathbb{V}^n$  aufgefaßt werden und deren Skalarprodukt gebildet wird, s. Abb. 4.1.

$$\begin{aligned} S \in LA(\mathbb{V}^l, \mathbb{V}^n), T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m) \\ \implies (T \circ S) \in LA(\mathbb{V}^l, \mathbb{V}^m) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} B = J(S) \in \mathbb{M}_{n \times l} \\ A = J(T) \in \mathbb{M}_{m \times n} \end{aligned} \right\} \implies A \cdot B = J(T) \cdot J(S) = J(T \circ S) \in \mathbb{M}_{m \times l}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{V}^l & \xrightarrow{S} & \mathbb{V}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{V}^m \\ & & \boxed{\phantom{\mathbb{V}^n}} & & \uparrow \\ & & T \circ S & & \end{array}$$



$$\text{Zeile } i \text{ von } A \cdot \text{Spalte } j \text{ von } B = c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Abbildung 4.1: Matrizenprodukt

**Beispiel 4.3**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 23 \\ -4 & 3 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Zur praktischen Berechnung des Matrizenproduktes ist das *Schema von Falk* geeignet:

Der erste (linke) Faktor wird links unten, der zweite (rechte) Faktor rechts oben angeordnet. Das Matrixelement  $c_{ij}$  der Produktmatrix  $C = A \cdot B$  an der Stelle  $(i, j)$  befindet sich dann im Schnittpunkt der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $B$ , s. Abb. 4.2.

			1	1	0		
			-2	3	5	$B$	
			0	1	4		
	$A$	1	4	2	-7	15	28
		4	0	-3	4	1	-12
							$C = A \cdot B$

Abbildung 4.2: Schema von Falk

**Satz 4.2**

Seien  $A, B, C$  Matrizen geeigneter Dimension, so daß sich die folgenden Summen und Produkte jeweils bilden lassen. Dann gilt:

- (i)  $A(BC) = (AB)C =: ABC$
- (ii)  $(A + B)C = AC + BC$
- (iii)  $A(B + C) = AB + AC$

*Beweis*

Rechnen!

**Bemerkung**

- (i) Sind  $m, n, l \in \mathbb{N}$  mit  $m \neq l$ ,  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n \times l}$ , dann existiert das Produkt  $AB$ , *nicht* jedoch das Produkt  $BA$ .
- (ii) Sind  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ , dann sind für  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n \times m}$  sowohl  $AB$  als auch  $BA$  definiert, es gilt jedoch

$$AB \in \mathbb{M}_{m \times m},$$

$$BA \in \mathbb{M}_{n \times n},$$

also insbesondere  $AB \neq BA$ .

- (iii) Auch im Fall  $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}$ , also im Fall quadratischer Matrizen, ist i.a.  $AB \neq BA$ , d.h. das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ.

**Beispiel 4.4**

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

→

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel zeigt darüberhinaus:

Es gibt Matrizen  $A \neq O, B \neq O$  mit der Eigenschaft

$$A \cdot B = O \quad (\text{Nullmatrix}).$$

Die Multiplikation von Matrizen ist also nicht nullteilerfrei.

- (iv) Mit der Matrizenmultiplikation als (neben der Addition zweiten) Verknüpfung bildet  $\mathbb{M}_{n \times n}$  einen Ring, welcher allerdings Nullteiler enthält. Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist die Einheitsmatrix.

**Bemerkung für Eingeweihte**

$$\begin{aligned} \text{Ring} &= \text{Gruppe} + \text{Halbgruppe} \\ \text{Algebra} &= \text{Vektorraum} + \text{Halbgruppe} \end{aligned}$$

Die  $(n \times n)$ -Matrizen bilden also eine Algebra mit Einselement.

**Problem**

$\mathbb{M}_{m \times 1}$ -Matrizen und  $\mathbb{V}^m$ -Vektoren lassen sich in der Schreibweise nicht unterscheiden. Der Kalkül der Matrizen ist jedoch so angelegt, daß man zwischen beiden Größen gar nicht zu unterscheiden braucht!

Sei dazu

$$A = J(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n}.$$

- Für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n$  ist

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i^{(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^m. \end{aligned}$$

- Zum gleichen  $\mathbb{V}^m$ -Vektor bzw. zur gleichen  $(m \times 1)$ -Matrix gelangt man aber, wenn man die Matrix  $A$  mit der  $(n \times 1)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times 1}$$

nach den Regeln der Matrizenmultiplikation multipliziert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times 1}.$$

Die Bilder  $T(x)$  ( $x \in \mathbb{V}^n$ ) lassen sich also dadurch berechnen, daß man die (zu  $T$  bzgl. der Standardbasen in  $\mathbb{V}^n$  und  $\mathbb{V}^m$  gehörende) Matrix  $A = J(T)$  von rechts mit der  $(n \times 1)$ -Matrix  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  multipliziert und das Ergebnis als  $\mathbb{V}^m$ -Vektor auffaßt.

Indem man also den Isomorphismus (Definition 3.4)

$$F: \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{M}_{n \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

„unterdrückt“ und damit  $\mathbb{V}^n$ -Vektoren mit  $(n \times 1)$ -Matrizen identifiziert, so kann man auch den Isomorphismus

$$J: LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m) \longrightarrow \mathbb{M}_{m \times n}$$

$$T \longmapsto J(T) = A$$

„unterdrücken“ und die Abbildung  $T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$  mit der zugehörigen Matrix  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$  bzgl. der Standardbasen identifizieren. Zwischen  $T$  und  $A$  braucht also in Zukunft nicht mehr unterschieden zu werden.

Allerdings gilt das nur, wenn sowohl im Urbildraum  $\mathbb{V}^n$  als auch im Bildraum  $\mathbb{V}^m$  zur Darstellung der die lineare Abbildung  $T$  beschreibenden Matrix  $A = J(T)$  jeweils die Standardbasis verwendet wird.

### 4.3 Matrixdarstellung beliebiger linearer Abbildungen

Sind  $V_1, V_2$  beliebige  $n$  bzw.  $m$ -dimensionale Vektorräume, also nicht notwendig gleich  $\mathbb{V}^n$  oder  $\mathbb{V}^m$ , und ist  $T: V_1 \rightarrow V_2$  eine lineare Abbildung, so erhält man eine (basisabhängige!) Matrixdarstellung von  $T$  wie folgt:

- (i) Man wähle in  $V_1$  und  $V_2$  je eine Basis

$$B := \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V_1,$$

$$D := \{d_1, \dots, d_m\} \subseteq V_2.$$

- (ii) Die lineare Abbildung  $T$ , angewandt auf ein Element  $b_j \in B$ , liefert ein Element  $y_j \in V_2$ , welches sich als Linearkombination der Basiselemente  $d_i$  darstellen läßt:

$$T(b_j) = y_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i.$$

### 4.3. MATRIXDARSTELLUNG BELIEBIGER LINEARER ABBILDUNGEN

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist die Matrizendarstellung von  $T$  bzgl. der Basen  $B$  und  $D$ : die Spalten von  $A$  sind die Komponenten der Bilder der Basisvektoren der Basis  $B$  von  $V_1$  bzgl. der Basis  $D$  von  $V_2$ .

#### Beispiele 4.5

Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte man den Raum  $\mathbb{P}_n$  mit der Basis  $B$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n &:= \{p : p \text{ ist Polynom mit Grad } p \leq n\}, \\ B &:= \{1, x, x^2, \dots, x^n\}. \end{aligned}$$

Man definiere zwei Abbildungen  $D$  und  $I$  durch

$$\begin{aligned} D : \mathbb{P}_n &\longrightarrow \mathbb{P}_{n-1} \\ p &\longmapsto p' \\ \\ I : \mathbb{P}_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{P}_n \\ p &\longmapsto I(p) \quad (I(p))(x) := \int_0^x p(t) dt. \end{aligned}$$

Durch Anwendung von  $D$  und  $I$  auf die jeweiligen Basiselemente und nachfolgender Entwicklung im Bildraum erhält man

(i) Abbildung  $D$ :

$$\begin{aligned} D(x^0) &= 0 = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} \\ D(x^1) &= 1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} \\ &\vdots \\ D(x^n) &= nx^{n-1} = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \dots + n \cdot x^{n-1} \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\longrightarrow J(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times (n+1)}$$

(ii) Abbildung  $I$ :

$$\begin{aligned}
 I(x^0) &= x = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} \\
 I(x^1) &= \frac{x^2}{2} = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} \\
 &\vdots \\
 I(x^{n-1}) &= \frac{x^n}{n} = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \dots + \frac{1}{n} \cdot x^n
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\longrightarrow J(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{(n+1) \times n}$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned}
 J(D) \cdot J(I) &= E_n \in \mathbb{M}_{n \times n} \\
 J(I) \cdot J(D) &\neq E_{n+1} \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (n+1)}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

wegen

$$(D \circ I)(p) = p, \quad (I \circ D)(p) = p - p(0) \cdot 1.$$

Was hat man nun davon, für diese beiden linearen Abbildungen eine Matrizen­darstellung zur Verfügung zu haben? Dadurch wird man in die Lage versetzt, die Ableitung bzw. eine Stammfunktion eines Polynoms einfach dadurch „auszurechnen“, daß man sich ausschließlich mit seinen Koeffizienten beschäftigt und das Polynom „nur“ als Element eines geeigneten Raumes  $\mathbb{V}^n$  auffaßt. Solch eine ausschließlich numerische Behandlung des Problems der Differentiation und Integration liefert eine Idee, wie diese Operationen als Algorithmen auf einem Computer ablaufen. Dadurch wird auch die überragende Bedeutung der Spaltenräume  $\mathbb{V}^n$  aufgezeigt.

Die vorstehenden Überlegungen sollen an einem Beispiel demonstriert werden:

#### Beispiel 4.6

Seien  $n = 3$  und  $p \in \mathbb{P}_3$  das Polynom, definiert durch

$$p(x) := 1 + 4x - 3x^2 + 12x^3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bezüglich der Basis  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$  in  $\mathbb{P}_3$  ( $\mathbb{P}_3$  ist vierdimensional!) erhält man für die Abbildungen  $D$  und  $I$  die folgenden Matrizen­darstellungen:

$$J(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}, \quad J(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{5 \times 4}.$$

Damit lassen sich die Ableitung und eine Stammfunktion von  $p$  einfach dadurch berechnen, daß man eine Matrix-Vektor-Multiplikation durchführt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4 \cdot 1 - 6 \cdot x + 36 \cdot x^2 \\ \int_0^x p(t) dt &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4. \end{aligned}$$

## 4.4 Beispiele ausgezeichneter Matrizen

In diesem Abschnitt werden einige ausgezeichnete Matrizen aufgelistet, um den Sprachgebrauch zu vereinfachen. Bis auf die ersten beiden Anstriche beziehen sich alle anderen Fälle auf den Fall sog. *quadratischer* Matrizen, d.h.  $m = n$ .

### (i) Transponierte Matrix

Die *Transponierte* einer Matrix entsteht durch Spiegelung an der Hauptdiagonale:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n} \implies A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times m}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 3} \implies A^T := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 2}$$

### (ii) Adjungierte Matrix

Die *adjungierte* Matrix spielt nur dann eine Rolle, wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  gilt; sonst ist sie gleich der Transponierten. Im Gegensatz zur letzteren muß man zusätzlich zur konjugiert komplexen Zahl übergehen:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n} \implies A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times m}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2} \implies A^* := \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$$



Man beachte:  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix} \neq A$ . Sind jedoch alle Koeffizienten  $a_{ij}$  reell, so gilt:  $A^* = A^T$ .

(iii) **Quadratische Matrix**

Eine Matrix mit genauso vielen Zeilen wie Spalten heißt *quadratisch*. Für eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$  gilt also stets:  $m = n$ ,  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ .

(iv) **Dreiecksmatrix**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i < j$$

obere Dreiecksmatrix

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i > j$$

(v) **Diagonalmatrix**

Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix, welche nur in der *Hauptdiagonale* möglicherweise von 0 verschiedene Werte besitzt:

$$A \text{ Diagonalmatrix} \implies a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

(vi) **Einheitsmatrix**

$$A \text{ Diagonalmatrix} \wedge a_{ii} = 1 \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

(vii) **Invertierbare Matrix**

Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  heißt *invertierbar*, wenn es eine andere quadratische Matrix  $B \in \mathbb{M}_{n \times n}$  gibt, so daß gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

$B$  heißt *die zu A inverse Matrix*. Sie ist im Falle ihrer Existenz eindeutig bestimmt und wird mit  $A^{-1}$  bezeichnet.

**Beispiel**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \implies AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E = AA^{-1}$$

(viii) **Reguläre und singuläre Matrix**

$$A \text{ heißt regulär} \iff A \text{ ist invertierbar}$$

$$A \text{ heißt singulär} \iff A \text{ ist nicht invertierbar}$$

**Satz 4.3**

$$A \text{ regulär} \iff \text{Spalten (Zeilen) von } A \text{ sind linear unabhängig}$$

$$A \text{ singulär} \iff \text{Spalten (Zeilen) von } A \text{ sind linear abhängig}$$

(ix) **Nullteiler**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man beachte, daß  $A$  und  $B$  beide singulär sind.

(x) **Nicht kommutative Matrizen**

Für die Matrizen des letzten Anstriches ist

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$$

(xi) **Symmetrische Matrix**

$$A \text{ heißt symmetrisch} \quad :\iff \quad A = A^*$$

Es gilt also

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

daraus folgt insbesondere, daß Hauptdiagonalelemente stets reell sind.

**Beispiel**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 4 \\ i & 4 & 3 \end{pmatrix} = A^* \quad \text{ist symmetrisch.}$$

(xii) **Orthogonale bzw. unitäre Matrix**

Eine reelle (komplexe) Matrix heißt *orthogonal* (*unitär*), wenn gilt:

$$A \cdot A^T = E \quad (A \cdot A^* = E).$$

Insbesondere sind orthogonale (unitäre) Matrizen invertierbar (warum?).

**Beispiel**  $A := \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$  ist für  $\phi \in \mathbb{R}$  eine orthogonale Matrix.

Man beachte:

Die Spalten (Zeilen) einer orthogonalen Matrix bilden eine ONB.

(xiii) **Idempotente Matrix**

Eine Matrix  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  mit  $A^2 = A$  heißt *idempotent*.

**Beispiel**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Idempotente Matrizen sind die Darstellungen von Projektionsabbildungen.

(xiv) **Nilpotente Matrix**

Eine Matrix  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  heißt *nilpotent*, wenn es ein  $p \in \mathbb{N}$  gibt mit  $A^p = O$ .

**Beispiel**

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nilpotent, denn es gilt:  $A^3 = O$ .

Nilpotente Matrizen sind stets singulär. Es ist

$$\theta = R(A^3) \subsetneq R(A^2) \subsetneq R(A) \subsetneq R(A^0 = E) = \mathbb{V}^3.$$

**4.5 Rang einer Matrix**

Als Rang einer linearen Abbildung  $T : V_1 \rightarrow V_2$  wird die Größe  $\dim W(T)$  definiert:  $\text{rg } T := \dim W(T)$ . Entsprechend versteht man unter dem Rang einer Matrix den Rang der zugehörigen linearen Abbildung  $T = J^{-1}(A)$ .

**Definition 4.4**

Seien

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = J(T), \quad \text{also } A \in \mathbb{M}_{m \times n};$$

$$a_j^{(S)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j \in \{1, \dots, n\}) \quad (\text{Spalten von } A);$$

$$a_i^{(Z)} := (a_{i1} \dots a_{in}) \quad (i \in \{1, \dots, m\}) \quad (\text{Zeilen von } A).$$

- (i) Der *Rang* der Matrix  $A$  wird definiert als Rang der zugehörigen linearen Abbildung:

$$\text{rg}(A) := \dim W[T = J^{-1}(A) : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m].$$

- (ii) Der *Spaltenrang* der Matrix  $A$  wird definiert als die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten  $a_j^{(S)}$ , aufgefaßt als Elemente von  $\mathbb{V}^m \cong \mathbb{M}_{m \times 1}$ .
- (iii) Der *Zeilenrang* der Matrix  $A$  wird definiert als die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen  $a_i^{(Z)}$ , aufgefaßt als Elemente von  $\mathbb{V}^n \cong \mathbb{M}_{1 \times n}$ .

Aufgrund des folgenden Satzes braucht man zwischen den drei Definitionen für den Rang einer Matrix gar nicht zu unterscheiden:

**Satz 4.4**

- (i)  $\text{rg}(A) = \text{Spaltenrang von } A$
- (ii)  $\text{Spaltenrang von } A = \text{Zeilenrang von } A$

Es ist also gerechtfertigt, vom Rang einer Matrix schlechthin zu sprechen.

**Beispiel 4.7**

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

*Beweis* von Satz 4.4

- (i) Sei  $B := \{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$ , also  $B$  die Standardbasis von  $\mathbb{V}^n$ . Die Bilder dieser Standardbasis unter der linearen Abbildung  $T$  erzeugen  $W(T)$ :

$$W(T) = W[J^{-1}(A)] = LH \left( \{T(e_1^{(n)}), \dots, T(e_n^{(n)})\} \right).$$

Nun bestehen die Spalten der Matrix  $A$  gerade aus diesen Bildern. Damit ist die Maximalzahl linear unabhängiger Elemente dieser Bilder, der Rang der Matrix  $A$ , gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von  $A$ , dem Spaltenrang von  $A$ .

- (ii) Siehe das Buch „Lineare Algebra“ von K. Jänich.

Einer der wichtigsten Gründe, sich mit Vektoren aus  $\mathbb{V}^n$  und Matrizen zu beschäftigen, besteht darin, die hier entwickelten Überlegungen und Resultate zur Lösung *linearer Gleichungssysteme* nutzbar zu machen. Dazu wird ein Beispiel betrachtet.

**Beispiel 4.8**

Gesucht sind die Teilströme  $I_1, I_2, I_3, I_4$  in Abhängigkeit von den Widerständen  $R_1, R_2, R_3, R_4$  und der Gleichspannung  $U$ . Drei Maschenregeln und eine Knotenpunktregel führen auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc} I_1 R_1 & + & I_2 R_2 & & & = & 0 \\ & & & I_3 R_3 & + & I_4 R_4 & = & 0 \\ I_1 R_1 & & & + & I_3 R_3 & & = & U \\ I_1 & - & I_2 & - & I_3 & + & I_4 & = & 0 \end{array}$$

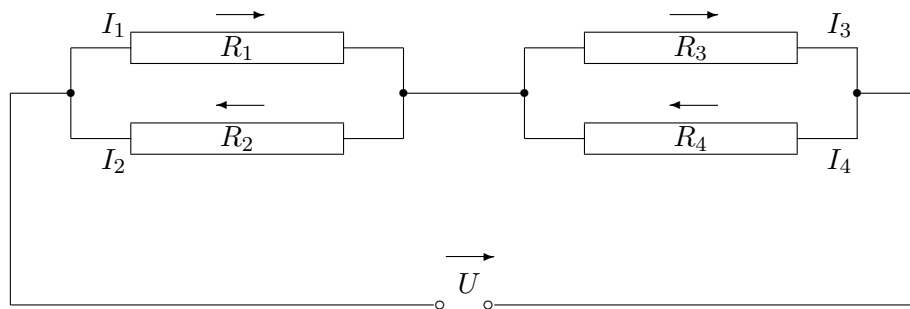


Abbildung 4.3: Schaltung mit vier Widerständen

Dieses System linearer Gleichungen läßt sich in Form einer Matrix-Vektor-Gleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix},$$

also in der Form  $Ax = b$ .

Wenn man weiß, daß  $A$  invertierbar ist und die inverse Matrix  $A^{-1}$  kennt, so läßt sich die Lösung ( $\sim$  der „Lösungsvektor“) sofort hinschreiben:

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

Die inverse Matrix erhält man

- mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder
- mit Hilfe von Determinanten und Adjunkten.

Im vorliegenden Beispiel ergibt sich mit der Abkürzung

$$\det(A) := R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$$

für die sog. *Determinante* der Matrix  $A$  die inverse Matrix zu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} R_3R_4 & -R_2R_3 & R_2R_3 + R_2R_4 & R_2R_3R_4 \\ R_1R_3 + R_1R_4 + R_3R_4 & R_1R_3 & -R_1R_3 - R_1R_4 & -R_1R_3R_4 \\ -R_1R_4 & R_1R_2 & R_1R_4 + R_2R_4 & -R_1R_2R_4 \\ R_1R_3 & R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 & -R_1R_3 - R_2R_3 & R_1R_2R_3 \end{pmatrix},$$

und damit die (hier: eindeutig bestimmte) Lösung des linearen Gleichungssystems zu

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{U}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} R_2(R_3 + R_4) \\ -R_1(R_3 + R_4) \\ R_4(R_1 + R_2) \\ -R_3(R_1 + R_2) \end{pmatrix}.$$

An diesem konkreten Beispiel erkennt man darüberhinaus, daß es sehr wohl sinnvoll sein kann, andere als nur dreidimensionale Vektoren zu betrachten. Man kann diese zwar nicht mehr geometrisch interpretieren, mit ihnen aber genauso rechnen.

Dieses lineare Gleichungssystem ist durch die Bereitstellung der inversen Matrix  $A^{-1}$  gelöst worden.

### Problem

- Gibt es zu jeder Matrix eine inverse Matrix?
- Wenn ja, wie erhält man diese dann?

Der Beantwortung dieser Fragen ist der Rest dieses Abschnittes gewidmet.

### Definition 4.5

Unter einer *elementaren Zeilenumformung* versteht man eine der folgenden Operationen

- (i) Vertauschung zweier Zeilen
- (ii) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$
- (iii) Addition einer Zeile zu einer anderen

Zusammen bedeuten (ii) und (iii):

Addition einer Linearkombination von Zeilen zu einer anderen Zeile.

### Bemerkung

- (i) Es ist unmittelbar einleuchtend, daß die Operationen der elementaren Zeilenumformung mit den einzelnen Zeilen eines linearen Gleichungssystems durchgeführt werden können – und damit mit den Zeilen der um  $b$  erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A, b)$ , – ohne daß sich die Lösungsmenge ändert.
- (ii) Analog ist eine *elementare Spaltenumformung* definiert. Führt man eine solche jedoch mit den Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems durch, so ändert sich die Anordnung der Variablen; darüber ist dann gegebenenfalls Buch zu führen.

Die zuletzt gemachten Ausführungen sollen die Motivation dafür liefern, warum man sich überhaupt mit dem Rang einer Matrix und sog. *rangerhaltenden Operationen* beschäftigt.

#### Beispiel 4.9

Nach einer Serie elementarer Umformungen kann eine Matrix kaum wiederzuerkennen sein. Man beobachte, wie die folgende  $(3 \times 3)$ -Matrix durch elementare Umformungen gleichsam „abgeräumt“ wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trotz dieser umfangreichen Veränderungen bleibt ein wichtiges Merkmal der Matrix erhalten, nämlich ihr Rang:

#### Satz 4.5

Elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

#### Beweis

Elementare Zeilenumformungen ändern die lineare Hülle der Zeilen nicht, also auch nicht den Zeilenrang, welcher die Dimension dieser linearen Hülle ist. Entsprechend ändern elementare Spaltenumformungen den Spaltenrang nicht. Da Zeilen- und Spaltenrang gleich und gleich dem Rang der Matrix (als Darstellung einer linearen Abbildung) sind, folgt die Behauptung.

Nicht im Satz aufgeführt, jedoch unmittelbar klar ist, daß man bei einer Matrix Null-Zeilen oder Null-Spalten hinzufügen oder weglassen kann, ohne daß sich der Rang ändert.

Es gibt Matrizen, deren Rang sich unmittelbar ablesen läßt:

#### Satz 4.6

Sei  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ . Seien die ersten  $r$  Hauptdiagonalelemente ungleich Null und die letzten  $n - r$  Zeilen sowie alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale Null:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & & \\ 0 & a_{22} & & & & & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

**Beh.**  $\operatorname{rg}(A) = r$

*Beweis*

Weglassen der letzten  $(n - r)$  Zeilen ändert den Rang nicht, und die ersten  $r$  Zeilen sind linear unabhängig (warum?).

### Ziel im folgenden

Transformation einer Matrix mittels elementarer Umformungen derart, daß sie die obige Gestalt bekommt.

### Beispiel 4.10

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ \boxed{-1} & -1 & -2 & -2 \\ \boxed{2} & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} && \text{III} := \text{I} + \text{III} \\
 & && \text{IV} := \text{IV} + (-2) \cdot \text{I} \\
 = & \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} && \text{IV} := \text{IV} + (-1) \cdot \text{II} \\
 = & \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{letzte Zeile streichen} \\
 = & \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 = & 3
 \end{aligned}$$

## 4.6 Invertierung einer Matrix

Die im letzten Abschnitt behandelten elementaren Zeilenumformungen können dazu benutzt werden, eine (reguläre) Matrix  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  zu invertieren.

### Satz 4.7

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A, B, C \in \mathbb{M}_{n \times n}$  und gelte  $A \cdot B = C$ . Überführt man  $A$  bzw.  $C$  durch dieselben elementaren Zeilenumformungen in  $A'$  bzw.  $C'$ , so gilt:

$$A' \cdot B = C'.$$

*Beweis*



$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right) \\
 A \quad \cdot \quad B \quad = \quad C
 \end{array}$$

Wenn man in  $A$  (nicht in  $B$ !) zwei Zeilen vertauscht, so geschieht in der Produktmatrix  $C$  offenbar dasselbe. Ebenso bewirken die Multiplikation der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$  und die Addition eines Vielfachen der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile dasselbe in der Produktmatrix  $C$ .

Wegen  $A \cdot A^{-1} = E$  lautet die Nutzanwendung des letzten Satzes auf das Problem der Matrixinvertierung:

### Folgerung

Transformiert man  $A$  durch elementare Zeilenumformungen in  $E$ , so verwandeln dieselben elementaren Zeilenumformungen  $E$  in  $X = A^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 A \cdot A^{-1} & = & E \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E \cdot A^{-1} & = & X = A^{-1}
 \end{array}$$

Es bleibt also nur noch zu überlegen, *wie* man eine invertierbare Matrix durch die Operationen

- Vertauschung zweier Zeilen
- Multiplikation mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen

in die Einheitsmatrix verwandelt. Dazu ein

### Beispiel 4.11

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{M}_{4 \times 4}.$$

---


$$\text{Anfang: } A = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = E$$


---

$$1. \text{ Schritt: } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$2. \text{ Schritt: } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$3. \text{ Schritt: } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$


---

$$4. \text{ Schritt: } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$5. \text{ Schritt: } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$


---

$$6. \text{ Schritt: } E = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) = A^{-1}$$


---

Ersichtlich ist das Procedere das folgende:

- In den ersten drei Schritten wird eine obere Dreiecksmatrix erzeugt.
  - In den weiteren zwei Schritten wird das rechte obere Dreieck abgeräumt.
  - In einem letzten Schritt schließlich werden nur Einsen in der Hauptdiagonale stengelassen.
-

## 4.7 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Rechenregeln für Matrizen
- Beispiele ausgezeichneter Matrizen
- Rang einer Matrix
- Invertierung einer Matrix mit dem Gauß-Algorithmus

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Was ist die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung von  $\mathbb{V}^n$  nach  $\mathbb{V}^m$  und wie berechnet man sie?

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Was ist die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung einer beliebigen linearen Abbildung und wie berechnet man sie?
- Zusammenhang des Rangs einer Matrix mit dem Rang der zugehörigen linearen Abbildung, Dimensionsbetrachtungen

# Kapitel 5

## Lineare Gleichungssysteme

Im Anschluß an die Bemerkung auf p. 105 wurde festgestellt, daß die folgenden beiden Begriffe nicht unterschieden zu werden brauchen:

- Lineare Abbildungen  $T \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$ ;
- ihre jeweilige Matrixdarstellung  $A = J(T) \in \mathbb{M}_{m \times n}$  bzgl. der Standardbasen in den Räumen  $\mathbb{V}^n$  und  $\mathbb{V}^m$ .

Von dieser Identifikation wird im folgenden Gebrauch gemacht. So wird von einer Matrix  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$  als von einer linearen Abbildung  $A \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$  gesprochen; insbesondere läßt sich eine Matrix  $A$  also auf einen Vektor  $x \in \mathbb{V}^n$  „anwenden“, als Ergebnis erhält man einen Vektor  $b \in \mathbb{V}^m$  :  $Ax = b$ .

### 5.1 Grundbegriffe und Beispiele

#### Definition 5.1

Seien  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}$  und  $\langle b_1, \dots, b_m \rangle \in \mathbb{R}^m$ . Dann heißt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ein *lineares Gleichungssystem*.

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

<i>linear</i>	:	die $x_i$ treten nur in der ersten Potenz auf
$x_1, \dots, x_n$	:	die <i>Unbekannten</i> des Systems
$A = (a_{ij})$	:	die <i>Koeffizientenmatrix</i> des Systems
$a_{ij}$	:	die <i>Koeffizienten</i> des Systems
$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, m\}} b_i = 0$	:	<i>homogenes System</i>
$\bigvee_{i \in \{1, \dots, m\}} b_i \neq 0$	:	<i>inhomogenes System</i>

Ein  $n$ -Tupel  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$  heißt eine *Lösung* des linearen Gleichungssystems, falls

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i \in \{1, \dots, m\})$$

erfüllt ist, also alle  $m$  Gleichungen „gleichzeitig“.

### Bemerkung

In die Sprache der Matrizen übertragen, läßt sich ein lineares Gleichungssystem als Matrix-Vektorgleichung  $Ax = b$  schreiben, und unter der *Lösungsgesamtheit* versteht man die Menge

$$Lg(A, b) := \{x : x \in \mathbb{V}^n, Ax = b\}.$$

Das lineare Gleichungssystem heißt *lösbar*  $:\Leftrightarrow Lg(A, b) \neq \emptyset$ .

### Beispiele 5.1

Die im folgenden aufgeführten drei Beispiele sind in gewisser Weise typisch für die Phänomene, welche bei linearen Gleichungssystemen auftreten können. In allen drei Fällen gilt  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{M}_{3 \times 2}$ ,  $x \in \mathbb{V}^2$ ,  $b \in \mathbb{V}^3$ :

(i) Das lineare Gleichungssystem

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 5 \\ \phantom{x_1} + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{array}$$

hat *genau eine Lösung*, nämlich  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(ii) Das lineare Gleichungssystem

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 5 \\ \phantom{x_1} + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{array}$$

hat *keine Lösung*. Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich zwar  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ , jedoch erfüllen diese Werte die dritte Gleichung nicht.

(iii) Das lineare Gleichungssystem

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 10 \\ -x_1 - 2x_2 & = & -5 \end{array}$$

hat *unendlich viele Lösungen*, nämlich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $x_2 \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt werden kann.

An diesen drei Beispielen erkennt man:

- Die Anzahl der Gleichungen oder die Anzahl der Unbekannten des Systems haben *nichts* zu tun mit der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems.
- Im Falle der Lösbarkeit haben die Anzahl der Gleichungen oder die Anzahl der Unbekannten des Systems *nichts* zu tun mit der Anzahl der Lösungen.
- Auch wenn die Anzahl der Gleichungen geringer ist als die Anzahl der Unbekannten des Systems, können Fälle von Unlösbarkeit auftreten. So hat das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \end{array} \quad (5.1)$$

keine Lösung. Im Falle eines homogenen Systems kann Unlösbarkeit in einem solchen Fall allerdings nicht eintreten.

### Aufgabe

Man begründe geometrisch, warum das System (5.1) keine Lösung hat.

Häufig bezeichnet man die Lösungsgesamtheit eines linearen Gleichungssystems als *die Lösung* oder *die allgemeine Lösung*. Meint man hingegen irgendein Element der Lösungsmenge, spricht man häufig von *einer Lösung* oder *einer speziellen Lösung* des Systems.

## 5.2 Struktur der Lösungsmenge

Aufgrund der Kenntnisse über lineare Abbildungen und Matrizen ergeben sich sofort einige Resultate über die Lösbarkeit und die Lösungen eines linearen Gleichungssystems.

**Satz 5.1**

Das Gleichungssystem  $Ax = b$  ist lösbar

$$\iff$$

$A$  und die um  $b$  erweiterte Matrix  $(A, b)$  haben denselben Rang:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

*Beweis*

„ $\implies$ “:

$Ax = b$  sei lösbar. Dann ist  $b \in W(A)$ .  $W(A)$  ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren von  $A$ , also läßt sich  $b$  aus diesen Spaltenvektoren linear kombinieren, also folgt  $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, b)$ .

„ $\impliedby$ “:

Umkehrung von „ $\implies$ “.

Der folgende Satz beschreibt die Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems vollständig:

**Satz 5.2**

- (i)  $Lg(A, \theta) = N(A)$
- (ii) Seien  $b \in \mathbb{V}^m$  und  $x_0 \in Lg(A, b)$ , also  $x_0$  eine (spezielle) Lösung des (als Matrix-Vektorgleichung geschriebenen) linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ . Dann gilt:

$$Lg(A, b) = \{x_0 + x : x \in N(A) \text{ geeignet}\} =: x_0 + N(A).$$

In Worten:

Die Gesamtheit der Lösungen eines inhomogenen Systems ist gegeben durch

- eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems +
- die Gesamtheit der Lösungen des zugehörigen homogenen Systems.

*Beweis*

- (i) Trivial. Insbesondere ist die Lösungsgesamtheit eines homogenen Systems ein linearer Teilraum von  $\mathbb{V}^n$ . Aufgrund von  $\theta \in N(A) = Lg(A, \theta)$  ist das homogene System stets lösbar, es gilt also immer

$$Lg(A, \theta) \neq \emptyset.$$

(ii) „ $\supseteq$ “:Sei  $x \in N(A)$ , dann ist

$$A(x_0 + x) = A(x_0) + A(x) = b + \theta = b,$$

also  $(x_0 + x) \in Lg(A, b)$ .„ $\subseteq$ “:Sei  $v \in Lg(A, b)$ , dann ist

$$A(v - x_0) = A(v) - A(x_0) = b - b = \theta,$$

also  $(v - x_0) \in N(A)$ , also

$$v = x_0 + x$$

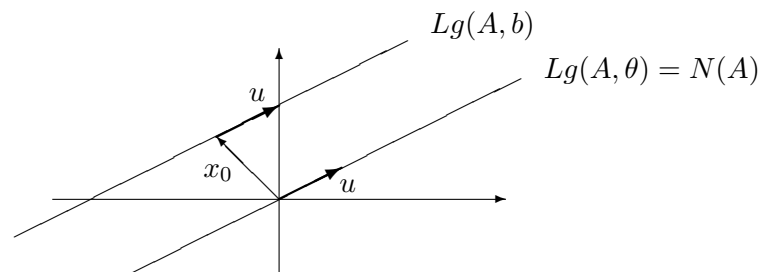
für ein geeignetes  $x \in N(A)$ .

Abbildung 5.1: Lösungsgesamtheit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

**Beispiel 5.2**Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 = -6 \end{array}$$

hat die Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_2 \in \mathbb{R}).$$

Damit dieses Beispiel zur Abbildung 5.1 „paßt“, muß eine andere spezielle Lösung gewählt werden:

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_2 - 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ &=: x_0 + \lambda u \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$



**Folgerung**

Ist  $x_0 \in Lg(A, b)$  und ist  $\{u_1, \dots, u_r\}$  eine Basis von  $N(A)$ , so ist

$$Lg(A, b) = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\};$$

dabei ist  $r = \dim N(A) = n - \text{rg } A$ .

*Beweis*

Folgt unmittelbar aus dem letzten Satz. Die Beziehung

$$\dim N(A) = n - \text{rg } A$$

ist gerade der Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

**Folgerung**

Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  sei lösbar, es gelte also  $Lg(A, b) \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$\text{Das System ist eindeutig lösbar} \iff N(A) = \{\theta\}, \text{ d.h. } \text{rg } A = n.$$

*Beweis*

Sei  $x_0 \in Lg(A, b)$ . Dann gilt nach dem letzten Satz

$$Lg(A, b) = x_0 + N(A).$$

**Folgerung**

Ist  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  (quadratische Matrix,  $\sim n$  Gleichungen für  $n$  Unbekannte), so gilt

$$\text{Das System ist eindeutig lösbar} \iff A \text{ ist invertierbar, d.h. } A^{-1} \text{ existiert.}$$

*Beweis*

„ $\implies$ “:

Das System  $Ax = b$  sei eindeutig lösbar. Insbesondere ist es dann lösbar, also gilt  $Lg(A, b) \neq \emptyset$ . Die eindeutige Lösbarkeit erfordert  $N(A) = \{\theta\}$ , denn sonst gäbe es verschiedene Lösungen. Dann ist  $A$  aber injektiv, wegen  $A \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^n)$  auch surjektiv, also bijektiv, also invertierbar.

„ $\impliedby$ “:

In diesem Fall läßt sich die eindeutig bestimmte Lösung sofort hinschreiben:

$$x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

**Bemerkung**

Wenn  $A \in LA(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^n)$  invertierbar ist, dann hängt die Lösbarkeit des Systems also von  $b$  gar nicht ab: zu jedem Vektor  $b \in \mathbb{V}^n$  existiert (genau ein) Urbild  $x \in \mathbb{V}^n$  mit der Eigenschaft  $Ax = b$ .

## 5.3 Gauß'scher Algorithmus

Der Gauß'sche Algorithmus ist *das* Verfahren zur praktischen Lösung linearer Gleichungssysteme, insbesondere dann, wenn die Zahl  $m$  der Gleichungen oder die Zahl  $n$  der Unbekannten groß ist, also etwa  $n \geq 4$ .

Zuerst wird ein Ergebnis notiert, welches die Auswirkungen von elementaren Zeilen- oder Spaltenumformungen auf die Lösungsmenge untersucht:

### Satz 5.3

Wird die erweiterte Matrix  $(A, b)$  mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen zu einer Matrix  $(A', b')$  verändert, so gilt:

$$Lg(A, b) = Lg(A', b').$$

#### Beweis

Elementare Zeilenumformungen, durchgeführt an der erweiterten Matrix  $(A, b)$ , entsprechen elementaren Zeilenumformungen, durchgeführt an den Gleichungen des vorliegenden linearen Gleichungssystems. Diese beeinflussen aber die Lösungsmenge nicht.

Ganz anders dagegen verhält es sich mit elementaren Spaltenumformungen:

Vertauscht man die Spalten  $i$  und  $j$ , so erhält man aus der Lösungsmenge des neuen Systems die des alten Systems dadurch, daß man in jedem Lösungsvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^n$$

die Komponenten  $x_i$  und  $x_j$  vertauscht.

Man kann also zur Vereinfachung des Systems auch elementare Spaltenumformungen zu Hilfe nehmen, muß dann aber über die Umformungen Buch führen, um die Lösung am Ende richtig interpretieren zu können.

Im folgenden wird zuerst ein quadratisches lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Koeffizientenmatrix behandelt, im nächsten Abschnitt dann der allgemeine Fall.

### 5.3.1 Quadratisches lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Koeffizientenmatrix

Im Grunde ist dieses Verfahren schon in Kapitel 4.6 bei der Invertierung einer Matrix  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  angewandt worden:

Ausgehend von der  $j$ -ten Spalte  $b := e_j^{(n)}$  der Einheitsmatrix wird durch elementare Zeilenumformungen der um die Spalte  $b$  erweiterten Matrix

$$(A, b) = (A, e_j^{(n)})$$

diese solange umgeformt, bis sie die Gestalt  $(E, c_j)$  aufweist. Der Vektor  $c_j$  ist dann die  $j$ -te Spalte der inversen Matrix  $A^{-1}$ :

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \iff \quad Ac_j = e_j^{(n)} \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

In Kapitel 4.6 wurde dieses Verfahren simultan für alle  $n$  Spalten  $e_j^{(n)}$  auf einmal durchgeführt.

Unterwirft man die erweiterte Matrix  $(A, b)$  ausschließlich elementaren Zeilenumformungen, so erhält man nach  $(n - 1)$  Schritten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix},$$

wobei die Hauptdiagonalelemente der (transformierten) Koeffizientenmatrix  $A'$  alle von Null verschieden sind:  $a'_{ii} \neq 0$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Die Koeffizientenmatrix  $A$  ist also zu einer oberen Dreiecksmatrix  $A'$  transformiert worden, die rechte Seite  $b$  wurde einfach zu  $b'$  mittransformiert.

Die gesuchte Lösung erhält man dann sukzessive durch Auflösen der Gleichungen, angefangen bei der letzten:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b'_n}{a'_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{1}{a'_{n-1,n-1}} (b'_{n-1} - a'_{n-1,n}x_n) \\ x_{n-2} &= \frac{1}{a'_{n-2,n-2}} (b'_{n-2} - a'_{n-2,n}x_n - a'_{n-2,n-1}x_{n-1}) \end{aligned}$$

etc.

### Bemerkung

Die Voraussetzung der Invertierbarkeit von  $A$  geht hier wie folgt ein:

Wäre  $A$  nicht invertierbar, dann läßt sich entweder einer der obigen Schritte nicht ausführen, weil es nicht möglich ist, das betreffende Hauptdiagonalelement von Null verschieden zu erhalten, oder das letzte Hauptdiagonalelement  $a'_{nn}$  ist Null.

**Beispiel 5.3**

$$\begin{array}{rccccrcr}
 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\
 x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\
 -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -10
 \end{array}$$

0. Schritt:

$$\begin{array}{rcccc|c}
 & 3 & -2 & 4 & -3 & 0 \\
 2 \cdot II + III & 1 & -3 & 1 & -2 & 3 \\
 2 \cdot I + 3 \cdot III & -2 & 1 & -3 & 3 & 5 \\
 & 0 & 2 & 1 & -1 & -10
 \end{array}$$

1. Schritt:

$$\begin{array}{rcccc|c}
 & 3 & -2 & 4 & -3 & 0 \\
 & 0 & -5 & -1 & -1 & 11 \\
 2 \cdot III + IV & 0 & -1 & -1 & 3 & 15 \\
 2 \cdot II + 5 \cdot IV & 0 & 2 & 1 & -1 & -10
 \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{rcccc|c}
 & 3 & -2 & 4 & -3 & 0 \\
 & 0 & -5 & -1 & -1 & 11 \\
 & 0 & 0 & -1 & 5 & 20 \\
 3 \cdot III + IV & 0 & 0 & 3 & -7 & -28
 \end{array}$$

3. Schritt:

$$\begin{array}{rcccc|c}
 & 3 & -2 & 4 & -3 & 0 \\
 & 0 & -5 & -1 & -1 & 11 \\
 & 0 & 0 & -1 & 5 & 20 \\
 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32
 \end{array}$$

Die gesuchte Lösung ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
 x_4 &= \frac{1}{8} \cdot 32 &= 4 \\
 x_3 &= \frac{1}{(-1)} [20 - 5 \cdot 4] &= 0 \\
 x_2 &= \frac{1}{(-5)} [11 - (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 4] &= -3 \\
 x_1 &= \frac{1}{3} [0 - (-2) \cdot (-3) - 4 \cdot 0 - (-3) \cdot 4] &= 2
 \end{aligned}$$

### 5.3.2 Beliebige lineares Gleichungssystem

Untersucht wird jetzt der Fall eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ , bei dem die Koeffizientenmatrix  $A$

- nicht quadratisch sein muß oder
- nicht invertierbar sein muß, falls sie doch quadratisch ist.

Seien also  $A \in M_{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{V}^m$ . Um  $Lg(A, b)$  explizit zu bestimmen, kann man den folgenden Weg

$$(i) \longrightarrow (ii) \longrightarrow (iii) \longrightarrow (iv)$$

von vier Schritten einschlagen:

- (i) Man schreibt sich die erweiterte Matrix  $(A, b)$  hin und beginnt mit dem Gauß'schen Algorithmus der elementaren Zeilenumformungen gerade so, als ob  $A$  quadratisch und invertierbar wäre, d.h. man prüft – bei quadratischer Koeffizientenmatrix – die Invertierbarkeit vorher nicht einmal nach. Man führt dann das Verfahren solange durch wie möglich und erhält nach  $t$  elementaren Zeilenumformungen eine erweiterte Matrix der Form

$a'_{11}$						$b'_1$
0	$a'_{22}$				*	$b'_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				$\vdots$
0	0	...	$a'_{tt}$			$\vdots$
0	0	...	0	0	$B'$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	...	0	0		$\vdots$
						$b'_m$

Hierbei sind die ersten  $t$  Diagonalelemente von Null verschieden.

Nun ist es aber nicht mehr möglich, den Platz an der Stelle  $\langle t+1, t+1 \rangle$  durch Vertauschung der letzten  $(m-t)$  Zeilen mit einem von Null verschiedenen Element zu besetzen. Also: Gauß'scher Algorithmus der elementaren Zeilenumformungen, bis es nicht mehr weiter geht.

- (ii) Nun versucht man, den festgefahrenen Gauß'schen Algorithmus wieder zum Laufen zu bekommen, indem man Vertauschungen der letzten  $(n-t)$  Spalten von  $A$  auch mit zu Hilfe nimmt; darüber muß aber neben dem Lösungsschema Buch geführt werden!

Solange die Matrix  $B'$  nicht ganz und gar Null wird, läßt sich das Gauß'sche Verfahren noch weiterführen, und man gelangt schließlich zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{array}{|cccc|c}
 a''_{11} & & & & b''_1 \\
 0 & a''_{22} & & & b''_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & a''_{rr} & b''_r \\
 \hline
 & & & 0 & b''_{r+1} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & b''_m
 \end{array}$$

mit  $a''_{11} \neq 0, \dots, a''_{rr} \neq 0$ . Natürlich kann dabei auch gelten:

$$m = r \quad \text{oder} \quad n = r.$$

(iii) Jetzt entscheidet sich, ob überhaupt eine Lösung existiert:

- $\bigwedge_{k \in \{r+1, \dots, m\}} b''_k = 0 \implies$  es existiert eine Lösung;
- $\bigvee_{k \in \{r+1, \dots, m\}} b''_k \neq 0 \implies$  das System ist unlösbar.

Diesen Sachverhalt erkennt man sofort, wenn man sich die letzten  $(m - r)$  Zeilen als Gleichungen hinschreibt.

Es werde nun angenommen, das Gleichungssystem sei lösbar. Dann können die letzten  $(m - r)$  Gleichungen einfach weggelassen werden, die Lösungsmenge ändert sich dadurch nicht. Übrig bleibt dann ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & & \\
 \hline
 T & S & b'' \\
 \hline
 \end{array},$$

wobei  $T$  („triangular“) eine invertierbare obere Dreiecksmatrix

$$T = \begin{array}{|cccc|}
 a''_{11} & & & \\
 0 & a''_{22} & & * \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \\
 0 & 0 & \dots & a''_{rr}
 \end{array}$$

und  $S \in \mathbb{M}_{r \times k}$  ist. Die  $n = (r + k)$  Unbekannten des Systems schreibe ich in der Form

$$y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_k,$$

um daran zu erinnern, daß es sich hierbei möglicherweise nicht um die Unbekannten

$$x_1, \dots, x_n$$

in der ursprünglichen Reihenfolge handelt sondern in diese erst übergeht, wenn die im Laufe des Verfahrens durchgeführten Spaltenvertauschungen wieder rückgängig gemacht werden.

Das zu lösende Gleichungssystem lautet nun

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T & S \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} b'' \end{array}$$

$\longleftrightarrow$

$$Ty + Sz = b''$$

$$\begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline S \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline b'' \\ \hline \end{array} .$$

Dazu verschafft man sich

- (a) eine spezielle Lösung  $w_0 \in \mathbb{V}^n$  des inhomogenen Systems
- (b) die allgemeine Lösung des homogenen Systems, also eine Basis  $\{w_1, \dots, w_k\}$  des Nullraumes  $N(T, S)$  der linearen Abbildung  $(T, S)$ .

Zu (a):

**Beh. 1** Ist  $q_0 := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$  die (eindeutig bestimmte) Lösung von

$Ty = b''$ , so ist

$$w_0 := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung von  $Ty + Sz = b''$ .

Bew.  $(T, S)w_0 = Ty + Sz = Tq_0 + 0 = b''$ .

### Bemerkung

$q_0$  ist eindeutig bestimmt, da  $T$  invertierbar ist. Insbesondere ist  $q_0 = b''$  für  $T = E$  ( $E$ : Einheitsmatrix).

Zu (b):

Für das homogene System

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T & S \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline T & y \\ \hline S & z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \in \mathbb{V}^r$$

gilt:  $\text{rg}(T, S) = r = n - k = n - \dim N(T, S)$ ,

d.h. man erhält  $k$  linear unabhängige Lösungen  $w_1, \dots, w_k$ .

In diesem linearen Gleichungssystem sind  $k$  Parameter frei wählbar, entsprechend den  $k$  Variablen  $z_1, \dots, z_k$ :

$$Ty + Sz = \theta \quad \longrightarrow \quad y = -(T^{-1} \circ S)z.$$

Um eine möglichst übersichtliche Lösungsgesamtheit zu erhalten, wird der Reihe nach  $z_j := \delta_{ij}$  gewählt, also

$$u_j := e_j^{(k)} \in \mathbb{V}^k \quad (j \in \{1, \dots, k\}).$$



Damit erhält man die folgenden  $k$  Lösungen des homogenen Systems:

$$q_j := -T^{-1}(Su_j) = -T^{-1}(Se_j^{(k)}) = -T^{-1}s_j \quad (j \in \{1, \dots, k\}),$$

wobei  $s_j$  die  $j$ -te Spalte der Matrix  $S$  ist.

Hieraus ergeben sich  $k$  linear unabhängige Elemente von  $N(T, S)$  durch Zusammenbau:

$$\begin{aligned} \{w_1, \dots, w_k\} &= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_k \\ u_k \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{12} \\ \vdots \\ y_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

**Beh. 2**  $w_j \in N(T, S) \quad (j \in \{1, \dots, k\})$

*Bew.*  $(T, S)w_j = Tq_j + Su_j = -s_j + s_j = \theta.$

**Beh. 3** Die  $\{w_1, \dots, w_k\}$  sind linear unabhängig.

*Bew.* Trivial.

**Beh. 4** Die  $w_j$  bilden ein Erzeugendensystem von  $N(T, S)$ .

*Bew.*  $\dim N(T, S) = n - \text{rg}(T, S) = n - r = k.$

Zusammenfassung:

- Die eindeutig bestimmte Lösung  $q_0$  von

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & & \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & a''_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b''_1 \\ \vdots \\ b''_r \end{pmatrix}$$

liefert eine spezielle Lösung

$$w_0 := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

des inhomogenen Systems  $Ty + Sz = b''$ .

- Die eindeutig bestimmten  $k$  Lösungen  $q_j$  von

$$\begin{array}{|ccc|} \hline a'_{11} & & \\ \hline \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & \dots & a''_{rr} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y_{1j} \\ \hline \vdots \\ \hline y_{rj} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -s_{1j} \\ \hline \vdots \\ \hline -s_{rj} \\ \hline \end{array}$$

liefern eine Basis  $\{w_1, \dots, w_k\}$  des Lösungsraumes  $N(T, S)$  des homogenen Systems  $Ty + Sz = \theta$ :

$$w_j = \left\{ \left( \begin{array}{c} q_j \\ u_j \end{array} \right) \right\} = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (j \in \{1, \dots, k\}),$$

wobei die 1 in der  $(r + j)$ -ten Zeile steht.

- Ist in dem Gleichungssystem  $Ty + Sz = \theta$  die Matrix  $T$  schon die Einheitsmatrix – wie in dem anschließenden Beispiel vorgeführt –, so braucht man gar kein Gleichungssystem mehr zu lösen:

$$y_j = -Su_j = -Se_j^{(k)} = -s_j \quad (j \in \{1, \dots, k\}),$$

also die „negativen“ Spalten der Matrix  $S$ , sind dann schon die Lösungsvektoren  $q_j$ , mit deren Hilfe man die Lösungen  $w_j$  zusammenbaut.

(iv) Schließlich werden die Vektoren

$$w_0, w_1, \dots, w_k \in \mathbb{V}^n$$

dadurch in Vektoren

$$v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}^n$$

überführt, daß die durch die eventuell durchgeführten Spaltenvertauschungen entstandenen Vertauschungen der Komponenten wieder rückgängig gemacht werden.

**Ergebnis**

$$Lg(A, b) = \left\{ x : x \in \mathbb{V}^n, x = v_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

**Beispiel 5.4**

Im folgenden sollen die beiden linearen Gleichungssysteme

$$Ax = b \quad \text{und} \quad Ax = c$$

simultan gelöst werden. Der Hintergrund ist, daß sich das Gleichungssystem  $Ax = c$  als unlösbar herausstellen wird. Dabei wird auf die Darstellung der Matrizenklammern verzichtet, und die beiden rechten Seiten  $b$  und  $c$  werden nebeneinander geschrieben.

Zum Merken der Reihenfolge der Spalten wird eine Sonderzeile mit den Spaltennummern mitgeführt. Ferner werden die elementaren Zeilenumformungen links von der Rechnung angedeutet.

(i)

	A					b	c
Spaltenreihenfolge	1	2	3	4	5		
	1	-2	3	5	-4	2	-3
$II - 2 \cdot I$	2	-4	6	5	2	-6	-1
$III - 2 \cdot I$	2	-5	7	7	3	-7	1
$IV + I$	-1	1	-2	-3	5	-3	2

	A					b	c
Spaltenreihenfolge	1	2	3	4	5		
	1	-2	3	5	-4	2	-3
$II \leftrightarrow -III$	0	0	0	-5	10	-10	5
	0	-1	1	-3	11	-11	7
	0	-1	1	2	1	-1	-1

	A					b	c
Spaltenreihenfolge	1	2	3	4	5		
	1	-2	3	5	-4	2	-3
	0	1	-1	3	-11	11	-7
$-\frac{1}{5} \cdot III$	0	0	0	-5	10	-10	5
$II + IV$	0	-1	1	2	1	-1	-1

	A					b	c
Spaltenreihenfolge	1	2	3	4	5		
	1	-2	3	5	-4	2	-3
	0	1	-1	3	-11	11	-7
	0	0	0	1	-2	2	-1
	0	0	0	5	-10	10	-8

Jetzt ist der Gauß-Algorithmus erst einmal am Ende: die markierte Null in der dritten Spalte ist durch Zeilenvertauschungen allein nicht mehr zu beseitigen.

(ii) Man muß jetzt eine Spaltenvertauschung vornehmen, beispielsweise der

dritten und der vierten Spalte, und erhält nach einem weiteren Schritt

	A					b	c
Spaltenreihenfolge	1	2	4	3	5		
	1	-2	5	3	-4	2	-3
	0	1	3	-1	-11	11	-7
	0	0	1	0	-2	2	-1
<i>IV - 5 · III</i>	0	0	5	0	-10	10	-8

	A					b	c
Spaltenreihenfolge	1	2	4	3	5		
	1	-2	5	3	-4	2	-3
	0	1	3	-1	-11	11	-7
	0	0	1	0	-2	2	-1
	0	0	0	0	0	0	-3

- (iii) Es sind  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = 3$  und  $\text{rg}(A, c) = 4$ . Das Gleichungssystem  $Ax = b$  ist also lösbar, und die Lösung enthält  $5 - 3 = 2$  Parameter. Dagegen ist das System  $Ax = c$  nicht lösbar, die letzte Spalte  $c$  wird im folgenden fortgelassen. Weiterhin kann auf die vierte Zeile (Nullzeile) verzichtet werden.

Zur Vereinfachung wird der rechte obere Teil der ersten drei Spalten von  $A$  auch noch auf die Gestalt der Einheitsmatrix transformiert:

	A					b
Spaltenreihenfolge	1	2	4	3	5	
$I - 5 \cdot III$	1	-2	5	3	-4	2
$II - 3 \cdot III$	0	1	3	-1	-11	11
	0	0	1	0	-2	2

	A					b
Spaltenreihenfolge	1	2	4	3	5	
$I + 2 \cdot II$	1	-2	0	3	6	-8
	0	1	0	-1	-5	5
	0	0	1	0	-2	2

	A					b
Spaltenreihenfolge	1	2	4	3	5	
	1	0	0	1	-4	2
	0	1	0	-1	-5	5
	0	0	1	0	-2	2

Mit den Bezeichnungen dieses Abschnittes folgt jetzt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$(T \ S) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = b''$$

ist gegeben durch

$$w_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und die Lösungen  $w_1, w_2$  des homogenen Systems sind etwa

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (iv) Als letzter Schritt muß nun die während der Rechnung durchgeführte Spaltenvertauschung (3)  $\leftrightarrow$  (4) wieder rückgängig gemacht werden. Man erhält aus  $w_0, w_1, w_2$  die drei Vektoren

$$v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit die Lösungsgesamtheit

$$Lg(A, b) = \{x : x \in \mathbb{V}^5, x = v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\}.$$

Geometrisch handelt es sich bei dieser Lösung um eine Ebene im  $\mathbb{V}^5$ , die – da  $v_0 \neq 0$  – nicht den Nullpunkt enthält: sie ist ein affiner Teilraum von  $\mathbb{V}^5$  der Dimension 2.

## 5.4 Zusammenfassung

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems
- Vorgehensweise beim Gauß'schen Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme
- Quadratisches lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Koeffizientenmatrix
- Beliebige lineares Gleichungssystem

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Zusammenhang zwischen einer linearen Abbildung und „ihrem“ zugehörigen linearen Gleichungssystem
- Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems und Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix

# Kapitel 6

## Determinanten

In diesem Kapitel spielen ausschließlich quadratische Matrizen und quadratische lineare Gleichungssysteme eine Rolle; es gelte also  $m = n \in \mathbb{N}$ .

### 6.1 Zweireihige Determinanten

Man betrachte das lineare Gleichungssystem ( $m = n = 2$ )

$$Ax = b \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} .$$

Dieses Gleichungssystem kann leicht nach dem „Additionsverfahren“ gelöst werden:

$$a_{22} \cdot (1. \text{ Zeile}) + (-a_{12}) \cdot (2. \text{ Zeile})$$

liefert:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Entsprechend bildet man zur Elimination von  $x_1$  den Ausdruck

$$(-a_{21}) \cdot (1. \text{ Zeile}) + a_{11} \cdot (2. \text{ Zeile})$$

und erhält

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Wenn man noch voraussetzt, daß der gemeinsame Koeffizient von  $x_1$  und  $x_2$  ungleich Null ist, so läßt sich schreiben:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad , \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} .$$



**Definition 6.1**

Sei  $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$ , also  $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Dann heißt

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

die *Determinante* der (zweireihigen) Matrix  $A$ .

Die zweireihige Determinante<sup>1</sup> ist also gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente minus dem Produkt der Nebendiagonalelemente der Matrix.

Mit Hilfe des Begriffes der Determinante läßt sich die Lösung des  $(2 \times 2)$ -linearen Gleichungssystems übersichtlicher schreiben in der folgenden Form:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

**Bemerkung**

Diese Darstellung der Lösung eines linearen Gleichungssystems heißt *Cramer'sche Regel*. Die Variable  $x_i$  ist dabei Quotient zweier Determinanten. Im Nenner steht jeweils die Determinante der Koeffizientenmatrix  $A$  und im Zähler die Determinante derjenigen Matrix, die aus der Koeffizientenmatrix entsteht, wenn die  $i$ -te Spalte durch die Inhomogenität (= rechte Seite) des linearen Gleichungssystems ersetzt wird.

Die Cramer'sche Regel ist natürlich nur dann anwendbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix (*Koeffizientendeterminante*) nicht verschwindet. In einem solchen Fall gilt sie auch im Fall  $n > 2$ , wobei man zuerst wissen muß, wie eine Determinante im Fall  $n > 2$  definiert ist.

**Beispiele 6.1**

$$(i) \quad \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - (-4) \cdot 2 = 11$$

$$(ii) \quad \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$(iii) \quad \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 3$$

<sup>1</sup>lat.: „Bestimmende“; Bestimmungsgröße

## 6.2 Determinanten höherer Ordnung

In diesem Abschnitt werden Determinanten für Matrizen  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  definiert, wenn  $n \in \mathbb{N}$  ist. Bevor das gemacht wird, soll das dabei verwendete Verfahren an dem schon behandelten Fall  $n = 2$  dargestellt werden.

- (a)  $A \in \mathbb{M}_{1 \times 1} \quad \implies \quad \det A := a_{11}$   
 (b)  $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2} \quad \implies \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Wie kommt es zu dieser Darstellung? Man betrachte dazu das folgende schachbrettartige Vorzeichenmuster von  $A$ ,

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

und entwickle die Determinante  $\det A$  von  $A$  nach der 1. Spalte:

$$\begin{aligned} \det A &= (+ a_{11}) \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} \end{pmatrix} + (- a_{21}) \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & a_{12} \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

### Vorgehensweise im Fall $n = 3$

Die Determinante wird wieder nach der ersten Spalte entwickelt; zur Gewinnung der entsprechenden Untermatrizen müssen dabei jeweils die Zeile und Spalte des aktuellen Elementes der ersten Spalte gestrichen werden:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= (+) a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &+ (-) a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & a_{12} & a_{13} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &+ (+) a_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & a_{12} & a_{13} \\ \bullet & a_{22} & a_{23} \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \\ &= \left[ \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \right] \\ &= (+a_{11}) \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-a_{21}) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (+a_{31}) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

**Beispiel 6.2**

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (-2 - 3) - 4 \cdot (1 - 9) - 1 \cdot (1 + 6) \\
&= 15
\end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise wird jetzt verallgemeinert, indem die Determinante einer  $(n \times n)$ -Matrix auf die Determinante einer  $((n-1) \times (n-1))$ -Matrix zurückgeführt wird.

**Definition 6.2**

- (i) Die  $(i, j)$ -Untermatrix  $A_{ij}$  von  $A$  erhält man, indem man die  $i$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte von  $A$  herausstreicht und das restliche Schema als Matrix aus  $\mathbb{M}_{(n-1) \times (n-1)}$  betrachtet.
- (ii) Die Determinante der  $((n-1) \times (n-1))$ -Matrix  $A_{ij}$ , also  $\det A_{ij}$ , heißt  $(i, j)$ -Unterdeterminante oder  $(i, j)$ -Minor von  $A$ .
- (iii) Der Ausdruck  $D_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$  heißt  $(i, j)$ -Adjunkte von  $A$  oder Adjunkte von  $A$  an der Stelle  $\langle i, j \rangle$ .
- (iv) Die Determinante von  $A$  ist definiert durch

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

(Entwicklung nach der 1. Spalte).

**Bemerkung**

- (i) Ich habe die Determinante durch die Entwicklung nach der ersten Spalte definiert. Es stellt sich heraus, daß sich ihr Wert nicht ändert, wenn man eine andere Spalte zu ihrer Entwicklung nimmt:

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

- (ii) Es gilt auch  $\det A = \det A^T$ . Damit kann man eine Determinante also auch nach einer beliebigen Zeile entwickeln:

$$\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Am besten also nach einer Zeile (Spalte) mit vielen Nullen.

### 6.3 Rechenregeln für Determinanten

In diesem Abschnitt werden einige Regeln für den Umgang mit Determinanten aufgelistet. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Berechnung von Determinanten konkreter Matrizen z.T. wesentlich vereinfachen.

- (i)  $\det A = \det A^T$
- (ii) Beim Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.
- (iii) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.
- (iv) Eine Determinante besitzt den Wert Null, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
- Alle Elemente einer Zeile (Spalte) sind Null.
  - Zwei Zeilen (Spalten) sind linear abhängig.
  - Eine Zeile (Spalte) ist eine Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten).
- (v) Sind  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{V}^n$ , so gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda \cdot a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ein analoges Ergebnis gilt für die Manipulation von Zeilen; s. auch Regel (i).

- (vi)  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$
- (vii) Multiplikationssatz für Determinanten:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

- (viii) Ist  $A$  invertierbar, so folgt mit (vii) aus  $A \cdot A^{-1} = E$ :  
 $1 = \det E = \det A \cdot \det A^{-1}$ , also

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}.$$

- (ix) Ist  $A$  eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so ist die Determinante von  $A$  gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente,

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii},$$

dieses Ergebnis gilt insbesondere dann, wenn  $A$  eine Diagonalmatrix ist.

- (x) Ist  $A$  eine sog. *Blockdiagonalmatrix*:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

wobei die quadratischen Blöcke  $A_i$  nicht gleich dimensioniert sein müssen, so gilt:

$$\det A = \prod_{i=1}^m \det A_i.$$

Zur praktischen Berechnung von Determinanten kann man demnach so vorgehen, daß man die zugehörige Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Dreiecksgestalt bringt. Aufpassen muß man hier insofern, als daß auch eine Vertauschung zweier Zeilen das Vorzeichen (Regel (ii)) sowie eine Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl  $\neq 0$  den Wert der Determinante ändert (Regel (v)).

**Beispiel 6.3**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 -(1. \text{ Zeile}) + 3 \cdot (2. \text{ Zeile}) \rightarrow 2. \text{ Zeile:} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 2 \cdot (1. \text{ Zeile}) + 3 \cdot (3. \text{ Zeile}) \rightarrow 3. \text{ Zeile:} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \\ 0 & 14 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 -(1. \text{ Zeile}) + 3 \cdot (3. \text{ Zeile}) \rightarrow 3. \text{ Zeile:} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \\ 0 & 14 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\
 -7 \cdot (2. \text{ Zeile}) + 4 \cdot (3. \text{ Zeile}) \rightarrow 3. \text{ Zeile:} &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 63 & 27 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\
 -5 \cdot (2. \text{ Zeile}) + 8 \cdot (4. \text{ Zeile}) \rightarrow 4. \text{ Zeile:} &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 63 & 27 \\ 0 & 0 & 9 & 57 \end{vmatrix} \\
 -(3. \text{ Zeile}) + 7 \cdot (4. \text{ Zeile}) \rightarrow 4. \text{ Zeile:} &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 63 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 372 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{3 \cdot 2^3 \cdot (3^2 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 31)}{3^3 \cdot 2^5 \cdot 7} = \frac{2^5 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 31}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 7} = 3 \cdot 31 = 93
 \end{aligned}$$

## 6.4 Invertierung einer Matrix mit Hilfe von Determinanten

Eine Matrix  $A$  heißt regulär, wenn die (eindeutig bestimmte) inverse Matrix  $A^{-1}$  existiert. Die Spalten (Zeilen) einer regulären Matrix sind linear unabhängig.

Nun besagt Regel (ii), daß die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Spalten (Zeilen) den Wert Null hat.

Somit ist der folgende Satz verständlich, welcher viele der bisher erzielten Resultate verknüpft. Dieser Satz ist das Pendant des in Kapitel 3 über Lineare Abbildungen stehenden Satzes 3.4, p. 91.

**Satz 6.1**

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\operatorname{rg} A = n$
- (ii)  $A^{-1}$  existiert
- (iii) Für alle  $b \in \mathbb{V}^n$  ist das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  eindeutig lösbar.
- (iv)  $\det A \neq 0$

*Beweis*

(i)  $\Rightarrow$  (ii):

Aus dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen

$$\operatorname{rg} A + \dim N(A) = n$$

folgt  $\dim N(A) = 0$ , also  $N(A) = \{\theta\}$ . Damit ist  $A$  injektiv, als lineare Abbildung zwischen Vektorräumen gleicher Dimension auch surjektiv, insgesamt also bijektiv. Damit existiert  $A^{-1}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):

Die eindeutig bestimmte Lösung läßt sich direkt angeben:

$$x = A^{-1}b.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i):

$\emptyset \neq Lg(A, b) = x_0 + N(A)$ . Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist notwendig  $N(A) = \{\theta\}$ , also gilt  $\operatorname{rg} A = n$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iv):

$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ , also folgt

$$0 \neq \det A = (\det A^{-1})^{-1}.$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i): (Widerspruchsbeweis)

Wäre  $\operatorname{rg} A < n$ , dann wären die Zeilen linear abhängig. Dann wäre aber nach Regel (iv) die Determinante Null.

Zur Berechnung der inversen Matrix gibt es eine Formel, welche mit Hilfe von Determinanten arbeitet:

**Satz 6.2**

Seien  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $A$  invertierbar,  $A_{ij}$  die  $(i, j)$ -Untermatrix von  $A$  und

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

die  $(i, j)$ -Adjunkte von  $A$ . Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}^T \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

**Beispiel 6.4**

Ist  $ad - bc \neq 0$ , so gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Für beliebige, nicht notwendig quadratische Matrizen, gilt das folgende Ergebnis:

**Satz 6.3**

Der Rang einer Matrix ist gleich dem größten Rang aller Untermatrizen, nach dem vorletzten Satz also gleich der höchsten Ordnung aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten.

**Bemerkung** (Regel von Sarrus<sup>2</sup>)

Zur Berechnung einer *dreireihigen*(!) Determinante, aber auch nur hier, ist die folgende Regel praktisch:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} a_{11} \ a_{12} \\ a_{21} \ a_{22} \\ a_{31} \ a_{32} \end{array}$$

Die Spalten 1 und 2 der Matrix werden noch einmal rechts neben die Matrix gesetzt. Die Determinante  $\det A$  von  $A$  erhält man dann, indem man die drei Hauptdiagonalprodukte addiert und von dieser Summe die drei Nebendiagonalprodukte subtrahiert:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} . \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Pierre F. Sarrus (1798 - 1861), französischer Mathematiker



**Aufgabe**

Seien  $a, b, c \in \mathbb{V}^3$ . Man beweise, daß das Spatprodukt dieser drei Vektoren gegeben ist durch

$$(a, b, c) = (a \times b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**6.5 Cramer'sche Regel**

Wie in Abschnitt 6.1 schon angedeutet, besitzt die Cramer'sche Regel zur Lösung eines regulären linearen Gleichungssystems eine Verallgemeinerung auf beliebige Raumdimensionen.

**Satz 6.4**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  mit  $\det A \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{V}^n$ . Dann gilt:

Das Gleichungssystem  $Ax = b$  ist eindeutig lösbar, und die Lösung ist gegeben durch

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

**Bemerkung**

Im Falle  $n > 3$  hat die Cramer'sche Regel eigentlich nur theoretische und keine praktische Bedeutung mehr.

**6.6 Zusammenfassung**

(1) Was jeder Ingenieur wissen muß:

- Definition der Determinante einer quadratischen Matrix
- Rechenregeln für Determinanten
- Satz 6.1

(2) Was jeder Ingenieur wissen sollte:

- Cramer'sche Regel

(3) Was jeder gute Ingenieur wissen sollte:

- Invertierung einer Matrix mit Hilfe von Determinanten

# Kapitel 7

## Anwendungen in Geometrie und Mechanik

### 7.1 Flächeninhalt eines ebenen $n$ -Eckes

#### 7.1.1 Flächeninhalt eines Dreiecks ( $n = 3$ )

Gegeben sei ein Dreieck  $\Delta P_0 P_1 P_2$  in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene mit den Eckpunkten

$$P_0 := \langle x_0, y_0, 0 \rangle \quad , \quad P_1 := \langle x_1, y_1, 0 \rangle \quad , \quad P_2 := \langle x_2, y_2, 0 \rangle .$$

Der Flächeninhalt  $A_\Delta$  dieses Dreiecks kann dann mit Hilfe des Vektorproduktes der beiden Vektoren

$$\begin{aligned} a_1 &:= \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} := \vec{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a_2 &:= \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} := \vec{P_0 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als halbe Fläche des von ihnen erzeugten Parallelogrammes berechnet werden, (s. Abb. 7.1). Die Vektoren  $a_1, a_2$  werden dabei so gewählt, daß  $a_1, a_2, e_z$  in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, d.h ihre aufsteigende Numerierung entspricht einer Anordnung im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn).

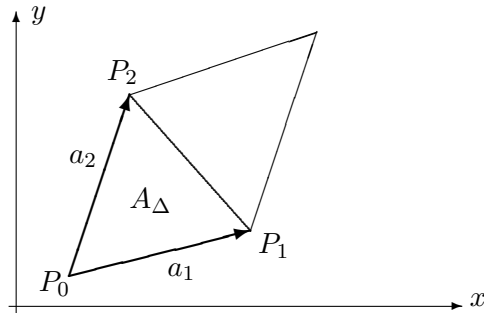


Abbildung 7.1: Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks

$$\begin{aligned}
 A_\Delta &= \frac{1}{2} \|a_1 \times a_2\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{1x}a_{2y} - a_{1y}a_{2x} \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \right\| \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} [(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)] \quad (7.1) \\
 &= \frac{1}{2} [(x_0y_1 - x_1y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2)]
 \end{aligned}$$

wobei sich das positive Vorzeichen in (\*) aufgrund der Anordnung im Gegen-  
uhrzeigersinn ergibt.

Im Sonderfall, daß  $P_0$  in den Koordinatenursprung gelegt werden kann, daß also

$$P_0 = \langle x_0, y_0, 0 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

gilt, so vereinfacht sich die Formel zu

$$A_\Delta = \frac{1}{2} [x_1y_2 - y_2x_1] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

### 7.1.2 Flächeninhalt eines ebenen $n$ -Eckes

Vielecke lassen sich stets in Dreiecke aufteilen, man spricht von der *Triangulierung* einer Fläche. Diese Prozedur kann auch bei räumlichen Flächen näherungsweise durchgeführt werden und ist von großer Bedeutung, z.B. im Karosseriebau.

Gewählt wird ein  $n$ -Eck in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene mit den Eckpunkten

$$P_1 := \langle x_1, y_1, 0 \rangle \quad , \quad P_2 := \langle x_2, y_2, 0 \rangle \quad , \quad \dots \quad , \quad P_n := \langle x_n, y_n, 0 \rangle$$

dergestalt, daß die Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sind. Weiterhin soll das  $n$ -Eck *sternförmig* sein, d.h. im Inneren des  $n$ -Ecks existiert ein Punkt  $P_0 := \langle x_0, y_0, 0 \rangle$ , der mit allen Eckpunkten so durch Strecken (Vektoren) verbunden werden kann, also geradlinig, daß diese ganz im Innern des  $n$ -Ecks liegen, s. Abb. 7.2. Die vom Punkt  $P_0$  ausgehenden Vektoren sind dabei ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn angeordnet.

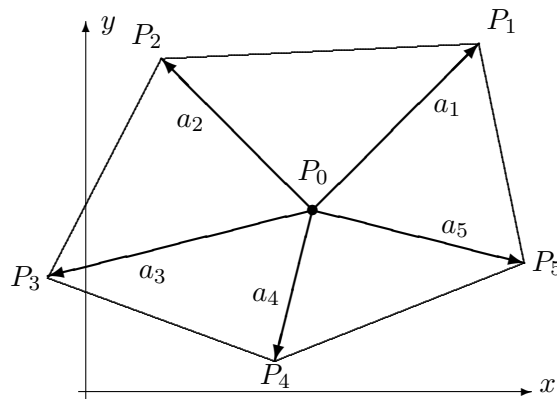


Abbildung 7.2: Sternförmiges  $n$ -Eck in der  $\langle x, y \rangle$ -Ebene

Der Flächeninhalt des  $n$ -Eckes ergibt sich dann als Summe der Inhalte der  $n$  Dreiecke  $\Delta P_1 P_2 P_0$ ,  $\Delta P_2 P_3 P_0$ ,  $\dots$ ,  $\Delta P_n P_1 P_0$ . Mit

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} := \vec{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 := \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} := \vec{P_0 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$a_n := \begin{pmatrix} a_{nx} \\ a_{ny} \\ 0 \end{pmatrix} := \vec{P_0 P_n} = \begin{pmatrix} x_n - x_0 \\ y_n - y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und mit Hilfe der Überlegungen für den Flächeninhalt eines Dreieckes ergibt sich schließlich für den Flächeninhalt  $A_n$  des  $n$ -Eckes mit Hilfe von (7.1)

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ (x_k - x_0)(y_{k+1} - y_0) - (y_k - y_0)(x_{k+1} - x_0) \right].$$

Dabei wurde gesetzt:

$$P_{n+1} := P_1 \quad , \quad a_{n+1} := a_1.$$

Im Sonderfall, daß  $P_0$  in den Koordinatenursprung gelegt werden kann, daß also

$$P_0 = \langle x_0, y_0, 0 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

gilt, so vereinfacht sich die Formel zu

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} & 0 \\ y_k & y_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

## 7.2 Statisches Gleichgewicht

Wirken auf einen starren Körper  $n$  Kräfte  $f_1, \dots, f_n$ , deren Wirkungslinien sich in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$  schneiden, so spricht man von einem *zentralen Kraftsystem*, s. Abb. 7.3.

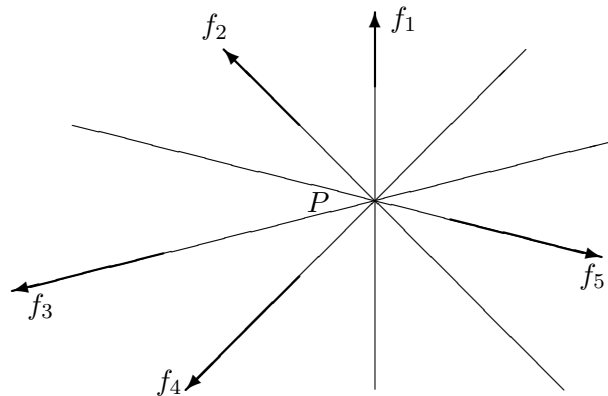


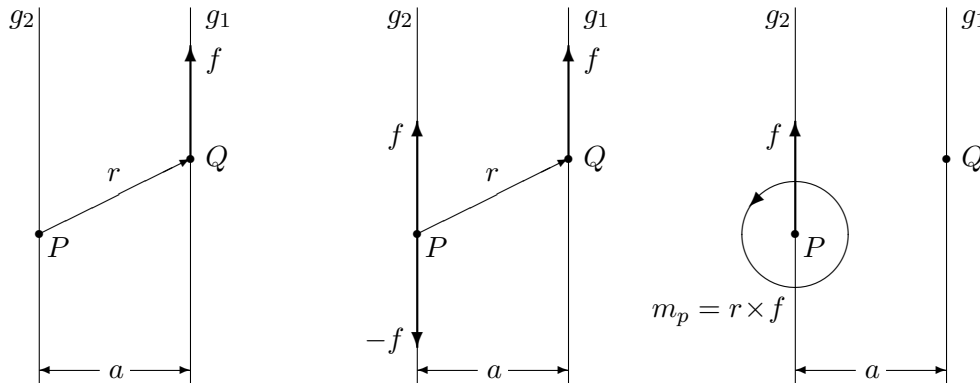
Abbildung 7.3: Zentrales Kraftsystem an einem starren Körper

In diesem Falle befindet sich der Körper im *statischen Gleichgewicht*, falls die resultierende Kraft gleich Null ist:

$$\sum_{k=1}^n f_k = \theta.$$

Im allgemeinen schneiden sich die Wirkungslinien der an dem Körper angreifenden Kräfte jedoch nicht in einem Punkt, und damit liegt kein zentrales Kraftsystem vor. Aber auch dieser Fall läßt sich durch ein zentrales Kraftsystem darstellen, indem man die Kräfte geeignet parallel verschiebt. Allerdings treten dabei zusätzlich sog. *Versetzungsmomente* auf, s. Abb. 7.4.

Zunächst soll das Versetzungsmoment einer Einzelkraft bestimmt werden:

Abbildung 7.4: Versetzungsmoment  $m_P = r \times f$  bzgl. des Punktes  $P$ 

- (i) Seien  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein starrer Körper und  $P, Q \in \mathcal{K}$ ,  $f$  sei eine in  $Q$  angreifende Kraft. Dadurch wird eine Gerade durch  $Q$  mit dem Richtungsvektor  $f$  definiert:

$$g_1 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^2, \vec{OX} = \vec{OQ} + \lambda f, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

Die zu  $g_1$  durch  $P$  verlaufende dazu parallele Gerade sei  $g_2$ :

$$g_2 := \left\{ X : X \in \mathbb{R}^2, \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda f, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet} \right\}.$$

- (ii) Führt man auf  $g_2$  die beiden Kräfte  $f$  und  $-f$  ein, so wird durch sie der statische Zustand im Punkt  $P$  nicht geändert.
- (iii) Die Vektoren  $-f$  auf  $g_2$  und  $f$  auf  $g_1$  bilden ein Kräftepaar, das in  $\mathcal{K}$  ein Versetzungsmoment

$$m_P = r \times f$$

bezüglich des Punktes  $P$  erzeugt. Liegt nur die Einzelkraft  $f_k$  vor, so würde das Versetzungsmoment zu einer Drehung des starren Körpers um seinen Schwerpunkt  $S$  führen.

- (iv) Ein System von  $n$  Kräften kann auf diese Weise reduziert werden auf

- (a) die resultierende Kraft  $f_P := \sum_{k=1}^n f_k$  durch den Bezugspunkt  $P$

und

- (b) das resultierende Versetzungsmoment  $m_P := \sum_{k=1}^n r_k \times f_k$  bezüglich  $P$ .

Bezüglich des Punktes  $P$  erhält man damit die folgende Bedingung für ein *statisches Gleichgewicht*:

$$\boxed{f_P = \sum_{k=1}^n f_k = \theta \quad \text{und} \quad m_P = \sum_{k=1}^n r_k \times f_k = \theta.} \quad (7.2)$$

**Satz 7.1**

Auf einen starren Körper mögen die  $n$  Kräfte  $f_1, \dots, f_n$  wirken. Dann ist die Gleichgewichtsbedingung (7.2) unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes  $P$ .

*Beweis*

Es gelte die Gleichgewichtsbedingung (7.2) bezüglich eines Bezugspunktes  $P$ . Dann muß gezeigt werden, daß sie auch bezüglich eines beliebigen anderen Punktes  $Q$  gilt.

Da die resultierende Kraft  $f := \sum_{k=1}^n f_k = \theta$  ohnehin nicht vom Bezugspunkt abhängt, muß der Nachweis nur für das resultierende Versetzungsmoment geführt werden. Das Moment  $m_{kQ}$ , welches von der Einzelkraft  $f_k$  bzgl. des Punktes  $Q$  erzeugt wird, ist gegeben durch (Abb. 7.5)

$$\begin{aligned} m_{kQ} &= s_k \times f_k \\ &= (d + r_k) \times f_k \\ &= d \times f_k + r_k \times f_k \\ &= d \times f_k + m_{kP}. \end{aligned}$$

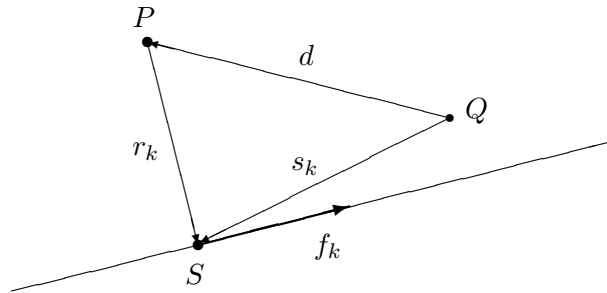


Abbildung 7.5: Versetzungsmoment  $m_{kQ}$  bzgl. des anderen Bezugspunktes  $Q$

Für das resultierende Versetzungsmoment  $m_Q$  aller  $n$  Kräfte  $f_1, \dots, f_n$  erhält man damit

$$\begin{aligned} m_Q &:= \sum_{k=1}^n m_{kQ} \\ &= \sum_{k=1}^n (s_k \times f_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (d \times f_k) + \sum_{k=1}^n m_{kP} \\ &= d \times \sum_{k=1}^n f_k + \sum_{k=1}^n m_{kP} \\ &= d \times \underbrace{f}_{\theta} + \underbrace{m_P}_{\theta} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

**Beispiel 7.1**

In drei Punkten  $A, B, C$  der Decke eines Raumes seien Seile befestigt, die in einem Punkt  $D$  darunter zusammengeführt werden. In  $D$  sei eine Last befestigt. Welche Zugkräfte werden dabei in den einzelnen Seilen erzeugt?

*Lösung*

Der durch die Last erzeugte Kraftvektor  $f$  muß in drei Kraftkomponenten zerlegt werden. Das Koordinatensystem wird so gelegt, daß die Decke – und damit die drei Punkte  $A, B, C$  – in der  $\langle x_1, x_2 \rangle$ -Ebene liegen und der Punkt  $D$  auf der negativen  $x_3$ -Achse liegt. Mit den Ortsvektoren der vier Punkte

$$a = \vec{OA} \quad , \quad b = \vec{OB} \quad , \quad c = \vec{OC} \quad , \quad d = \vec{OD}$$

gilt dann für die drei Kraftkomponenten

$$a := \vec{OD} - \vec{OA} \quad , \quad b := \vec{OD} - \vec{OB} \quad , \quad c := \vec{OD} - \vec{OC}.$$

Die Kräfte  $f_a, f_b, f_c$ , die in den drei Seilen durch  $f$  hervorgerufen werden, sind dann Vielfache davon:

$$f_a = \lambda_a a \quad , \quad f_b = \lambda_b b \quad , \quad f_c = \lambda_c c,$$

und die unbekanntenen Komponenten  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  ergeben sich aus

$$f = f_a + f_b + f_c = \lambda_a a + \lambda_b b + \lambda_c c.$$

*Konkret:*

$$A := \langle 1, 1, 0 \rangle \quad , \quad B := \langle 1, -1, 0 \rangle \quad , \quad C := \langle -1, 0, 0 \rangle \quad , \quad D := \langle 0, 0, -1 \rangle,$$

und die der Last entsprechende Kraft sei  $f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

$$\longrightarrow \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man erhält die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda_a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_a - \lambda_b + \lambda_c \\ -\lambda_a + \lambda_b \\ -\lambda_a - \lambda_b - \lambda_c \end{pmatrix}$$

bzw. das dazu äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\lambda_a - \lambda_b + \lambda_c &= 0 \\ -\lambda_a + \lambda_b &= 0 \\ -\lambda_a - \lambda_b - \lambda_c &= -4 \end{aligned}$$



mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$\lambda_a = 1 \quad , \quad \lambda_b = 1 \quad , \quad \lambda_c = 2.$$

Daher sind die einzelnen Seilkräfte gegeben durch

$$f_a = \lambda_a a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad f_b = \lambda_b b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad f_c = \lambda_c c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ,$$

und die Kraft  $f$  wird durch  $-f_a - f_b - f_c$  aufgehoben, es gilt also die Gleichgewichtsbedingung

$$f - f_a - f_b - f_c = 0.$$

Die zweite Gleichgewichtsbedingung von (7.2), „Momentensumme gleich Null“, ist hier automatisch erfüllt, weil alle Kräfte durch den Punkt  $D$  gehen.  $D$  kann hier als *Drehpunkt* gewählt werden, also als gemeinsamer Angriffspunkt aller Kräfte. Dann sind alle Hebelarme  $r_a, r_b, r_c, r_d$  Nullvektoren und damit auch die mit ihnen erzeugten Momente.

### Beispiel 7.2

Ein Stab der Länge 2 ist im Boden fest einbetoniert und durchstößt die Decke in einem Punkt  $C$ . Dadurch kann er im Punkt  $A$  des Bodens eine beliebige Kraft  $f_1$ , im Punkt  $C$  der Decke aber nur eine horizontale Kraft  $f_2$  aufnehmen, um eine in der Stabmitte  $B$  angreifende Kraft  $f$  aufzuheben, s. Abb. 7.6.

Wie groß sind die Kräfte  $f_1$  und  $f_2$ ?

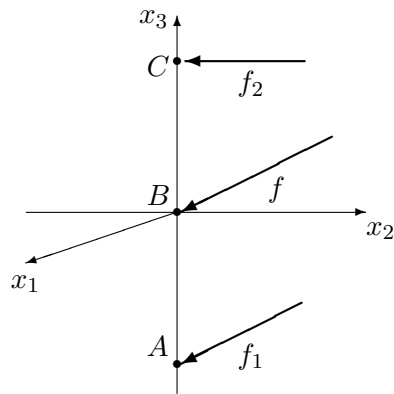
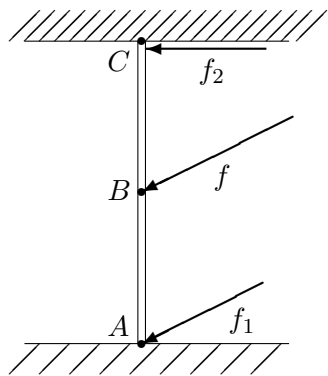


Abbildung 7.6: In den Boden einbetonierter Stab

Abbildung 7.7: Kräfteverteilung an einem einbetonierten Stab

Die Kraft  $f$  sei gegeben durch

$$f := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchten Kräfte  $f_1$  und  $f_2$  haben dann die Form

$$f_1 := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Drehpunkt wird der Ursprung  $B$  gewählt. Dann ist der zu  $f$  gehörende Hebelarm  $r = 0$ , der zu  $f_1$  gehörende  $r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  und der zu  $f_2$  gehörende  $r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Die Gleichgewichtsbedingungen (7.2) lauten

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 - f &= 0, \\ r_1 \times f_1 + r_2 \times f_2 - r \times f &= \theta. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Für die Vektorprodukte erhält man

$$r_1 \times f_1 = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 \times f_2 = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \times f = \theta \times f = \theta.$$

Aus (7.3) ergeben sich die folgenden sechs Gleichungen für die fünf Unbekannten  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2$ :

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 - 4 &= 0, \\ u_2 + v_2 - 2 &= 0, \\ u_3 - 6 &= 0, \\ u_2 - v_2 &= 0, \\ -u_1 + v_1 &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung keine Forderung an die Komponenten darstellt. Die Lösung dieses eindeutig bestimmten linearen Gleichungssystems ist gegeben durch

$$f_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung**

Hätte man den Stab auch in die Decke fest einbetoniert,  $f_2$  also mit einer dritten Komponente ansetzen müssen:  $f_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , so hätte man anstelle der dritten Gleichung des linearen Gleichungssystems oben die Gleichung

$$u_3 + v_3 - 6 = 0$$

erhalten. Es hätten sich  $u_1, u_2$  und  $v_1, v_2$  wie oben ergeben, aber keine eindeutigen Lösungen für  $u_3$  und  $v_3$ . Man sagt, das System wäre *statisch unbestimmt*.

### 7.3 Koordinatentransformationen

# Stichwortverzeichnis

- $N(T)$ , *siehe* Nullraum  
 $\mathbb{M}_{m \times n}$ , 96  
 $\mathbb{M}_{m \times n}^{\mathbb{K}}$ , 96  
 $\mathbb{P}_n$ , 10  
 $\mathbb{R}^n$ , 6  
 $\mathbb{V}^n$ , 4  
 $\delta_{ij}$ , 38  
 $\vec{OX}$ , 9, 46  
 $\vec{XY}$ , 9  
 $n^0$ , 66
- Abstand  
    Gerade-Gerade, 62  
    Punkt-Ebene, 68  
    Punkt-Gerade, 60  
    zweier windschiefer Geraden, 69  
Achsenabschnittsform, 64  
Adjunkte, 144  
allgemeine Lösung, 123
- Basis, 19  
Bessel'sche Ungleichung, 43  
Blockdiagonalmatrix, 146
- Cramer'sche Regel, 142, 150
- def T, 84  
Defekt, 84  
Determinante, 142, 144  
Determinanten  
    Multiplikationssatz, 145  
Dimension, 19  
    endlich-dimensional, 19  
    unendlich-dimensional, 19  
Dimensionssatz, 85  
Drehmoment, 54  
Drehpunkt, 158  
Dreiecksungleichung, 34  
Dreifinger-Regel, 55
- Ebene  
    Drei-Punkte-Form, 50  
    Normalenform, 63  
    Parameterdarstellung, 50  
elementare Spaltenumformung, 115  
elementare Zeilenumformung, 115  
erweiterte Matrix, 124  
Erzeugendensystem, 19  
Euklidischer Raum, 30
- Fourier-Koeffizient, 43  
Fourier-Reihe, 43
- Gerade  
    Parameterdarstellung, 46  
    Zwei-Punkte-Form, 46
- Gleichgewicht  
    statisches, 155
- Hesse'sche Normalenform, 63  
homogenes System, 121
- inhomogenes System, 121  
isomorph, 93  
Isomorphismus, 93
- $J(T)$ , 97
- Kern, 84  
kollinear, 14  
komplanar, 14  
Komponente eines Vektors, 19  
Koordinatentupel, 19  
Kronecker-Symbol, 38
- LA, *siehe* lineare Abbildung  
Lg(A, b), 122  
LH, *siehe* lineare Hülle  
linear abhängig, 14  
linear unabhängig, 14  
lineare Abbildung, 81

- lineare Hülle, 22  
 Lineares Gleichungssystem, 121  
     Koeffizienten, 121  
     Koeffizientenmatrix, 121  
     Lösbarkeit, 122  
     Lösung, 122  
     Lösungsgesamtheit, 122  
     Unbekannte, 121  
 Linearkombination, 14  
  
 Matrix, 96  
     adjungierte Matrix, 109  
     Diagonalmatrix, 110  
     Dreiecksmatrix, 110  
         obere Dreiecksmatrix, 110  
         untere Dreiecksmatrix, 110  
     Einheitsmatrix, 110  
     idempotente Matrix, 111  
     invertierbare Matrix, 110  
     Koeffizient, 97  
     nilpotente Matrix, 112  
     orthogonale Matrix, 111  
     Produkt, 102  
     quadratische Matrix, 110  
     Rang, 112  
     reguläre Matrix, 110  
     singuläre Matrix, 110  
     skalares Vielfaches, 100  
     Spalte, 96  
     Summe, 100  
     symmetrische Matrix, 111  
     transponierte Matrix, 109  
     unitäre Matrix, 111  
     Zeile, 96  
  
 Norm, 30, 35  
 Normalenvektor, 63  
 normierter Raum, 36  
 Nullraum, 84  
 Nullvektor, 4  
  
 OGS: Orthogonalsystem, 38  
 ONB: Orthonormalbasis, 38  
 ONS: Orthonormalsystem, 38  
 orthogonal, 37  
 Ortsvektor, 9, 46  
  
 parallele Ebenen, 51  
  
 parallele Geraden, 48  
 Parallelepipet, 59  
 Parallellflach, 59  
 Parallelotop, 59  
 Paritätstransformation, 75  
 Parseval'sche Gleichung, 43  
 Projektion, 81  
 Pseudovektor, 78  
 Punktraum, 6  
  
 Rang, 84  
 Rechte Hand Regel, 55  
 Rechtssystem, 58  
 Repräsentant, *siehe* Translation  
 rg, 112  
 rg T, *siehe* Rang  
 Richtungskosinus, 42  
 Richtungsvektor, 46  
 Ringschluß, 92  
  
 Schema von Falk, 103  
 Schwarz'sche Ungleichung, 33  
 Skalar, 3  
 Skalarprodukt, 27  
     Standardskalarprodukt, 29  
 Spaltenrang, 112  
 Spaltenvektor, 4  
 Spatprodukt, 58, 150  
 Spektralsatz, 40  
 spezielle Lösung, 123  
 statisch unbestimmt, 160  
 sternförmig, 153  
  
 Teilraum, 21  
     affiner, 24  
     trivialer, 23  
 Tensor, 78  
 Translation, 7  
     Repräsentant, 9  
 Triangulierung, 152  
  
 unitärer Raum, 30  
 Unterdeterminante, 144  
 Untermatrix, 144  
 Unterraum, 21  
 Untervektorraum, 21  
  
 Vektor, 3

axialer, 78  
  polarer, 78  
Vektorprodukt, 57  
Vektorraum, 3  
  komplexer Vektorraum, 3  
  reeller Vektorraum, 3  
Versetzungsmoment, 154  
  
windschief, 53  
  
Zeilenrang, 112  
Zentrales Kraftsystem, 154